GOBIERNO DE ESPAÑA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas

Serie: Ciencias

IFIIE

Aulas de Verano

educacion.es

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional
Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa

Edita:

Catálogo de publicaciones del Ministerio
educacion.es

Catálogo general de publicaciones oficiales
060.es

Fecha de edición: 2009
N.I.P.O.: 820-09-137-0
I.S.B.N.: 978-84-369-4766-3
Depósito Legal: M-7607-2010

Imprime: Estudios Gráficos Europeos, S.A.

Colección: AULAS DE VERANO
Serie: Ciencias

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este libro se enmarca en los recientes desarrollos curriculares derivados de la nueva Ley Orgánica 2/2006 de Educación y en el contexto de los resultados del sistema educativo español alcanzados en las evaluaciones internacionales, en especial en el estudio PISA de la OCDE. Ambas circunstancias subrayan la importancia de las competencias en el diseño y desarrollo del currículo de matemáticas y la pertinencia de abordar su planificación y desarrollo.

Las competencias básicas expresan las expectativas sobre el aprendizaje a largo plazo de los estudiantes, en particular de Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato. Una de estas competencias básicas es la competencia matemática. El nuevo marco curricular establece, como meta prioritaria para el sistema educativo, la alfabetización y el uso funcional de las matemáticas por los escolares. La construcción de modelos matemáticos y la resolución de problemas destacan como componentes de la competencia básica en matemáticas, establecida para guiar el aprendizaje de los escolares en esta materia durante su educación obligatoria.

Herramientas matemáticas, tareas y problemas, capacidades y competencias constituyen tres referentes sobre los que se asienta la concepción funcional de las matemáticas. Las tareas y problemas abiertos requieren que el estudiante movilice sus herramientas matemáticas –conceptos, estructuras, destrezas y procedimientos– y desarrolle cierta pericia o maestría en su uso, muestre ciertas capacidades y competencias, para dar respuesta satisfactoria a las cuestiones planteadas inicialmente en las tareas.

Los procesos de modelización y de resolución de problemas están en el núcleo de la actividad matemática y los avances recientes en educación matemática quieren reforzar su presencia en el currículo, de manera que el aprendizaje matemático de los escolares tenga en el dominio de los correspondientes procesos una de sus referencias clave. De ahí la oportunidad de documentos, seminarios, cursos y actividades dirigidos al profesorado de matemáticas de secundaria, orientados a poner en común e intercambiar experiencias, a discutir y seleccionar tareas y actividades relacionadas con la construcción y uso de modelos matemáticos y con la resolución de problemas.

Se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

1. Reflexionar y profundizar sobre las capacidades matemáticas que contribuyen a la construcción de modelos y a la resolución de problemas, y que caracterizan estas competencias matemáticas básicas.

2. Destacar las peculiaridades de las estructuras y procedimientos del álgebra y el cálculo matemático como herramientas para la modelización y resolución de problemas de cambio y de relaciones, en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

3. Determinar situaciones y contextos en las que los modelos matemáticos basados en conceptos y estructuras del álgebra y el cálculo escolar, principalmente, proporcionen una estrategia adecuada de resolución de problemas.

4. Utilizar las nuevas tecnologías en la construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas.

5. Analizar tareas matemáticas en términos de las capacidades a cuyo logro contribuyen.

6. Seleccionar y secuenciar tareas para desarrollar competencia en la construcción de modelos matemáticos y en la resolución de problemas.

7. Establecer criterios para evaluar el aprendizaje de los escolares en modelización y resolución de problemas matemáticos al término de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Este documento recoge las aportaciones realizadas por especialistas de distintos niveles educativos, centradas en la construcción de modelos matemáticos y en la resolución de problemas como componentes claves de la competencia matemática, mediante las cuales se proponen tareas que contribuyen a los objetivos anteriores.

Dirección editorial del volumen *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*: LUIS RICO ROMERO

Coordinación: *BECERRA SEPÚLVEDA, Mª Victoria*

Autores:

CAMACHO MACHÍN, Matías
DE LA FUENTE MARTÍNEZ, Constantino
GÁMEZ RUIZ, José Luis
GONZÁLEZ LÓPEZ, Mª. José
JARA MARTÍNEZ, Pascual
MARÍN DEL MORAL, Antonio
ORTEGA DEL RINCÓN, Tomás
RECIO MUÑIZ, Tomás Jesús
RICO ROMERO, Luis
RUIZ HIDALGO, Juan Francisco

ÍNDICE

CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS Y MARCO DE COMPETENCIAS

Luis Rico Romero
Universidad de Granada

1. LA LOE Y LAS COMPETENCIAS

La Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE) introduce innovaciones en el marco curricular para la Educación Obligatoria, que suponen cambios importantes respecto a lo establecido por la Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).

Quizás, uno de cambios más significativos es el que afecta a la noción de currículo, al introducir la ley actual nuevas componentes en su definición: las competencias.

Así, la LOGSE establecía:

"Artículo 4.1: A los efectos de lo dispuesto en esta Ley, se entiende por currículo el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos

y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del sistema educativo que regulan la práctica docente".

Mientras que la LOE contempla:

"Artículo 6.1: A los efectos de lo dispuesto en esta Ley, se entiende por currículo el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas".

La noción de competencia se presenta como pieza central, como estructura clave en la arquitectura de las reformas educativas emprendidas por la nueva Ley. Esto se aprecia en las diferentes funciones que la LOE señala para las competencias:

- Integrar los aprendizajes formales con los informales y los no formales.
- Seleccionar los contenidos básicos e interpretar su integración.
- Utilizar los contenidos en diferentes situaciones y contextos.
- Seleccionar las tareas de aprendizaje y los criterios de evaluación.
- Orientar la enseñanza de las distintas materias desde una perspectiva transversal e integradora.

2. LAS EXPECTATIVAS DEL APRENDIZAJE

La introducción de una nueva componente curricular modifica el planteamiento de preguntas básicas a las que da respuesta un currículo. En este caso las competencias atienden al *para qué* de un plan de formación, ya que se ocupan de las expectativas sobre el aprendizaje de alumnas y alumnos. Introducir competencias supone modificar el entramado de expectativas sobre el aprendizaje.

"Un programa educativo, como cualquier actividad, está dirigido por las expectativas de ciertos resultados. La actividad principal de la educación es cambiar a los individuos en alguna medida: agregar conocimientos a los que ya poseen, permitirles desempeñarse en habilidades que, de otra manera, no podrían realizar, desarrollar ciertas comprensiones, intuiciones y apreciaciones. Los enunciados de estos resultados esperados se denominan corrientemente metas u objetivos educativos" (Taba, 1983).

Para el caso de las matemáticas escolares la consideración de las competencias y, en particular, de la competencia matemática, tiene importantes implicaciones sobre la planificación de su enseñanza y para las expectativas sobre su aprendizaje.

En nuestra perspectiva consideramos las *expectativas de aprendizaje* en el currículo de matemáticas como la denominación genérica de aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los escolares. En este caso, mediante las matemáticas.

Las expectativas expresan determinados usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden observar o inferir a partir de actuaciones de los escolares ante tareas. Las expectativas de aprendizaje en matemáticas se sostienen en actuaciones, contenidos y tareas (Rico y Lupiáñez, 2008).

Los documentos curriculares expresan comúnmente las expectativas generales sobre el aprendizaje de los alumnos mediante los *objetivos generales* de ciclo o etapa y los *objetivos específicos* de área o asignatura.

Así, los objetivos específicos de matemáticas en el currículo expresan qué se espera que haga un sujeto, de una edad y nivel determinados, en situaciones que requieren el uso de unas herramientas matemáticas determinadas.

Las expectativas de aprendizaje en matemáticas se concretan, en este caso, en la consecución de capacidades vinculadas con los conocimientos que se espera que adquieran los escolares durante la etapa obligatoria de su formación.

Ser capaz de consiste en llevar a cabo ciertas acciones, desempeñar ciertas actuaciones en contextos específicos; cuando los estudiantes logran *ser capaces de hacer algo* han satisfecho determinados objetivos, han cubierto unas expectativas de aprendizaje.

Los objetivos matemáticos específicos se enuncian, usualmente, como el logro de una o varias capacidades. El esquema muestra cuál es la estructura con la que se articulan los objetivos específicos:

Capacidades

Realizar acciones o mostrar conductas
que expresan la capacidad de un sujeto

Objetivo específico

Requiere unos contenidos concretos — *Conocimientos específicos*

Se pone en juego al abordar tareas en situaciones concretas — *Resuelve problemas en contexto*

Por su parte, el término *competencia* se refiere a aquellos *procesos cognitivos que el alumno es capaz de llevar a cabo a partir de sus conocimientos y capacidades.*

El concepto de competencia matemática muestra la riqueza cognitiva de esta disciplina, expresa los procesos o modos de actuación que tienen lugar por medio de los conocimientos matemáticos, no sólo por su dominio formal.

Las competencias establecen otras referencias en las expectativas de aprendizaje; responden a ciclos formativos más amplios y comprensivos, a medio y largo plazo; implican el desarrollo intelectual y social de los escolares sobre campos disciplinares amplios o no convencionales. La variedad y desarrollo de procesos cognitivos se muestra al abordar tareas complejas en situaciones abiertas y dar respuesta a problemas no convencionales.

Esquemáticamente visualizamos así la estructura con la que se articulan las competencias:

Procesos cognitivos

El dominio de diversos procesos muestra
la competencia y riqueza cognitiva
de un sujeto

Competencia básica

Es genérica e integra y aplica diversos conocimientos — *Disciplinas generales*

Se pone en juego al abordar tareas complejas en situaciones abiertas — *Resuelve problemas en contextos no convencionales*

Tanto los objetivos específicos como las competencias expresan expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, si bien lo hacen sobre distintos niveles de generalidad y de elaboración de los conocimientos utilizados, considerando diferentes exigencias de desarrollo y riqueza cognitiva de los procesos que muestran los sujetos, y atendiendo tareas de diferente amplitud y complejidad.

Los cambios introducidos por la LOE en el currículo, en particular en el currículo de matemáticas, expresan nuevas y ambiciosas expectativas sobre el aprendizaje de los escolares. Enuncian expectativas de dominio funcional sobre un amplio campo de las matemáticas, con integración de diversas capacidades, conocimientos y actitudes, buscando su desarrollo a medio y largo plazo. Estas expectativas se articulan mediante una nueva propuesta curricular basada en las competencias (Rico y Lupiáñez, 2008).

3. LAS COMPETENCIAS, UN PROYECTO EUROPEO

El interés por estudio de las competencias y su inclusión en el currículo de los planes de formación para la educación obligatoria, para los estudios de formación profesional y en los estudios universitarios se inicia a finales del pasado siglo, a mediados de la década de los noventa, y se expande a comienzos del siglo actual. Así, el Parlamento Europeo y el Consejo de la Unión Europea elaboran en 2005 la *Propuesta de Recomendación sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente,* dirigida a los Estados miembros, donde se afirma:

> *"Contribuir al desarrollo de una educación de calidad apoyando y completando las acciones que los estados miembros emprendan con el fin de garantizar que sus sistemas de educación y formación iniciales pongan a disposición de todos los jóvenes los medios necesarios para desarrollar las competencias clave que los preparen para el aprendizaje complementario y la vida adulta, así como que los adultos puedan desarrollar y actualizar sus competencias clave mediante una oferta coherente y completa de aprendizaje permanente.*
> *Proporcionar un marco de referencia común a escala europea sobre las competencias clave que se destina a los responsables políticos, los proveedores de educación y formación, los empleadores y los propios alumnos, con el fin de facilitar las reformas nacionales y el intercambio de información entre los Estados miembros y la Comisión en el marco en el marco del programa de trabajo «Educación y formación 2010», con vistas a alcanzar los niveles de referencia europeos acordados".*

En el marco del programa *Educational Training 2010* (ET 2010)[1], el Parlamento Europeo junto con el Consejo de la Unión establecen ocho competencias clave para la educación obligatoria:

- *"comunicación en la lengua materna;*
- *comunicación en lenguas extranjeras;*
- *competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología;*
- *competencia digital;*
- *aprender a aprender;*
- *competencias interpersonales, interculturales y sociales, y competencia cívica;*
- *espíritu de empresa, y*
- *expresión cultural".*

Por otra parte, el Proyecto Euridyce[2], en el documento *"Las Competencias Clave. Un concepto en expansión dentro de la educación obligatoria"* considera el conocimiento como la fuerza impulsora del desarrollo personal y profesional. Afirma que las personas que consiguen conocimientos, adquieren destrezas y transforman todo ello en competencias útiles, no sólo estimulan el progreso económico y tecnológico sino que también obtienen satisfacción y bienestar personal de sus esfuerzos. Para llevar a cabo sus objetivos, Eurydice realiza un Estudio comparativo que pone de manifiesto el desarrollo alcanzado y las diferencias en el enfoque del currículo por competencias entre los países de la Unión Europea.

Otro proyecto de estudio sobre competencias es el *Proyecto de Definición y Selección de Competencias*, Proyecto DeSeCo[3], llevado a cabo por la OCDE. El Proyecto DeSeCo tiene como finalidad general: *"Analizar los fundamentos teóricos, la racionalidad de la definición y el proceso de selección de las competencias clave, así como su relación con el entorno social y económico"*.

El documento *Resumen Ejecutivo de DeSeCo* plantea la cuestión de cuáles competencias son necesarias para el bienestar personal, económico y social de los ciudadanos de los países miembros de la organización. Argumenta que el desarrollo sostenible y la cohesión social dependen de las competencias de toda la ciudadanía y sostiene que *esas competencias cubren el conocimiento, las destrezas, las actitudes y los valore*s.

---

[1] Más información sobre el Programa ET 2010 puede encontrarse en: http://ec.europa.eu/education/policies/2010/et_2010_en.html

[2] Información sobre el Proyecto Eurydice se encuentra en http://www.eurydice.org

[3] En http://www.deseco.admin.ch/ puede encontrarse información sobre DeSeCo

Otro estudio en que destaca la noción de competencia es el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes –PISA– (*Programme for International Student Assessment*)[4], que estudia la preparación de los escolares al término de la educación obligatoria. Es empeño de los países de la OCDE conocer en qué medida los jóvenes que finalizan la escolaridad obligatoria están preparados para la sociedad del siglo XXI y sus desafíos. La evaluación se orienta a valorar el rendimiento acumulado de los sistemas educativos, y pone el foco en la formación básica en los dominios cognitivos de la lectura, las matemáticas y las ciencias. La finalidad de esta evaluación se centra en conocer *"cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido"* (OCDE, 2004).

Como uno de los logros principales del estudio, PISA destaca:

> *"su concepto innovador de* "*competencia*" *que se preocupa por la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicarse efectivamente conforme se presentan, resuelven e interpretan problemas en una variedad de áreas"* (OCDE, 2005b).

También las competencias desempeñan un papel relevante en la convergencia universitaria europea y ejemplifican los cambios de orientación en los fines en el Espacio Europeo de Educación Superior[5]. El logro y desarrollo de competencias por parte de los estudiantes se convierte en centro de atención de la educación superior.

> *"Rasgo significativo es su compromiso de considerar los títulos en términos de resultados del aprendizaje y particularmente en términos de competencias: genéricas (instrumentales, interpersonales y sistémicas) y competencias específicas a cada área temática (que incluyen las destrezas y el conocimiento). Los ciclos primero y segundo han sido descritos en términos de puntos de referencia acordados y dinámicos: resultados del aprendizaje y competencias a ser desarrolladas y logradas. El atractivo de las competencias comparables y los resultados del aprendizaje es que permiten flexibilidad y autonomía en la construcción del currículo. Al mismo tiempo, constituyen las bases para formular indicadores de nivel que puedan ser comprendidos y elaborados conjuntamente.* (…) *Las competencias describen los resultados del aprendizaje: lo que un*

[4] Más información en la dirección: http://www.oecd.org

[5] Información detallada en http://ec.europa.eu/education/index_en.html

estudiante sabe o puede demostrar una vez completado un proceso de aprendizaje. Esto se aplica a las competencias específicas y a las genéricas, como pueden ser las capacidades de comunicación y de liderazgo. (…) *Las competencias se describen como puntos de referencia para la elaboración y evaluación de los planes de estudio, y no pretender ser moldes rígidos. Permiten flexibilidad y autonomía en la elaboración de los planes de estudios pero, al mismo tiempo, introducen un lenguaje común para describir los objetivos de los planes.*"
"Los planes de estudios conducentes a la obtención de un título universitario deberán, por tanto, tener en el centro de sus objetivos la adquisición de competencias por parte de los estudiantes, ampliando, sin excluir, el tradicional enfoque basado en contenidos y horas lectivas. Se debe hacer énfasis en los métodos de aprendizaje de dichas competencias así como en los procedimientos para evaluar su adquisición" (MEC, 2007).

Los planes de estudios universitarios garantizarán, como mínimo las siguientes competencias básicas:

- *"Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio;*
- *Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio;*
- *Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética;*
- *Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado;*
- *Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía"* (MEC, 2007).

4. LAS CLAVES DE LAS COMPETENCIAS

Todas estas propuestas de innovación y cambio curricular, promovidas por instituciones intergubernamentales y organismos gubernamentales, que tienen la responsabilidad de trabajar en la mejora de la enseñanza, coinciden en expresar las expectativas sobre el aprendizaje en términos de competencias. Las exigencias de calidad y el desarrollo del aprendizaje autónomo en los escolares y en los profesionales reciben una especial atención con la noción de competencia, principalmente.

La atención prestada por estas instituciones y organismos se canaliza mediante distintos estudios, cada uno de los cuales hace mención o destaca una faceta importante de un concepto general de competencia, que consideramos brevemente.

Un análisis de distintas definiciones de la noción de competencia proporciona tres claves centrales que intervienen en todas ellas:

- *Componentes* cognitivos, o de otros tipos, que entran en la caracterización que cada autor hace de la competencia: *conocimientos, capacidades, destrezas, habilidades, disposiciones, aptitudes, valores, actitudes, responsabilidades* y *comprensión*,
- *Finalidades.* Hay dos fines principales en la noción de competencia: la *acción*, como manifestación y expresión del ser competente; el *desarrollo personal y social* que el sujeto alcanza por medio de la competencia.
- *Contexto,* en que se sitúa o desempeña la competencia. Contextos y situaciones refuerzan y subrayan que la manifestación y ejercicio de una competencia, la acción y el desarrollo que movilizan conocimientos, capacidades, destrezas, actitudes y valores, siempre tienen un lugar, se ubican en un marco de referencia, están contextualizados

El alcance de los cambios iniciados en las etapas de educación obligatoria, formación profesional y formación universitaria muestra una gran ambición ya que abarca todo el sistema educativo y la preparación de profesionales en los países avanzados. Su fortaleza se encuentra en la organización y coordinación entre las distintas instituciones involucradas. Requiere principios claros, voluntad política e inversiones cuantiosas. Necesita grandes dosis de sistematicidad, disciplina de trabajo, amplitud y claridad de ideas, fundamentación teórica y desarrollo técnico basado en experiencias adecuadas y buenas prácticas.

Las instituciones y organismos responsables de la puesta en práctica de los nuevos currículos basados en competencias han avanzado en su estudio y han reflexionado sobre algunas de las dicotomías más frecuentes que oscurecen y dificultan la noción de competencia. Entre ellas destaca la similitud y confusión entre objetivos y competencias, que ya hemos comentado previamente.

También han estudiado los tipos de competencias, estableciendo dos caracterizaciones.

Los expertos distinguen entre competencias generales o transversales y competencias específicas. Esta diferenciación se centra en la tercera de las claves enunciadas sobre la noción de competencia ya que basa la diferencia mediante los contextos y situaciones en que se aplica. Un competencia se dice transversal cuando es aplicable en multitud de situaciones y no establece diferencias respecto de las distintas áreas disciplinares. Una competencia se dice específica cuando se relaciona y muestra en un área temática.

Otra distinción se establece entre competencias básicas, fundamentales o clave y competencias no básicas. El énfasis en este caso para considerar clave una competencia se centra en su carácter formativo. Con estas consideraciones y para el periodo de la educación obligatoria, la competencia matemática es una competencia clave y específica. Una de las ambiciones de las reformas educativas actuales en matemáticas radica en su propuesta de reforzar el carácter transversal de la competencia matemática.

En el estudio DeSeCo, la OCDE elabora un catálogo de competencias básicas para la formación obligatoria, que estructura en tres categorías:

Categoría 1- Usar las herramientas de forma interactiva:
- Habilidad para usar lenguaje, símbolos y texto de forma interactiva
- Capacidad de usar conocimiento e información de manera interactiva
- Habilidad de usar la tecnología de forma interactiva

Categoría 2- Interactuar en grupos heterogéneos:
- Habilidad de relacionarse bien con otros
- Habilidad de cooperar
- Habilidad de manejar y resolver conflictos

Categoría 3- Actuar de manera autónoma:
- Habilidad para actuar dentro de un esquema amplio
- Habilidad de formar y conducir planes de vida y proyectos personales
- Habilidad de afirmar derechos, intereses, límites y necesidades

La función de este amplio marco de competencias consiste en contribuir a la mejor formación y educación de la ciudadanía mediante una profundización en el diseño, desarrollo y evaluación del currículo.

5. NOCIÓN DE COMPETENCIA MATMÁTICA EN EL ESTUDIO PISA

La noción de competencia es central en el estudio PISA de la OCDE, en particular la noción de competencia matemática para el periodo de la educación obligatoria.

Esta noción de competencia matemática hace referencia al objeto de la evaluación, se utiliza en distintos momentos y con distintos sentidos y responde a un modelo funcional de las matemáticas escolares. En el actual marco curricular basado en competencias, el marco teórico y los resultados del estudio PISA tienen una importancia indiscutible para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

El dominio sobre matemáticas que se estudia en el proyecto PISA se conoce como Alfabetización Matemática (*Mathematical Literacy)*. Este dominio se refiere a:

- las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar
- cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos eficazmente
- en una variedad de dominios y situaciones.

Alfabetización o Competencia Matemática es la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades para su vida individual como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2005).

En el estudio PISA hay una apuesta por entender las matemáticas como un proceso que proporciona respuestas a problemas. La concepción de las matemáticas considera que éstas consisten en tareas de encontrar, no en tareas de probar. La consideración de las matemáticas como "modo de hacer" y la noción de alfabetización responden a un modelo funcional sobre aprendizaje de las matemáticas.

Este modelo postula:

- unas tareas,
- unas herramientas conceptuales,
- un sujeto.

En este modelo podemos decir que cuando el sujeto tratar de abordar las tareas mediante las herramientas disponibles, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los procesos correspondientes. Los modos de actuación de los sujetos, muestran diversas capacidades y habilidades de las personas cuando trabajan con las matemáticas en contextos en los que es necesario utilizar este tipo de herramientas. Las capacidades y habilidades muestran que un sujeto es competente en matemáticas mediante dominios cognitivos específicos, que son expresión de su competencia matemática.

Los objetivos de aprendizaje expresan de manera concreta las habilidades que se necesitan para un determinado tema y en un determinado momento. Las competencias expresan expectativas sobre el desarrollo de capacidades a largo plazo, útiles para el uso de las matemáticas en la modelización de cuestiones y en la resolución de problemas.

En el estudio PISA se considera que para desarrollar la competencia matemática general los estudiantes deben dominar un conjunto de habilidades y procesos matemáticos generales, también denominados *Competencias matemáticas*. El concepto de competencia pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de dichos conceptos y destrezas. De este modo se enfatiza que la educación debe enfocarse sobre el desarrollo de las competencias del alumno. Se trata de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso.

El proyecto PISA selecciona ocho competencias básicas o capacidades generales para caracterizar la Competencia o Alfabetización Matemática general que estudia.

Esas competencias son: Pensar y razonar, Argumentar, Comunicar, Modelizar, Plantear y resolver problemas, Representar, Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, Emplear soportes y herramientas tecnológicas.

El objeto de este documento se centra en dos competencias matemáticas: Modelizar y Plantear y resolver problemas, que se encuentran entre las que PISA contempla.

La competencia de modelización se caracteriza por los siguientes atributos:

- estructurar el campo o situación que va a modelarse;
- traducir la realidad a una estructura matemática;
- interpretar los modelos matemáticos en términos reales: trabajar con un modelo matemático;
- reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados;
- comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones);
- dirigir y controlar el proceso de modelización.

La competencia de plantear y resolver problemas se caracteriza por:

- plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados);

- resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

Estas dos competencias han orientado la organización del curso que está en el origen de este documento y tienen una especial relevancia en el desarrollo y consolidación de la competencia matemática.

REFERENCIAS

COMISIÓN DE LAS COMUNIDADES EUROPEAS (CCE) (2005). *Propuesta de recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente.* 2005/0221 (COD). Bruselas.

EUROPEAN COMMISION. EDUCATION AND CULTURE (2008). *Education & Training 2010. Main policy initiatives and outputs in education and training since the year 2000*. Descargado el 26/05/2008 de http://europa.eu.int/comm/education/policies/2010/doc/compendium05_en.pdf.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (MEC) (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *BOE, 238,* 36705-36715.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (MEC) (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE, 106*, 17158-17207.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (MEC) (2007). REAL DECRETO 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. *BOE, 260*, 44037- 44048.

OCDE (2001) *Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations (DeSeCo). Background Paper.* Descargado el 25/01/2003 de http://www.deseco.admin.ch.

OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OECD.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.

RICO, L. y LUPIÁÑEZ, J. L (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editorial.

TABA, H. (1983). *Elaboración del currículo.* Buenos Aires: Ediciones Troquel.

UNIDAD EUROPEA DE EURYDICE (2002). *Las Competencias Clave. Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria.* Madrid: Ministerio de Educación, Ciencia y Cultura.

FUNCIONES A TROZOS: SPLINES.
ÁREAS Y PRIMITIVAS: "ESA MISTERIOSA RELACIÓN"

José L. Gámez Ruiz
Profesor Titular de Universidad en el área del Análisis Matemático
Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada

1. FUNCIONES A TROZOS: SPLINES

La representación de funciones definidas a trozos constituye a menudo una tarea recurrente en el estudio de gráficas de funciones, continuidad, derivabilidad, etc. Sin embargo, el concepto de "función a trozos" ni siquiera tuvo fácil aceptación entre los matemáticos, que entendían que una función debe ser "una ley" o "una regla" de relación entre magnitudes.

Si hoy las funciones a trozos son tan cotidianas no es sólo porque proporcionen sencillos ejercicios matemáticos de continuidad o derivabilidad. Su derecho a la existencia es mucho más sólido al resultar de enorme utilidad en las aplicaciones a problemas de diseño (fuentes de letra, curvas isobaras), problemas de física e ingeniería (vías de tren, carreteras, señales de comunicaciones), etc. Y lo más interesante no es tomar una de estas funciones y resolver si es continua o derivable, sino la construcción de funciones que cumplan las expectativas del diseñador, del ingeniero, etc.

Especialmente interesantes resultan las funciones a trozos llamadas splines, que son aquéllas cuyos “trozos” son polinomios. Dependiendo de las necesidades de cada caso y modelo, iremos desde los splines lineales (también llamados poligonales; sus trozos son rectas), pasando por los splines cuadráticos, hasta los “reyes de los splines”, que son los splines cúbicos.

¿Por qué los splines cúbicos merecen tan especial atención? A menudo en la literatura matemática podemos encontrar textos profundísimos y muy ricos en cuanto a los cálculos relativos a splines cúbicos, pero casi nunca encontramos una justificación ni la razón de su importancia dentro del mundo de las funciones a trozos. La respuesta está precisamente en la física, en la ingeniería, en el mundo del diseño, etc.

1.1. Poligonales (splines lineales). Motivación y desarrollo

La construcción de una poligonal que pase por determinados puntos dados del plano consiste en reiterar, entre cada dos puntos consecutivos, la determinación de la recta que pasa por ellos. No está de más recordar entonces que la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), con $x_0 < x_1$, viene dada por la ecuación:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Sin embargo, y como “precalentamiento” para lo que seguirá, convendría obtener dicha recta como respuesta a un planteamiento de búsqueda. Concretamente necesitamos determinar los coeficientes de una recta, digamos

$$y = Ax + B,$$

que debe pasar por los dos puntos dados, esto es:

$$y_0 = Ax_0 + B,$$
$$y_1 = Ax_1 + B.$$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (A y B). No olvidemos que los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) son dados, y llegado el caso convendrá tomar valores numéricos para ellos. La resolución de ese sistema nos proporciona precisamente los coeficientes deseados[1].

[1] Una cuestión interesante para plantear en este momento es el hecho de que ese sistema de ecuaciones es siempre compatible determinado. ¿Por qué?

Reiterando ese argumento, podemos encontrar la función poligonal que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), con $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Dicha función vendrá dada por la expresión:

$$y = \begin{cases} Ax + B, & x \in [x_0, x_1], \\ Cx + D, & x \in [x_1, x_2], \\ Ex + F, & x \in [x_2, x_3], \\ Gx + H, & x \in [x_3, x_4]. \end{cases}$$

Los coeficientes (en mayúsculas) están perfectamente determinados por la familia de puntos dados, y se obtienen resolviendo sistemas de ecuaciones.

A menudo las poligonales se usan para trazar en los mapas un esquema simplificado de un itinerario. También podrían servir para modelar, por ejemplo, el recorrido de un cable eléctrico que debe pasar por determinados lugares. Pero no nos servirían para modelar el trazado de la vía de un tranvía. Evidentemente, el tranvía se atascaría o descarrilaría en los "picos" de la gráfica.

1.2. Splines cuadráticos. Motivación y desarrollo

Y es que una vía de tranvía debe ser "más suave que una poligonal". Dicho de otro modo, para modelar vías de tranvía, necesitamos funciones "más que continuas". Necesitamos funciones "derivables". Las poligonales no pueden servirnos ya. Necesitamos funciones "curvadas". Los "trozos" de nuestra función deberán ser polinomios de mayor grado.

Diseñemos ahora una función a trozos, cuyos trozos sean **polinomios de segundo grado**, que pase por tres puntos dados, y que sea derivable. Veremos que en este caso el problema admite más de una solución, y estableceremos posibles criterios para elegir la que más nos interese.

Los puntos serán (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), con $x_0 < x_1 < x_2$. La función a trozos deberá ser de la forma:

$$y = \begin{cases} P_1(x) = Ax^2 + Bx + C, & x \in [x_0, x_1], \\ P_2(x) = Dx^2 + Ex + F, & x \in [x_1, x_2], \end{cases}$$

Para determinar los **seis** coeficientes del problema (en mayúsculas), impondremos a la función:

- Que pase por los puntos dados, esto es:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C,\\
y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C,\\
y_1 &= Dx_1^2 + Ex_1 + F,\\
y_2 &= Dx_2^2 + Ex_2 + F,
\end{aligned}
$$

(hasta aquí, 4 ecuaciones).
- Que sea derivable en el punto central, esto es, $P_1'(x_1) = P_2'(x_1)$, lo que se escribe:

$$2Ax_1 + B = 2Dx_1 + E,$$

(con esta última, son 5 ecuaciones).

Cinco ecuaciones para seis incógnitas. Aún no tenemos determinada nuestra función a trozos. Y es que efectivamente no hay un único spline cuadrático que pase por esos tres puntos y sea derivable. Hay muchos, y tendremos que fijar un criterio para determinar sólo uno entre ellos. Ese criterio constituiría la sexta ecuación que nos falta. Posibles criterios podrían ser:

- Prefijar la pendiente inicial como un valor "m" dado (esto podría venir impuesto por un posible tramo previo de la vía). La sexta ecuación sería $P_1'(x_0) = m$, es decir, $2Ax_0 + B = m$. Alternativamente, podríamos fijar la pendiente final.
- Decidir que el primer tramo es rectilíneo. La sexta ecuación sería entonces $A = 0$. Alternativamente, podríamos fijar como rectilíneo el tramo final.

Para concluir con los splines cuadráticos (derivables), baste mencionar que si el número de puntos es "n", entonces el número de coeficientes a determinar será $3n - 3$. Imponiendo que la función pase por los puntos dados y sea derivable, obtenemos $3n - 4$ ecuaciones (una menos que el número de incógnitas). Siempre tendremos la libertad de elegir una última ecuación usando alguno de los criterios anteriormente mencionados[2].

1.3. Splines cúbicos. Motivación y desarrollo

Existe una razón importante para desechar los splines cuadráticos en el diseño del trazado de autopistas o vías de tren. Si bien en tranvías (len-

[2] De nuevo es curioso comprobar (aunque quizás excede los objetivos de esta exposición) que los dos criterios mencionados proporcionan una ecuación adicional que convierte al sistema en compatible determinado.

tos) ó en maquetas de trenes de juguete podemos conformarnos con "sólo" la derivabilidad del trazado, esta regularidad no es suficiente cuando se ven involucradas grandes velocidades, como ocurre en una autopista o en un tren de largo recorrido. Imaginemos por un momento una vía de tren construida al modo de los trenes "de juguete". Esto es, un tramo perfectamente recto enlazaría con otro en forma de arco de circunferencia. El enlace es derivable (no tiene picos) pero…
…nuestro tren viaja a una alta velocidad constante por el tramo rectilíneo y por tanto su movimiento es inercial. Un pasajero duerme plácidamente en su asiento, con la cabeza en precario equilibrio. De repente, el vagón entra en la curva. En una fracción de segundo, el movimiento del tren ha pasado de inercial a circular. El pasajero dormido es instantáneamente sometido a una fuerza centrífuga de magnitud constante (inversamente proporcional al radio de la curva, también constante). Como consecuencia de esa fuerza instantánea, es muy probable que se golpee violentamente la cabeza con el cristal de la ventanilla, o que dé con sus huesos en el pasillo del vagón.

No sólo el pasajero sufriría los efectos de esta "fuerza súbita". Las ruedas del tren, los ejes, los raíles de la vía… todos sufrirían este "impacto". Además de ser un viaje incómodo, es más que probable que algo se termine rompiendo en este tren.

Igual sucede en un coche. Tomar repentinamente una curva de radio constante es lo que ocurre cuando el conductor da "un volantazo". Cualquier conductor sabe lo peligroso que es un volantazo mientras se viaja a gran velocidad. Para que las fuerzas laterales no aparezcan de modo súbito, el volante debe girarse lenta y progresivamente, es decir, **la curvatura de la trayectoria debe cambiar paulatinamente**, no a saltos.

Y la **curvatura** en términos de funciones elementales es… **¡la segunda derivada!** Así pues, para modelar autopistas o vías de tren mediante funciones a trozos, debemos procurar que la segunda derivada cambie de forma continua y no a saltos. Los trozos de la función deben enlazarse de modo que coincidan, no sólo las primeras derivadas laterales, sino también las segundas. No nos van a servir los splines cuadráticos porque tienen segunda derivada constante en cada trozo. La curvatura "salta" al cambiar de un trozo a otro. Necesitamos un grado mayor.

Diseñemos una función a trozos, cuyos trozos sean polinomios de **tercer** grado, que pase por $n + 1$ puntos dados, y que sea derivable "dos veces". Veremos que también en este caso el problema admite más de una solución, y estableceremos posibles criterios para elegir la que más nos interese.

Los puntos serán (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), con $x_0 < x_1 < ... < x_n$. La función a trozos será de la forma:

$$y = \begin{cases} P_1(x) = A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1, & x \in [x_0, x_1], \\ P_2(x) = A_2x^3 + B_2x^2 + C_2x + D_2, & x \in [x_1, x_2], \\ \quad\quad\quad\quad \dots \dots & \\ P_n(x) = A_nx^3 + B_nx^2 + C_nx + D_n, & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

Para determinar los $4n$ coeficientes del problema (en mayúsculas), impondremos a la función:

- Que pase por los puntos dados:

$P_1(x_0) = y_0$, esto es: $y_0 = A_1x_0^3 + B_1x_0^2 + C_1x_0 + D_1$,
$P_1(x_1) = y_1$, esto es: $y_1 = A_1x_1^3 + B_1x_1^2 + C_1x_1 + D_1$,
$P_2(x_1) = y_1$, esto es: $y_1 = A_2x_1^3 + B_2x_1^2 + C_2x_1 + D_2$,
$P_2(x_2) = y_2$, esto es: $y_2 = A_2x_2^3 + B_2x_2^2 + C_2x_2 + D_2$,
... ...
$P_n(x_{n-1}) = y_{n-1}$, esto es: $y_{n-1} = A_nx_{n-1}^3 + B_nx_{n-1}^2 + C_nx_{n-1} + D_n$,
$P_n(x_n) = y_n$, esto es: $y_n = A_nx_n^3 + B_nx_n^2 + C_nx_n + D_n$,
(hasta aquí, tenemos $2n$ ecuaciones).

- Que sea derivable dos veces en los puntos donde enlazan los trozos (nodos interiores):

$P'_1(x_1) = P'_2(x_1)$, esto es:
$3A_1x_1^2 + 2B_1x_1 + C_1 = 3A_2x_1^2 + 2B_2x_1 + C_2$,
$P_1''(x_1) = P''_2(x_1)$, esto es:
$6A_1x_1 + 2B_1 = 6A_2x_1 + 2B_2$,
... ...
$P'_{n-1}(x_{n-1}) = P'_n(x_{n-1})$, esto es:
$3A_{n-1}x_{n-1}^2 + 2B_{n-1}x_{n-1} + C_{n-1} = 3A_nx_{n-1}^2 + 2B_nx_{n-1} + C_n$,
$P''_{n-1}(x_{n-1}) = P''_n(x_{n-1})$, = esto es:
$6A_{n-1}x_{n-1} + 2B_{n-1} = 6A_nx_{n-1} + 2B_n$,
(con estas $2(n-1)$, ya tenemos $4n - 2$ ecuaciones).

Tenemos dos ecuaciones menos que el número de coeficientes a determinar. De nuevo no hay un único spline cúbico que pase por esos $n + 1$ puntos y sea derivable dos veces. Hay muchos, y tendremos que fijar algún criterio para determinar sólo uno entre ellos. Ese criterio servirá para añadir las dos ecuaciones que nos faltan. Posibles criterios podrían ser:

- Imponer que la segunda derivada se anule en los puntos inicial y final. Ello serviría para que la función obtenida pueda prolongarse a la izquierda y derecha mediante rectas. El spline así obtenido se llama **spline cúbico natural**. Las ecuaciones que faltan serían entonces:

$P''_1(x_0) = 0$, esto es: $6A_1x_0 + 2B_1 = 0$,
$P''_n(x_n) = 0$, esto es: $6A_nx_n + 2B_n = 0$.

- Imponer que los valores de la primera y la segunda derivada en x_0 coincidan con los valores de la primera y segunda derivada en x_n. Ello permitiría prolongar la función a los lados mediante "copias trasladadas de sí misma". El spline así obtenido se llama **spline cúbico periódico**. Las ecuaciones que faltan serían:

$P'_1(x_0) = P'_n(x_n)$ esto es:
$3A_1x_0^2 + 2B_1x_0 + C_1 = 3A_nx_n^2 + 2B_nx_n + C_n$,
$P_1''(x_0) = P_n''(x_n)$, esto es: $6A_1x_0 + 2B_1 = 6A_nx_n + 2B_n$.

1.4. Ejemplos

Ejemplo 1. Construir el spline cúbico natural que pasa por los puntos (–1, 0), (0, –1), (1, 2).

El spline que buscamos deberá ser de la forma:

$$y = \begin{cases} P_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, & x \in [-1, 0], \\ P_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

- Deberá pasar por los puntos dados, es decir,

$P_1(-1) = 0$, esto es: $-A + B - C + D = 0$,
$P_1(0) = -1$, esto es: $D = -1$,
$P_2(0) = -1$, esto es: $H = -1$,
$P_2(1) = 2$, esto es: $E + F + G + H = 2$.

- También deberá ser dos veces derivable en cero, es decir:

$P'_1(0) = P_2'(0)$, de donde: $C = G$,
$P''_1(0) = P_2''(0)$, de donde: $2B = 2F$.

- Por último, por ser "spline cúbico natural", deberá cumplir que:

$P''_1(-1) = 0$, esto es: $-6A + 2B = 0$,
$P_2''(1) = 0$, esto es: $6E + 2F = 0$.

Ya tenemos el sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas, cuya solución es:

$$A = 1, \qquad B = 3, \qquad C = 1, \qquad D = -1,$$
$$E = -1, \qquad F = 3, \qquad G = 1, \qquad H = -1.$$

El spline cúbico natural buscado es (ver figura 1):

$$y = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + x - 1, & x \in [-1,0], \\ -x^3 + 3x^2 + x - 1, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Ejemplo 2. Imaginemos que tenemos ya construidos dos tramos rectilíneos de vía ferroviaria que no están enlazados. Uno de ellos es el semieje negativo de abscisas, y el otro es la recta que parte del punto (3,0) "hacia arriba" con pendiente igual a 6 (ver figura 2). Con el propósito de enlazar esos tramos mediante una vía que no presente cambios bruscos de curvatura, construiremos un spline cúbico con trozos en [0,1] y [2,3]. No prefijaremos sus valores en los puntos interiores 1 y 2, pero a cambio le exigiremos que sus enlaces con las mencionadas rectas sean también derivables dos veces.

El spline (con 12 coeficientes por determinar) será:

$$y = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty,0], \\ P_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, & x \in [0,1], \\ P_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H, & x \in [1,2], \\ P_3(x) = Ix^3 + Jx^2 + Kx + L, & x \in [2,3], \\ 6(x-3) & x \in [3,+\infty]. \end{cases}$$

Satisfaciendo las siguientes 12 ecuaciones:

1. $P_1(0) = 0$, esto es: $D = 0$,
2. $P_1'(0) = 0$, esto es: $C = 0$,
3. $P_1''(0) = 0$, esto es: $2B = 02B = 0$,
4. $P_1(1) = P_2(1)$, esto es: $A + B + C + D = E + F + G + H$,
5. $P_1'(1) = P_2'(1)$, esto es: $3A + 2B + C = 3E + 2F + G$,
6. $P_1''(1) = P_2''(1)$, esto es: $6A + 2B = 6E + 2F$,
7. $P_2(2) = P_3(2)$, esto es: $8E + 4F + 2G + H = 8I + 4J + 2K + L$,
8. $P_2'(2) = P_3'(2)$, esto es: $12E + 4F + G = 12I + 4J + K$,
9. $P_2''(2) = P_3''(2)$, esto es: $12E + 2F = 12I + 2J$,
10. $P_3(3) = 0$, esto es: $27I + 9J + 3K + L = 0$,
11. $P_3'(3) = 6$, esto es: $27I + 6J + K = 6$,
12. $P_3''(3) = 0$, esto es: $18I + 2J = 0$.

Su solución es:

$A = -1,$	$B = 0,$	$C = 0,$	$D = 0,$
$E = 3,$	$F = -12,$	$G = 12,$	$H = -4,$
$I = -2,$	$J = 18,$	$K = -48,$	$L = 36.$

Luego el tramo de vía que debemos construir viene modelado por el spline cúbico:

$$y = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty,0], \\ -x^3 \quad , & x \in [0,1], \\ 3x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \quad , & x \in [1,2], \\ -2x^3 + 18x^2 - 48x + 36 \quad , & x \in [2,3], \\ 6(x-3) & x \in [-\infty,0]. \end{cases}$$

Como se ha podido observar, el trabajo con splines no conlleva una gran dificultad conceptual, aunque sí una considerable carga de cálculo. Es necesario despejar “muchas incógnitas” en sistemas con “muchas ecuaciones”. Ello hace más que recomendable la utilización del ordenador para el cálculo de soluciones de “grandes” sistemas de ecuaciones lineales.

El campo de aplicación de los splines cúbicos es inmenso. Cabe mencionar, entre otras muchas aplicaciones:

- El trazado de curvas isobaras e isotermas en mapas del tiempo. A partir de un muestreo finito (en “*n*” puntos) de presiones ó temperaturas, se elaboran mediante splines cúbicos los mapas que resultan ser bastante fieles a la distribución real.
- El diseño de fuentes de letra para visualizar en pantallas, o para imprenta. Curiosamente, la vista del lector se cansa mucho menos si las líneas con que se trazan las letras son suaves. El trazo suave consiste en una curva de tipo spline que pasa por unos puntos prefijados.
- El diseño de texturas y mapas tridimensionales en programas de simulación de terrenos montañosos.
- Compresión de señales de telecomunicaciones.
- Etc.

2. ÁREAS Y PRIMITIVAS: ESA MISTERIOSA RELACIÓN

Es todo un estándar la introducción de las integrales mediante sumas de Riemann: sumas de áreas de muchos rectángulos con base muy pequeña (cuanto más pequeña sea la base, más rectángulos habrá). Reparemos un instante en el nivel de abstracción necesario para comprender que, mientras las bases "tienden a cero" y el número de rectángulos "tiende a infinito", la suma de áreas converge. Esto constituye un difícil escollo para la gran mayoría de alumnos que aún no terminan de madurar el concepto de límite. Si a ello añadimos la repetición del proceso por debajo y por encima de la función, seguramente habremos perdido a la mayoría de los alumnos por el camino. Por si queda algún alumno "aún vivo" (o quizás para "resucitar" a los que cayeron), les aliviamos la carga con la receta magistral de la Regla de Barrow que, milagrosamente, relaciona áreas y primitivas. Todo el proceso de las sumas de Riemann termina siendo (afortunadamente) algo olvidado, aislado y puramente testimonial.

En origen, el proceso Riemanniano de sumas superiores e inferiores no tiene otra razón de ser que la resolución de un problema matemático que de ningún modo vamos a afrontar con los alumnos de Bachillerato. La convergencia de las sumas de Riemann resuelve el "problema de existencia y buena definición del área", o la "determinación de conjuntos medibles". ¿Por qué se introduce en Bachillerato (y en muchos cursos universitarios) el concepto de integral mediante una técnica asociada a otro problema matemático, que ni siquiera se pretende plantear (y mucho menos resolver)? Modelemos con las "herramientas matemáticas" de que disponemos el problema del cálculo de áreas. Descubriremos que la relación entre áreas y primitivas es algo natural que además ¡se puede entender!

2.1. Qué es el área

No debemos olvidar que la noción intuitiva de área está suficientemente arraigada en la mente del estudiante. Lleva calculando áreas de figuras geométricas desde los cursos de primaria. Lo ha aplicado en infinidad de problemas prácticos, y seguramente es éste uno de los pocos conceptos que podemos asumir como bien aprendido. Intentar definir rigurosamente algo tan bien conocido sólo puede conducir a crear confusión. Optemos simplemente por recordar que el área de un recinto plano es siempre un número mayor ó igual que cero que, entre otras muchas, cumple las propiedades:

- El área de un rectángulo es base por altura, y el área del vacío es cero.
- El área de una unión disjunta es la suma de las áreas.

Sin necesidad de mencionarlo explícitamente a los alumnos, esas dos propiedades básicas sirven para axiomatizar el concepto de área. Otro tema (sobre el que vamos a "correr un tupido velo") sería determinar qué subconjuntos del plano tienen asociada un área. Serían los llamados "conjuntos medibles", y baste aquí decir *grosso modo* que "cualquier recinto acotado que podamos describir ó imaginar tiene asociada un área".

2.2. Área bajo la gráfica de una función continua positiva

Dada una función real $f(x)$ continua y positiva en su dominio $[a, b]$, nos preguntamos cuál será el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica $y = f(x)$, entre a y b. Formalmente, el recinto es

$$\{(t, y) \colon a \leq t \leq b,\ 0 \leq y \leq f(t)\}.$$

Dado un valor cualquiera para $x \in [a, b]$, llamemos $A(x)$ al área bajo la gráfica, entre a y x (ver figura 3).

$$A(x) = \textit{área del recinto } \{(t, y) \colon a \leq t \leq x,\ 0 \leq y \leq f(t)\}.$$

La función $A(x)$ está definida para todo $x \in [a, b]$. Intentemos ver qué propiedades tiene:

1. $A(a) = 0$. Es el área de un rectángulo de base cero.
2. $A(b)$ es precisamente el área de todo el recinto que queremos calcular.

Veamos que la continuidad de $f(x)$ nos permite demostrar muy fácilmente que la función $A(x)$ es derivable en $[a, b]$. Tomemos un $c \in [a, b]$ arbitrario, y demostremos que la función A es derivable en c. Para ello, veamos si existe el límite del cociente incremental en $x > c$ (por la izquierda se argumentaría igual):

$$A'(\mathrm{c}) = \lim_{x \to c} \frac{A(\mathrm{x}) - A(\mathrm{c})}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\text{“}\textit{área bajo } f \textit{ entre } c \textit{ y } x\text{”}}{x - c} = (*) = f(\mathrm{c})$$

* (ver figura 4). En el numerador tenemos el área de una figura que "casi" es un rectángulo, y en el denominador tenemos la base de ese "casi-rectángulo". El resultado debe ser la altura de ese "casi-rectángulo". Teniendo en cuenta que $x \to c$, dicha altura tiende a $f(c)$.

Tenemos por tanto una nueva y sorprendente propiedad para $A(x)$:

3. La función $A(x)$ (área bajo f entre a y x) es derivable, y su derivada es $A'(x) = f(x)$. Dicho de otro modo, $A(x)$ es una primitiva de $f(x)\,f(x)$.

Es posible que ya conozcamos (o seamos capaces de calcular) alguna otra primitiva de $f(x)$, llamada por ejemplo $F(x)$. Ahora bien, en el tema de derivación se ha explicado que si dos funciones tienen la misma derivada, deben necesariamente diferenciarse en una constante. Por tanto existe una constante K tal que $A(x) = F(x) + K, \forall x \in [a, b]$. Concretamente, cuando $x = a$ obtenemos (propiedad 1.) que $0 = A(a) = F(a) + K$, y por tanto $K = -F(a)$. Entonces el área del recinto total podrá calcularse (propiedad 2.) como:

$$\text{Área total} = A(b) = F(b) + K = F(b) - F(a).$$

Es la llamada "Regla de Barrow", que nos permite expresar el área buscada usando para ello cualquier primitiva $F(x)$ que hayamos obtenido. Así, **para calcular áreas bajo funciones continuas positivas, lo que tenemos que hacer es encontrar primitivas.**

En el caso de optar por iniciar así el tema de integración, quedaría ya eliminada (por innecesaria) la argumentación de sumas de Riemann, lo que nos proporcionará alguna hora extra para hacer problemas o prácticas con los alumnos. El tema continuaría con la "ya justificada" tarea del cálculo de primitivas.

Figuras

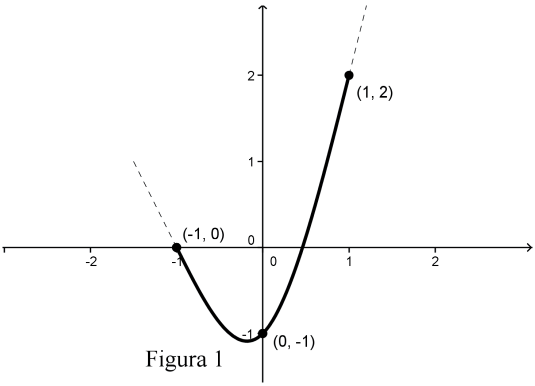


Figura 1

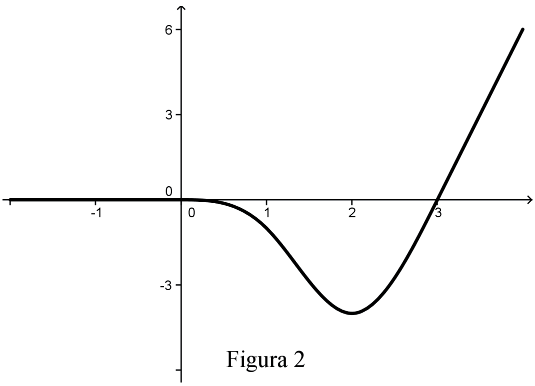


Figura 2

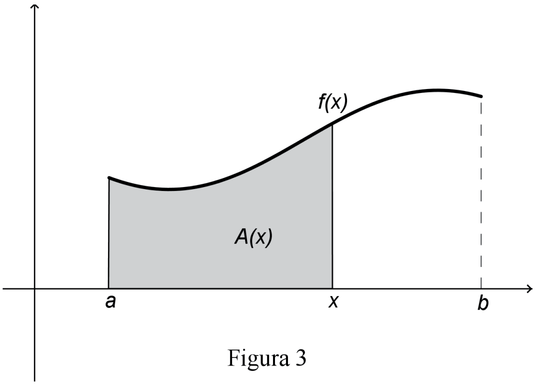


Figura 3

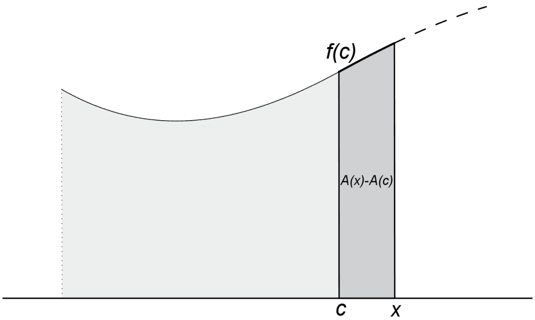


Figura 4

BIBLIOGRAFÍA

DE BOOR, C. (1978). "A practical guide to splines". *Applied Math.* Sci., vol 27.

SCHUMAKER, L. (2007). *Spline Functions: Basic Theory* (2nd edition). Cambridge: Cambridge Univ.Press.

STEWART, J. Stewart (2002). *Cálculo: transcendentes tempranas.* Florence, KY: Cengage Learning.

EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO MEDIANTE EL USO DE LA TECNOLOGÍA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. ALGUNOS EJEMPLOS*

Matías Camacho Machín
Universidad de La Laguna

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha puesto en evidencia el potencial que posee los CAS (Computer Algebra Systems) y el software dinámico para la resolución de problemas. El uso en el aula de estas herramientas tecnológicas, nos ha llevado a reflexionar sobre su importancia y utilidad para la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato, al objeto de desarrollar las competencias matemáticas de los estudiantes. Se requiere para ello el uso de problemas que requieran algo

* Este trabajo ha sido cofinanciado por el Proyecto de Investigación SEJ2005-08499 del plan I+D+i de la DGI del MEC

más que el empleo de fórmulas y procedimientos directos para su resolución. El desarrollo de diferentes programas informáticos (unos con fines educativos y otros no) tales como *DERIVE*, MAPLE y MATHEMATICA, Excel, Software de Geometría Dinámica, y Fathom, ofrecen la posibilidad de que los estudiantes representen objetos y relaciones matemáticas de diferente manera que con lápiz y papel. Por ello, es necesario hacer una reflexión que permita identificar el potencial que una herramienta puede ofrecer al estudiante durante las experiencias de aprendizaje, así como analizar qué procesos muestra el estudiante durante el camino de transformar un artefacto en una herramienta de aprendizaje o de resolución de problemas. El empleo de la herramienta, no garantiza que los estudiantes lo utilicen con éxito en la resolución de problemas, dado que involucra un proceso de transformación y adaptación que va más allá de hacer eficientes una serie de procedimientos que antes se realizaban de manera tediosa con lápiz y papel. Es importante considerar que el uso efectivo de alguna herramienta demanda que los estudiantes desarrollen recursos y estrategias que les permita apropiarse de ella y transformarla en un instrumento que les resulte importante para la comprensión de las matemáticas y para la resolución de problemas (Artigue, 2002).

Diferentes evaluaciones internacionales (TIMSS, PISA) han mostrado que gran parte de los estudiantes de diferentes países, experimentan grandes dificultades cuando se trata de utilizar sus conocimientos matemáticos para resolver problemas que necesitan el uso adecuado de diferentes recursos matemáticos, representaciones y estrategias para identificar o construir relaciones matemáticas.

En líneas generales, los estudiantes no poseen competencias para la resolución de problemas o no han desarrollado una forma de pensar que les ayude a concebir la disciplina como un conjunto de dilemas o problemas en los que ellos tengan la oportunidad de formularse cuestiones, hacer conjeturas, utilizar varias representaciones, identificar y explorar relaciones matemáticas, buscar argumentos que los sustenten y comunicar sus resultados. Es evidente, además, que se requieren transformaciones en el currículum de la Educación Secundaria, que pongan de manifiesto la importancia tanto de la Resolución de Problemas como del uso de la tecnología como herramienta de ayuda para su resolución. Los documentos curriculares actuales destacan la importancia y necesidad del uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

> *"Las herramientas tecnológicas, en particular el uso de calculadoras y aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, pueden servir de ayuda tanto para la mejor com-*

prensión de conceptos y la resolución de problemas complejos" (BOE, 2007, p. 45450).

Por otra parte, es importante también analizar posibles Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (Simon y Tzur, 2004) que los estudiantes puedan desarrollar con la ayuda de la tecnología, ya que eso facilitará el trabajo de los profesores cuando desarrollen el currículo escolar.

En este contexto, el empleo de alguna herramienta en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, no sólo influye en la manera de representar e interactuar con las ideas de la disciplina, sino también en las formas de razonar, sustentar y presentar relaciones o propiedades matemáticas. Ahora bien, ¿a qué nivel el empleo sistemático de alguna herramienta tecnológica produce cambios en la conceptualización misma del objeto matemático por parte de los estudiantes?, ¿qué tipo de representaciones del objeto matemático y tratamientos se privilegian con la ayuda de alguna herramienta?, ¿qué aspectos del pensamiento geométrico se destacan en la resolución de problemas con la ayuda de la tecnología? En este artículo, trataremos de ilustrar por medio de distintos ejemplos, la importancia del uso del software de geometría dinámica en el desarrollo, principalmente, del pensamiento geométrico.

Nos planteamos entonces algunos interrogantes que guiarán nuestro trabajo posterior: ¿Qué cambios curriculares son necesarios para ayudar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento matemático? ¿Qué tipo de problemas deberían resolver los estudiantes para construir hábitos consistentes con el pensamiento matemático ¿Qué escenarios pueden ayudar a valorar y exhibir aspectos propios de las prácticas matemáticas? ¿Cuál es el papel de las herramientas tecnológicas en el desarrollo del conocimiento matemático? Esta clase de cuestionamientos han formado parte de diferentes agendas de investigación dentro de la Didáctica de la Matemática y se han desarrollo varios programas de investigación en torno a ellas (Shoenfeld, 2007).

Nos centraremos en analizar los procesos matemáticos que pueden emerger cuando se trabaja con problemas rutinarios que aparecen en los libros de texto de Bachillerato. Nuestra intención será transformar estos problemas en un conjunto de actividades que muestren algunos aspectos importantes del quehacer matemático que van surgiendo durante el proceso de solución, con la idea de que resolver un problema o tratar de entender un concepto o idea matemática se puede convertir en una plataforma que permite al estudiante desarrollar su competencia matemática. Otro de nuestros objetivos será el de identificar métodos de investigación que ayuden a los profesores a convertir los problemas de los libros de texto tradicionales en una serie de actividades que faciliten múltiples acercamientos hacia la resolución de problemas.

Mostraremos como el uso sistemático del software dinámico para representar objetos y problemas matemáticos favorece, entre otras cosas, la búsqueda de relaciones entre los objetos matemáticos que intervienen, el planteamiento de conjeturas, la presentación de argumentos y/o explicaciones, las conexiones entre conceptos o ideas matemáticas.

Como ya se ha indicado con anterioridad, la presentación y discusión que seguiremos con la resolución de las actividades con herramientas tecnológicas, generará una información valiosa para que los profesores. El acercamiento dinámico hacia la resolución de las actividades, se basará principalmente en la utilización de una herramienta (el Geometer's Sketchpad) y se complementará con otras aproximaciones mediante las cuales el fenómeno se modela a partir del uso de recursos algebraicos (acercamiento algebraico). Se tratará de identificar las cualidades matemáticas asociadas a varios caminos de solución, con la intención de, más que privilegiar algún método particular, identificar las ideas y conceptos matemáticos importantes inmersos en los distintos métodos de solución, para que el estudiante sea capaz de valorarlos en sus experiencias de aprendizaje.

En este contexto, se presentan algunos problemas en los que se ilustra que el empleo de la tecnología no sólo favorece la construcción de relaciones matemáticas, sino también la exploración y búsqueda de conexiones y extensiones de los problemas.

1. LAS ACTIVIDADES

Se presentarán y analizarán tres actividades esencialmente diferentes. En la primera, se construye una configuración dinámica a partir de objetos simples (rectas, segmentos, perpendiculares, etc.) que sirve de punto de partida para generar las cónicas como lugares geométricos, contenidos importantes del Bachillerato. En segundo lugar, se aborda un problema de variación (determinar un mínimo), en el que el uso de diferentes recursos geométricos nos permitirá explorar el problema con mayor profundidad y establecer conexiones con el concepto de la derivada. Finalmente, en la tercera actividad se tratará nuevamente un problema de variación, con el objetivo de analizarlo desde sus diferentes sistemas de representación, visual, geométrico, gráfico, numérico y algebraico, incluyendo finalmente algunas extensiones.

1.1. Construcción de configuraciones geométricas[1].

Uno de los recursos más interesentes que nos ofrece cualquier software de geometría dinámica, es la disponibilidad de unos ciertos elementos básicos (recta, punto, círculo…) con los cuáles podemos construir configuraciones geométricas más complejas que surgen de la exploración y el análisis en profundidad de las construcciones realizadas. La actividad comienza a partir del trazado de una recta *r*, un punto Q, exterior a la recta y un punto P situado sobre la recta. A partir de estos elementos, se traza un segmento PQ, la recta *s* perpendicular a r que pasa por el punto P y la recta *t* perpendicular al segmento PQ que pasa por Q. Si R es el punto de intersección (Figura 1). Las rectas *s* y *t* se intersecan en el punto R, dando lugar al triangulo rectángulo PQR.

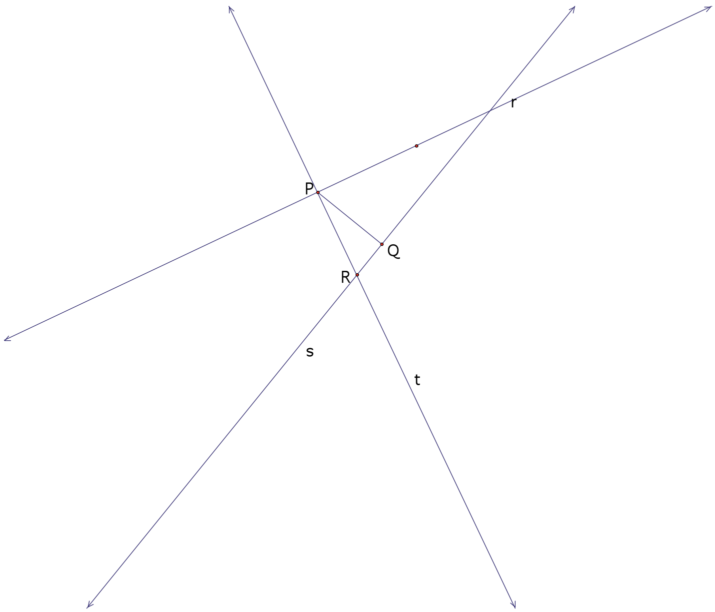


Figura 1.

Si se mueve el punto P sobre la recta r, se puede observar que van apareciendo diferentes triángulos rectángulos y a su vez, el punto R describe una curva que parece una parábola. Utilizando el comando “lugar geométrico”, se

[1] En CAMACHO, M. y SANTOS, M. (2006). Sobre el desarrollo del sentido geométrico y el uso del software dinámico. Revista *UNO*, 20-33, se puede encontrar un análisis más detallado del análisis de esta actividad.

observa que efectivamente aparece una parábola que deberíamos comprobar que efectivamente lo es (Fig. 2).

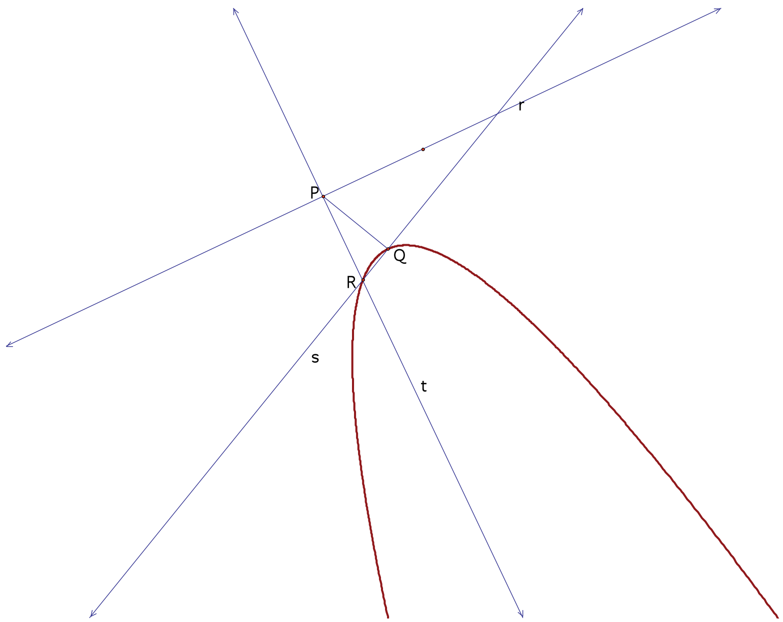


Figura 2.

¿Por qué el lugar geométrico de R cuando P se mueve sobre r es una parábola? Podemos utilizar el Sketchpad para hacer un análisis más preciso. Utilicemos el sistema cartesiano y ubiquemos la recta r sobre el eje OX, de tal manera que el punto P sobre r tiene por coordenadas (m, 0), y al punto Q (exterior) le asignamos las coordenadas (h, k).

En la figura 3 se observa que la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el punto P (recta t) se puede expresar como: $X = x$, la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q es $\frac{k}{h-x}$ y la pendiente de la recta s, al ser perpendicular al segmento PQ es $-\frac{h-x}{k}$, y su ecuación se puede expresar como: $Y = -\frac{h-x}{k}(X-h)+k$. Para determinar las coordenadas el punto R, bastará resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -\dfrac{h-x}{k}(X-h)+k \end{cases}$$

De esta forma, se tendrá que las coordenadas de un punto cualquiera de la curva serán: R$(x, \dfrac{(x-h)^2}{k} + k)$ y por tanto, el lugar geométrico buscado tendrá de ecuación: $y = \dfrac{(x-h)^2}{k} + k$

Que representa la ecuación de una parábola con vértice el punto Q(h, k).

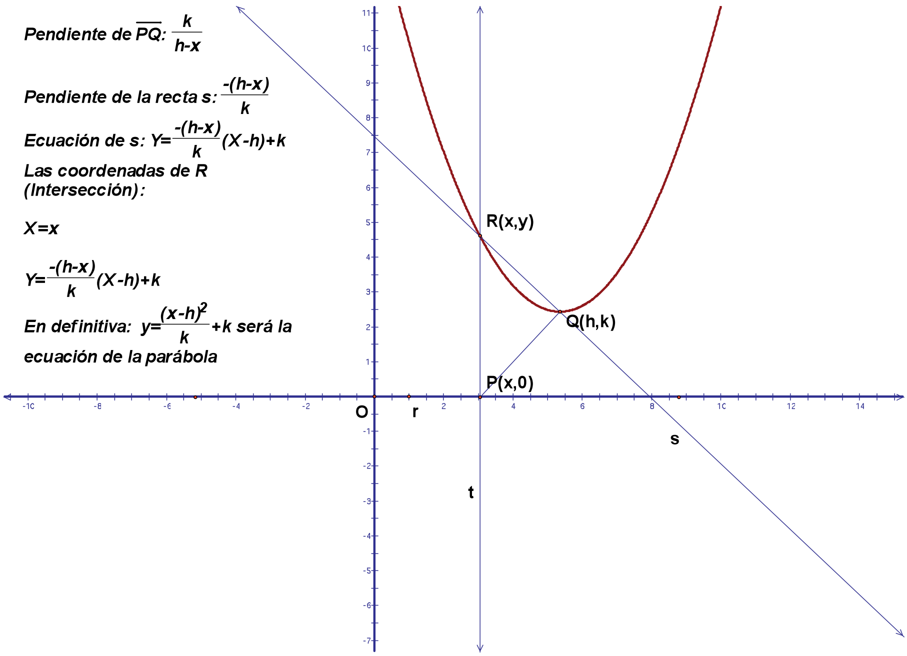


Figura 3.

Queda probado con este razonamiento la conjetura inicial que surgía desde el punto de vista intuitivo cuando simplemente se hace uso del dinamismo que nos facilita el software. Los estudiantes, tienen la oportunidad de construir configuraciones geométricas simples y tomarlas como punto de partida para plantear preguntas más complejas y explorar comportamientos de algunos objetos dentro de la configuración construida. Se puede concluir, además, que no es suficiente visualizar el lugar geométrico, sino que se debe buscar y presentar un argumento matemático que confirme esa conjetura. De esta manera, tenemos que el uso del Sistema Cartesiano proporciona una herramienta útil que facilita la presentación del argumento analítico que demuestra que el lugar geométrico es realmente una parábola.

Algunas extensiones

Teniendo en cuenta la definición de parábola como lugar geométrico “lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto (foco) y una recta (directriz)”, podemos obtener su construcción haciendo también uso del software dinámico y en particular el comando “lugar geométrico”.

Sea r la recta directriz y F el foco. Tomando un punto cualquiera sobre r, bastará con construir la mediatriz del segmento $\overline{AF}$ y trazar la recta perpendicular a la recta r que pasa por A. El punto P obtenido como intersección de ambas rectas cumplirá la condición de equidistancia y, como consecuencia, P describirá una parábola (Figura 4).

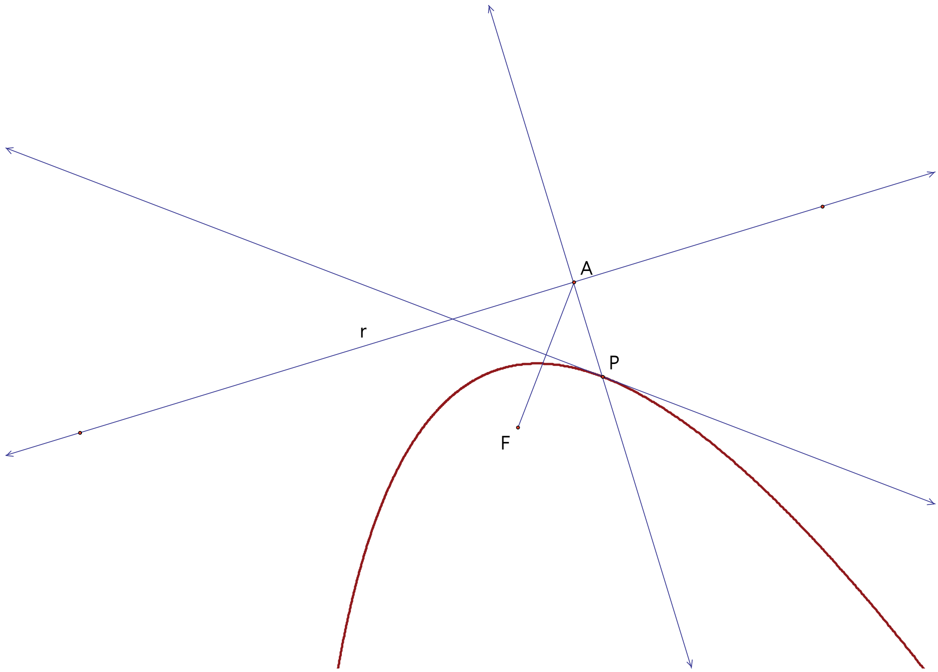


Figura 4.

La elipse y la hipérbola se pueden construir también atendiendo a consideraciones elementales. Para ello, dibujemos una circunferencia c, un segmento $\overline{AF_2}$ con uno de sus extremos situado sobre la misma y la mediatriz m de dicho segmento. El punto de intersección de la recta r que contiene al segmento $\overline{AF_1}$, determinará con la mediatriz un punto (Figura 5).

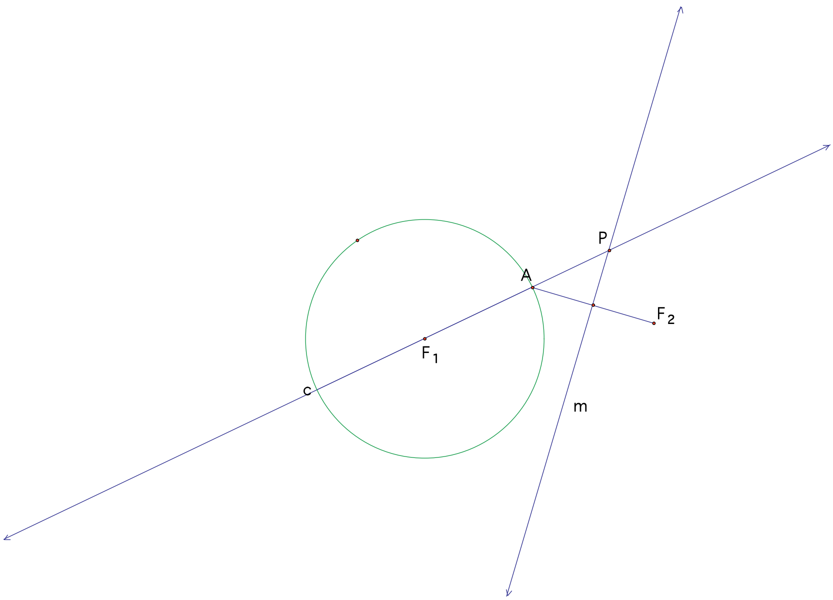


Figura 5.

Ahora, haciendo uso del comando "lugar geométrico", la curva descrita es una hipérbola de focos F_1 y F_2. La diferencia de distancias $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{AF_1}$ es constante e igual al radio de la circunferencia de partida (Figura 6).

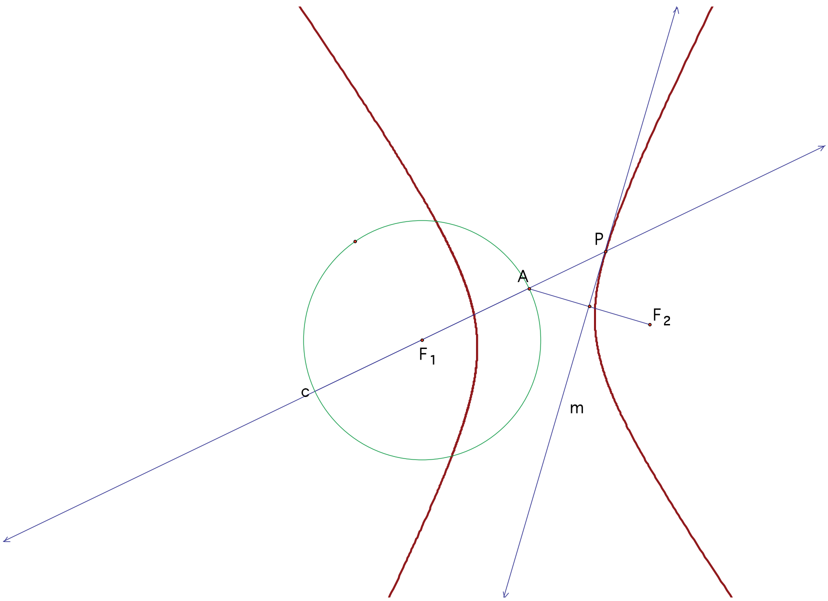


Figura 6.

Si se traslada el extremo F_2 al interior del círculo c, la hipérbola se transformará en una elipse de focos F_1 y F_2 (Figura 7).

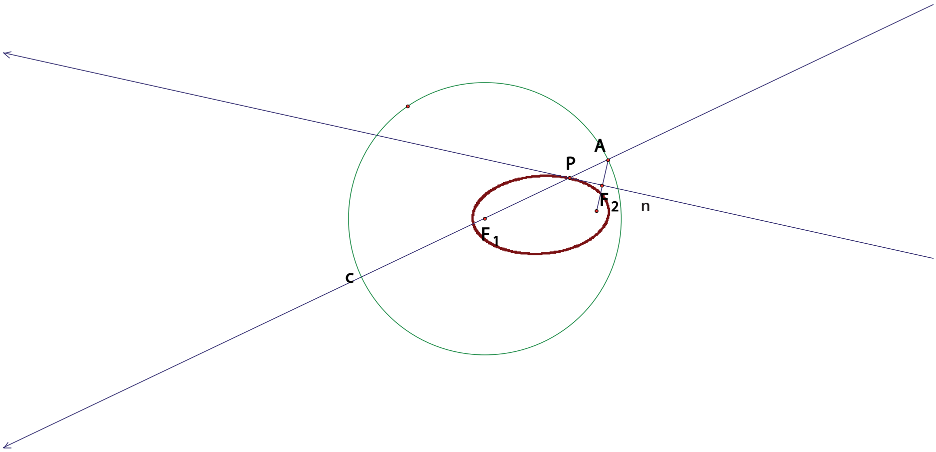


Figura 7.

Atendiendo a la figura, se puede observar que la suma de distancias $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{AF_1}$ es nuevamente el radio $\overline{AF_1}$. De este modo vemos cómo el uso del software dinámico no solamente resulta una herramienta poderosa en la reconstrucción o desarrollo de relaciones matemáticas, sino que también ayuda en la búsqueda de argumentos que sustenten tales relaciones.

1.2. Un problema de cálculo de máximos y mínimos[2]

El contexto en el que se sitúa esta actividad es diferente al anterior. Se mostrará, partiendo de un problema de optimización propio del segundo curso de Bachillerato, el uso del software de geometría dinámica para su resolución

[2] En CAMACHO, M. y SANTOS, M. (2006). Sobre el desarrollo del sentido geométrico y el uso del software dinámico. *Revista UNO*, 20-33, se puede encontrar un análisis más detallado de esta actividad.

analizándolo más desde una perspectiva geométrica que desde el punto de vista del Análisis. Veremos cómo este enfoque enriquecerá las posibilidades de aprendizaje del estudiante. Se explicitarán, durante la resolución del problema, algunas cuestiones que ayudarán no sólo a la obtención de su solución sino también a establecer diferentes las extensiones del mismo.

El Problema: *Sea Q un punto de la función y=1/x (en el primer cuadrante). Una recta tangente a la gráfica que pasa por el punto Q genera (con los ejes) un triángulo rectángulo. ¿Cuáles deben ser las coordenadas del punto Q para que la longitud de la hipotenusa sea máxima o mínima?* (Arcavi, 2005, p.44).

La primera pregunta que nos planteamos es ¿cómo representar la función gráficamente atendiendo a consideraciones geométricas? Bastará construir el punto de coordenadas $Q(x_p, \frac{1}{x_p})$, obtenido a partir del punto P situado sobre el eje OX y posteriormente determinar con el comando "lugar geométrico" la trayectoria que describe Q cuando P recorre OX (Figura 8).

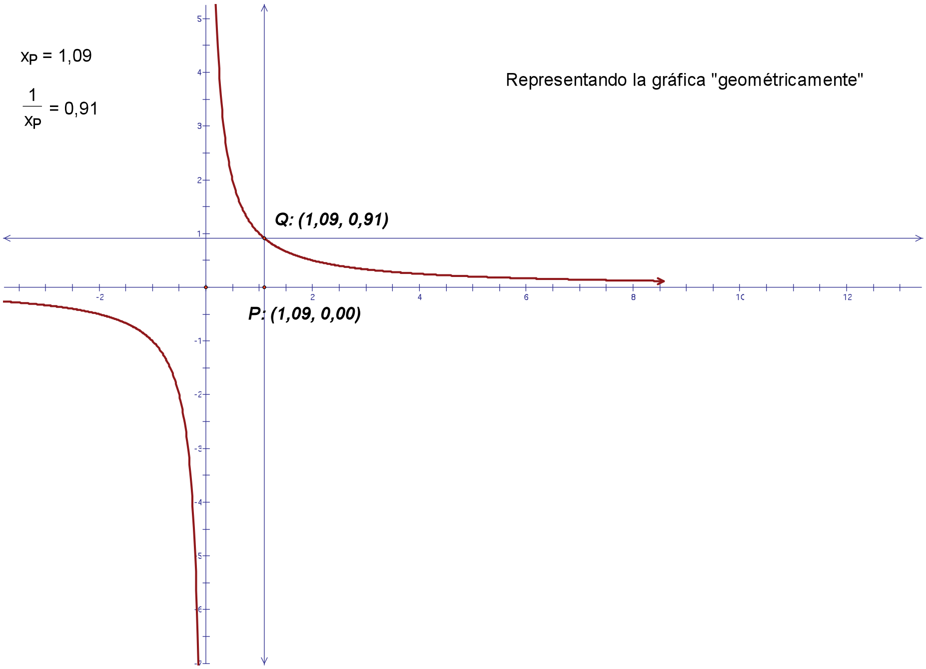


Figura 8.

Buscamos relaciones entre los elementos que determinan los datos del problema. Una primera pregunta es ¿cómo trazar la recta tangente r a la hipérbola en el punto Q? Para ello, construyamos la recta PR, siendo $P(x,0)$, la cual forma con los ejes un triángulo rectángulo (Figura 9). Se observa que al mover el punto P sobre el eje X, la inclinación de la recta PR con respecto al eje X cambia, obviamente, la pendiente de la recta PR es $m = -\frac{1}{x^2}$ y dado que la recta tangente a la hipérbola en el punto $Q(x, \frac{1}{x})$ tiene la misma pendiente ($f'(x) = -\frac{1}{x^2}$), el trazado de la recta r se hará construyendo una recta paralela a PR y que pasa por Q (Figura 9).

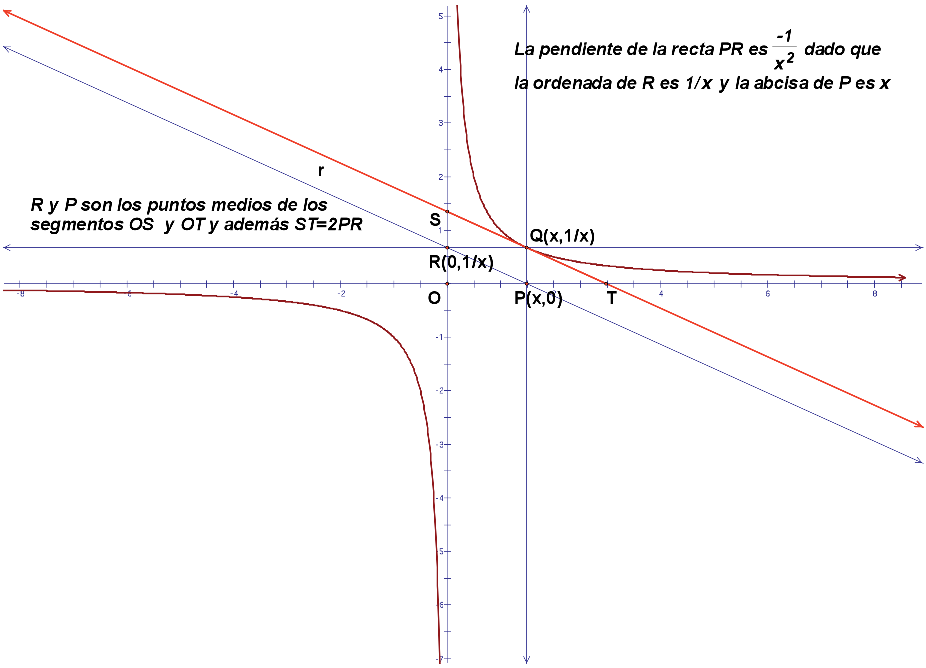


Figura 9.

Las representaciones dinámicas del problema permiten identificar invariantes o relaciones al mover objetos dentro de la representación. ¿Existe alguna relación entre los puntos O, R, y S?, ¿y entre los puntos O, P y T? Teniendo en cuenta la congruencia de los siguientes triángulos, $\Delta QRS \equiv \Delta POR \equiv \Delta TPQ$, se tiene que $\overline{OT} = 2\overline{OP}$ y $\overline{OS} = 2\overline{OR}$ y teniendo en cuenta que $\Delta POR \cong \Delta TOS$ (semejantes), la hipotenusa del triángulo ΔTOS, cuya hipotenusa queremos optimizar, será el doble que la del triángulo $\Delta POR \cong \Delta TOS$, esto es $\overline{ST} = 2\overline{PR}$ (Figura 9).

Puesto que, cuando el punto P se mueve sobre el eje OX, la longitud del segmento PR cambia y como consecuencia, también lo hace el segmento ST, nos planteamos. ¿Cómo varía la longitud de la diagonal PR del rectángulo OPQR? ¿En que posición alcanza un valor mínimo? Con la ayuda del software, se puede representar la relación entre la posición del punto P y el valor correspondiente de la longitud de la diagonal PR (Figura 10).

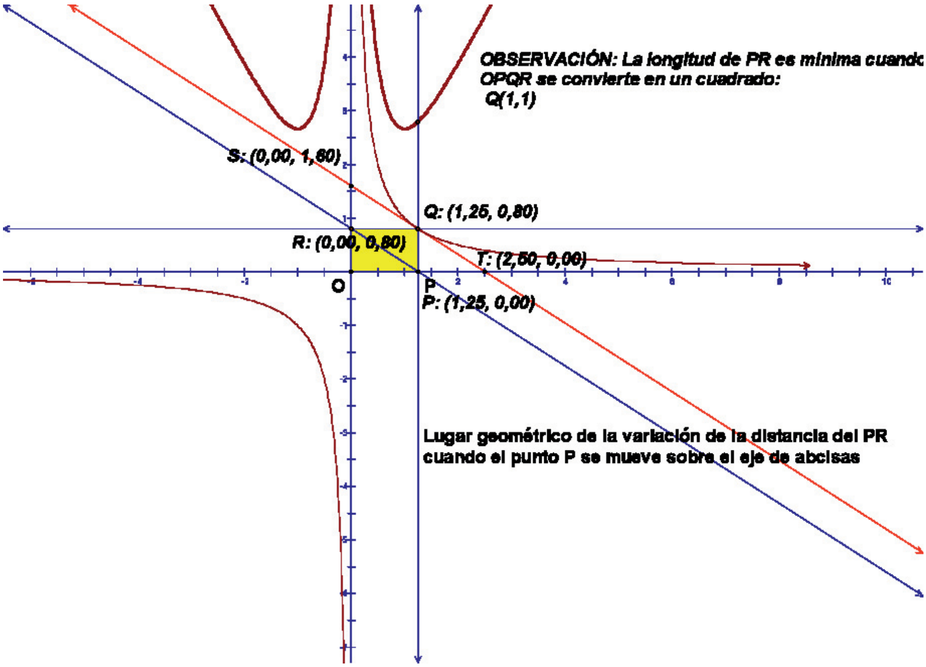


Figura 10.

Se observa además que, al mover el punto P sobre el eje X en una posición el rectángulo OPQR, se convierte en cuadrado y es en esa posición donde la longitud de la diagonal es mínima. Es decir, cuando Q tiene coordenadas $Q(1,1)$ la longitud de la diagonal es mínima (Figuras 11 y 12), con lo que queda resuelto el problema. El valor máximo no existirá.

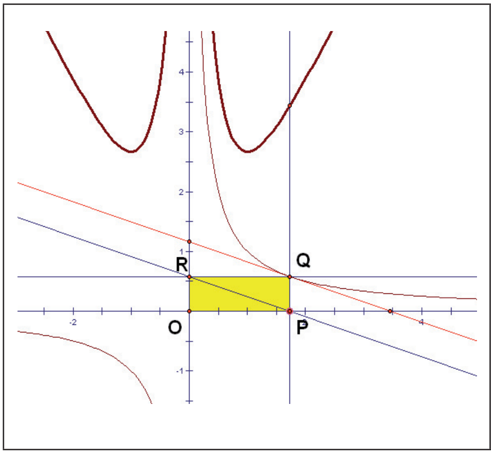


Figura 11.

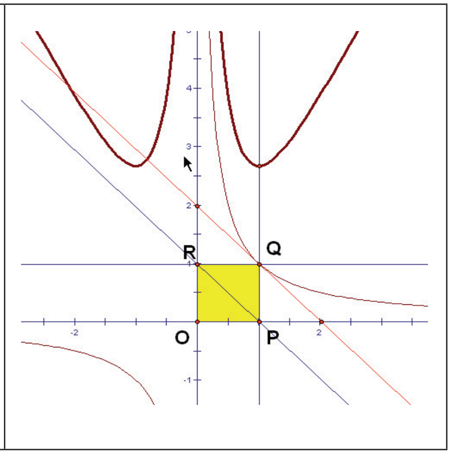


Figura 12.

Podemos proseguir con nuestro análisis, a partir de la manipulación dinámica, aunque en el enunciado del problema no lo requiera. Se puede ver que para cualquier posición del punto Q, el área del rectángulo OPQR es siempre la unidad cuadrada, lo que es obvio, dado que las dimensiones del rectángulo se pueden expresar como $\overline{OP} = x$ y $\overline{PQ} = \dfrac{1}{x}$. Como consecuencia tendremos que el área del rectángulo OTUS siempre será 4 unidades cuadradas para cualquier posición del punto Q (Figura 13), lo que nos permite enunciar el siguiente resultado:

> *Si Q es un punto de la función f(x)=1/x (en el primer cuadrante), la recta tangente a la función que pasa por Q corta a los ejes y genera un triangulo rectángulo. Para cada posición de Q el triangulo rectángulo generado tiene un área de dos unidades cuadradas.*

¿Qué ocurre con el área de esos triángulos cuando se considera la función $f(x) = \dfrac{n}{x}$ para $n = 2, 3, \ldots$?

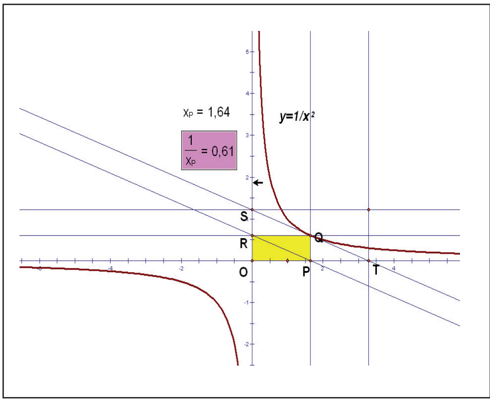


Figura 13.

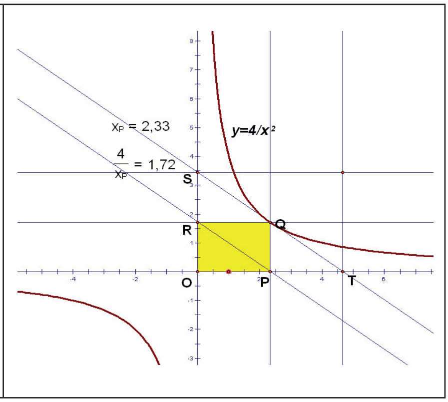


Figura 14.

Utilizando el software de geometría dinámica se pueden explorar algunos casos particulares y observar el comportamiento del área de los triángulos que se formas. La figura 13 muestra el valor del área que se forma en el primer cuadrante cuando la función es $f(x)=\frac{4}{x}$ y al analizar otros casos (lo que se realiza fácilmente con el uso del software) es inmediato conjeturar que

El área del triangulo que se forma tiene el doble del área del rectángulo que se forma al trazar la rectas perpendiculares desde el punto Q a ambos ejes.

Esta conjetura puede sustentarse al observar que las coordenadas del punto Q en $f(x)=\frac{n}{x}$ son $Q\left(x,\frac{n}{x}\right)$ y que el área correspondiente del rectángulo que se forma al trazar rectas perpendiculares desde Q es $x\left(\frac{n}{x}\right)=n$. Otra vez, el empleo del software genera información valiosa para analizar el caso general.

1.3. Otro problema de optimización[3]

Esta última actividad es un problema que podemos considerar rutinario (Monaghan et al., 1999), propio del segundo curso de Bachillerato y lo que pre-

[3] En Camacho, M.; Santos, M. (2004a). "El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Uno,* 37, pp. 105-122 se puede encontrar un análisis más detallado de esta actividad siguiendo un protocolo de solución análogo al utilizado por Polya, 1945.

tendemos mostrar en este artículo es la variedad de enfoques que podemos darle, aprovechando la oportunidad que nos brinda el manejo del software dinámico.

> Problema: *Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base (lado desigual) es a y la altura correspondiente h (suponiendo que un lado del rectángulo está sobre la base del triángulo.*

En un primer acercamiento al problema, podemos plantearnos algunas preguntas tales como: ¿cómo representar los datos del problema?, ¿qué significa que un triángulo sea isósceles y donde se localiza su altura?, ¿cómo construir un triángulo isósceles con esos datos?, ¿cómo inscribir un rectángulo en el triángulo isósceles con uno de sus lados sobre el segmento AB?, ¿cuál es el significado de que exista un rectángulo inscrito con área máxima?, ¿cómo se puede visualizar el comportamiento o la variación de las áreas de los rectángulos que se generan al mover el punto H a lo largo de AE? Desde una perspectiva dinámica, con el Sketchpad podemos representar la situación y visualizar la variación. En la Figura 15 se pueden observar diferentes rectángulos que se obtienen a medida que movemos el punto H sobre el segmento $\overline{AB}$ cuya área irá variando a medida que vamos modificando la posición del punto H.

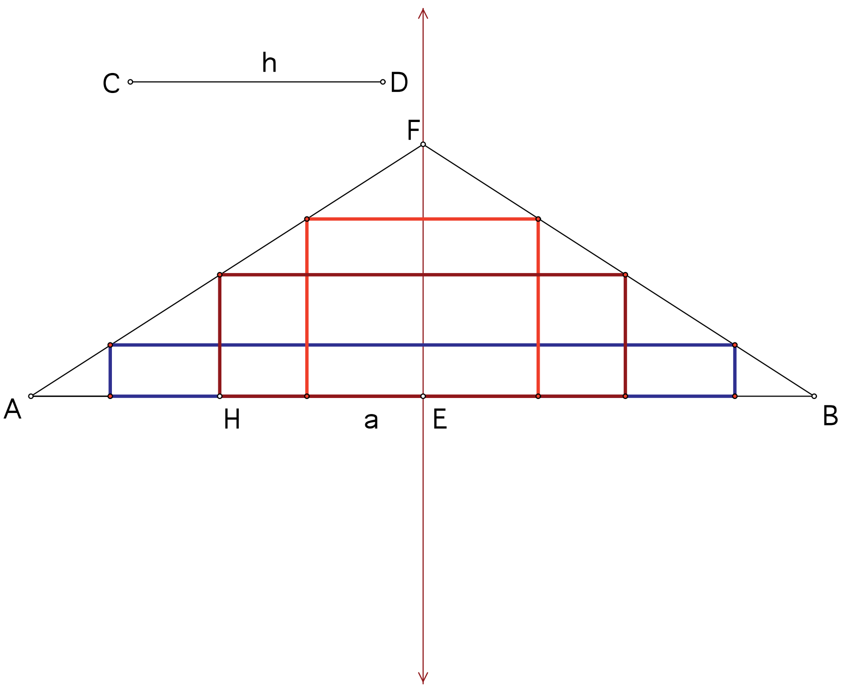


Figura 15.

Se observa que la altura EF es el eje de simetría del triángulo ABF, y por tanto, para resolver la actividad será suficiente encontrar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en el triángulo cuando el punto H se mueve sobre el segmento AE. Es decir, se explota la simetría del triángulo para determinar el dominio de búsqueda de la solución del problema.

El software nos permite calcular directamente el área de cada rectángulo y así estableceremos una representación gráfica que nos muestre, por ejemplo, la relación entre la longitud de un lado del rectángulo y su correspondiente área. Para esto, utilizamos el sistema cartesiano y situamos sobre el eje OX la longitud de un lado. El lugar geométrico del punto K (el cual representa la medida de un lado del rectángulo (primera coordenada) y su área correspondiente (segunda coordenada), al mover el punto H sobre el segmento AE nos permite representar gráficamente la relación lado-área de todos los rectángulos que se generan al mover el punto H sobre el segmento AE (Figura 16).

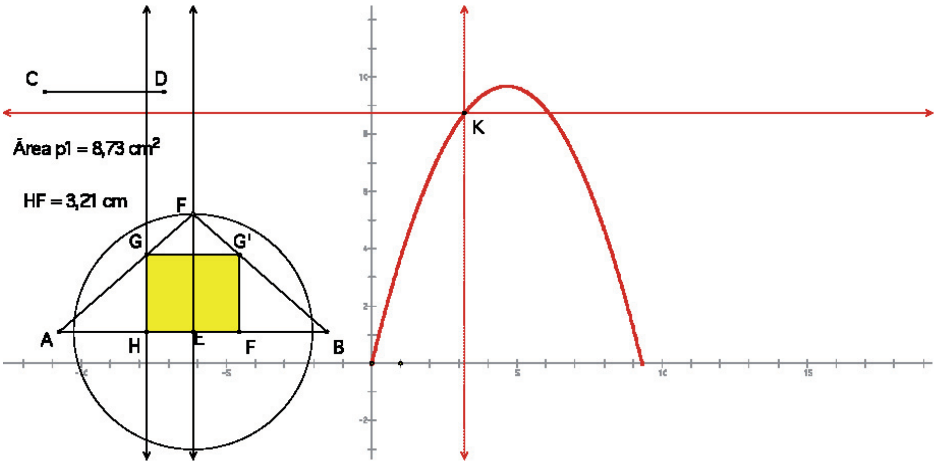


Figura 16.

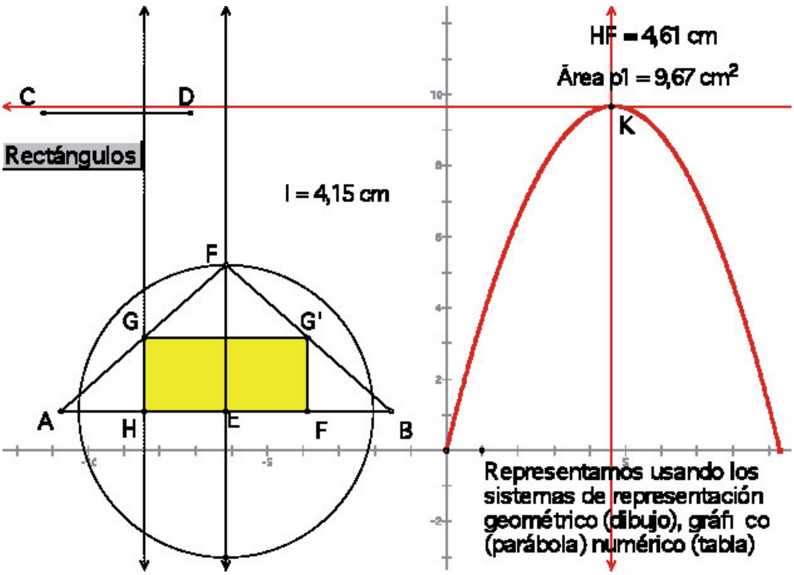
Se observa que cuando la recta corta a la gráfica en dos puntos significa que existen dos rectángulos inscritos con la misma área.

¿Existe algún punto sobre la gráfica donde la recta paralela al eje X pase solamente por ese punto? ¿Eso qué significa en términos del problema? En la gráfica se puede observa que cuando la longitud del lado del rectángulo (HF) es la mitad de la longitud del segmento dado AB y el otro lado HG es la mitad de la longitud de la altura EF, se cumplirá que el área del rectángulo tendrá área máxima.

Al analizar la simetría de la gráfica se tendrá por lo tanto que el punto donde la recta paralela al eje OX toca a la gráfica en un solo punto se corresponde con el punto donde el área del rectángulo alcanza su valor máximo, y la abscisa mide la mitad de la longitud del segmento dado. De hecho, este punto será vértice de la parábola que representa la función área.

Con la ayuda del software dinámico, también se puede generar una tabla en la que se muestre la variación que experimenta el área de los rectángulos cuando variamos el lado (Figura 17).

Se observa que al ir aumentando o disminuyendo (dependiendo de donde se sitúe inicialmente el punto H ya sea cerca de A ó de E) la longitud del lado del rectángulo, su área aumenta hasta alcanzar un valor y después, el valor del área comienza a disminuir. En la tabla se puede notar que el valor máximo se encuentra para $\overline{HF} = 4{,}61$, y debemos tener en cuenta que los valores son aproximados en virtud de la resolución del software cuando representa los puntos en la pantalla del monitor. También se podría realizar un proceso de refinamiento de la partición del intervalo para acercarse cada vez más al valor máximo que se busca (proceso de límite).



HF	Área p1
8,746	1,839
8,589	2,407
8,432	2,954
8,065	4,145
7,646	5,358
7,437	5,906
7,28	6,292
7,07	6,771
6,808	7,315
6,389	8,059
5,342	9,234
4,975	9,413
4,713	9,469
4,504	9,469
4,452	9,462
4,242	9,413
4,033	9,325
3,561	8,984
3,299	8,709
2,933	8,221
2,619	7,707
2,252	6,996
1,833	6,037
1,519	5,215

Figura 17.

A la hora de resolver el problema mediante desde la perspectiva del Análisis Matemático, podemos también hacer uso de la tecnología. Hay tres aspectos a tener en cuenta: Obtención de la función área, es decir, buscar una función que modele el comportamiento del área del rectángulo; la representación gráfica de la función a optimizar y finalmente, la derivada y la obtención del valor donde la función alcanza el valor máximo. En esta tarea es importante identificar las relaciones entre las figuras que se forman al inscribir el rectángulo para poder representar su área dependiendo de una sola variable. Aquí no importa la precisión de las figuras ya que solo se toman como referente para ubicar las relaciones importantes del problema. ¿Cómo se encuentra el área de un rectángulo? ¿Qué relación existe entre los rectángulos interiores y el triángulo original?

Sea ABF el triángulo isósceles con base a y altura h, se inscribe en él un rectángulo con lados *x, y* (figura 18) cuya área es *xy*. Se observa que los triángulos FEB y TUB son semejantes puesto que el ángulo $\hat{B}$ es común a ambos triángulos y además los ángulos $F\hat{E}B$ y $T\hat{U}B$ son rectos. Entonces se cumple que: $\frac{y}{m}=\frac{h}{\frac{a}{2}}$, ya que sus lados serán proporcionales.

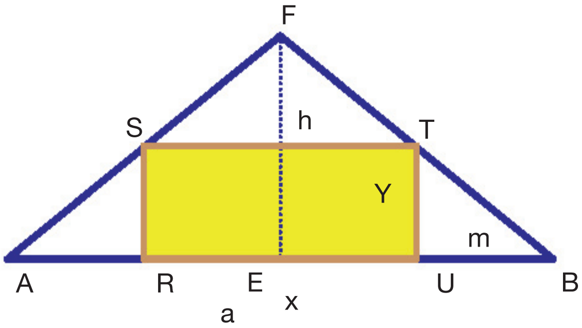


Figura 18.

Se observa en la figura que $m=\frac{a-x}{2}$, de tal modo que al sustituir este valor en la expresión anterior se tiene que $\frac{y}{\frac{a-x}{2}}=\frac{2h}{\frac{a}{2}}$, y consecuentemente $y=\frac{h(a-x)}{a}$.

Con estos datos se tiene que el área del rectángulo se puede escribir como

$$A(x)=xy=\frac{xh(a-x)}{a}.$$

La calculadora simbóliga Voyage 200 la utilizamos para representar gráficamente la función área y visualizar el punto donde la gráfica alcanza el valor máximo. La función área se podrá representar gráficamente si se le asignan valores concretos a la altura y a la base del triángulo (Figura 19). La calculadora permite realizar las operaciones pertinentes que ayudan a determinar el valor máximo haciendo uso de la condición suficiente de los puntos críticos. ¿Cómo obtener el valor máximo de esta función en términos generales? Para obtener el valor x donde el rectángulo inscrito alcanza su área máxima, se procede a derivar la función área. Usando la calculadora se determina la derivada de la función, los puntos donde se anula y la expresión de la segunda derivada de la función (figura 20).

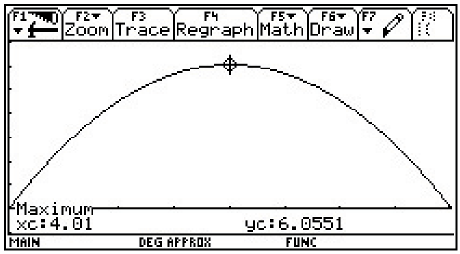


Figura 19.

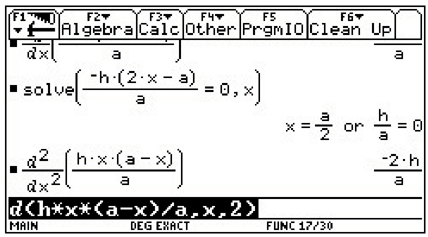


Figura 20.

Se observa que el signo de la derivada segunda es siempre negativo, lo que nos confirma que para $x = \frac{a}{2}$ la función alcanza el máximo valor. El valor de y será $y = \frac{h(a - \frac{a}{2})}{a} = \frac{h}{2}$.

Vemos cómo el uso de la calculadora simbólica facilita la realización de las operaciones que llevan a la solución del problema. No nos detendremos en la realización "a mano" de los cálculos, dado que consideramos que, cuando el estudiante ha asimilado la importancia de aplicar las propiedades de los conjuntos numéricos (conmutatividad, asociatividad, existencia del neutro, etc.) para reducir y operar términos semejantes, la calculadora ayudará al estudiante a enfocar su atención hacia los aspectos relacionados con el significado o comprensión del problema. Veamos a continuación algunas extensiones del problema.

En la representación dinámica del problema podemos observar que al mover el punto H sobre el segmento AE, los rectángulos que se generan adquieren distintas dimensiones. En un momento determinado parece que el rectángulo toma la forma de un cuadrado. Aquí se puede formular otra pregunta ¿dónde aparece exactamente el cuadrado inscrito en ese triángulo? Esta reflexión da pie a plantearnos una nueva pregunta en los siguientes términos:

¿Cómo construir un cuadrado inscrito ahora en un triángulo dado, con dos de sus vértices deben de estar en la base del triángulo y los otros dos sobre cada uno los otros dos lados, respectivamente?

Este problema aparece en Polya (1945, pp. 23,24) y también fue utilizado por Schoenfeld (1985) en una investigación en la que analiza las competencias de un grupo de estudiantes universitarios en la resolución de problemas. Schoenfeld indica en su estudio que, en general, los estudiantes mostraron serias dificultades al tratar de resolver este problema. Para la resolución de esta actividad, Polya sugiere que la estrategia “tomar sólo parte de la condición” puede ayudar a comprender el problema. En este caso siguiendo las indicaciones de Polya y con la ayuda del software dinámico se puede construir un cuadrado con dos vértices (D y G) sobre la base del triángulo y otro de sus vértices en uno de los lados (vértice E) (Figura 21). La representación dinámica del problema permite mover uno de los vértices (D) del cuadrado el cual está sobre la base del triángulo y determinar con ello la traza descrita por el vértice F (Figura 22).

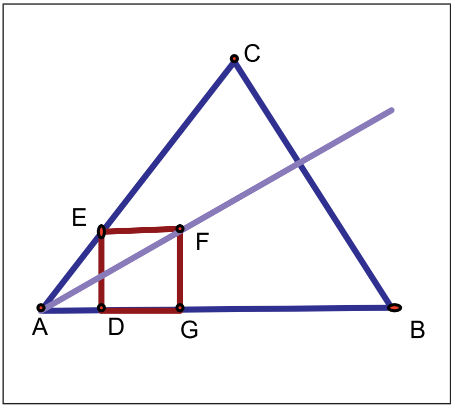


Figura 21.

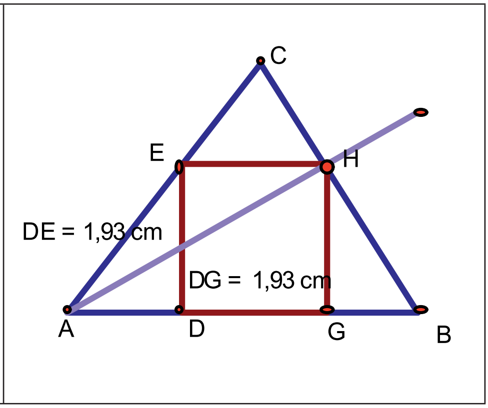


Figura 22.

El lugar geométrico que describe el vértice F es una recta que intersecta al lado BC del triángulo en el punto H (figura 22). Al mover el punto D de tal manera que el punto F coincida con el punto de intersección H, entonces se obtiene la solución del problema. Podemos concluir señalando que el software puede proporcionar al estudiante, después de este primer análisis, los elementos necesarios para ahora pensar el problema en términos de conceptos de geometría analítica. Por ejemplo, situar un sistema de coordenadas con origen el punto A, determinar las ecuaciones de las rectas correspondientes y determinar la intersección de la recta que contiene el segmento BC y la que define el lugar geométrico del vértice F del cuadrado (Figura 23).

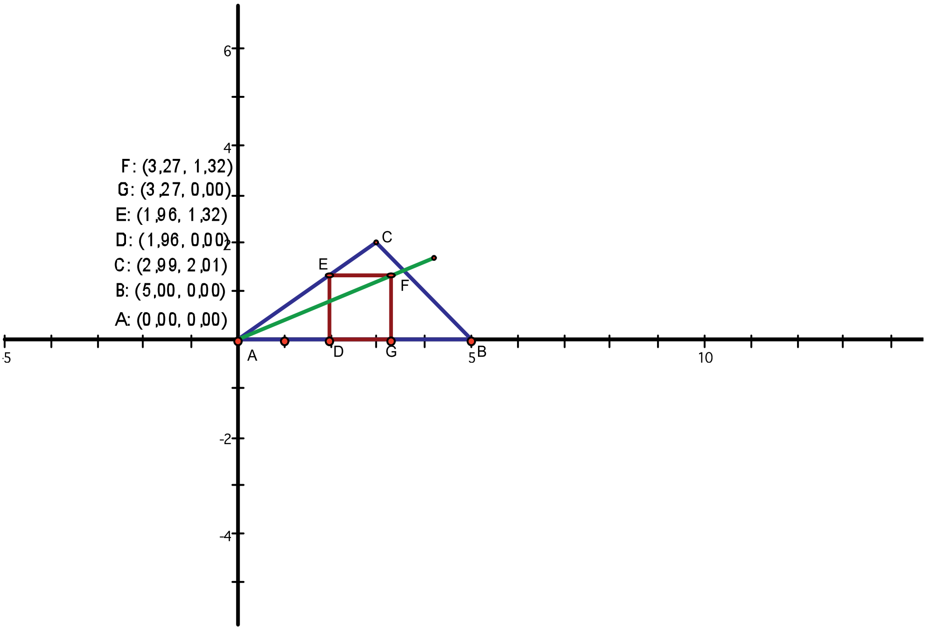


Figura 23.

2. ALGUNAS REFLEXIONES FINALES

Hemos tratado con este trabajo de mostrar que es importante propiciar un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes tengan oportunidad de participar directamente en los procesos de construcción y demostración de relaciones matemáticas de tal manera que el empleo sistemático de algunas herramientas tecnológicas ayuden a los estudiantes a utilizar diferentes representaciones de los objetos matemáticos que faciliten la búsqueda de relaciones.

Es necesario, además, que los profesores conozcamos el potencial de esas herramientas y seamos capaces de identificar diferentes estrategias que permitan utilizarlas en aula. Debemos ser conscientes de que las formas de razonamiento y las estrategias de solución que se surgen en la resolución de problemas con la ayuda de la tecnología son diferentes de las que aparecen con el trabajo exclusivo de lápiz y papel. Es importante que los profesores sean capaces de reflexionar y explorar el potencial de las herramientas.

Hemos mostrado algunos aspectos del quehacer matemático que resultan significativos al emplear el software dinámico en la resolución de problemas que ponen de manifiesto diferentes representaciones y formas de razonamiento que emergen en los procesos de resolución de problemas con el uso del software dinámico que complementan los acercamientos o procesos de solución que se realizan con lápiz y papel.

En relación con la Actividad 1, tenemos que no existe un problema establecido que el estudiante tenga que resolver. El software de geometría dinámica se emplea para construir una configuración geométrica a partir de objetos simples de tal manera que la configuración se convierte en una plataforma para la búsqueda de relaciones o teoremas.

Es importante descubrir la necesidad de buscar argumentos matemáticos que le den sustento a las conjeturas o relaciones matemáticas que emerjan durante la exploración.

El uso del software puede ayudar en la búsqueda de relaciones o invariantes a partir de analizar numéricamente los comportamientos de los objetos dentro de la configuración dinámica. ¿Cómo varía el perímetro de un triangulo u otro polígono, un segmento, un ángulo, etc.?, son preguntas que se pueden explorar fácilmente con la ayuda de la herramienta. Los estudiantes tienen la oportunidad de participar directamente en el proceso de construcción o reconstrucción de su propio repertorio de teoremas o resultados matemáticos

En la Actividad 2 el uso del software de geometría dinámica permite construir una representación del problema en términos de las propiedades de los objetos del problema. Las facilidades del software permiten representar gráficamente la función como un lugar geométrico para poder así establecer conexiones entre la pendiente de una de las diagonales del rectángulo que se forma al proyectar el punto Q sobre los ejes coordenados y la pendiente de la recta tangente de la función en el punto Q. La representación del problema se analiza en términos de preguntas que generan una serie de resultados o relaciones matemáticas. El estudio de la variación continua de la longitud de la diagonal del rectángulo se presenta desde el punto de vista gráfico, sin hacer uso de recursos algebraicos. En este caso, el empleo de la herramienta no sólo facilita la representación dinámica de los problemas que involucran variación, sino que ofrece la oportunidad a los estudiantes de conectar distintos contenidos y buscar nuevas relaciones o resultados.

Finalmente, en la Actividad 3, hemos mostrado que con el empleo del software dinámico, la representación del problema se realiza considerando las propiedades geométricas asociadas con el problema. El uso del software permite formular otras preguntas que resultan difíciles de plantearse utilizando solamente un acercamiento algebraico. En particular aquéllas preguntas que se formulan al considerar los efectos del movimiento en la figura. El estudiante tendrá la oportunidad de observar el comportamiento de los datos en la tabla, en la gráfica y en el rectángulo. El software calcula las áreas de los rectángulos que se generan al variar las dimensiones de uno de sus lados y también construir en un sistema cartesiano la gráfica correspondiente del al área de los rectángulos en función de uno de sus lados. La función área también se puede expresar a través mediante el cálculo de sus distintos valores ordenados en una tabla. Mediante el software dinámico, se ve la necesidad de cuantificar los atributos importantes del problema: las dimensiones de los lados, la altura, y el área de las figuras se convierten en nuevos ingredientes que nos ayudan a encontrar relaciones y formular conjeturas. Por ejemplo, con los datos del problema se observa que los lados del rectángulo inscrito con área máxima miden la mitad de la base y la altura del triángulo dado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCAVI, A. (2005). "Developing and using symbol sense in mathematics". *For the learning of mathematics*, 25, 2, 42-47.

ARTIGUE, M. (2002). "Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work". *International Journal of Computers for Mathematical learning* 7, 245-274.

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (BOE) núm. 266 de 6 de noviembre de 2007. *Currículo de Matemáticas en el Bachillerato.*

CAMACHO, M. y SANTOS, M. (2004b). "El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas". *Uno,* 37. 105-122.

CAMACHO, M. y SANTOS, M. (2006). "Sobre el desarrollo del sentido geométrico y el uso del software dinámico". *Revista UNO*, 20-33.

MONAGHAN, J., JOHNSON, P., BERRY, J. y MAULL, W. (1999). *Routine questions and examination performance.* Proceedings of the 23rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME23), 2, 105-112, Israel

POLYA, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

SCHOENFELD, A. (2007). "Problem solving in the United States, 1970-2007: Research and theory, practice and politics". *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, 537-551.

SIMON, M. & TZUR, R. (2004). "Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory". *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

MODELIZACION MATEMÁTICA Y CONTENIDOS MATEMÁTICOS

Matías Camacho, José L. Gámez, Mª José González, Tomás Recio

INTRODUCCIÓN

El actual currículo LOE de matemáticas de secundaria apuesta, en su fundamentación, por presentar la matemática como una ciencia que permite comprender el mundo y que debe estar conectada a la realidad cotidiana de los alumnos. Las referencias a los contextos y a los problemas reales son abundantes. La contribución de la matemática al desarrollo de competencias básicas también reconoce la modelización matemática como un referente para desarrollar la competencia en *conocimiento e interacción con el mundo físico*. Por otro lado, la distribución de contenidos matemáticos en el currículo se estructura en bloques de orientación académica (álgebra, geometría, etc.) que captan lo que podríamos llamar una aproximación tradicional a la enseñanza de las matemáticas y que se reproduce con frecuencia en los libros de texto. En esta aproximación la matemática se estudia antes que sus aplicaciones, y éstas suelen quedar como un apéndice que desarrollarán sólo los alumnos más aventajados.

Por ello, hemos considerado necesario llevar a cabo una reflexión sobre las implicaciones que tiene el realizar en el aula actividades de modelización matemática tomando como referente las actuales distribuciones de contenidos en nuestros currículos. Para ello, hemos examinado las referencias a la modelización en el currículo; hemos identificado tipos de actividades relacionadas con la realidad, seleccionando las que se ajustan a un planteamiento de modelización; hemos reflexionado sobre la posible disfunción que se puede producir al poner el énfasis en los procesos dejando en segundo plano a los contenidos; y hemos especificado cuál es el conocimiento matemático que esperamos perdure en la vida adulta de los alumnos.

1. DISTRIBUCIÓN DE CONTENIDOS EN NUESTROS CURRÍCULOS

En la distribución en bloques de contenido en el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (RD 1631/2006 de 29 de Diciembre) se especifica, por ejemplo, en el bloque de Números, que los alumnos han de saber *transformar fracciones en decimales y viceversa*; pero, además, han de saber utilizar *aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada*. En el bloque de Geometría, han de conocer los *planos de simetría de los poliedros*; pero, además, han de saber reconocer *los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.* O en el bloque de Funciones y Gráficas, han de conocer distintas *formas de representar la ecuación de la recta*; pero, además, han de ser capaces de formular *conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica*.
En esta distribución de contenidos observamos dos ideas. Por un lado, se requiere que el alumno conozca procedimientos matemáticos estándar y, por otro lado, es preciso que conecte su conocimiento con situaciones de la vida real o cotidiana. Pero es importante notar que la segunda parte no se produce de forma automática o natural a partir de la primera. Niss (2001) indica que
"There is no automatic transfer from the possession of solid knowledge of ('pure') mathematics to the ability to deal with applications and modelling matters and tasks".

Por ello, es preciso identificar actividades curriculares que fomenten esa transferencia.

2. ACTIVIDADES RELACIONADAS CON 'LA REALIDAD'

Kaiser (2005) establece una clasificación de tareas matemáticas en las que aparecen distintas conexiones entre el contenido disciplinar y los contextos prácticos:

- Problemas de palabras: "Juan invitará a pizza por su cumpleaños. Estima que cada uno de sus 7 amigos comerá 5 trozos de pizza. Cada pizza se parte en 6 trozos. ¿Cuántas pizzas tendrá que encargar?"
- Tareas matemáticas expresadas en lenguaje 'cotidiano' (no matemático): "Un adorno arquitectónico tiene forma de arco parabólico. Su altura máxima es 20m. y su anchura máxima 40m. ¿Cuál será la ecuación de ese adorno?"
- Ejemplos de conceptos matemáticos: Temperaturas para ejemplificar operaciones con números negativos: "Si por la noche la temperatura llega a los -2 grados y por el día asciende a 14 grados ¿Cuál es la variación?"
- Aplicación de procedimientos matemáticos algorítmicos para resolver problemas reales. Por ejemplo el problema de comparar precios de distintas compañías telefónicas de móviles para elegir la más rentable.
- Problemas de modelización: procesos complejos de resolución de problemas.

La modelización se refiere, por tanto, a la consideración de problemas abiertos, auténticos y complejos relacionados con la realidad. Para su resolución se requieren estrategias de resolución de problemas y pensamiento divergente (Maaß, 2006). Un ejemplo posible es el que se muestra a continuación, que presenta diferencias importantes respecto de las demás tareas matemáticas enunciadas.

Heladería

En el pueblo de Leo hay cuatro heladerías. Hoy Leo está haciendo cola en una de ellas. Un helado normal cuesta 0,60 euros. Leo se pregunta cuándo dinero ganará el dueño en un día caluroso de verano. Pregunta a sus amigos cuántos helados compran en un día y hace la media:

$$(3+4+5)/3 = 4 \text{ helados diarios por persona.}$$

Ahora multiplica por por el nº de habitantes (30.000) y divide el resultado entre las 4 heladerías que hay en el pueblo. Deduce que el propietario ganará:

$$30.000 \times 0,60 = 18.000 \text{ Euros}$$

¿Qué piensas de esta solución? ¿Cómo lo harías tu?

Los contenidos matemáticos intervienen en las tareas de modelización, pero es su coordinación a través de estrategias de resolución de problemas lo que distingue estas tareas de las demás. ¿Quiere esto decir que los contenidos matemáticos quedan en un segundo plano, mientras que lo que se destaca es los procesos que son capaces de coordinarlos?

3. PROCESOS VERSUS CONTENIDOS

Ver para creer. Cuando se encuentra la solución de un problema, es obligatorio cotejar y comprobar que efectivamente hemos encontrado lo que buscábamos. En algunos casos, esa comprobación puede ser puramente matemática (los valores despejados de las incógnitas cumplen efectivamente las ecuaciones). En otros, la comprobación puede consistir en actividades de laboratorio (pesar un trozo de cartulina para conocer su área, medir efectivamente la altura de un poste y la longitud de su sombra, etc.). Pero una vez aceptados los modelos y asimilados los conceptos, hay que *creer sin ver*. Las comprobaciones deben servir precisamente para dar credibilidad a las matemáticas, no para restársela. El alumno podría concluir erróneamente que es preferible "pesar la cartulina" que hacer los cálculos de la integral. Debe saber que en muchos casos en la vida real, no podrá "pesar la cartulina". Para esos casos precisamente, hay que aprender matemáticas.

Con este argumento queremos indicar que consideramos la oposición entre procesos y contenidos como una falsa dicotomía. Ambos aspectos se realimentan y se necesitan si se pretende que el alumno alcance niveles cognitivos elevados.

Ahora bien, no cabe duda de que el desarrollo de actividades de modelización genuinas requiere un tiempo y, por tanto, exigirá una reconsideración de la cantidad de contenidos. La dedicación horaria a las matemáticas en la educación obligatoria y postobligatoria no es suficiente para todo. La apuesta por la modelización debería ser una oportunidad para corregir, en la práctica docente, ciertos problemas en la distribución de los contenidos (Recio, 2002). Así, por ejemplo, podría servir para poner el énfasis en los contenidos de carácter geométrico y estadístico.

4. CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS CON VISTAS AL FUTURO

¿Qué conocimientos disciplinares necesitará el alumno cuando llegue a la vida adulta? ¿Qué tienen que ver con lo que se pregunta en el examen de la materia? ¿Y con lo que el profesor del curso siguiente espera que el alumno recién llegado sepa?

A corto plazo, el objetivo de la enseñanza de las matemáticas en un curso debería ser el poder resolver problemas, constatar la utilidad de los conceptos y adquirir la soltura que permita el avance dentro del propio currículo hacia conceptos posteriores. A largo plazo, realmente muy pocos adultos usan de modo cotidiano los contenidos de matemáticas de Secundaria y Bachillerato y, por tanto, los suelen olvidar (Recio, 2007). Una enseñanza centrada en la modelización puede conseguir que los alumnos asimilen más profundamente los contenidos implicados en ellas. Aunque con el paso del tiempo terminen olvidando los pormenores relativos a su uso, seguramente recuerde "para qué servían".

5. CONCLUSIONES

Cada nuevo concepto matemático puede introducirse desde la necesidad de comprender, describir o solucionar una situación problemática. Los modelos pueden provenir de la Física, la Ingeniería, la Economía, etc., aunque en algunos casos son las propias matemáticas las que reclaman herramientas que faciliten su propio uso. Los contenidos de tipo descriptivo o geométrico cobran especial importancia en los procesos de modelización en la etapa secundaria obligatoria. Estos procesos permiten profundizar en la comprensión de los conceptos matemáticos y son los responsables de que la matemática perdure en la vida adulta de los alumnos.

BIBLIOGRAFÍA

KAISER, G (2005). *Mathematical modelling in school: examples and experiences.* Paper presented at the Fourth Congress of the European society for Research in Mathematics Education (CERME 4).

MAAß, K. (2006). "What are modelling competencies?". *ZDM*, 38(2), pp. 113-142.

NISS, M. (2001). Issues and Problems of Research on the Teaching and Learning of Applications and Modelling. En J. F. Matos, W. Blum, K. Houston, S. P. Carreira (Eds). *Modelling and mathematics education: ICTMA9 Applications in science and technology,* pp. 72-88. Chichester: Horwood Publishing.

RECIO T. (2002). "Sobre la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria Española". *SUMA*, 39, pp. 5-11.

RECIO T. (2007). "La ciencia invisible". *UNO*, 46, pp. 9-24.

EXPERIENCIAS Y REFLEXIONES EN TORNO AL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN SECUNDARIA CON APOYO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

Antonio Marín del Moral
Universidad de Granada

1. LA COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Es frecuente entre el profesorado proponer como expectativa de aprendizaje que los alumnos “dominen las matemáticas”. Esta afirmación puede tener diferentes significados entre los que ha venido predominando que dominar las matemáticas quiere decir “saberse el programa”.

En la actualidad esta afirmación está muy matizada por las necesidades sociales, europeas al menos, de normalizar las expectativas de aprendizaje de diferentes países con programas distintos. ¿Cuál es el programa a saberse? ¿Cómo formularlo?, ¿por una lista de contenidos matemáticos? ¿Cómo coordinar esta forma de expresar expectativas con las tendencias actuales a reconocer en los profesionales no sólo lo que “saben” (en un sentido enciclopédico) sino también lo que saben hacer?

Una perspectiva actual para afrontar estos retos consiste en incorporar al lenguaje educativo un vocabulario y ciertas habilidades en torno a la noción de competencia. Hablar con un vocabulario de competencias es útil cuando “dominar las matemáticas” se caracteriza no sólo por el conocimiento de ciertos contenidos sino también por la observación del desarrollo de procesos como los que transcurren al Resolver Problemas, Argumentar y Justificar, Comunicar el conocimiento matemático o realizar una modelización en un problema aplicado.

La competencia en matemáticas de una persona puede entenderse, siguiendo la definición que aporta el Proyecto KOM de Dinamarca como “ser capaz de actuar en respuesta a ciertos tipos de retos matemáticos característicos de una situación dada” (Blomhøj and Jensen, 2003).

La competencia matemática se subdivide en diferentes indicadores de la competencia como los que establece el proyecto PISA (PISA, 2003, p.40), patrocinado por la OCDE, estudio que ha sido adoptado como instrumento para evaluar en jóvenes de más de 40 países esta competencia matemática.

- Pensar y Razonar.
- Argumentar.
- Comunicar.
- Modelar (Modelizar).
- Plantear y resolver problemas.
- Representar.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.
- Empleo de soportes y herramientas.

Cuadro 1.

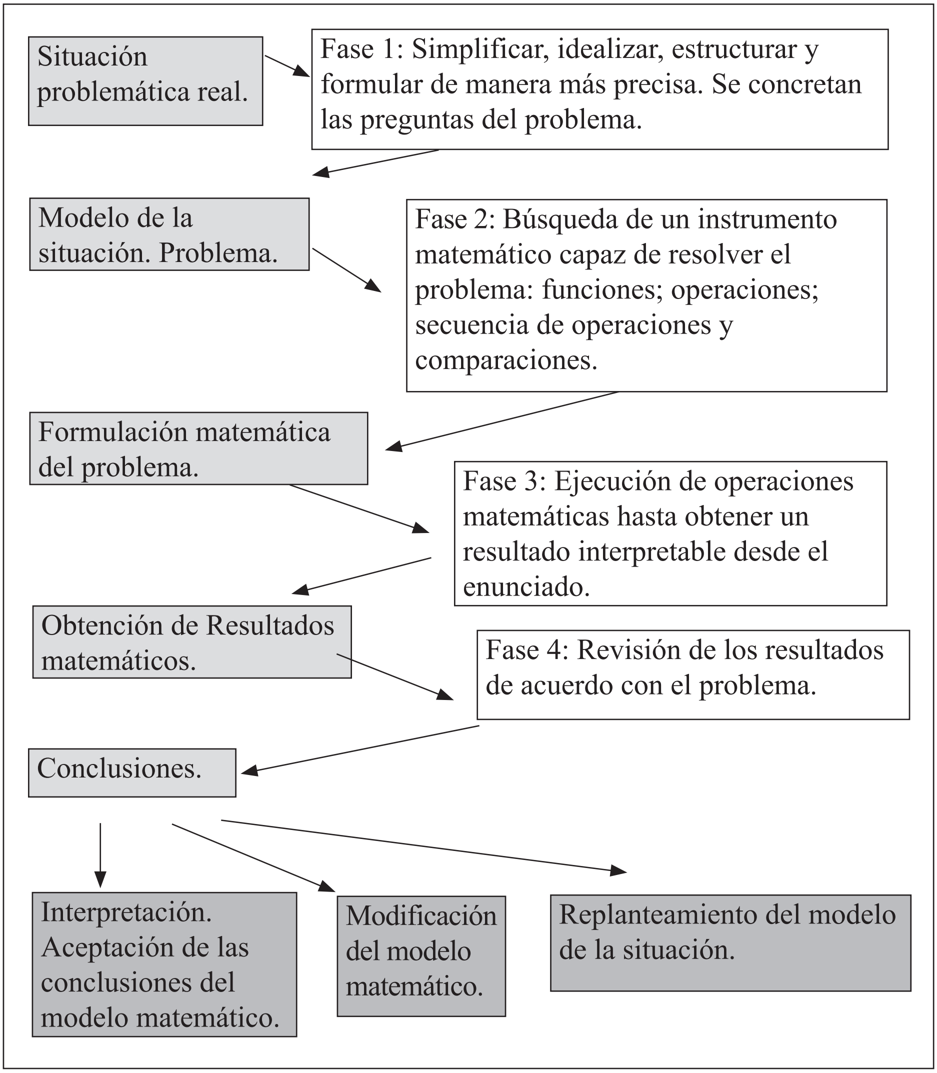
En el cuadro 1 se muestran los títulos de los indicadores de la competencia que utiliza el Proyecto PISA. El objeto de este artículo es dar pistas que contribuyan al desarrollo de la capacidad de modelar (o modelizar) en alumnos de Secundaria con ayuda de las Nuevas Tecnologías.

Este indicador de la competencia (o también llamado competencia matemática) se describe así:

> *"Saber estructurar la situación a modelizar; traducir la "realidad" en estructuras matemáticas; interpretar modelos matemáticos en términos de "realidad"; trabajar en fundamentar un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y proponer una crítica del modelo y de sus resultados; poder comunicar con otro el objeto de un modelo y de sus resultados, comprendiendo sus límites; generar y controlar el proceso de modelización"* (PISA, 2003, p.40).

1.1. La competencia describe las fases de un proceso

Esta descripción de lo que se espera que un estudiante sepa hacer ante un problema si domina la competencia de modelizar, en realidad indica que el estudiante afronta con éxito un proceso de trabajo típico de estos problemas. El proceso se resume en el cuadro 2.



Cuadro 2.

Al detenerse en cada una de las fases del proceso de modelizar es posible formular indicadores que ayudan a describir hasta qué punto un resolutor alcanza aspectos parciales de la competencia.

W. Blum y G. Kaiser (1997, p.9), hicieron una de las posibles descripciones de cada fase del proceso. Por ejemplo, en el Cuadro 3 se enuncian expectativas que el profesor puede formular cuando un alumno trabaja un problema de modelización en la fase de "comprender la situación y obtener un modelo que estructure la información" (Fase 1).

- Hacer suposiciones sobre el problema y simplificar la situación.
- Reconocer las cantidades que influyen en la situación. Obtener sus valores e identificar las variables clave.
- Construir relaciones entre las variables.
- Buscar la información disponible y diferenciar entre la información relevante e irrelevante.

Cuadro 3.

Esta subdivisión de la competencia de modelizar en indicadores más precisos ayuda a clasificar las tareas que se les presenten a los alumnos según la actividad cognitiva que intervenga en cada fase. Por ejemplo, si siempre se presentan problemas en los que todos los datos son necesarios no ayudamos a que se aprenda a "Descartar datos irrelevantes" en un problema. Otra situación muy frecuente es redactar el problema de manera cerrada con todos los datos formulados con precisión para que aparezca fácilmente el tipo de contenido matemático a utilizar. En este caso, tampoco se ayuda con la tarea a "Hacer suposiciones sobre el problema y simplificar la situación" ya que el alumno no necesita hacer ningún esfuerzo en esta orientación.

1.2. Indicadores de competencia, expectativas de aprendizaje y tareas escolares

Incorporar al trabajo de planificación de la clase un análisis de las tareas y los objetivos educativos organizado desde las competencias da, de una parte, la posibilidad de organizar nuestras expectativas de aprendizaje en diferentes lecciones y contenidos según finalidades comunes a todos los temas.

Por otra parte, si se entiende la competencia de modelizar como una actividad cognitiva, su aprendizaje estará siempre ligado a los contenidos concretos de cada unidad didáctica, pero, a su vez, en todas los problemas de modelización de los diferentes temas de un curso se activan en el estudiante aspectos parciales de las fases del proceso de modelización de características similares. Es importante señalar en las tareas de modelización los diferentes indicadores de competencia (o capacidades) que esperamos utilicen. Así tendremos una visión más global de la medida en que las tareas propuestas ayudan a desarrollar la competencia y también de las lagunas previsibles en este desarrollo por ausencia de actividades que estimulen estas capacidades cognitivas.

Finalmente, la detección de errores y dificultades se hace más precisa ya que, al actuar sobre el trabajo del alumno se estará en disposición de analizar mejor de donde procede el error. Por ejemplo, cuando un alumno no tiene éxito en la fase 1 del proceso de modelización, trabajar con estos indicadores daría pistas para analizar. Se está ante "una elección incorrecta de los datos", "una formulación errónea de las relaciones entre ellos" o "una interpretación no válida de variables clave".

A continuación se presenta una experiencia en la que se propone una tarea escolar de modelización matemática para una edad equivalente a nuestro primero de ESO, de carácter abierto y en la que se pueden activar ciertos indicadores de la competencia de modelización que se enuncian al final. También se muestra la forma de trabajar en algunas fases del proceso de modelización.

Ejemplo: El Porsche

Katja Maaß, Universidad de Educación de Friburgo
Nivel: 13 años, 1º ESO/2º ESO
Tipo de Experiencia: Esta unidad de trabajo forma parte de un proyecto amplio para introducir la Modelización matemática en el aula (Maaß, K. 2006, p.113-139)

Información sobre el contexto de la tarea:

Cuando un nuevo tipo de auto se está desarrollando y antes de fabricarse, se calculan sus costes exactos. Entre otras cosas es necesario calcular los costes de pintura. La pintura de un Porsche consta de 4 capas de diferente espesor:

1) 18-32 µm; 2) 25-40 µm; 3) 20-25 µm; 4) 30-45 µm

No se puede calcular directamente cuanta pintura se necesita con el grosor y la superficie pintada porque una parte del disolvente y agua se evapora. También otra parte se disemina en el aire. Por ejemplo se usa dos veces más pintura de la capa 3.

Así puedes calcular la cantidad de pintura con el grosor de cada capa, el factor de pintura evaporada y la superficie. Comencemos por calcular la superficie.

Datos iniciales del problema:

Porsche 911. Hoja del manual de características técnicas (Figura 1).

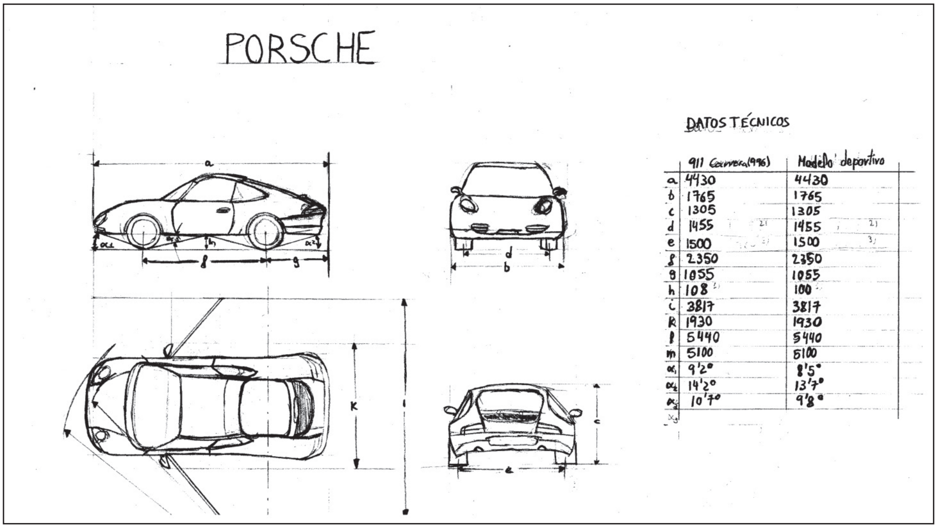


Figura 1.

Desarrollo de la actividad

Durante algún tiempo de trabajo aparecen opiniones de los alumnos pidiendo una fórmula para calcular el área o planteando que el problema es imposible de resolver. Después surgen estas hipótesis formuladas por los estudiantes sobre el modelo para resolver el problema matemáticamente:

a) Aproximar el Porsche por un ortoedro con dos posibilidades I) la altura del ortoedro es la del Porsche; II) la altura es la mitad de la altura del vehículo. Si se consideran neumáticos la altura puede ser menor.
b) Segmentar la superficie en pequeños triángulos y rectángulos. Calcular su área y sumarlas teniendo en cuenta la escala.
c) Recubrir el Porsche con papel o tela y después medir la tela.
d) Llamar a la fábrica de Porsche.

Después del debate se eligen solamente estos modelos para trabajar:

- Aproximar el Porsche por un ortoedro cuya altura es la del Porsche.
- Aproximar el Porsche por un ortoedro cuya altura es la mitad de la altura del vehículo. Si se consideran neumáticos la altura puede ser menor.
- Segmentar la superficie en pequeños triángulos y rectángulos. Calcular su área y sumarlas teniendo en cuenta la escala (figura 2).

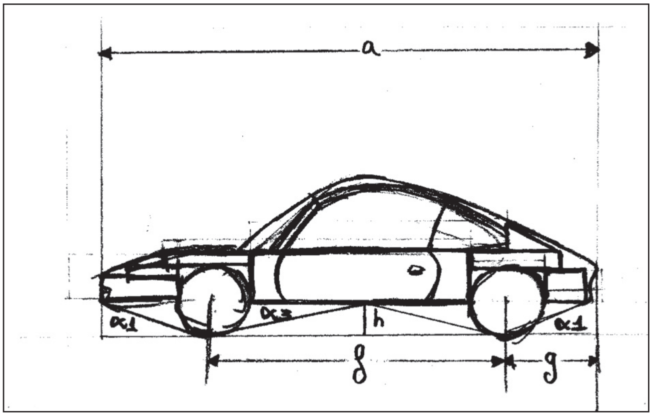


Figura 2.

Dificultades surgidas en el proceso

- Dificultades con la visión espacial del vehículo al asociar los lados del Porsche al ortoedro que actúa de modelo estimativo.
- Dificultades con el cálculo de las medidas: escalas.
- Al presentar los resultados finales surge la dificultad de valorar la exactitud de los resultados por las simplificaciones realizadas y la duda acerca de si los modelos utilizados son apropiados. Solamente se llega con claridad a que la aproximación por un ortoedro de la mitad de altura que el vehículo es más ajustada que si el ortoedro tiene como altura la del Porsche pues da un resultado mayor, aunque requiere menos cálculos y necesita menos datos.

Consideraciones finales

Los alumnos se preguntan ¿Cómo se mide en la realidad esta área? Consultadas las fuentes de información se les informa que un programa de diseño asistido por ordenador calcula la superficie con un algoritmo semejante al que se manejó en el método de descomposición en triángulos y rectángulos. Algunos alumnos confirman que su modelo no es único.

Descriptores de la competencia de Modelización involucrados. El profesor al planificar puede suponer que en este proceso se activarán algunas de las capacidades que tienen que ver con la competencia de Modelización. Los cuadros 4 y 5 muestran una gama de capacidades que se espera que el alumno activará y desarrollará cuando realice la tarea. Después, en una evaluación continua y sistemática comprobará si ha existido un desarrollo de ellas.

Comprender y construir el problema y formularlo matemáticamente	Activación
Hacer suposiciones sobre el problema y simplificar la situación	Sí
Reconocer las cantidades que influyen en la situación. Obtener sus valores e identificar las variables clave	Sí
Construir relaciones entre las variables	Sí
Buscar la información disponible y diferenciar entre la información relevante e irrelevante	Sí
Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones	Sí
Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones. Si es necesario reducir la complejidad	Sí
Elegir notaciones adecuadas y representar situaciones gráficamente	Sí

Cuadro 4.

Resolver el modelo matemático, interpretar y validar resultados	Activación
Usar estrategias de resolución diferentes	Sí
Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema	Sí
Interpretar matemáticamente los resultados en contextos extramatemáticos	Sí
Expresar y comunicar la solución con un lenguaje adecuado	Sí
Analizar críticamente las soluciones encontradas	Sí
Reflexionar sobre otros modos de resolver el problema	Sí

Cuadro 5.

Estas frases redactadas en los Cuadros 4 y 5 no se han referido a un contenido matemático concreto. Si se expresaran utilizando referencias a conceptos o procedimientos matemáticos como, por ejemplo, la capacidad de “hacer suposiciones o simplificar situaciones en problemas mediante figuras tridimensionales como el ortoedro” o a “Identificar las variables clave en problemas relativos al cálculo de áreas” se estaría descendiendo a la formulación de una expectativa de aprendizaje mediante un objetivo específico”. En las experiencias y tareas escolares que se analizan en este artículo el nivel de descripción acerca de lo que se espera aprender se sitúa en los indicadores de competencia.

1.3. La competencia ayuda a describir el progreso del alumno

En una experiencia realizada por Blomhøj (Universidad de Roskilde) y Jensen (Universidad de Educación de Dinamarca) entre 2000-2003 (Blomhøj,

M. Jensen, T.H, 2007, p.45-56) se ha utilizado esta formulación de competencias para investigar el progreso en la competencia de Modelización Matemática (MM) en tres niveles educativos: Secundaria (14-15 años), primer año de Universidad y Cursos de Formación del Profesorado.

Los autores manejan tres criterios para ver como se progresa en esta competencia:

- El grado de cobertura: Parte o fase del proceso de modelización matemática que trabajan los alumnos y el nivel de reflexión o destreza con que manejan los indicadores de competencia que caracterizan a cada fase.
- Nivel técnico: El tipo de matemáticas o modelos matemáticos que usan y su destreza.
- Contexto: Tipos de situaciones en que los estudiantes son capaces de desplegar sus conocimientos sobre modelización.

El análisis de esta experiencia compara el grado de cobertura y el nivel técnico ya que al ser el mismo problema no hubo variación en el contexto.

Ejemplo: El tráfico

La base del problema es el texto de un mensaje de una campaña de tráfico.

> "*Un vehículo a 60 Km/h adelanta a otro que va a 50 Km/h. Cuando los vehículos están juntos una chica aparece algunos metros más adelante. Los conductores reaccionan al mismo tiempo y los coches tienen frenos de igual calidad. El coche con velocidad de 50 Km/h se detiene justo a la altura de la chica, mientras que el otro coche, con una velocidad inicial de 60 Km/h golpea a la chica con una velocidad de 44 Km/h. Siete de cada 10 peatones mueren en un accidente de este tipo ¿Puede esto ser cierto?*

Condiciones de trabajo

Los alumnos podrán realizar esta tarea manejando una hoja de cálculo y en grupo. La duración es de 6 a 8 sesiones de clase en dos semanas y deberán escribir un informe final.

Expectativas de aprendizaje:

Descriptores de competencia	Activación
Reconocer las cantidades que influyen en la situación. Obtener sus valores e identificar las variables clave	SI
Construir relaciones entre las variables. Suponer valores de las variables	SI
Elegir notaciones adecuadas y representar situaciones gráficamente	SI
Usar estrategias de resolución diferentes	SI
Utilizar el conocimiento matemático para resolver el problema	SI
Interpretar matemáticamente los resultados en contextos extramatemáticos	SI
Expresar y comunicar la solución con un lenguaje adecuado	SI
Analizar críticamente las soluciones encontradas	SI
Reflexionar sobre otros modos de resolver el problema	SI

Cuadro 6.

Los autores de la experiencia argumentan que en este problema, si se lee la información suministrada, ya se aporta la respuesta a algunas preguntas que un resolutor se haría en la primera fase del proceso. Es decir, el problema está prácticamente estructurado con la pregunta ¿puede ser cierto que mientras el vehículo menos veloz se detiene a tiempo el otro arrolla al peatón? Por ello las expectativas de aprendizaje no se formulan para estas habilidades como se observa en el Cuadro 6.

La tabla 7 muestra los progresos de los diferentes niveles educativos en cada una de las fases atendiendo al Grado de cobertura y al Nivel técnico. La letra **S** indica que este nivel de desarrollo se dio entre los alumnos de Secundaria, la letra **U** se refiere al nivel de Universidad y la **P** al de Formación del profesorado.

Fase	Grado de cobertura	Nivel técnico
Fase 1: Simplificar, idealizar, estructurar y formular de manera más precisa. Se concretan las preguntas del problema.	Asumir que es un problema matemático (S,U,P). Detectar el objeto del problema. (S,U,P). Considerar el tiempo de reacción (S,U,P) (necesita ayuda del profesor).	Comprensión del texto (S,U,P). Formular una descripción de una secuencia a matematizar (S,U,P). Suponer valores de las variables (hay diferencias entre S,U,P).
Fase 2: Búsqueda de un instrumento matemático capaz de resolver el problema.	Encuentran una expresión matemática que modeliza sin la variable tiempo de reacción (hay diferencias entre S,U,P). Para formular un modelo con el tiempo de reacción el profesor ayuda (hay diferencias entre S,U,P).	S, P: Ecuaciones de diferencias y hoja de cálculo U: Funciones, Cálculo algebraico.
Fase 3: Ejecución de operaciones matemáticas hasta obtener un resultado interpretable desde el enunciado.	No considerar tiempo de reacción simplifica los cálculos y la construcción de tablas. Al considerar el tiempo de reacción no se alcanza o una interpretación correcta de las gráficas (S) o una formulación algebraica de la relación entre variables (U).	Sin considerar tiempo de reacción: S: Gráfica y ecuaciones de diferencias. U: Resultados numéricos. Considerando tiempo de reacción: S: Gráfica y ecuaciones de diferencias. U: Resultados algebraicos correctos sólo el (10%).
Fase 4: Interpretación. Aceptación de las conclusiones. Validación. Modificación del Modelo.	Modifican condiciones del modelo con ayuda del profesor incluyendo el tiempo de reacción. (S,P,U). El grado de interpretación es parecido en S y P. Con el tiempo de reacción no interpretan bien el modelo (S,U).	S: Se usan Gráficas pero sin correcta interpretación del fenómeno. U: Se utilizan expresiones algebraicas e incluso si son correctas no se interpretan bien algunos fenómenos.

Tabla 7.

La experiencia confirma que los alumnos al seguir el proceso de modelización lo hacen de modo cíclico. Esto significa, por ejemplo, que pueden trabajar con un modelo en el que no intervienen todas las variables y a mitad de resolución descubren esta limitación y vuelven sobre la primera fase para localizar una nueva variable que genere un modelo más ajustado. Es el caso del tiempo de reacción que en algunos grupos no se detecta si no es con ayuda del profesor. (En este supuesto la chica es atropellada por el móvil que iba a 60 Km/h a 33Km/h en lugar de los 44km/h que indica el texto).

También señala la investigación que poseer un cierto nivel técnico en el manejo de gráficas o de cálculos algebraicos no lleva automáticamente a realizar las fases de interpretación y validación del modelo con corrección. En el artículo citado se dan ejemplos al respecto.

2. INSTRUMENTOS TECNOLÓGICOS Y EXPERIENCIAS EN MODELIZACIÓN

2.1. La hoja de cálculo

2.1.1 El tráfico (continuación)

El problema que se acaba de presentar se resolvió por grupos de Alumnos de Secundaria y de Formación del Profesorado con ayuda de una hoja de cálculo.

Cuando el modelo de interpretación era incompleto y no utilizaba el tiempo de reacción a la frenada se obtienen tablas de datos como la siguiente:

Tiempo	**Mv a 50km/h**	**Mv a 60Km/h**	**v1**	**v2**	**Ac. Frenada**	**T. Reacción**
	13,88888889	16,66666667				**0,0**
	e1 en m	**e2 en m**	**v1 en m/s**	**v2 en m/s**	en m/s	
0					**10**	
0,1	1,34	1,62	12,89	15,67		
0,2	2,58	3,13	11,89	14,67		
0,3	3,72	4,55	10,89	13,67		
0,4	4,76	5,87	9,89	12,67		
0,5	5,69	7,08	8,89	11,67		
0,6	6,53	8,20	7,89	10,67		
0,7	7,27	9,22	6,89	9,67		
0,746	7,58	9,65	6,43	9,21	33,144	km/h
0,8	7,91	10,13	5,89	8,67		
0,9	8,45	10,95	4,89	7,67		
1	8,89	11,67	3,89	6,67		
1,1	9,23	12,28	2,89	5,67		
1,2	9,47	12,80	1,89	4,67		
1,3	9,61	13,22	0,89	3,67		
1,389	9,65	13,50	0,00	2,78		
1,4	9,64	13,53	-0,11	2,67		
1,5	9,58	13,75	-1,11	1,67		
1,6	9,42	13,87	-2,11	0,67		
1,7	9,16	13,88	-3,11	-0,33		
1,8	8,80	13,80	-4,11	-1,33		

Tabla 8.

En esta tabla se organizan la mayoría de los elementos que intervienen en el problema:

Variables: expresadas en las columnas e1, e2, v1, v2.
Parámetros o valores de variables que se fijan: Aceleración de frenada y tiempo de reacción (valores en negrita, a la derecha).
Tablas de valores de la variable independiente tiempo (primera columna).

Las relaciones entre variables se fijan en las Fórmulas de ecuaciones de diferencias para cada instante como ésta para el espacio:

$$e_t = e_{t-1} + V_{t-1} t - (1/2) a \Delta t^2$$

y que se escriben en celdas en las columnas 2, 3, 4 y 5. Por ejemplo, la fórmula del espacio del móvil 1 (columna 2) sería para el instante t= 0,1 seg:

=B2*(A5-A4)-0,5*F4*(A5-A4)^2

y para el mismo instante la velocidad vendría dada por la expresión

=B2-F4*(A5-A4)

Una solución al problema requiere la comparación de las columnas de la tabla para localizar en qué momento la velocidad del primero es cero (espacio 9,65 m). En el instante en que el segundo móvil recorre el mismo espacio su velocidad es 9,21 m/s (13,44 Km/h).

La hoja de cálculo también permite encontrar una solución a través de las gráficas del espacio-tiempo y la velocidad-tiempo de los móviles sin más que interpretando correctamente las nociones de intersección y de coordenadas.

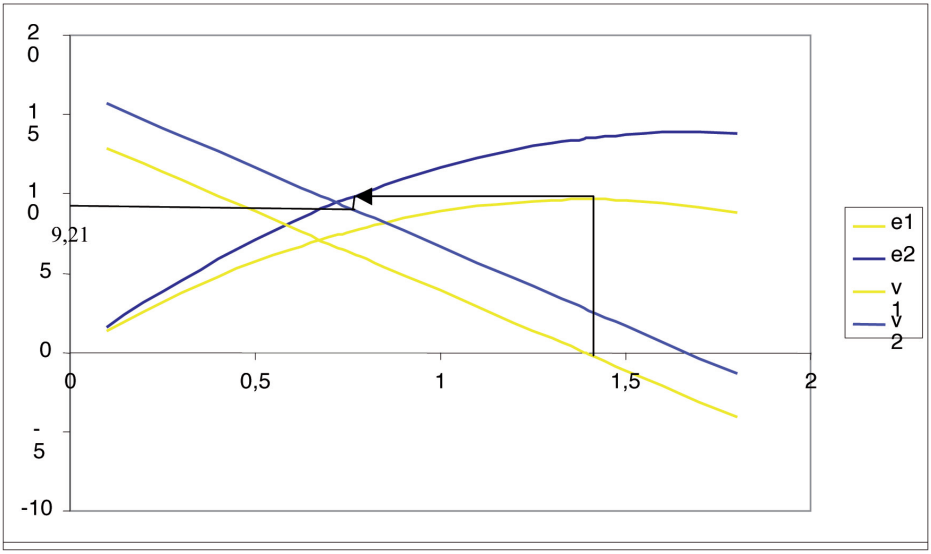


Gráfico 9.

La gráfica que muestran la relación entre los datos del problema al considerar el tiempo de reacción a la frenada es más compleja (Gráfico 10).

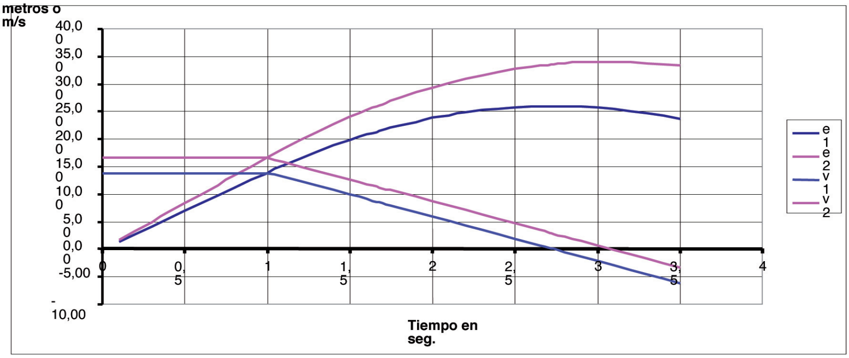


Gráfico 10.

El problema se trabajó por los alumnos de 1º de Universidad sin hoja de cálculo y con cálculo algebraico aunque solamente un 10 % llegó a un resultado como el que relaciona la velocidad final con los parámetros aceleración de frenada y tiempo de reacción:

$$(v_2 \text{ final})^2 = (v_2)^2 - (v_1)^2 + 2bt_r(v_2 - v_1)$$

b: aceleración de frenada t_r: tiempo de reacción

La hoja de cálculo hace posible simular diferentes hipótesis sin perderse en cálculos, permite trabajar con ecuaciones y variables pre-algebraicas que se copian por filas y utilizar parámetros que toman un valor fijo en una celda pero pueden modificarse cambiando la totalidad de los cálculos y resultados que se hacen dependientes de esta celda.

Las diferentes representaciones —tabular, gráfica y pre-algebraica— que incorpora la hoja de cálculo y la ingente cantidad de modelos y funciones que incorpora, hacen que sea un instrumento tecnológico para modelizar muy potente y utilizado. Otras de sus ventajas se mostrarán en los ejemplos que siguen.

2.1.2. La absorción de un medicamento

Esta tarea escolar procede del CD-ROM que acompaña al libro Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003, CD-ROM ejemplo 7.2).

En ella se utiliza un modelo matemático para representar y comprender relaciones cuantitativas mediante ecuaciones de diferencias. Una de las peculiaridades, respecto al ejemplo 2.1 es que el problema se presenta ya con un *applet* de Java que tiene programada las ecuaciones de diferencias que muestran como evoluciona la variable con el paso del tiempo.

En esta tarea, además de ejemplificar este tipo de relaciones numéricas facilita modificar los parámetros del modelo para ajustarlos más o menos a las condiciones que plantea el problema. Así el alumno experimenta con ellas buscando las características del modelo (parámetros) que se ajustan mejor.

1. Una alumna se ha dislocado una rodilla durante un partido de voleibol en la universidad, y el médico le ha prescrito un medicamento antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tiene que tomar dos comprimidos de 220 miligramos cada ocho horas durante 10 días. Sus riñones eliminan el 60 por ciento del medicamento del cuerpo cada ocho horas. Supongamos que la alumna toma religiosamente la dosis correcta en los intervalos regulares prescritos. La siguiente figura interactiva muestra la dosis inicial (440), la tasa de eliminación (0.60) y la dosis recurrente (440). Pulsa "Calculate" (Calcular) para generar los valores correspondientes a la cantidad de medicamento presente en su organismo nada más tomar la dosis de medicamento.

   La figura interactiva (Tabla 11) calcula la cantidad de medicamento presente en el organismo justo después de tomar una dosis. También permite consultar la cantidad de medicamento presente en el organismo inmediatamente antes de ingerir la dosis. Estos valores serán equivalentes a restar exactamente 440 miligramos de los valores calculados justo después de ingerir cada dosis.

   - ¿Qué cantidad de medicamento queda en su organismo al cabo de 10 días, nada más tomar la última dosis? Si continuara tomando el medicamento durante un año, ¿qué cantidad de medicamento habría en su organismo inmediatamente después de haber tomado la última dosis?
   - ¿Cuándo cambia más deprisa la cantidad de medicamento en el organismo, en torno al 5º intervalo (unas 40 horas después de la dosis inicial) o en torno al 25º intervalo? ¿Cómo lo sabes? ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo?
   - Explica en términos matemáticos y en términos de metabolismo por qué es razonable la cantidad de medicamento que permanece en el organismo a largo plazo.

2. Varía la dosis inicial, la tasa de eliminación y la dosis recurrente. ¿Qué observas?

   - Si la dosis inicial se reduce a la mitad, ¿qué le ocurrirá al nivel de estabilización del medicamento en el organismo?

- Si la dosis recurrente se reduce a la mitad, ¿qué le ocurrirá al nivel de estabilización del medicamento?
- Si la tasa de eliminación se reduce a la mitad, ¿qué le ocurrirá al nivel de estabilización del medicamento?
- Introduce valores apropiados para los parámetros en la siguiente aplicación de representación gráfica para obtener una gráfica de la situación original. Utiliza la gráfica para explicar lo que sucede en el nivel de medicamento.
- Describe las características de la gráfica y explica qué información obtienes de las características respecto a la cantidad de medicamento en el organismo a lo largo del tiempo. ¿Cómo es el nivel de estabilización que muestra esta gráfica?
- Explora otros valores para los parámetros. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica? ¿Qué parámetro parece influir en la inclinación de la curva?
- En muchos de los resultados generados en este ejemplo, parece haberse alcanzado un nivel de estabilización final. ¿Se alcanzan realmente estos valores, matemáticamente? ¿Cómo se refleja esta situación en las gráficas?

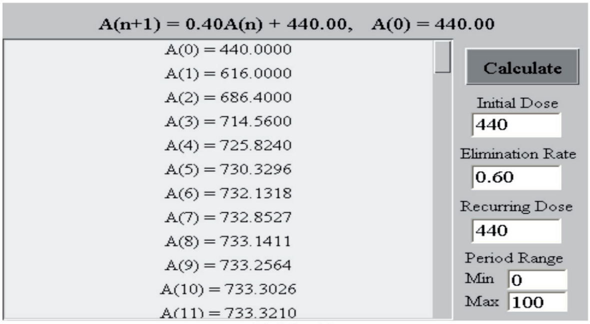


Tabla 11.

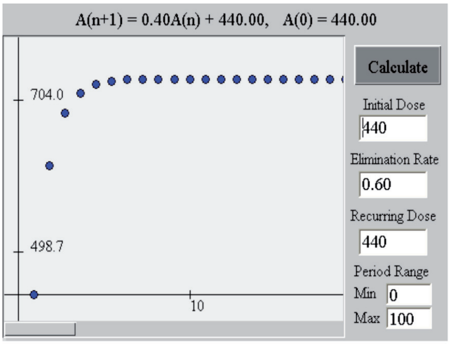


Gráfico 12.

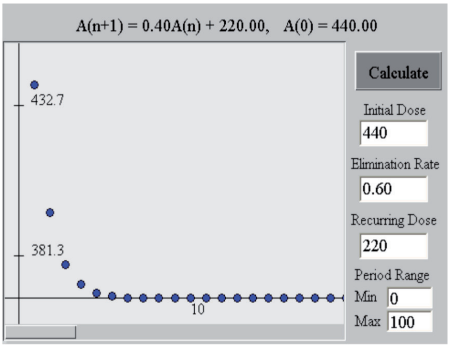


Gráfico 13.

Las cuestiones que se plantean en el problema se centran en las fases de interpretación de un modelo ya propuesto en el enunciado del problema (ver Cuadro 14).

Descriptor de competencia	Activación
Interpretar matemáticamente resultados en contextos extramatemáticos	SI
Expresar y comunicar soluciones con un lenguaje adecuado	SI
Explicar y predecir el aspecto de diferentes modelos según las condiciones iniciales del problema	SI

Cuadro 14.

2.1.3 Barbie hace bungee (salto elástico)

Esta tarea tiene antecedentes en una experiencia desarrollada por T. Hodgson de Universidad Estatal de Montana (USA) (Hodgson, T.1997 p211-218), para formación de profesores. Una versión para aula de este ejemplo, en inglés, se puede encontrar en las páginas que el NCTM edita con aplicaciones de los Estándares curriculares citados en su web:
http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L646

En lo que sigue se ha hecho una traducción de la tarea que presenta el NCTM manejando los detalles más interesantes de la experiencia de Hodgson.

La tarea, según se cuenta en la experiencia inicial, parte de una pregunta muy abierta que el profesorado presentó al aula ¿Qué te gustaría conocer sobre el salto bungee (con cuerda elástica)?

Las respuestas del grupo eran muy abiertas: influencia del grosor de la cuerda en el salto; influencia del peso del saltador; efectos del salto sobre el saltador; cuales son los riesgos, etc.

Con estos problemas se formaron grupos y eligieron varios temas a desarrollar.

Se constató un gran interés a lo largo de la experiencia y se respondió a las preguntas interesantes que plantearon los estudiantes.

Sin embargo, como balance, los estudiantes siguieron el proceso de modelización pero escasamente revisaron la solución. Se conformaron con encontrar la curva de ajuste que relacionaba las variables relacionadas en el problema.

Los profesores se mostraron prudentemente optimistas indicando dificultades ya conocidas: mayor tiempo necesario, programa muy largo, falta de formación adecuada.

Hay formas de ayudar a atacar problemas abiertos dirigiendo bastante la actividad como en esta propuesta del NCTM que se ha traducido de su página web. La actividad se acompaña con una propuesta de enseñanza.

Esta es una tarea que sigue todo el proceso: desde la toma de datos hasta la validación del modelo.

La hoja de cálculo no es imprescindible en los primeros niveles de Secundaria. Facilita el trabajo y cobra especialmente su sentido si el problema se desarrolla en Bachillerato con algunas extensiones del problema considerando nuevas variables: largo de las bandas, peso añadido...

Texto de la tarea:

Autor: NCTM, Traducción: Antonio Marín
Barbie hace bungee (salto con cuerda elástica)
Nombre______________________________

En esta actividad, simularemos un salto bungee usando una muñeca Barbie y bandas elásticas.
Antes de que realices el experimento, formula una conjetura:

Creo que ______ es el máximo número de bandas elásticas que necesita Barbie para saltar con seguridad desde una altura de 400 cm.

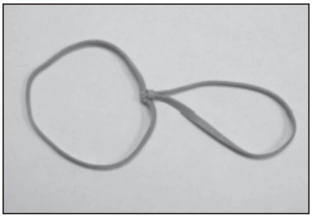
Ahora, realiza el experimento para verificar la conjetura.

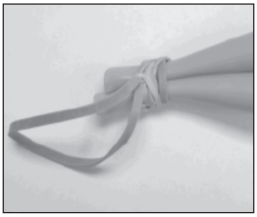
Procedimiento:

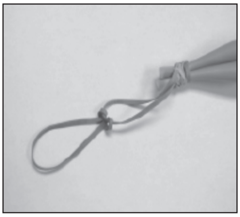
Completa cada uno de los pasos siguientes. Cuando lo hayas realizado márcalo en el punto situado a la izquierda.

- ○ Coloca un gran trozo de papel en la pared y hasta el suelo de una longitud aproximada a 1,90 m.

- Dibuja una línea cerca del extremo superior para indicar la altura desde la que Barbie hace cada salto.
- Crea un lazo doble para colocar en los pies de Barbie. Un doble lazo se hace asegurando una banda a otra por un nudo simple (ver a la izquierda la imagen 1).
- Sujeta la banda estrechamente a los pies de Barbie como se muestra en la imagen (2).
- Ata otra banda al comienzo de la anterior usando un nudo como observas en la imagen 3.
- Con dos bandas sujetas, toma el final de la banda en una mano sujetando en el extremo de la línea marcada en el papel. Sujeta la Barbie con la otra mano y suelta la muñeca poniendo una marca en el punto más bajo que se alcanza con el salto.
- Mide la distancia en centímetros y escribe el valor en la tabla de datos de la Pregunta 1. Puedes repetir este salto varias veces y apuntar la media de las distancias para asegurarte. Asegurarse es importante, ¡la vida de Barbie depende de ello!
- Repite el experimento añadiendo bandas de dos en dos para cada nuevo salto y apunta los datos en la tabla.
- Cuando hayas completado la tabla responde a las cuestiones 2 a la 12.


- 1 -


- 2 -

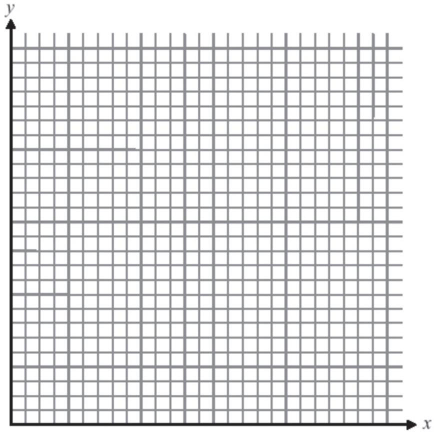

- 3 -

Preguntas:

1. Completa la tabla siguiente

Número de bandas elásticas (x)	Distancia del salto en cm (y)
2	
4	
6	
8	
10	
12	

2. Realiza una gráfica de puntos de tus datos. Indica la escala del eje OX.



3. Sobre la nube de puntos anterior dibuja una línea de ajuste óptimo.
4. ¿Cuál es la relación que hay entre el número de bandas y la distancia del salto?
5. ¿Cuál es la ecuación de la línea de ajuste óptimo? (Se puede usar una calculadora gráfica o excel para esta parte de la lección).
6. ¿Cuál es la pendiente de la ecuación y qué representa en este contexto?
7. ¿Cuál es la ordenada en el origen de su ecuación y que representa en este contexto?
8. Basándose en sus datos, ¿podrías predecir el número máximo de bandas necesarias para que Barbie salte con seguridad 400 cm?
   Usando la línea de ajuste óptimo______
   Usando la ecuación de la línea de regresión_______
9. ¿Son tus predicciones aceptables? Justifica la respuesta. Asegúrate al considerar tus procedimientos para recoger datos, registrarlos y representarlos.
10. Compara tus predicciones de la pregunta 8 con la conjetura hecha antes de hacer el experimento. ¿Qué conocimiento anterior tuviste (o no) que te ayudó (o dificultó) tu habilidad para hacer una buena conjetura?
11. ¿De qué manera contribuiste al grupo mientras se trabajó en el proyecto?
12. Usa este espacio adicional para otros comentarios.

Expectativas de aprendizaje:

Los estudiantes recogerán datos utilizando una cinta de bungee confeccionada con bandas elásticas y una muñeca Barbie. Obtener información necesaria. *(Predicción inicial).*

Utilizarán los datos recogidos para construir una nube de puntos y generar una línea de máximo ajuste. *(Construir un modelo conocido)*.

Harán predicciones acerca de cuántas bandas elásticas necesitan para que Barbie salte con seguridad desde una distancia dada. *(Interpretar un modelo. Validar conjeturas)*.

Plan de enseñanza:

Logre que los alumnos **se interesen** por estas preguntas: ¿Crees que la longitud de la cinta y el peso de una personan influyen en el salto de bungee? ¿Qué pasaría si equivocamos la distancia al suelo o el peso de la persona en un salto? Permite a los estudiantes proponer una estimación precisa de la distancia y el peso que serían necesarios para un salto seguro. Su objetivo es dar a Barbie la mayor emoción asegurándole su seguridad. Esto significa que debe acercarse lo más posible al suelo sin tocarlo.

Explicar que los estudiantes diseñarán un experimento, recogerán los datos y los usarán para que Barbie haga un salto seguro desde 400 cm. Al finalizar la lección los estudiantes deberían poder simular el salto y analizar si sus predicciones se cumplen.

Distribuye la actividad *Barbie hace bungee* para cada estudiante. Suministra (o recaba de ellos) a cada grupo de 3 o 4 estudiantes una muñeca 15 o 20 bandas elásticas, una banda de papel de unos 2 metros, fixo, y una cinta métrica. Hay que asegurarse que las bandas son del mismo tamaño.

Asegurarse de que los alumnos saben enganchar las bandas entre sí alrededor de los pies de Barbie para evitar roturas.

Dar suficiente tiempo para completar el experimento y registrar los resultados en la tabla propuesta.

Después de que los grupos han completado su tabla deberían **chequear por si encuentran irregularidades** que inviten a repetir la experiencia.

Obsérvese que el número de bandas en la columna primera se incrementa de 2 en 2. Se trata de que los estudiantes **adelanten la idea de pendiente** durante el experimento sin que resulte un cálculo directo.

Hay posibilidad de utilizar otras aplicaciones residentes en el portal Illuminations del NCTM

http://illuminations.nctm.org/Lessons.aspx

Preguntas para los estudiantes:

¿Cuántas bandas se necesitan para que salte Barbie con seguridad 400 cm?

¿Cual es la altitud mínima desde la que Barbie podría saltar si se usan 25 bandas?

¿En qué modo el ancho y largo de las bandas puede afectar a los resultados?

Si se añade algún peso a Barbie ¿se necesitarían más o menos bandas? Conjetura una relación entre el peso añadido y el número de bandas necesarias.

Opciones de evaluación:

Las respuestas ordinarias a las preguntas anteriores requieren que los estudiantes presenten sus soluciones a la clase y demuestren que son correctas.

La guía siguiente se puede utilizar para evaluar el trabajo del estudiante. También puede compartirse con los estudiantes primero para completar la lección y que ellos conozcan los criterios de evaluación.

Barbie hace bungee-Graduación de criterios		Puntuación
ANÁLISIS	El proyecto está completo y entregado a tiempo. El proyecto demuestra que se comprenden los conceptos.	
APLICACIÓN	La lista de procedimientos es correcta. Todos los miembros del grupo trabajaron con eficiencia.	
REPRESENTACIÓN	La tabla de datos es adecuada. La nube de puntos contiene un título, escalas, nombres de los ejes y puntos bien representados. El ajuste de la línea es razonable. La ecuación de línea de ajuste es adecuada a los puntos.	
EXPLICACIÓN	Las relaciones entre las variables se muestran con claridad. Se explica en contexto la ordenada en el origen y la pendiente.	
JUSTIFICACIÓN	Se analiza el grado de ajuste a la realidad de las predicciones. Se comprueban las predicciones con la conjetura inicial.	

Extensiones del problema:

1) Si se usan muñecas de diferente peso y tamaño ¿qué efecto tendrá sobre el número de bandas?
2) Consideremos el efecto de la gravedad y estudiemos la velocidad de Barbie un segundo después de saltar y al final del salto.

2.2. Calculadoras gráficas y sensores

Las calculadoras gráficas y los sensores de fuerza, luminosidad, movimiento o temperatura como los que se muestran en las fotos 15x, constituyen otro poderoso recurso para experimentar en las ciencias físicas y modelizar en matemáticas.

Los sensores facilitan la recogida de datos de un experimento de una forma rápida y fiable y hacen la investigación más cercana al alumno al ser protagonista del problema desde la recogida de datos hasta la validación final del modelo. Hoy, el mercado ofrece sensores referidos a múltiples fenómenos y programas de recogida de datos conectables a calculadores gráficas y a ordenadores a precios razonables.

Utilizar sensores para obtener datos en un problema de Modelización no solamente tiene la ventaja de aproximar el problema al alumno y facilitar la motivación. El software que acompaña a los sensores incorpora aplicaciones de bastante utilidad en el aula que también hacen más fácil la búsqueda de modelos sobre las funciones de ajuste óptimo.

Foto 15a.

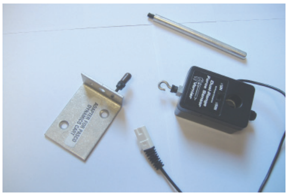


Foto 15b.

Foto 15c.

La experiencia que se presenta a continuación maneja la modelización con sensores y calculadoras gráficas aunque su objetivo no es expresamente mostrar la eficacia de estos instrumentos sino manejarlos como un recurso para investigar sobre el aprendizaje cooperativo de los alumnos.

La pregunta clave de la investigación era ¿cómo se pueden compartir modelos en una enseñanza cooperativa?

Akio Matsuzaki de High School en Komaba y Universidad de Tsukuba, en Japón en (Matsuzaki, A. 2007, p 356-364) es el autor de la experiencia. La ficha técnica de la investigación podría resumirse así:

Metodología:

Estudio de casos con grupos de alumnas de décimo grado (4ºESO-1ºBach.) que trabajan por parejas pensando en voz alta.

Preguntas de la investigación:

- ¿Cómo pueden los modelos construirse y compartirse en una situación de aprendizaje por parejas?
- ¿Qué factores deberían considerarse en el proceso de hacer y compartir modelos?

Diseño del estudio:

Se trata de encontrar y analizar como evolucionan los modelos que manejan los alumnos al trabajar cooperativamente y detectar qué modelos comparten.

Recurso:

Sensor de medida de luminosidad

Aproximaciones iniciales.

Exploraciones. El problema inicial abierto que planteó el profesor fue: ¿Cuánta luz se necesita para leer un libro?
Entre las alumnas discuten y acuerdan inicialmente que en el problema influyen variables relacionadas con el artefacto lumínico, la posición del que lee y lo que se lee: la mesa de escritorio, la silla, el tubo fluorescente, el tipo de libro o cuaderno, ellos mismos.
Seguidamente en una situación de laboratorio, con un sensor de luminosidad y cinta métrica se extraen datos relativos a la luminosidad de un tubo fluorescente según el punto del tubo en que se mide. Concluyen que depende de la posición del tubo en donde se mida (mayor en el centro).

Cambio de rumbo. Definición de un nuevo problema:

El profesor pregunta: *¿Hay relación entre la luminosidad y la distancia desde donde la han tomado?*

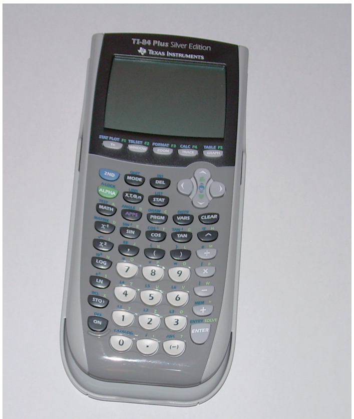
Las alumnas establecen un nuevo conjunto de medidas modificando las distancias al centro del tubo fluorescente y proponen con estos datos encontrar una fórmula de la luminosidad. (Búsqueda de la formulación matemática del problema).

Diferentes recursos para tratar la información:

Llegado a este punto y antes de proseguir relatando la experiencia conviene establecer alguna puntualización sobre los recursos que pueden utilizarse para obtener y procesar la información.

La experiencia original utiliza un sensor para obtener los datos de luminosidad y una cinta métrica. Una vez conseguida la tabla, las representaciones gráficas que relacionan las variables se representan con lápiz y papel.

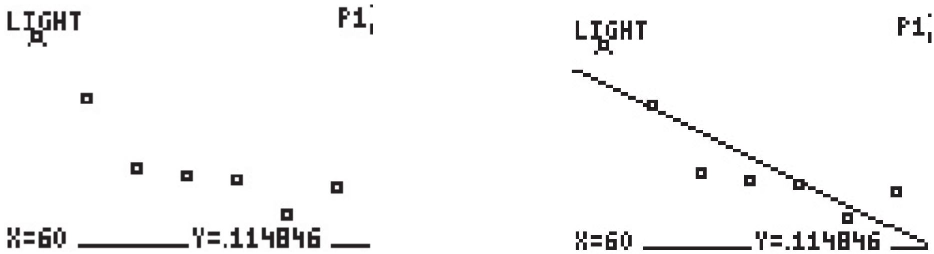
Como alternativa se puede trabajar con una calculadora gráfica como la TI 84 con un interface (CBL) que facilita su conexión a una gran variedad de sensores y un sensor de luminosidad (ver fotos 16 a 17).

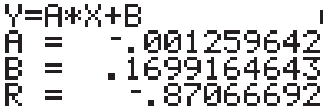


Fotos 16 y 17.

Con este recurso prácticamente todo el proceso de recolección de datos, representación gráfica de la nube de puntos y ajuste a diferentes tipos de funciones (lineales, potenciales, etc.) puede hacerse directamente en la calculadora gráfica con el software que implementa.

Por ejemplo, la figura 18 muestra tres pantallas de la calculadora una vez ha obtenido los datos de luminosidad a diferentes distancias. La primera pantalla es la nube de puntos de los datos experimentales, la segunda la gráfica de un hipotético ajuste lineal que el resolutor ha elegido previamente entre varias opciones y la tercera pantalla muestra el cálculo los coeficientes A y B de una recta de ajuste de coeficiente de correlación R

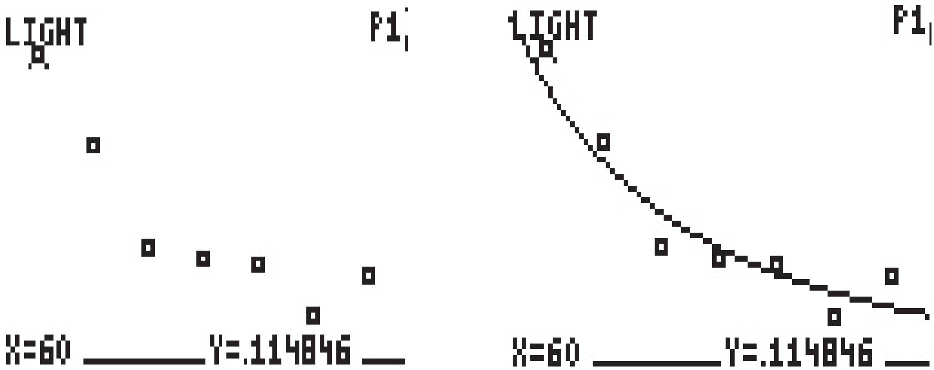




Ajuste lineal

Figura 18.

En cambio, en la Figura 19 se ha optado por un ajuste potencial que suministra un resultado muy cercano a los datos teóricos de la Física: “la luminosidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al emisor de luz”.



Ajuste potencial

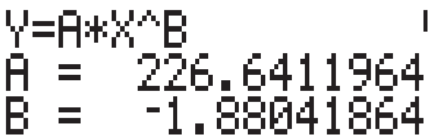


Figura 19.

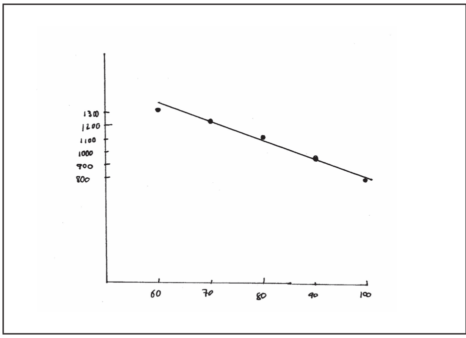
A la búsqueda del modelo matemático:

Primera parte: Con apoyo de representaciones gráficas

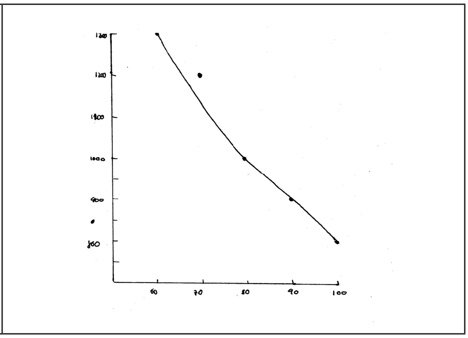
Se recupera el hilo de la experiencia de Akio Matsuzaki en la que las alumnas han obtenido datos de luminosidad y buscan una fórmula o gráfico que los represente.

Las alumnas dibujan cinco puntos de los cinco datos obtenidos para encontrar la relación. Una alumna dice que cree que x es inversamente proporcional a y. Nadie sabe argumentar por qué. También se argumenta que es directamente proporcional

El profesor pregunta ¿Cómo confirmar esta relación? A iniciativa de una alumna dibujan diferentes líneas de máximo ajuste (Gráficas 20 y 21). El profesor pregunta de nuevo cómo decidir si la relación es directamente proporcional o inversa.



Gráfica 20.



Gráfica 21.

Segunda parte: Con apoyo de cálculo algebraico

Las estudiantes intentan una línea de combinar ambas respuestas buscando igualar las ecuaciones de las dos funciones como si pudiesen obtener una proporcionalidad directa e inversa a la vez pero son incapaces de interpretar la solución. La figura 22 indica los cálculos que realizó una pareja que "combinó" ambos modelos mediante la resolución de dos ecuaciones simultáneas. Los resultados obtenidos fueron incapaces de interpretarlos en el contexto real en que se mueve el problema

$$(\mathrm{I})\quad y = -200x + 20.800 \qquad (\mathrm{II})\quad y = \frac{80.000}{x}$$

$$-200x + 20.800 = \frac{80.000}{x}$$

$$-200x^2 + 20.800x = 80.000$$

$$-2x^2 + 200x = 800$$

$$-x^2 + 100x = 400$$

$$x^2 - 100x + 400 = 0$$

$$(x-100)(x-4) = 0$$

$$x = 100/4$$

Figura 22.

La calculadora gráfica en este ejemplo les habría permitido detectar rápidamente que la segunda ecuación no representa a la línea de ajuste con la que trabajan en la representación. Había un error (ver Figura 23).

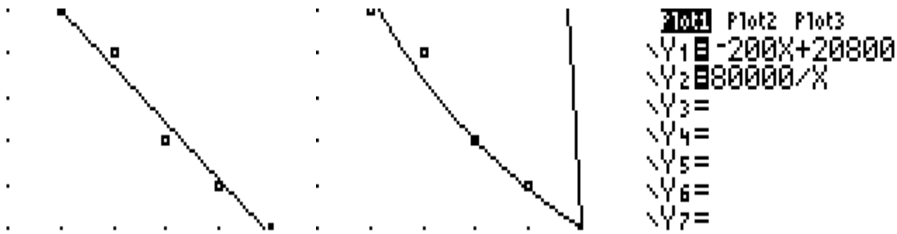


Figura 23.

Tercera parte: De vuelta a la representación gráfica

Las alumnas reconocen que el intento de combinar no ha tenido éxito. El profesor insiste ¿Cómo saber cual es la relación adecuada? Las alumnas intentan nuevas gráficas presentando soluciones como una gráfica intermedia entre lineal y de proporcionalidad inversa (Figura 24) o una gráfica definida a trozos (Figura 25) pero se reconocen incapaces de encontrar una fórmula para la función definida a trozos

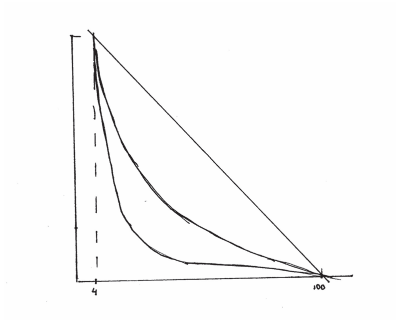


Figura 24.

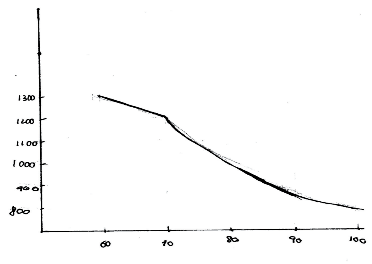


Figura 25.

Validación del modelo:

- Ante las preguntas del profesor, las alumnas acuerdan que el modelo es de proporción inversa porque confirmaron las ecuaciones probando con otro conjunto de datos que habían tomado desde el extremo del tubo fluorescente.
- Finalmente advierten que esta proporcionalidad debe ser la misma desde el centro del tubo.
- Repiten la recogida de datos y corrigen los errores que habían tenido al obtener la información. Confirman el modelo de proporcionalidad inversa.

Análisis de la experiencia desde sus objetivos:

La pregunta inicial de esta investigación era ¿Cuándo comparten entre sí el modelo los alumnos? De los resultados, el autor indica que se comparten:

- Las variables consideradas son admitidas por todos porque la experiencia fue común y realizada en el mismo laboratorio.
- El modelo de ajustar por una función los datos y de "combinar" las ecuaciones en una ecuación simultánea (equivocado) también se comparte como un intento de síntesis.

¿Cuándo no comparten el modelo?

- Aunque los datos son los mismos llegan a modelos diferentes en sus representaciones.
- A la hora de refinar el modelo tampoco llegan a soluciones compartidas si no es con la ayuda del profesor que interroga para hacer caer en la cuenta del error en los datos.

Descriptores de competencia de la tarea:

Esta tarea activa un amplio abanico de capacidades, algunas de ellas muy relacionadas con la modelización:

- Formular el problema. Recoger datos.
- Construir un modelo matemático.
- Validar diferentes modelos según su adaptación a las condiciones iniciales.
- Obtención de datos: Medidas, estimaciones, errores.
- Representar e interpretar gráficas.
- Reconocer y diferenciar relaciones de proporcionalidad.

Posibles extensiones del problema:

- Si el problema se trabaja de forma que la recuperación de datos se haga con una Calculadora gráfica conectada al sensor a través de un CBL es factible analizar diferentes representaciones de datos con mayor rapidez al representar las gráficas automáticamente buscando tipos la línea de ajuste máximo para diferentes funciones. También pueden los alumnos ir ajustando las gráficas a la nube de puntos eligiendo convenientemente los parámetros de las funciones.
- Es posible introducir el problema como una validación de un modelo existente (comparando datos experimentales con los que da la fórmula física estimando un parámetro).

De la Física sabemos que, en teoría, la relación existente entre la intensidad de la luz y la distancia viene dada por la función I=(A/d2) donde I es la intensidad de la luz y d la distancia entre el punto más superior de la muestra de luz y la bombilla. Admitiendo esta fórmula, ¿Cuál podría ser la expresión para mediciones realizadas a 0,5 metros y a 1 metro? Compare los valores de A según que las distancias se modifiquen. Si elegimos un valor promedio ¿cómo difieren los valores reales de las predicciones de la fórmula?

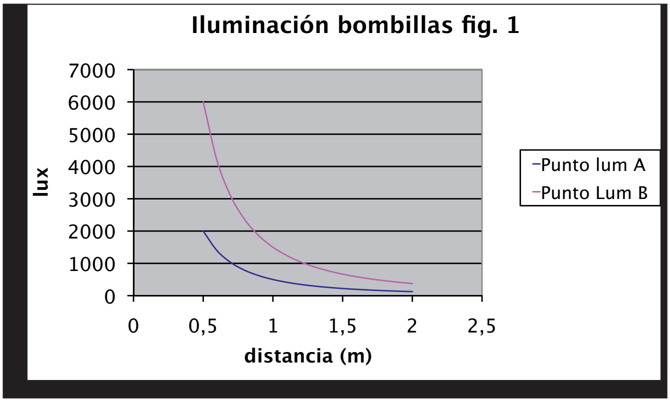
- O centrar el problema en el análisis de las fuentes del error en el experimento.

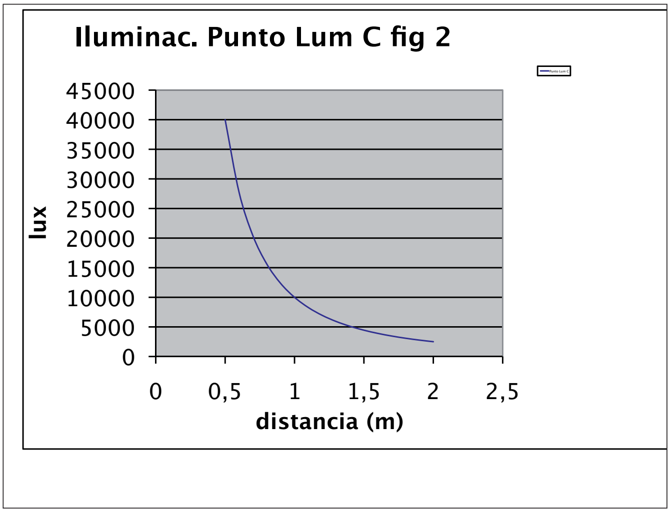
  – *Si para los mismos datos de intensidad luminosa consideramos que hay un error del -10% al medir la distancia de 50 cm ¿Cómo afecta a la gráfica? ¿Cómo afecta a la fórmula? ¿Cómo afecta a una línea de ajuste calculada?*

– *Repite la experiencia si el error es del -5% al tomar la medida de la distancia de 1 metro.*
– *Valora el margen de error que puede permitirse para que el experimento sea válido.*

- Es posible orientarse por las aplicaciones prácticas

Las figuras 1 y 2 muestran la cantidad de iluminación (medida en lux) que suministran tres puntos luminosos diferentes según la distancia al objeto iluminado. Si tienes en cuenta la información que suministra el Reglamento para Iluminación, según el tipo de tarea profesional, decide qué foco luminoso se necesita en cada caso. (El reglamento mide la iluminación si el foco se coloca en el techo de una habitación de 2,5 m. de altura y el trabajador a 80 cm del suelo).





Intensidad Media de Iluminación para Diversas Clases de Tarea Visual (Basada en Norma IRAM-AADL J 20-06):

Clase de tarea visual	***Iluminación sobre el plano de trabajo (lux)***	***Ejemplos de tareas visuales***
Visión ocasional solamente.	*100*	*Para permitir movimientos seguros por ej. en lugares de poco tránsito.*
Tareas intermitentes ordinarias y fáciles, con contrastes fuertes.	*100 a 300*	*Trabajos simples, intermitentes y mecánicos: contado de partes de stock, colocación de maquinaria pesada.*
Tarea moderadamente crítica y prolongadas, con detalles medianos.	*300 a 750*	*Trabajos medianos, mecánicos y manuales como: lectura, escritura y archivo.*
Tareas severas y prolongadas y de poco contraste.	*750 a 1500*	*Trabajos finos, mecánicos y manuales: pintura extrafina, costura.*
Tareas muy severas y prolongadas, con detalles minuciosos o muy poco contraste.	*1500 a 3000*	*Montaje e inspección de mecanismos delicados: fabricación de herramientas y matrices.*
Tareas excepcionales, difíciles o importantes.	*5000 a 10000*	*Casos especiales, como por ejemplo: iluminación del campo operatorio en una sala de cirugía.*

2.3. Software de Geometría dinámica

Paseando por el bosque es otra experiencia de modelización en la que el recurso fundamental es un software de Geometría dinámica como Sketchpad, o Cabri-Geomètre. El autor es Barry McCrae de la Universidad de Melbourne (Australia) (McCraey, B. 1998 p. 95-101) y consiste en una tarea de Optimización en el último curso del Bachiller, preparatorio para Universidad en la Especialidad Ciencias, Economía y Medicina.

El tipo de tarea es un proyecto propuesto para realizar una evaluación. Deben resolver el problema en dos semanas y presentar un informe de 1200-1500 palabras. En esta sección se muestra una de las soluciones.

El autor describe las ventajas más significativas del recurso como apoyo a la modelización así:

- Se utiliza una abstracción mínima de la situación.
- La visualización de las imágenes multiplica su potencia.
- Es posible y fácil (si se conoce el software) variar continuamente los valores de los parámetros y obtener modelos diferentes en los que se visualizan todos los elementos.
- Es una alternativa a problemas en los que la solución algebraica requiere cálculos expertos.

Paseando por el bosque

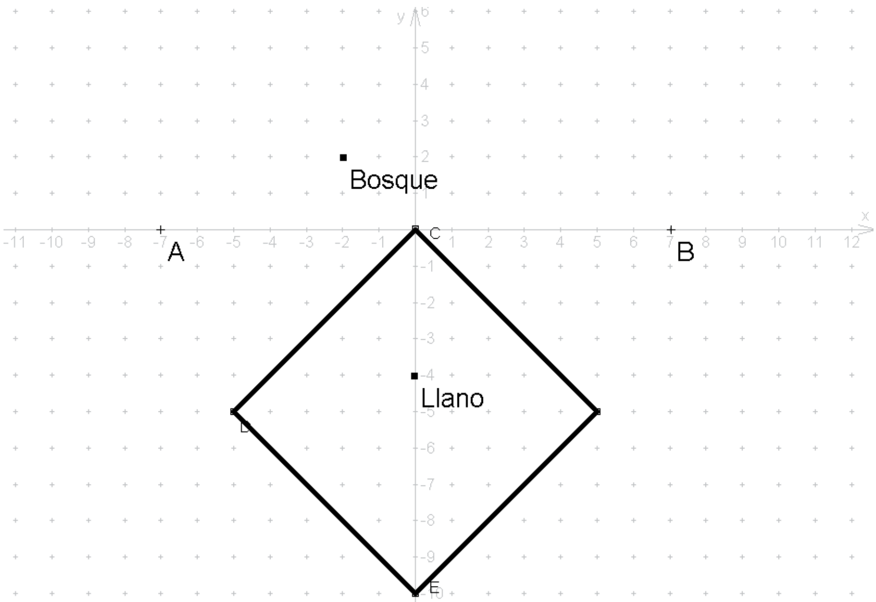


Figura 1.

Kim planea pasear desde Ardale hasta Brushwood. La ruta directa es una distancia de 14 km por un terreno accidentado y boscoso. No obstante hay un amplio cuadrado llano y limpio de árboles de 7 Km de lado situado como se muestra en la figura 1. El cuadrado tiene un vértice C en el punto medio de la ruta directa y la perpendicular a la ruta desde C es la bisectriz del ángulo C del cuadrado.

Encontrar y describir la ruta para la que Kim tardaría el menor tiempo asumiendo que viaja a una velocidad media de 1 Km/h en la zona boscosa y a 5 Km/h en la zona llana.

Sin detallar el procedimiento, ya que hay un exhaustivo trabajo sobre geometría dinámica en otro artículo de este libro, es relativamente sencillo definir un camino APQB, figura 2, en donde P y Q son dos puntos móviles de forma que Q sea simétrico a P. Así, caracterizando P por su distancia x al origen C quedando Q determinado por simetría, al mover P con el cursor se modifican los valores de la fórmula de la distancia T que se recorre en el trayecto. Las fórmulas de la distancia d(P,C) y T se han construido dinámicamente en la pantalla. Al mover P se modifica también el valor de x y T que son las dos variables del problema de optimización. Se trata de optimizar T.

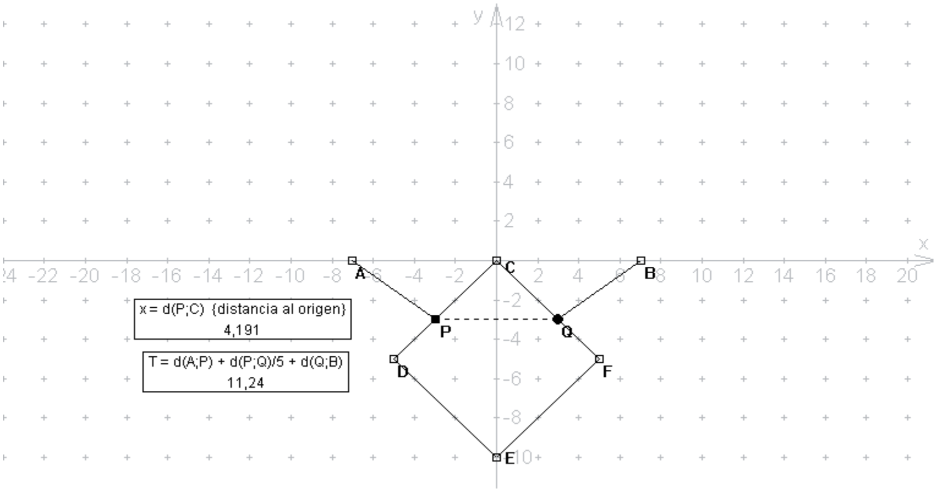


Figura 2.

En la figura 3 se muestra cómo resolver el problema a través de una función auxiliar T= f(x) que se va dibujando a medida que se mueve el punto P

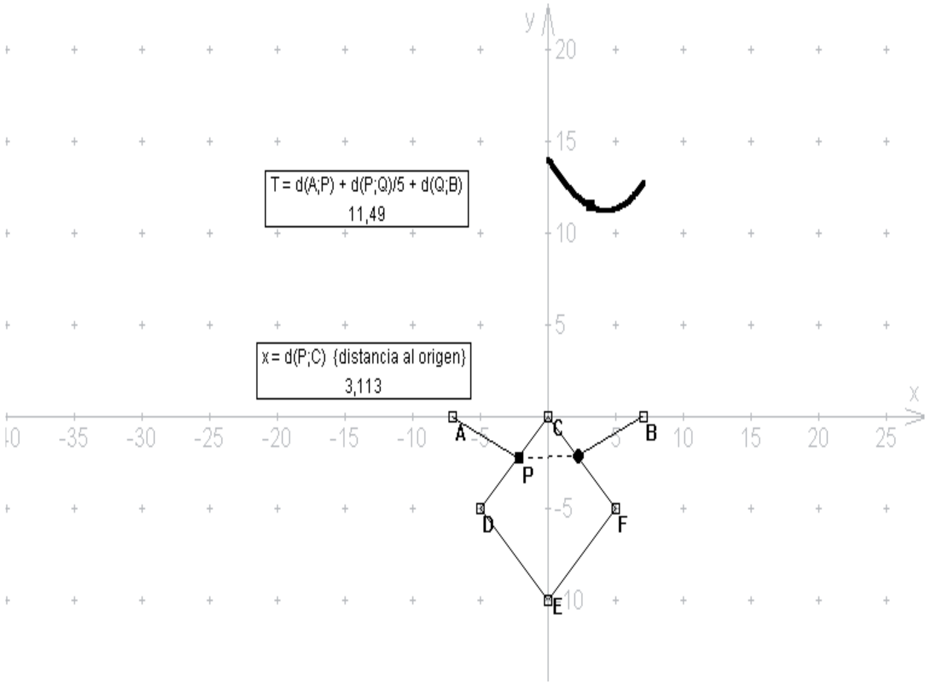


Figura 3.

Una extensión del problema como la siguiente da pie a introducir nuevos parámetros de manera que el modelo se haga más complejo y las velocidades en el terreno llano y boscoso pasen de ser valores fijos a parámetros dependientes.

*Si la velocidad **v** en la zona llana oscila entre $0 < v \leq 5$ Km/h y la velocidad en terreno boscoso **u** puede ser igual a **v** o hasta 10 veces menor que **v** analiza para que valores se obtiene el tiempo mínimo.*

La figura 4 presenta una pantalla del software en la que se incorporan a las anteriores dos segmentos MW y KV. MW tiene un punto móvil N que oscila entre 0 y 5. Así se simulan los valores de **v**. De modo parecido se simulan los valores de **u** con un punto móvil L sobre el segmento KV**.**

Con estos dos nuevos segmentos se simula la variación de los dos parámetros y para cada posición de los puntos N y L surge una gráfica diferente. El problema ahora es localizar el mínimo en una familia de funciones $\{T_i = f_i(x)\}$ caracterizadas cada una por un par de valores de **u** y de **v**. El modelo de la figura 4 incorpora todos los elementos para hacer una resolución aproximada del problema.

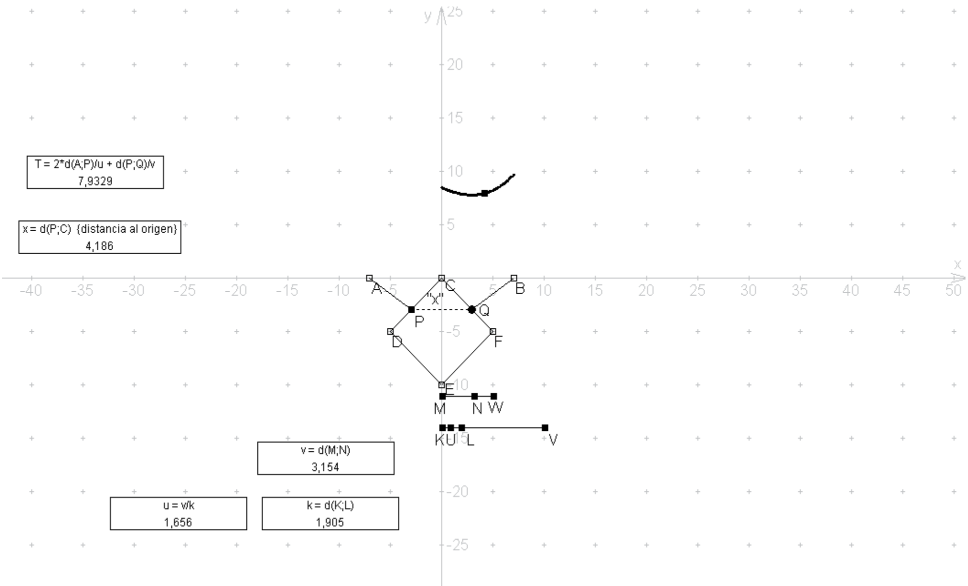


Figura 4.

2.4. Resumen de contenidos matemáticos más utilizados en los diferentes tipos de instrumentos tecnológicos.

Hoja de cálculo, Calculadora gráfica	Análisis de datos. Gráficas: Optimización, ajuste. Ecuaciones de diferencias. Simulaciones probabilísticas.
Internet (Applet)	Representaciones. Simulaciones aritméticas, geométricas y de probabilidad.
CAS	Ecuaciones, Funciones, cálculo algebraico.
Geometría dinámica	Representaciones geométricas. Medidas, Optimización. Simulaciones.

3. PERFILES DE ALUMNOS ANTE EL USO DE LOS INSTRUMENTOS TECNOLÓGICOS (IT)

Los profesores (V. Geiger, P. Galbraith, P. Renshaw, M. Goss, 2003, p. 126-140) de la Universidad de Queensland y la High School de Hillbrook en Australia diseñaron un estudio para detectar las preferencias y perfiles de los alumnos por las tecnologías en el aula de Bachillerato en un currículo bastante flexible.

¿Cuáles son las preferencias de los alumnos en el uso de IT en el aula?

Están muy relacionadas con el tipo de tareas y el grado de destreza que ya poseen. Según los objetivos del profesor, se usan más en tareas de matemáticas puras o aplicadas.

Los alumnos utilizan los IT para interactuar en el proceso de desarrollo del modelo matemático, una vez se ha obtenido éste. Escasamente intervienen los IT en el diseño del modelo.

¿Qué tipos de alumnos pueden caracterizarse según su acercamiento a los IT?

Los autores clasifican esta pericia respecto al IT en cuatro perfiles diferentes:

1. La tecnología como Maestro inalcanzable.
   La relación depende de la complejidad matemática del IT. Si la complejidad es alta, la actividad del estudiante se confina a operaciones limitadas que ya conocen. No hay comprensión matemática. El estudiante queda reducido a un consumo ciego de lo que la máquina le ofrezca con independencia de su veracidad o valor.

2. La tecnología como sirviente.
   El IT es lo que reemplaza a los cálculos mentales o de lápiz y papel. Las tareas de clase son las mismas pero se facilitan por el IT. El usuario ordena a la tecnología como un asistente obediente pero "tonto" en quién se confía.

3. La tecnología como compañero.
   Aquí la compenetración que se ha desarrollado entre usuario y tecnología es tal que se usa creativamente para ayudar al Alumno a aprender. Los estudiantes interactúan con el IT como con un compañero que responde a sus preguntas.

4. La tecnología como extensión de uno mismo.
   Es el más alto nivel de funcionamiento. El usuario maneja diferentes utilidades complementarias para investigar o resolver sus problemas.

En la investigación se destaca que estos perfiles son un reflejo del papel que el profesorado quiera darle a los IT, como recursos, de acuerdo con las expectativas que posea y las tareas que proponga. De ahí la importancia de la posición del profesor ante los IT ya que esta condiciona altamente la competencia de los alumnos en el uso de las herramientas tecnológicas.

4. EL PAPEL DEL PROFESOR EN EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN

El estilo de enseñanza influye decisivamente en que las actividades de clase contribuyan más o menos al desarrollo de ciertas competencias. En el caso de la Modelización, el grupo de profesores daneses A. Soeren, C. Haines, T.H. Jensen, M. Niss de Dinamarca presentan en el artículo (Soeren, A. et al, 2007 p.295-308) una amplia panorámica de tipos de tareas y estilos del profesor que ayudan a mejorar la competencia de modelización.

En una breve reseña del artículo se destacan criterios que deberían conducir la actuación del profesor.

- Evitar el papel tradicional del profesor como primera fuente de explicación, demostración y respuestas correctas.
- Utilizar preguntas clave
  - De motivación metacognitiva: ¿Qué has probado? ¿Qué encontraste? ¿Qué vas a poder probar ahora? ¿Esto qué te dice?
  - De motivación orientada a estrategias específicas: ¿Has visto algunos casos específicos? ¿Conoces algo parecido que te ayude? ¿Puede ayudarte representarlo de otra manera? ¿Has probado con otro método?
  - Pequeñas ayudas: No es correcto, ¿Por qué no pruebas con un ajuste de funciones? ¿No es esto la diferencia de dos cuadrados?

- El desarrollo de los tópicos matemáticos

El objeto esencial cuando se trabaja con problemas de modelización no es aprender técnicas o algoritmos matemáticos. Sin embargo, cualquier momento es aprovechable para conocer o perfeccionar conocimientos instrumentales con tal de que no se desvirtúe el proceso de modelización. Hacer esta introducción antes, durante, después de la tarea de modelizar es una decisión que depende de muchos factores.

J. de Lange, 1996 p. 83-110 en su ponencia del ICTME 8 "Problemas reales y problemas del mundo real" señala que el proceso de enseñanza puede comenzar con un problema real para el estudiante. Se entiende un problema "auténtico" en el sentido de "estar el alumno dispuesto a afrontarlo como problema y resultar significativo". El problema se utiliza para iniciar y desarrollar conceptos matemáticos siguiendo la línea de una "matematización conceptual". En una fase posterior se consideran ciertos niveles de abstracción, formalización, generalización.
En fases siguientes, los conceptos formalizados se vuelven a utilizar en problemas aplicados y de modelización matemática.

Soeren y los demás autores en el artículo citado, insisten en que estas intervenciones del profesor no deben reproducir esquemas unidireccionales de la información: El profesor informa y el alumno recibe pasivamente y ejecuta.

Para contrarrestar esta inercia recomiendan las características que Steen y Forman señalan en sus "Principios de Buenas prácticas" (2001) y las agrupan en tres principios pedagógicos:

Actividad:
- Retando al estudiante a explorar entre varias estrategias.
- Estimulando la discusión sobre los datos disponibles en relación a lo que se pregunta.
- Requerir a los estudiantes para que busquen información oculta y necesaria para resolver el problema.
- Usar materiales manipulables.

Centrarse en el alumno:
- Centrarse en problemas que los estudiantes consideren relevantes.
- Ayudar a los estudiantes a aprender a trabajar con otros.
- Desarrollar técnicas de comunicación entre los estudiantes.
- Proporcionar oportunidades a los estudiantes para utilizar su propio conocimiento y experiencia.

Contextualizar las actividades:
- Provocar que los alumnos sitúen primero los problemas en contexto y luego atiendan a las formalidades matemáticas.
- Sugerir fuentes que puedan proporcionar información complementaria.

- Requerir que los estudiantes verifiquen si es razonable una respuesta en el contexto del problema original.
- Animar a que los estudiantes vean conexiones de las matemáticas con el mundo del trabajo y la vida.

En su trabajo de planificación el profesorado elige tareas adecuadas a sus objetivos. El documento de Steen-Forman citado enumera algunos de los errores que deben evitarse:

- Seleccionar tareas que cubran todo el programa más que explorar y resolver problemas interesantes.
- Pasar por alto matemáticas interesantes que yacen bajo muchos ejemplos de la realidad.
- Incorporar injustificados modelos matemáticos a un problema rico contextualmente bajo el pretexto de ampliar su cobertura matemática.
- Creer que todos los problemas complejos requieren matemáticas sofisticadas y que son malos si se usan técnicas elementales.
- Elegir tareas que no logran ayudar a los estudiantes a prepararse para altos logros en matemática.
- Presentar largas listas de tareas "típicas" en hojas, esterilizando la riqueza de los problemas en su contexto.
- En la secuenciación de las tareas no buscar el crecimiento conceptual e intelectual.
- No llegar a conclusiones de cierre sobre conceptos, vocabulario, métodos y generalizaciones al finalizar un problema o proyecto abierto.
- No dar tiempo a la reflexión suficiente en el proceso de Modelización.

5. ALGUNOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA (MM) CON INCIDENCIA EN EL AULA

Las investigaciones acerca de los factores que influyen en el desarrollo de la competencia en modelización matemática son muy numerosas y cobran cada vez más importancia en el panorama de la didáctica de la matemática de los últimos años. La enseñanza de una matemática funcional era habitual en los currículos escolares hasta mediados del siglo XX (Niss, M. Blum, W. Galbraith, P, 2007 p. 3-32). Es a partir de la segunda mitad del siglo XX cuando se incorpora el paradigma de una matemática más estructural en muchos países que de nuevo hoy día pierde vigencia en los currículos. Desde 1976 en el tercer *International Congresses on Mathematical Education* se manifiesta ya una tendencia en auge en torno a investigaciones sobre enseñanza de la Modelización y Aplicaciones de las Matemáticas. Se crean Congresos específicos en esta dirección (los ICTMA) que desde 1983 se reúnen bianualmente y forman parte como grupo de estudio del ICMI.

En el ICTMA de 1999 el profesor Mogen Niss presentó una panorámica de los resultados más importantes de la investigación en materia de Enseñanza de la Modelización y Aplicaciones de las Matemáticas (Niss, M. 2001 p. 72-88) en los últimos años.

Por su interés para el profesor que desea trabajar esta competencia en la clase, se presentan algunas de sus conclusiones con breves comentarios.

- No hay transferencia automática del sólido conocimiento matemático puro del estudiante a la habilidad para enfrentarse con problemas aplicados y de Modelización matemática. (MM).
  Comentario: No se puede esperar que el alumno se haga un experto en Modelizar si se le enseñan exclusivamente contenidos matemáticos aislados de los problemas de Modelización.
- Tanto el contexto matemático en que se involucra un contenido como el propio contenido ejercen una influencia crucial en la capacidad para resolver problemas de (MM).
  Comentario: Aprender solamente matemáticas descontextualizadas no asegura el aprendizaje de la Modelización matemática.
- Los estudiantes no se creen que el contexto del problema debe considerase en serio. Tienden a quitarle la envoltura rápidamente y quedarse con la tarea matemática pura.
  Comentario: la inercia del sistema educativo actual funciona en contra. El alumno no está acostumbrado a darle a los contextos su importancia.
- Las creencias y las actitudes que poseen estudiantes y profesores hacia la (MM) y su utilidad, influyen mucho en su habilidad para trabajar con estos problemas.
  Comentario: Hay que creer, potenciar y mantener actitudes positivas hacia el desarrollo de esta competencia.
- La metodología de enseñanza y el tipo de las actividades de aprendizaje elegidas influyen decisivamente en la capacidad de modelizar.
  Comentario: Cualquier metodología o cualquier tipo de tarea no es eficiente en el desarrollo de la competencia. Este artículo y el resto de ponencias del libro contribuyen a presentar tareas relevantes.
- El control metacognitvo del proceso en los problemas de (MM) es un rasgo poco frecuente en los estudiantes.
  Comentario: es necesario enseñar heurísticas y técnicas de control del proceso de modelización para este tipo de problemas. El alumno suele carecer de ellas a priori.
- Se puede evaluar la resolución de problemas de (MM) pero hay que invertir en tiempo, en formación del profesorado, y en modificar los métodos clásicos de evaluar.

Comentario: La evaluación del desarrollo de esta competencia requiere nuevos instrumentos. La incorporación del lenguaje de Competencias se ha mostrado como una herramienta que fija con más precisión los grados de desarrollo y las capacidades a observar para determinar su nivel de evolución.

- La capacidad para resolver problemas de (MM) puede aprenderse pero a costa de un esfuerzo especial, proponer tareas complejas, consumir tiempo y reducir el programa en su sentido tradicional.
  Comentario: Las investigaciones que avalan esta afirmación recomiendan mayor formación del profesorado, valorar mejor el trabajo del profesor, profundizar en la selección de auténticas tareas de modelización y elegir mejor los objetivos fundamentales del Curso ya que el tiempo escolar no es elástico.
- La estrategia para implementar nuevas metodologías que incrementen la capacidad del alumno en resolución de Problemas de (MM) no puede desviarse a educar en el uso de software con ordenadores en lugar de profundizar en educación matemática.
  Comentario: No se duda de la potencialidad de los Instrumentos tecnológicos en el trabajo con problemas de MM. Sin embargo el tipo de IT elegido debe ser fácil de manejar y procurar que el tiempo que se invierta en aprender a utilizarlo esté bien rentabilizado porque el IT será un recurso en muchos problemas y materias. Probablemente, haya llegado el momento de compartir esta necesidad de tiempo con otras disciplinas como la Física, la Geografía, la Informática o la Economía. Los centros TIC que han incorporado a las aulas ordenadores para todos están en una posición especialmente favorable para ello.

BIBLIOGRAFÍA

BLOMHØJ, M., and JENSEN, T.H. (2003). "Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarificaction an educational planning". *Teaching Mathematics and its Applications* 22(3), 123-139.

BLOMHØJ, M. JENSEN, T.H. (2007). "What's all the fuss about competencias?". En Blum, Galbraith, Henn and Niss (ed). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* Springer.

BLUM, W, y. KAISER, G. (1997). *Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden.* Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.

De LANGE, J. (1996). "Real Problems with real world mathematics". En Alsina, Álvarez, Niss, Pérez, Rico y Sfard (eds.). *Proceedings of the 8 th International Mathematical Education.* Sevilla: SAEM Thales.

GEIGER, V. GALBRAITH, P. RENSHAW, P. GOSS, M. (2003). "Choosing and Using Technology for Secondary Mathemátical Modelling Tasks". En Qi-Xiao Ye, Blum, W. Houston K. Y Qi-Yuan Jiang (eds.). *Mathematical Modelling in education and culture: ICTMA 10 World Chichister: Horwood Publishing.*

HODGSON, T. (1997). "On the Use of Open-ended, real-world Problems". En Houston, Blum, Huntley and Neill (eds.). T*eaching and learning mathematical modelling Chichester: Albion Publishing limited*

MATSUZAKI, A. (2007). "How might we share models thorough cooperative mathematical modelling? Focus on situations based on individual experiences". En Blum, Galbraith, Henn and Niss (ed.). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* Springer.

McCRAEY, B. (1998). "Modelling Using Dynamic Geometry Software". En Galbraith, Blum, Booker and Huntley (eds.). *Mathematical Modelling Teaching and Assessment in a Technology-Rich World Chichister: Horwood Publishing*

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación matemática.* Sevilla: SAEM Thales.

NISS, M. (2001). "Issues and Problems of Research on the Teaching and Learning of Applications and Modelling". En Matos, Blum, Houston and Carreira (eds.). *Modelling and Mathematics Education.* ICTMA 9: Applications in Science and Technology Chichester: Horwood

NISS, M. BLUM, W. GALBRAITH, P, (2007). Introducción al libro *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study Eds., citados* Springer

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework- Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE

MAAß, K. (2006) "What are modelling competencias?". *ZDM,* Vol., 38 (2).

SOEREN, A. HAINES, C. JENSEN, T.H. NISS, M. y BURKHARDT, H. (2007). "Classroom activities and the teacher". En Blum, Galbraith, Henn and Niss (eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* Springer.

MODELOS MATEMÁTICOS, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y PROCESO DE CREACIÓN Y DESCUBRIMIENTO EN MATEMÁTICAS. CONEXIONES Y APROVECHAMIENTO DIDÁCTICO EN SECUNDARIA

Constantino de la Fuente Martínez
Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"
IES "Cardenal López de Mendoza", Burgos

"La ciencia, en particular, podría definirse como el resultado de reconocer el máximo orden oculto en todo aparente desorden. La ciencia no es sino una de las formas posibles de representar el mundo real. Para ello hacen falta imágenes. No hay inconveniente en admitir que la ciencia es una ficción de la realidad, que hacer ciencia consiste en proponer a la naturaleza una ficción por si ésta tiene a bien ser compatible con tal ficción. Y para proveernos de imágenes hay que apelar a la imaginación. Es la imaginación científica"

Jorge Wagensberg (edit).
"*Sobre la imaginación científica.
Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea*"

INTRODUCCIÓN A MODO DE RESUMEN

El proceso de creación y descubrimiento en Matemáticas es un tema muy poco explorado en las etapas anteriores a la enseñanza universitaria, bien porque se considera que el profesorado de estas etapas de la enseñanza no tiene interés por el tema o, como se piensa en muchos ámbitos, porque no es un aspecto que se deba tratar en la Enseñanza Secundaria (ESO y Bachillerato) ni es tarea propia del profesorado de estas etapas.

En este artículo se presentan algunos ejemplos, sacados del aula en ESO y Bachillerato, que ilustran las conexiones entre la resolución de problemas (RP) y el proceso de creación y descubrimiento en matemáticas. El hilo conductor del proceso es la búsqueda de modelos o de teorías que contengan las soluciones a las situaciones de partida.

El proceso comienza con la resolución de un problema, teniendo como marco de referencia algún modelo teórico de RP (Polya[1]; Mason, Burton y Stacey[2]; Guzmán[3], Schoenfeld[4]), poniendo en práctica los *métodos típicos del quehacer matemático*. El *análisis* posterior a la resolución nos permite descubrir el mundo interior del problema: su estructura, el modelo general subyacente, analogías con otras situaciones, etc. En algún caso podemos encontrar nuevos conceptos y teorías, modelos teóricos, que generalizan la situación del principio. Estas ideas, que inicialmente surgen en forma de conjeturas, sin justificar y sin formalizar, van adquiriendo vida propia e independencia según se van descubriendo sus propiedades. La justificación y demostración de los resultados son unas de las principales tareas en esta etapa del proceso.

Posteriormente se intenta la formalización de todos los resultados encontrados, en una fase que podemos denominar de *síntesis*. Todo ello se conforma en unas estructuras o modelos, unas veces prácticos y otras teóricos, según el contexto inicial, la riqueza de la situación y la pericia de los participantes. Al final, junto con las conclusiones siempre aparece una lista de nuevos proble-

---

[1] Por orden de aparición de la edición en inglés: (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Mexico: Edit Trillas. (1962-1965). *Mathematical Discovery* (vol 1 y 2). Nueva York: Wiley. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Edit. Tecnos.
[2] MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Edit Labor y MEC.
[3] GUZMÁN, M. de, (1991) *Para pensar mejor*. Barcelona: Edit. Labor. (1994. Edit. Pirámide, Madrid).
[4] SCHOENFELD, *A.,* (1985). *Mathematical Problem Solving.* Nueva York: Academic Press.

mas no resueltos o parcialmente resueltos, posibles líneas de trabajo para el futuro, etc.

Como puede observarse, el descubrimiento o la creación de modelos y teorías es uno de los objetivos más importantes que nos podemos plantear en este tipo de trabajos, aunque, como hemos comentado más arriba, su consecución completa no siempre está asegurada.

En cuanto al papel que asume el alumno o alumna en el proceso, es similar al que vive un matemático en el desarrollo de una investigación, sólo hay una diferencia: el nivel de los conocimientos con los que se trabaja, que los casos que se van a presentar corresponden a la Secundaria, ESO y Bachillerato.

Para terminar debemos resaltar que estos procesos nos permiten, tanto al alumnado como al profesorado, profundizar en los conocimientos que se están impartiendo, trabajarlos de una manera diferente a la habitual, y lo que es más importante, adentrarse en la verdadera naturaleza del conocimiento matemático, reviviendo el proceso de su creación y/o descubrimiento.

1. INTERÉS E IMPORTANCIA DEL TEMA

En la función real *vida cotidiana en el aula*, que alguien podría calificar de *monótona decreciente*, un día surge un acontecimiento que no puede dejar indiferente a nadie: en el desarrollo de un trabajo de progresiones o algo parecido, sobre el que hablaremos más adelante, un alumno presenta el resultado $S_n = \frac{n}{n-1}\int_0^{n-1}\left(a_1 + x.d\right)dx$, que dice ser válido para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética (en adelante p. a.) donde d_p es el primer término y x es la diferencia de la p.a. Aparte de la incredulidad inicial, de revivir la anécdota de Gauss, en su infancia, con su profesor Buttner[5], y comprobar que la fórmula funciona siempre que $n-1 \neq 0$ (cosa evidente, por otra parte…), hay algo en nuestro interior que da un vuelco y nos obliga a reflexionar sobre el hecho concreto y su significado:

El proceso de creación y/o descubrimiento en Matemáticas (PCDM) está ligado a la Resolución de Problemas (RP) en aspectos como la búsqueda de

[5] La anécdota está recreada en la novela de Daniel Kehlmann (2006). "*La Medición del Mundo"* (pág. 39). Madrid: Maeba Ediciones.

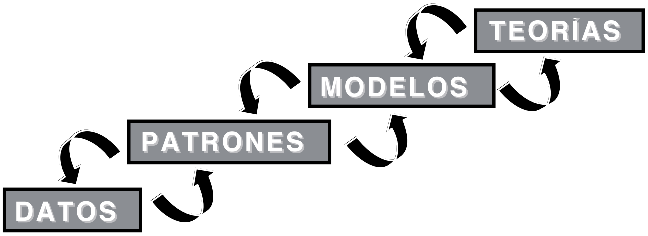
regularidades y leyes generales, la construcción y uso de modelos y/o teorías matemáticas, etc. ¿Qué aspectos del PCDM debemos focalizar para que al ser llevados al aula podamos conseguir los objetivos didácticos que nos hayamos planteado? ¿Podemos en Secundaria, con el alumnado de estas edades, *vivir* el PCDM, utilizando como marco teórico algunas ideas sobre el mismo junto con los modelos de RP?

Por otra parte, a la hora de plantearnos llevar el tema al aula, debemos hacer explícitos los objetivos didácticos que nos vamos a plantear. En nuestro caso son los siguientes:

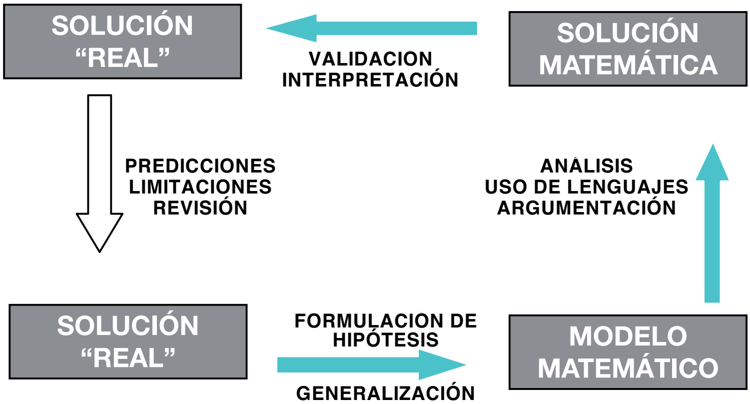
- Profundizar en los métodos propios de investigación en matemáticas: la particularización, la búsqueda de leyes generales, la construcción de modelos, la generalización, el uso de analogías, conjeturas y demostraciones.
- Usar modelos matemáticos para resolver problemas, valorando su validez y utilidad, criticando sus limitaciones, mejorándolos y comunicando sus resultados y conclusiones.
- Practicar la resolución de problemas como la actividad más genuina en cualquier campo específico de las matemáticas.
- Acercar a los alumnos y alumnas a los conocimientos matemáticos con un enfoque metodológico diferente al habitual, priorizando el planteamiento y resolución de retos, la búsqueda de modelos explicativos, la indagación y el descubrimiento.
- Fomentar el trabajo (orientado y/o autónomo) del alumnado en unos aspectos del conocimiento matemático, que, en la mayoría de las ocasiones, son desconocidas en el contexto escolar.
- Aumentar la cultura matemática de nuestros alumnos y alumnas, desechando creencias erróneas sobre la naturaleza del conocimiento y quehacer matemático y sus resultados.

Estos planteamientos didácticos deben ir acompañados de una reflexión personal sobre las principales ideas que nos pueden ayudar a situarnos en cada momento o a explicarnos, de manera coherente, el tipo de situaciones que están pasando o que nos vamos encontrando. A este respecto conviene recordar los distintos niveles de resultados, que podemos obtener en el tratamiento de la información a lo largo del proceso. Se presentan de modo gráfico[6]:

[6] Adaptado de la obra del Consortium for Mathematics and its Applications, (COMAP), (2002). *"Precalculus. Modeling Our World"* (pág. 19-20). W.H. New York: Freeman and Company.



Si nos centramos en la construcción de modelos, nuestro marco de referencia sitúa esta tarea dentro del proceso de *matematización* de la realidad, caracterizado también por la puesta en práctica de estrategias de pensamiento útiles en cada fase. Se presenta un resumen del mismo en el cuadro siguiente[7]:



Hay varias referencias más que forman parte del conjunto de ideas que fundamentan y justifican el interés e importancia del tema; nuestra intención es irlas presentando en el desarrollo de la ponencia, en el momento en que sean más ilustrativas.

2. ALGO SUAVE PARA EMPEZAR: LA BÚSQUEDA DE PATRONES

Presentamos una primera situación sencilla, que sirve como introducción al tema:

---

[7] Adaptado de: RICO, L. (2005). Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003. En *"PISA 2300. Pruebas de Matemáticas y Solución de Problemas"* (pág. 17). Madrid: Edición MEC-inecse.

Queremos pasar las fichas blancas al lugar de las negras y éstas al de las blancas. Para ello se deben cumplir las reglas siguientes:

Una ficha puede moverse a la casilla de al lado si está libre, y también puede saltar sobre una de distinto color si a continuación hay un hueco. Ninguna ficha puede retroceder. ¿Cuántos movimientos necesitamos para conseguirlo?

Este enunciado es el original con el que habitualmente se presenta la situación. Para el alumnado es atractivo, no tiene ninguna carga matemática explícita y permite hacer tanteos, intentarlo, etc.

Si una vez resuelto pasamos a otra cosa, sin profundizar en la situación, perderemos una oportunidad inmejorable para que nuestros alumnos y alumnas conozcan las interioridades del problema, generalicen la situación, descubran los patrones de funcionamiento, las regularidades y leyes que se cumplen y el modelo matemático del que la situación presentada es un caso simple.

Una posible continuación puede ser el planteamiento siguiente:

Hasta ahora teníamos 3 fichas a cada lado. Vamos a variar el número de fichas y encontrar la fórmula que nos da el número de movimientos para cualquier número de fichas n.

La resolución de esta cuestión está basada en el uso del lenguaje algebraico y ya obliga a abstraer la situación, a analizar los resultados particulares, su ley de formación, buscar el modelo que engloba y resuelve los casos particulares, justificar su validez, etc.

El modelo encontrado tiene una limitación: sólo sirve para cuando el número de fichas sea el mismo a cada lado. ¿Por qué no intentar revisarlo y mejorarlo? Esto podría ser la continuación de la tarea:

Hasta ahora el número de fichas era el mismo a cada lado. Resolver el problema si puede haber distinto número de fichas a cada lado n y p.

A estas alturas, nuestros alumnos y alumnas ya son expertos en el manejo y control de la situación, por lo que no les resulta difícil conseguir el objetivo planteado. En la tabla siguiente se presentan los resultados de las dos últimas tareas:

Número de fichas a cada lado	**Número de movimientos**
Igual número 2 3 … n	 8 15 … n^2+2n
Distinto número n, p	 n.p+n+p

Aunque pudiera parecer que la situación inicial ya ha dado de sí todo lo posible, todavía podemos plantear otra vuelta de tuerca más:

Hasta ahora, en todas las preguntas planteadas, había un hueco con un lugar libre en medio de las fichas. Resolver el problema si hubiera un hueco, en medio, con varios lugares libres, por ejemplo h huecos.

Este caso, que vuelve a plantear la revisión del modelo encontrado, su adaptación y mejora, completa las sucesivas generalizaciones que se van produciendo. El resultado está en la tabla siguiente:

N. de fichas a cada lado y N. de huecos	**N. de movimientos**
n, p; h	n.p+(n+p).h

Desde el punto de vista del proceso de enseñanza y aprendizaje, ¿cómo podríamos caracterizar las actividades llevadas a cabo con el problema inicial? Fijémonos en las siguientes palabras del profesor Rico[8]:

"Modelar incluye las capacidades de:
- *Estructurar el campo o situación que se va a modelar.*
- *Traducir la realidad a una estructura matemática.*
- *Interpretar los modelos matemáticos en términos reales.*
- *Trabajar con un modelo matemático.*
- *Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.*

---

[8] *Ibidem* pág. 21.

- *Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).*
- *Dirigir y controlar el proceso de modelización".*

Creemos poder afirmar con rotundidad que el alumnado que realice las sucesivas tareas presentadas con el problema inicial, está desarrollando todas las capacidades incluidas en la lista anterior, excepto la de *dirigir y controlar el proceso de modelización*, que podemos suponer que, en general, está reservada para el profesor o profesora, o para alumnos o alumnas con mucha experiencia y autonomía. Pero incluso en esta última podrían tener el protagonismo los alumnos y alumnas si se presenta con otro planteamiento metodológico que deje más abierto el camino y el contenido de las sucesivas tareas a realizar.

3. UN EJEMPLO PARA PRACTICAR: LA BÚSQUEDA DE MODELOS

Si nos fijamos en el ejemplo anterior, una de las aportaciones que nos proporciona la modelización es el enriquecimiento que produce, desde el punto de vista didáctico, en el proceso de resolución de un problema. Esto a nivel del alumnado se percibe con unas palabras típicas que suelen decir: *"el problema no se acaba nunca", "siempre nos estás planteando alguna pregunta más", "los problemas, ¿siempre se pueden continuar?".* Para el profesor o profesora es una prueba inequívoca de que la revisión y mejora de los modelos obtenidos es una tarea irrenunciable.

Ahora nos vamos a adentrar en otra situación, con un contenido matemático inicial mucho más evidente. Todo surge de un comentario del profesor Arcavi en su conferencia plenaria de las JAEM de Granada, en 2007, que también aparece escrito en un artículo[9] del mismo autor:

"Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección: si la calificación original era x (en una escala de 0 a 100), ésta devendría en $10\sqrt{x}$*. Es decir, si la calificación inicial fue 81, la corregida sería 90. Aparentemente, este factor es común entre los maestros en Israel".*

---

[9] ARCAVI Abraham (2007). "El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos". En *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* nº 44, pág. 59 a 75.

La situación despertó el interés de quien escribe por dos razones: por haber vivido situaciones parecidas en algún tribunal de pruebas de acceso al cuerpo de profesores de Enseñanza Secundaria (las tradicionales oposiciones) y porque el factor utilizado por esa maestra no es nada frecuente en nuestro país.

Tras practicar personalmente y profundizar en la situación, llega el momento de plantearse su puesta en práctica en el aula. Para ello se decide presentar en clase el párrafo anterior en dos fases; la primera hasta los dos puntos, planteando a los alumnos y alumnas que propongan algún factor de corrección apropiado si el examen lo hubieran hecho ellos:

¿Qué factores de corrección podemos proponer a la profesora para que modifique las notas? Expresarlos en forma algebraica y representarlos gráficamente. Analizar las ventajas e inconvenientes de cada uno.

Tras un corto debate, se presentan los siguientes factores de corrección, siendo x una nota perteneciente al intervalo [0, 10] e y la nota obtenida al corregir x:

- Subir a todos una misma cantidad fija c, $y = x + c$
- Aumentar un porcentaje, r, cada nota,

$$y = x + \frac{rx}{100} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)x$$

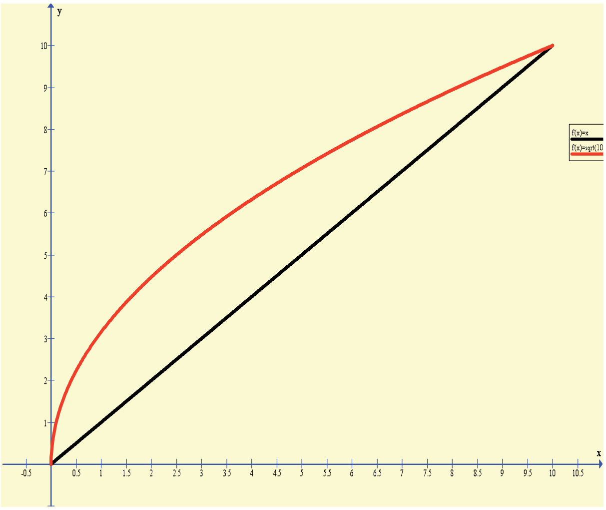
- Redondear la nota al número entero más próximo, que sea mayor o igual que la nota, $y = Ent\left[x\right] + 1$

La obtención de las expresiones algebraicas de alguno de los factores no es sencilla, y con frecuencia hay que ayudar a su consecución en los niveles de ESO. En cuanto a las representaciones gráficas, son muy ilustrativas e influyen mucho en marcha del proceso si se hacen mediante el uso de ordenadores con algún programa sencillo. Por último, sobre los inconvenientes y limitaciones de estos *modelos*, las ideas que más plantean los alumnos y alumnas son:

- Las nuevas calificaciones pueden salirse del intervalo [0, 10]. Es decir, el conjunto imagen de esas funciones no es el adecuado.
- Hay diferencias en cuanto al carácter de justos o injustos de los factores; es decir, no son buenas las subidas “igual para todos”, o las que dan el mismo resultado para notas iniciales diferentes.

Dejando a un lado estas discusiones, se les plantea continuar analizando lo que la maestra ha hecho, proponiendo la continuación del texto original y planteándoles las cuestiones siguientes:

Adapta el factor de corrección de la maestra a nuestro país, donde las notas están entre 0 y 10. Exprésalo algebraicamente y haz su representación gráfica. Analiza sus ventajas e inconvenientes respecto a los anteriores.

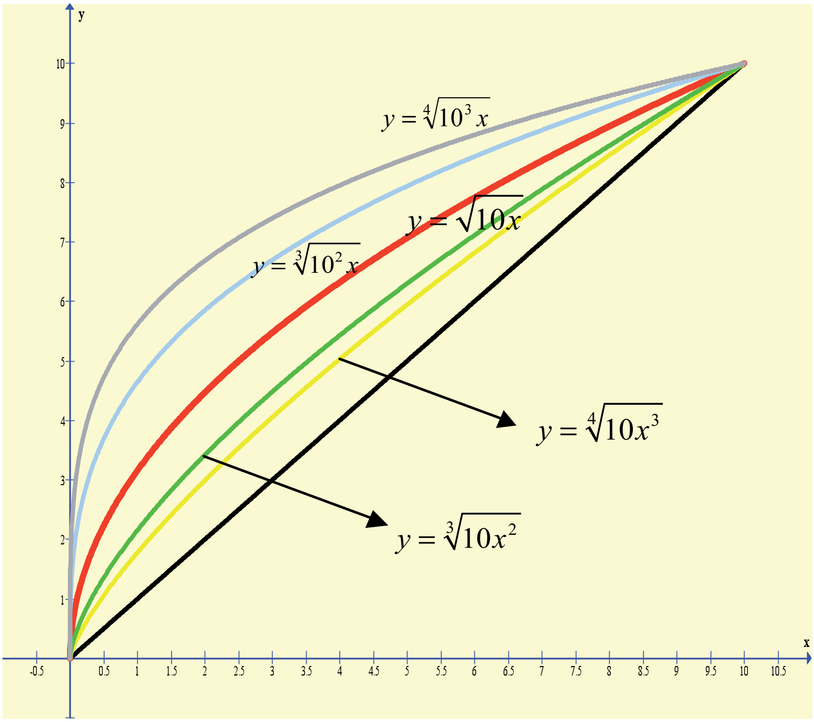


Si hacemos un análisis conjunto de las gráficas del factor de corrección $y=\sqrt{10x}$, que es el análogo para nuestro país, junto con la función $y=x$ que son las notas sin modificar, a los alumnos les sorprende que la imagen de $y=\sqrt{10x}$ vuelva a ser el intervalo [0, 10] y además que sea una curva (los anteriores eran rectas o trozos de rectas). Además, todas las notas, excepto 0 y 10 se benefician; es decir, son mejoradas. Todo esto hace que se valore muy positivamente, aunque hay una parte del alumnado que *no le perdonan a este factor que un 2,5 se transforme en un 5 y, en cambio, un 8,1 sólo se transforme en un 9.* Es decir favorece más a las notas bajas que a las altas. Esto es debido al tipo de crecimiento de la función en las distintas partes del intervalo [0, 10].

Aquí habríamos acabado si nos hubiéramos ceñido al enunciado inicial, pero nuestra idea, fruto del trabajo personal antes de pensar en plantear la cuestión en clase, es que la situación admite otros planteamientos más generales y otros modelos más abstractos. Y esto debemos provocar que surja en el aula. Por tanto proseguimos planteando otras cuestiones:

¿Podríamos ***variar*** *este factor para obtener otros similares? Prueba introduciendo algún cambio en su expresión algebraica: índice de la raíz, exponente de 10 ó exponente de x. Analiza las características de cada uno y su idoneidad.*

Las indicaciones anteriores pueden ser menos explícitas, en función del tipo de alumnado, pero en cualquier caso, los tanteos inmediatos nos conducen a los factores tales como: $y=\sqrt{10x}$, $y=\sqrt[3]{10^2 x}$, $y=\sqrt[3]{10x^2}$, $y=\sqrt[4]{10^3 x}$, $y=\sqrt[4]{10x^3}$, que aparecen en la gráfica siguiente:



Como podemos ver, al aumentar el índice de la raíz, si aumentamos el exponente de 10 obtenemos factores que favorecen la subida de las notas, pero mucho más a las notas bajas. En cambio si aumentamos el exponente de x, obtenemos factores que favorecen las notas, pero menos que el factor inicial $y=\sqrt{10x}$.

La representación gráfica favorece mucho la evaluación y la puesta en común de las características de los nuevos factores, comparándolos entre sí y con el inicial. De ahí se pueden obtener las expresiones de todos ellos, agrupados en dos expresiones que representan a las dos familias de factores:

$$F_n\left(x\right)=\sqrt[n]{10^{n-1}x} \quad G_n\left(x\right)=\sqrt[n]{10x^{n-1}} \quad x\in\left[0,10\right],\ \ n\in \mathrm{N}$$

Si en vez de ser notas entre 0 y 10 fueran del intervalo $\left[0,N\right]$, tendríamos las familias de factores:

$$F_n\left(x\right)=\sqrt[n]{N^{n-1}x} \quad G_n\left(x\right)=\sqrt[n]{N.x^{n-1}} \quad x\in\left[0,N\right], \quad n\in \mathrm{N}$$

Estos resultados, obtenidos como consecuencia de una experimentación, de la que, por no alargar excesivamente el documento, hemos mostrado solamente los momentos clave de clase, nos traen a la mente la siguiente idea del profesor Guzmán[10]:

"La Matemática es, en mucha mayor medida de lo que normalmente se piensa, una verdadera ciencia experimental. (...) Nunca un teorema matemático de importancia ha surgido del ejercicio de la mera abstracción y de la mera lógica. Los resultados profundos son, en general, el producto de innumerables tentativas, experimentos mentales realizados en la penumbra de intuiciones y conjeturas. ¡Cuánta tentativa inicialmente frustrada, corrección y nuevo ensayo, precede al logro de un nuevo teorema, de una nueva realidad matemática!"

Volviendo a la clase, con los modelos de factores obtenidos, podemos hacer simulaciones para predecir algunas situaciones o consecuencias que deseemos. Por ejemplo, podemos plantear una serie de preguntas:

Si hacemos n muy grande, ¿hacía qué funciones se acercan los factores de corrección F_n y G_n ?

Cuando N=10, nos interesa saber, para cada factor de corrección, el valor de x que se transforma en la nota 5. Averiguarlo en varios de ellos.

Analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones acerca de los factores F_n y G_n:

- *Para los factores F_n la nota que se transforma en N/2 puede ser tan pequeña como queramos, con tal de tomar un n suficientemente grande.*
- *Para los factores G_n la nota que se transforma en N/2 puede estar tan próxima a N/2 como queramos, con tal de tomar un n suficientemente grande.*

Deseamos que al aplicar F_n ó G_n, una cierta nota c<5 se transforme en un 5. Averiguar el valor de n para que esto ocurra. ¿Siempre existe ese n?

---

[10] GUZMÁN, M. de, (1985). "Enfoque heurístico de la enseñanza matemática". En *Educación Abierta,* nº 57, pág. 31 a 46.

¿Los factores de corrección F_2 y G_2 tienen alguna característica especial en el conjunto de los F_n y G_n?

Las preguntas anteriores tienen mucho calado matemático e ilustran ideas relacionadas con el concepto de límite, ecuaciones exponenciales o logarítmicas, etc, propias de Bachillerato.

Vamos a dar las respuestas a algunas de ellas. Por ejemplo, las respuestas a la primera de las preguntas son:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ x=0 \\ N \ si \ \ x \in \left]0,N\right] \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x) = x$$

La nota x que se transforma en 5 será: para los factores

F_n, $F_n(x)=5 \Rightarrow x = \dfrac{N}{2^n}$; para los G_n, $G_n(x)=5 \Rightarrow x = \dfrac{N}{2^{n/n-1}}$. Por tanto, si la nota máxima N=10, podemos calcular x en cualquier caso que nos interese.

Por otra parte, como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N}{2^n} = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N}{2^{n/n-1}} = \dfrac{N}{2}$, sí son ciertas la afirmaciones planteadas: cualquier nota, por pequeña que sea, se puede transformar en 5 mediante los factores F_n, tomando n suficientemente grande, y análogamente para los factores G_n.

Por último, las características más sobresalientes de los factores F_2 y G_2 pueden ser:

- Los dos coinciden, es decir, $F_2(x) = G_2(x)$ para todo x.
- Es la función que tienen en común los factores que tienden a llevar las notas al valor N y los que tienden a dejarlas todas como estaban.

Por tanto, el factor de corrección que usa la maestra juega un papel equilibrador entre los factores de corrección similares. Por si a estas alturas alguien podía pensar lo contrario, si la maestra sabía lo que se traía entre manos… ¡de ingenua no tenía nada!

Volviendo a la idea de generalizar, podemos plantear en clase otra cuestión:

Reflexionando sobre las expresiones de los factores F_n y G_n, encuentra una expresión que los englobe a los dos, de manera que todos pasen a formar parte de una sola familia de factores de corrección.

La idea es que se den cuenta que los podemos agrupar en una nueva generalización del modelo, de la forma siguiente:

$$H_n^i(x) = \sqrt[n]{N^i x^{n-i}} \qquad n \in \mathbb{N}, \ \ i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

En este nuevo *contexto*, volvemos a situar los factores conocidos hasta ahora, verificándose que:

- Para i=1, obtenemos los factores G_n.
- Para i=n-1, obtenemos los factores Fn.
- Para i=n/2, obtenemos el factor F2=G2.
- Para i=0, obtenemos el factor Identidad $y=x$.

Sin apenas respirar, y después de admirar los resultados anteriores, volvemos a buscar una reflexión teórica que refuerce la importancia del tema central que nos ha traído aquí, la construcción de modelos. Para ello acudiremos ahora a los *Estándares Curriculares*[11]*...*:

"Uno de los temas centrales de las matemáticas es el estudio de patrones y funciones. Este estudio requiere que los estudiantes reconozcan, describan y generalicen patrones y construyan modelos matemáticos para predecir el comportamiento de fenómenos del mundo real que muestran el patrón observado".

Éste ha sido nuestro objetivo durante todo el proceso anterior. Pero aún quedan *unos detalles para acabar*, para que nuestros alumnos sigan reforzando en sus mentes la idea de que estos procesos pueden continuar indefinidamente. Vamos a exponer algunas líneas de trabajo que podrían facilitar una continuación del trabajo, con problemas abiertos para su resolución:

El objetivo principal del trabajo anterior ha sido subir las notas de un examen, utilizando para ello una familia de funciones como factores de corrección. Para completar el estudio nos vamos a estudiar otras posibilidades que podíamos habernos encontrado:

¿Habrá factores de corrección para bajar las notas de un examen muy fácil?

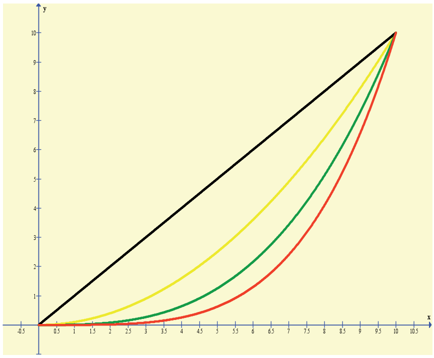
---

[11] NCTM, 1991. *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* (pág. 99). Sevilla : SAEM Thales.

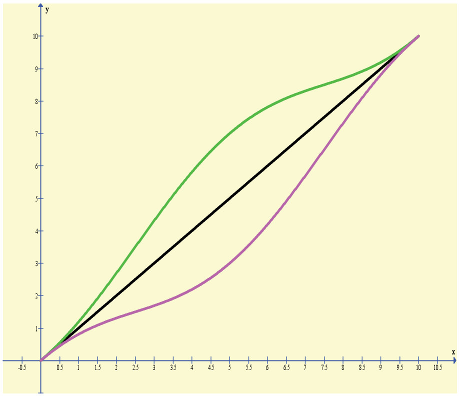
¿Habrá factores de corrección que aumenten o disminuyan de una forma distinta a como lo hacen las funciones anteriores?

¿Habrá factores de corrección que aumenten unas notas y disminuyan otras?

¿Habrá factores de corrección que aumenten unas notas y disminuyan otras de manera caprichosa, por ejemplo, que aumente las notas entre 0 y 1, disminuya las notas entre 1 y 2, y así sucesivamente?

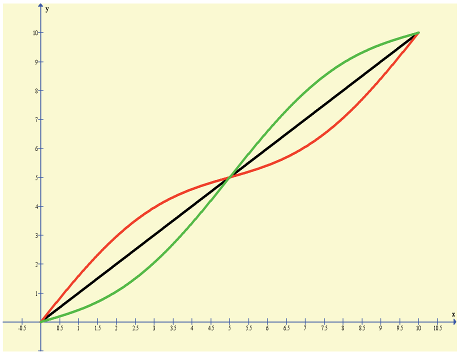


Aunque sólo sea de forma gráfica, vamos a presentar algunos modelos que resuelven las cuestiones anteriores. Algunos de ellos se han obtenido en clase utilizando un programa informático de representaciones gráficas:



En primer lugar, las funciones potenciales servirían para *bajar* las notas. Estas funciones son las recíprocas de las funciones H_n^i encontradas anteriormente. Las que están representadas en las gráficas son las siguientes:

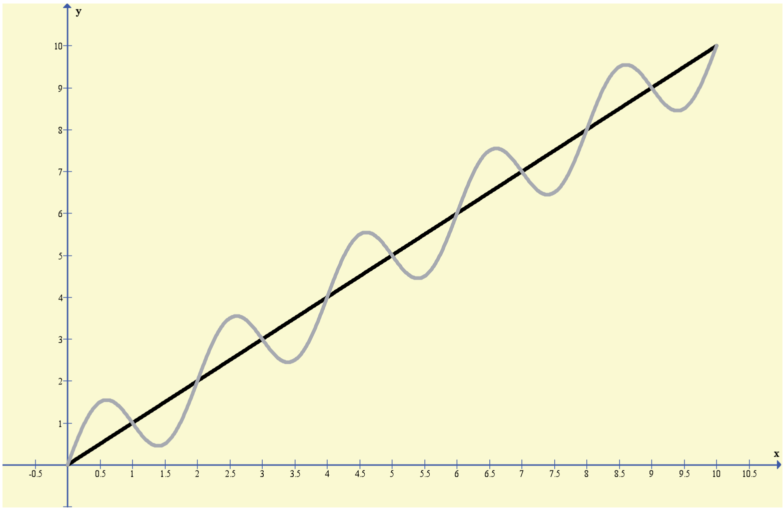
$y = \dfrac{x^2}{10}$, $y = \dfrac{x^3}{10^2}$, $y = \dfrac{x^4}{10^3}$. Omitimos el estudio más pormenorizado de este tipo de factores de corrección.



En segundo lugar, sí que hay otros tipos de funciones que tengan un efecto parecido a las H_n^i, pero no idéntico. Nos estamos refiriendo a algunas funciones trigonométricas como las del dibujo. Concretamente las ahí representadas son: $y = x + 1 - \cos\left(\dfrac{\pi . x}{5}\right)$, la situada por encima de la bisectriz del primer cuadrante; $y = x - 1 + \cos\left(\frac{\pi . x}{5}\right)$ la situada por debajo.

Para la tercera cuestión abierta, podemos responder afirmativamente si nos apoyamos en las funciones trigonométricas adecuadas. Hemos representado gráficamente las siguientes: $y = x + sen\left(\frac{\pi . x}{5}\right)$, la que aumenta las notas entre 0 y 5 y las disminuye entre 5 y 10, $y = x - sen\left(\frac{\pi . x}{5}\right)$, la que invierte los efectos de la anterior.

Por último, la función más sorprendente, que resuelve la cuestión de la *subida o bajada casi caprichosa de las notas,* cuya expresión es $y = x + sen(\pi . x)$ y que representamos a continuación:



Después de ver la última de las representaciones gráficas no nos queda más remedio que admitir que la creatividad tiene un lugar preeminente dentro del proceso de resolución de un problema o en la construcción de modelos matemáticos. Esta cuestión ya ha sido advertida por los especialistas en educación matemática:

"Al considerar las matemáticas como un elemento de la cultura de nuestra sociedad, importante pero uno más, se deja de concebir las matemáticas

como un objeto ya construido que hay que dominar, y se comienza a considerarlas como una forma de pensamiento abierto con margen para la creatividad, cuya ejercitación hay que desarrollar, respetando la autonomía y ritmo de cada persona"[12].

4. ALGO BELLO PARA DISFRUTAR: LA CREACIÓN DE UNA TEORÍA

Desde nuestro punto de vista, pensamos que los ejemplos anteriores nos han permitido ver de cerca el proceso de construcción de modelos matemáticos útiles para la resolución de determinados problemas. En el presente apartado queremos dar un paso más adelante y ver, con la descripción y estudio de un caso, cómo se conectan la resolución de problemas, la construcción de modelos y la creación de una teoría matemática, con sus definiciones, conceptos, propiedades, teoremas, etc., en la que todo tiene su lugar, desde el problema inicial hasta otros más generales que lo engloban.

Todo lo que vamos a exponer se planteó a varios alumnos de Bachillerato en dos cursos diferentes, por lo que unos resultados son continuación de los otros; lo iremos explicando en el transcurso del apartado.

Como siempre, partiremos de un problema a resolver, del que, en un principio, no podíamos imaginar su riquísimo trasfondo:

	74			
				186
		103		
0				

¿Será posible rellenar los espacios vacíos de la tabla con números enteros positivos, de modo que los números de cada fila y de cada columna formen progresiones aritméticas?

El enunciado, como veremos en las líneas que siguen, responde perfectamente a la idea de *problema semilla*, como todos los anteriores, y resaltamos esta idea porque es muy interesante para clase y en ningún caso como en este

[12] KILPATRICK, J; RICO, L. y SIERRA, M. (1994). *Educación Matemática e Investigación.* Madrid: Ed. Síntesis.

ejemplo se puede ver cómo de la semilla se produce un bosque entero:

"Comienzo con un enunciado inicial, al que llamaré "semilla". Este enunciado ha de ser interesante y muy sencillo. El ejercicio tiene por propósito regar la semilla y hacerla crecer y convertirse en una planta recia. De ordinario ofrezco a mi clase una variedad de "simientes", y ellos eligen la que quieren regar, en función de su experiencia[13]*".*

	74			
				186
x		**103**		
0				

52	**82**	**112**	**142**	**172**
39	**74**	**109**	**144**	**179**
26	**66**	**106**	**146**	**186**
13	**58**	**103**	**148**	**193**
0	**50**	**100**	**150**	**200**

La resolución del problema nos lleva a que la respuesta es afirmativa: llamando x al valor situado encima del 0, y aplicando las propiedades de las progresiones aritméticas (p. a.) llegamos a que x=13, y una vez obtenido este valor se completa el cuadrado de números, resultando el que figura al lado derecho de la imagen.

Durante el proceso de resolución se hace hincapié en los aspectos heurísticos, didácticos y psicológicos que aparecen en los diferentes modelos de resolución de problemas. Una vez resuelto, se profundiza en la fase de *reflexión, visión retrospectiva o revisión-extensión*, con el fin de plantearse, entre otras cosas:

- Otras formas de resolución.
- Nuevas preguntas, conjeturas globales y/o parciales.
- Variaciones en las condiciones o datos, para obtener generalizaciones o particularizaciones interesantes.
- Intuiciones sobre nuevos conceptos y acercamiento a nuevos aspectos: propiedades, regularidades, conjeturas, otros problemas…

[13] DAVIS, P. y HERSH, R. (1988). *Experiencia Matemática* (pág. 216). Barcelona: Ed. Labor y MEC.

Este proceso de búsqueda de la estructura interior del problema no es lineal ni da lugar a resultados formalizados; más bien es un proceso laberíntico y los resultados que obtengamos deben formalizarse más tarde. Además, debemos estar preparados para la aparición de numerosas conjeturas. A este respecto nos viene muy bien recordar algunas ideas de Mason, Burton y Stacey[14]:

"Las conjeturas se producen como resultado de dos actividades fundamentales. Particularizar, probablemente la más usual, y el uso de la analogía, que es en realidad una forma de generalización.

Las conjeturas son como mariposas. Cuando una revolotea, suele haber muchas más alrededor. Según van apareciendo, cada una distrae la atención de la anterior, y esto hace que sea más fácil perder el hilo. (...) Descubrirás que, como las mariposas, no son fáciles de capturar. Puedes requerir varios intentos, y en esos intentos tu mente se concentra y la conjetura va adquiriendo forma y perdiendo imprecisión".

Volviendo a nuestro problema, después de encontrar otras formas de resolverlo, de estudiar algún caso particular, etc., hay unos problemas que aparecen de forma natural y que van a ser el centro del trabajo:

Z	*T*			
X	*Y*			

Si nos dan cuatro valores X, Y, Z, T, colocados como en la figura de al lado, entonces sí podemos prolongar el cuadro tanto como nos interese.

Si conocemos cuatro valores del cuadro, que estén situados, cada uno, en diferentes filas y columnas, ¿tendrá solución?; es decir, ¿podemos completarlo de forma única como en el problema inicial?

Esta cuestión es una de las de mayor dificultad en todo el proceso.

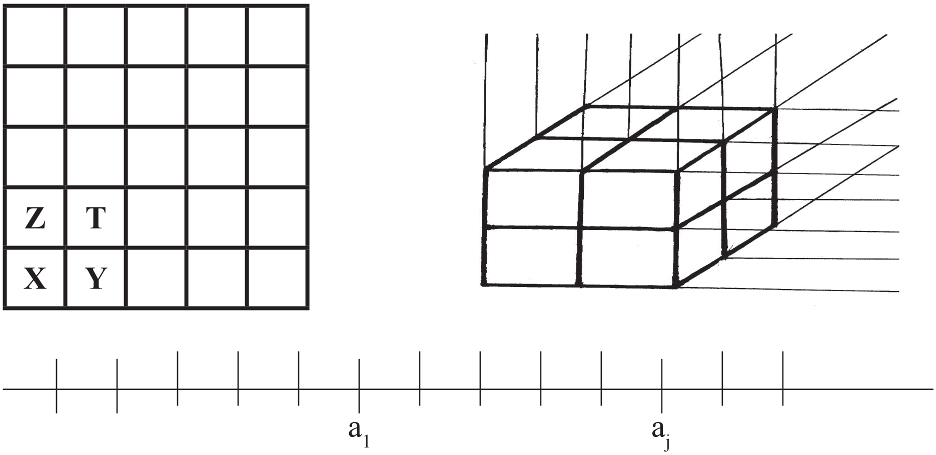
A la vista del funcionamiento de los cuadros de números, podríamos pensar que forman parte de un proceso que generaliza el concepto de p. a. tradicional:

- En una p. a. si conocemos dos términos podemos deducir toda la progresión. La p. a. está situada en una línea recta, un espacio unidimensional.

[14] Mason, J., BURTON, L. y STACEY, K. op. cit. pág. 85.

- En un cuadro de números, si conocemos 4 términos, quizás pase lo mismo. Esto sería en un plano, en un espacio bidimensional, con movimiento en la horizontal y en la vertical.
- En un espacio tridimensional tendríamos paralelepípedos formados por cubitos en cada una de las tres dimensiones, y conociendo 8 elementos podríamos conocer todos los elementos de la figura.
- En espacios de dimensión mayor que 3 puede suceder algo análogo, necesitándose 2^n elementos conocidos, siendo n la dimensión del espacio.

Gráficamente sería algo parecido a la figura siguiente:



A su vez nos vamos aproximando a conocer la estructura interna del problema:

- La figura es un cuadrado.
- Los valores numéricos dados son cuatro números enteros positivos.
- Se trata de progresiones aritméticas.
- Tenemos que encontrar números enteros.

Si introducimos variantes, por analogía, en las variables y condiciones anteriores, podemos encontrarnos:

- A partir del Cuadrado: Rectángulo, Recta, Cubo, Paralelepípedo,...
- Número de datos conocidos. ¿Será 4 el mínimo número necesario de ellos? Si nos dan 3, ¿qué ocurrirá? Y si nos dan valores de las diferencias de filas o columnas…
- A partir de las progresiones aritméticas podemos pensar en progresiones geométricas.

- A partir de números enteros positivos podemos pensar en números enteros, números racionales, reales, etc.

Esta pequeña panorámica de ideas sin formalizar nos permite apreciar la riqueza del proceso por el que estamos atravesando. Este proceso está impregnado por una forma de hacer que se enmarca en un patrón heurístico no deductivo:

"El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesiva formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada.

Algunos de los defensores del estilo deductivista pretenden que la deducción es el patrón heurístico de las matemáticas y que la lógica del descubrimiento es la deducción"[15].

La sorpresa más interesante de todo el proceso es la aparición incipiente de nuevos conceptos, sin formalizar, que surgen del uso de la analogía, la generalización, y del análisis de la estructura interna del problema, o dicho de otra forma, del modelo subyacente en el mismo. Sobre este aspecto, vamos a fijarnos en dos ideas que lo aclaran y refuerzan:

"Una de las características de las matemáticas es que la invención empieza muy pronto, desde que un alumno se sitúa ante un problema que debe resolver (...). Si el alumno no se limita a contestar a las preguntas que se le formulan, sino que se esfuerza en hacer observaciones originales relativas al problema, o mejor aún, si él mismo se plantea problemas, en estos casos su trabajo se distingue del del matemático creador sólo en una diferencia de nivel"[16].

"El aspecto más importante del descubrimiento matemático (contrariamente a la imagen habitual que se tiene de la demostración como el núcleo de las matemáticas) es la construcción de nuevos conceptos, uno detrás de otro, generalizando cada vez algún aspecto de los anteriores. Por supuesto, cada construcción tiene propiedades que no pueden ser controladas, sino tan sólo descubiertas, en este sentido las matemáticas combinan la invención y el descubrimiento.

---

[15] LAKATOS, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático* (pág. 166). Madrid: Alianza Editorial.
[16] Taton, R. (1973). *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos,* (pág. 23-24). Ed. Barcelona: Labor.

La mayor parte de los nuevos conceptos se producen mediante ciertos tipos de recetas no escritas que todos los matemáticos entienden intuitivamente, y que normalmente se pueden caracterizar por gloriosos giros del botón; esto es, partir de un fenómeno familiar, encontrarle algún aspecto que hasta ahora había permanecido fijo (éste sería el botón) convertir explícitamente este aspecto en una variable, y ver qué sucede cuando toma valores distintos del habitual"[17].

La primera cita muestra las posibilidades creativas de las matemáticas en nuestros jóvenes estudiantes. La segunda hace diana, de forma certera, en los mecanismos y resortes útiles para la creación dentro del campo matemático.

Después de todo lo anterior, estamos en condiciones de aplicar el rigor en la definición de los nuevos conceptos y en su formalización; la demostración pasará a jugar un papel fundamental en la demostración de las propiedades y teoremas relativos a la teoría encontrada.

Los conceptos y resultados más interesantes son los que se presentan a continuación:

Denominamos Red Aritmética Bidimensional (RA2D) de n filas y m columnas (nxm) a un cuadro de números de la forma $\begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_m \\ \dots & & \dots \\ a_1 & \dots & a_{1m} \end{bmatrix}$ donde los elementos de cada fila y de cada columna son progresiones aritméticas. También lo escribiremos de la forma siguiente: $(a_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le m}$

Al conjunto de todas las RA2D de n filas y m columnas lo denotaremos por R(nxm).

Una Red Aritmética Tridimensional de dimensiones (nxmxp) (RA3D) es todo "paralelepípedo" de números (a_{ijk}) donde $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $j \in \{1,2,\dots,m\}$

---

[17] HOFSTADTER, D. R. (1990). "Analogías con fluidos y la creatividad humana". En Wagensberg, J. (edit) *Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea* (pág. 89-90). Barcelona: Tusquets Editores.

$k \in \{1,2,...,p\}$ de tal manera que si fijamos i, j y variamos k, obtenemos una progresión aritmética. Análogamente, si fijáramos dos cualesquiera y variásemos la tercera que queda, pasaría lo mismo. También, para cada i fijo, variando j y k se obtiene una RA2D(mxp). Análogamente si fijamos j ó k y variamos las otras dos,

Al conjunto de todas las redes aritméticas tridimensionales de dimensiones nxmxp lo denotaremos por R(nxmxp)

Red Aritmética N-dimensional ($n_1xn_2x\dots n_N$). Llamaremos así a todo "hiperparalelepípedo" de números $a_{i, j, \dots, k}$, donde i toma valores naturales entre 1 y n_1; j entre 1 y n_2; …, k entre 1 y n_N, de tal forma que si fijamos todos los valores i, j, …, k, excepto uno de ellos: p, que varía desde 1 hasta n_p, los términos correspondientes forman una p.a. A esta red aritmética de dimensiones ($n_1xn_2x\dots n_N$) la denotamos por RAND(n_1, $n_{2,}$ …. n_N).

Red Aritmética Unidimensional: es cualquier sucesión de números $a_1, a_2,..., a_n$ que formen progresión aritmética. También la escribiremos $(a_i)_{1 \le i \le n}$. Al conjunto de todas las RA1D de n elementos lo denotaremos por R(n).

Progresión aritmética fila de una RA2D nxm es cualquier progresión aritmética de elementos de la red que están todos en la misma fila. Las denotaremos por p.a.f. De manera análoga definimos progresión aritmética columna (p.a.c.)

Resultado: La sucesión de las diferencias de las p.a.c. es una p.a. Análogamente, la sucesión de las diferencias de las p.a.f es una p.a. Además tienen las dos la misma diferencia. Esta diferencia común la denominamos Número de Priscila[18] asociado a un RA2D.

Resultado: En una RA2D, si tomamos cuatro elementos "consecutivos" (en el sentido de que están situadas en dos filas y en dos columnas

[18] Priscila es el nombre de la alumna que se interesó en el tema, que realizó el primer trabajo, del que estamos hablando en este momento. Con este trabajo recibió el primer premio en el II Certamen de Trabajos de Inicio a la Investigación, organizado por la Universidad de Burgos. Posteriormente fue seleccionada por el INICE (Salamanca) para asistir a un seminario internacional de jóvenes investigadores, celebrado en Estocolmo, participando en las actividades programadas en la entrega de los Premios Nobel y presentando el trabajo en unas de las sesiones del seminario.

consecutivas) tal como se muestra en la figura: $\begin{bmatrix} a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \\ a_{ij} & a_{i,j+1} \end{bmatrix}$ Entonces

se verifica que si efectuamos $(a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j}) - (a_{i,j+1} - a_{ij})$ obtenemos como resultado el número de Priscila asociado a la RA2D

Resultado: Si *a, b, c, d* son los elementos de las esquinas de una RA2D, y

N su Número de Priscila, se cumple que $N = \dfrac{(a+d)-(b+c)}{(m-1)(n-1)}$

En el transcurso de la investigación, tenemos noticias de un problema propuesto en la Olimpiada de Matemáticas de Bachillerato, en el año 2004, cuyo enunciado dice:

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columna son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

Rápidamente asociamos el problema a las RA2D y vemos que nos puede proporcionar un procedimiento para hallar la suma de los elementos que componen una RA2D en función de los elementos colocados en las esquinas. Como consecuencia de todo ello surgen otros resultados muy interesantes:

Resultado: Dada una RA2D cualquiera de *n* filas y *m* columnas, la suma de todos sus elementos la podemos obtener a partir de los cuatro elementos de las esquinas *a, b, c, d*. Concretamente, la suma será:

$$S_{n,m} = (a+b+c+d)\frac{n}{2}\bullet\frac{m}{2}$$

Resultado: En una RA2D (nxm), si *n* y *m* son impares se cumple que

$S_{n_1 m} = n.m.a_{\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}}$, siendo este elemento de la RA2D el que podríamos

denominar término central de la misma.

Resultado: Si *n, m* son pares, la suma de los elementos de la RA2D la podemos obtener mediante la expresión:

$$S_{n,m}=\frac{n}{2},\frac{m}{2}\cdot\left(a_{\frac{n}{2},\frac{m}{2}}+a_{\frac{n}{2},\frac{m}{2}+1}+a_{\frac{n}{2}+1,\frac{m}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1,\frac{m}{2}+1}\right)$$

Resultado: En una RA2D nxm, si *n* es impar y *m* sea par, obtendremos:

$$S_{n,m}=n\cdot\frac{m}{2}\cdot\left(a_{\frac{n+1}{2},\frac{m}{2}}+a_{\frac{n+1}{2},\frac{m}{2}+1}\right)$$

Resultado: En una RA3D, de dimensiones n, m, p, la suma de sus elementos se puede calcular mediante la expresión:

$$\mathrm{S}_{\mathrm{n,m,p}}=\frac{\mathrm{n}}{2}.\frac{\mathrm{m}}{2}.\frac{\mathrm{p}}{2}\left(\mathrm{a}_{1,1,1}+\mathrm{a}_{\mathrm{n},1,1}+\mathrm{a}_{\mathrm{n,m},1}+\mathrm{a}_{1,\mathrm{m},1}+\mathrm{a}_{1,1,\mathrm{p}}+\mathrm{a}_{1,\mathrm{m,p}}+\mathrm{a}_{\mathrm{n},1,\mathrm{p}}+\mathrm{a}_{\mathrm{n,m,p}}\right)$$

Por tanto hemos encontrado solución al problema de sumar los términos de una RA2D, una RA3D y una RAND, aunque en este caso no hay una notación adecuada para expresar el resultado. Aún quedan otros problemas sin resolver, pero también quedan otros muchos resultados por descubrir. ¿Cómo es esto? El trabajo del que estamos hablando finaliza aquí, pero dos años más tarde volvemos sobre los problemas iniciales y conseguimos lo que no imaginábamos que pudiera existir. Pero esto es el contenido del punto siguiente.

5. ALGO PROFUNDO PARA CONTEMPLAR: LA TEORÍA SE COMPLETA

Como decíamos más arriba, dos años más tarde retomamos el tema, proponiéndoles a un grupo de cinco alumnos proseguir el estudio, presentándoles un guion para que decidieran si se interesaban. El guion es el siguiente:

El trabajo es un viaje a un universo imaginario lleno de infinitos mundos, en cada uno de los cuales sus habitantes son tablas de números. Nuestro objetivo es llegar a conocer en profundidad a los habitantes de cada uno de esos mundos.

Hay una entrada conocida a ese universo, y un camino un poco explorado para moverse por los mundos que contiene. En primer lugar debemos co-

nocer cómo se encontró la entrada y cuál es el camino que ya existe. Para ello seguiremos el siguiente plan:

1. *Analizar el trabajo de Priscila.*
2. *Resolución de dudas y comprensión de las ideas fundamentales. Sabemos cómo entrar en ese universo nuevo y en cada uno de sus mundos, conocemos algunas características de sus habitantes y estamos en condiciones de plantearnos un análisis más profundo y definitivo de algunas cuestiones de interés relativas a sus habitantes.*
3. *Planteamiento, por parte de cualquiera de nosotros, de alguna línea de investigación nueva, que nos pudiera interesar.*
4. *Resolver el problema de la fase nacional de la olimpiada de bachillerato del año 2004.*
5. *Plantearse la obtención de los resultados relativos a la suma de los términos de una red aritmética:*
   - *¿Cómo calcular la suma de los términos de cualquier tabla rectangular? ¿Y para una tabla tridimensional? ¿Y para una tabla n-dimensional?*
   - *¿Las fórmulas obtenidas son la generalización natural de la fórmula de la suma de las p.a.?*
   - *¿Cómo calcular la suma utilizando el Número de Priscila?*
   - *¿Cómo calcular la suma en función de los términos centrales de la tabla?*

También podemos plantearnos otros problemas:

- *¿Cómo resolver el problema de la interpolación de medios aritméticos en una tabla bidimensional o tridimensional o n-dimensional?*
- *Otro problema es la invención de una notación ágil para denotar y escribir con facilidad los números de una tabla de cualquier dimensión.*

Con este bagaje, estos cinco alumnos consiguieron completar el estudio, consiguiendo unos resultados que responden satisfactoriamente a los retos planteados y generalizan, a n dimensiones, el concepto tradicional de progresión aritmética, que quedaría, en este marco teórico, como caso unidimensional. Los principales conceptos y propiedades son:

- Término general de las RAND (con más de una expresión).
- Diferencia (generalización del Número de Priscila para una RAND).
- Suma de los términos de una RAND (con varias formulaciones).
- Estudio, por analogía y extensión, del concepto semejante para las progresiones geométricas, las denominadas RGND.
- Resolución de otros problemas subyacentes.

A título de ejemplo presentamos algunos de ellos:

Término general $a_{i,j}$ de una RA2D en función del primer término $a_{1,1}$, las diferencias de la primera fila h_1 y la primera columna v_1, y del Número de Priscila d_p. La expresión es

$$a_{i,j} = d_P \cdot (i-1) \cdot (j-1) + h_1 \cdot (i-1) + v_1 \cdot (j-1) + a_{1,1}.$$

De manera análoga, el término general de una RA3D:

$$a_{i,j,k} = d_P \cdot (i-1) \cdot (j-1) \cdot (k-1) + k_1 \cdot (i-1) \cdot (j-1) + k_2 \cdot (i-1) \cdot (k-1) + k_3 \cdot (j-1) \cdot (k-1) +$$
$$+ t_1 \cdot (i-1) + t_2 \cdot (j-1) + t_3 \cdot (k-1) + a_{1,1,1}$$

Las expresiones para calcular la suma de los términos de una red aritmética en función del término general:

$$S_{n,m} = \frac{n.m}{(n-1)(m-1)} \int_0^{n-1} \left[\int_0^{m-1} (d_p xy + h_1 x + v_1 y + a_{1,1})\, dy \right] dx$$

$$S_{n,m} = \frac{n \cdot m \cdot p}{(n-1) \cdot (m-1) \cdot (p-1)} \cdot \int_0^{n-1} \left[\int_0^{m-1} \left[\int_0^{p-1} \left(d_P \cdot xyz + k_1 \cdot xy + k_2 \cdot xz + k_3 \cdot yz + t_1 \cdot x + t_2 \cdot y + t_3 \cdot z + a_{1,1,1} \right) dz \right] dy \right] dx$$

De estos resultados surge la fórmula correspondiente para la suma de los n primeros términos de una p.a. tradicional:

$$S_n = \frac{n}{n-1} \int_0^{n-1} (a_1 + x.d)\, dx$$

Ante la contemplación de la fórmula anterior, como se ha dicho en la introducción a este documento nos viene a la mente la frase siguiente:

“Pocos placeres hay en la vida humana que igualen al producido por la aparición repentina de una generalización repentina que ilumina el entendimiento. Quien haya experimentado una vez este placer de creación científica, no lo olvida jamás”[19].

---

[19] Extraida de la obra de KROPOTKIN PIOTR A. (1973). *Memorias de un revolucionario*. Madrid: Ed. Zero.

Para una RAND, de dimensiones $d_1.d_2.d_3...d_n$, se obtiene también una fórmula para la suma de sus términos en función del término general:

$$S_{d_1,d_2,\ldots,d_n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} d_i}{\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)} \cdot \int_0^{d_1-1}\left[\int_0^{d_2-1}\left[\ldots\left[\int_0^{d_n-1}\left(a_{p_1,p_2,\ldots,p_n}\right)dp_n\right]\ldots\right]dp_2\right]dp_1$$

Incluso podemos mostrar la fórmula para la suma de sus términos, en función de los 2n *elementos de las esquinas*:

$$S_{d_1,d_2,\ldots,d_n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} d_i \cdot \left[\sum_{\sigma \in T}\left(a_{\sigma(p_1),\sigma(p_2),\ldots,\sigma(p_n)}\right)\right]}{2^n}.$$

En esta expresión, los conjuntos que intervienen son los siguientes:

$$P = \{p_1, p_2, ..., p_n\},\ D^* = \{1,\ d_1,\ d_2,..,\ d_n\},$$

$$T = \{\sigma : P \rightarrow D^* / \sigma(p_i) \in \{1, d_i\}\}$$

Esta notación, que no se había conseguido hasta ese momento, nos asegura que los términos que se suman son los correspondientes a las *esquinas* del hiperparalelepípedo n-dimensional.

Podríamos continuar, pero la exposición de todos los resultados podrían llenar un artículo monográfico sobre el tema. Por esta razón lo vamos a dejar aquí. Creemos haber demostrado con suficiente contundencia la potencia de los resultados encontrados y su belleza.

6. REFLEXIONES FINALES A MODO DE EPÍLOGO

El viaje realizado por el mundo matemático, desde los datos hasta las teorías, pasando por la identificación de patrones y la construcción de modelos, ha tenido una motivación clara: la resolución de determinados problemas y el vivir en primera persona el proceso de creación y descubrimiento, al nivel del alumnado no universitario.

Sobre esto último, acudiremos a las palabras del clásico en el tema, G. Polya[20], que se proyectan desde la creación en matemáticas hasta su enseñanza, pasando por la demostración y la intuición:

> *"El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición.*
>
> *Si esto es así, y yo lo creo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas. La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto por ella. En cualquier caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante".*

En cualquier caso, para resaltar la importancia de los trabajos planteados en clase con alumnos y alumnas de Secundaria, recordaremos las ideas de la profesora C. Cañón[21], que partiendo de la esencia del proceso de creación en matemáticas llega a extraer consecuencias para su enseñanza:

> *"La perspectiva abierta por el planteamiento de la HEURÍSTICA, lleva los primeros ensayos de Polya a un nuevo nivel. No es sólo una cuestión metodológica de un quehacer concreto, es también una sistemática epistemológica. La fase creativa en Matemáticas no está regida por los análisis lógicos, sino por una indagación que ha de arriesgar nuevas visiones de relacionar conceptos y de crear otros nuevos. Las consecuencias que este planteamiento tiene para la enseñanza de la Matemática es muy grande, y ya se ha empezado a notar".*

Las reflexiones anteriores nos vuelven a plantear la eterna pregunta de cuál es la naturaleza de las matemáticas para que podamos extraer de ella esta variedad y riqueza de ideas. Nos lo responden muy didácticamente las palabras siguientes:

> *"Las matemáticas son un producto de las mentes humanas pero no pueden someterse a la voluntad humana. Explorarlas es como explorar un*

---

[20] POLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Edit. Tecnos.
[21] CAÑÓN, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento* (pág. 343). Universidad Pontificia Comillas de Madrid.

nuevo sendero en el terreno; quizá no sabes lo que hay en la siguiente curva del río, pero no tienes que escoger. Sólo puedes esperar y descubrirlo. Pero el terreno matemático no existe hasta que uno lo explora”[22].

Las últimas palabras de la cita anterior expresan de una forma muy bella y poética el significado de la creación en matemáticas.

Por último, como profesores y profesoras de matemáticas, no podemos dejar de lado una idea de Polya[23] que, aunque muy repetida, no ha perdido por ello nada de su vigencia original:

“Lo que el profesor dice en clase no carece de importancia, pero lo que los alumnos piensan es mil veces más importante. Las ideas deben nacer en la mente de los alumnos y el profesor debe actuar tan sólo como una comadrona”.

[22] STEWART, I. (2006). *Cartas a una joven matemática* (pág. 33). Barcelona: Edit. Crítica.
[23] POLYA, G. (1962-1965). *Mathematical Discovery* (vol 1 y 2). Nueva York: Wiley.

BIBLIOGRAFÍA

ARCAVI, A. (2007). "El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos*,* en *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* nº 44, pág. 59 a 75.

CAÑÓN, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento.* Madrid: Universidad Pontificia Comillas de Madrid.

CONSORTIUM FOR MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS, (COMAP), (2002). *"Precalculus. Modeling Our World"*. New York: W.H. Freeman and Company.

DAVIS, P. y Hersh, R. (1988). *"Experiencia Matemática"*. Barcelona: Ed. Labor y MEC.

GUZMÁN, M. de (1985). "Enfoque heurístico de la enseñanza matemática". *Educación Abierta,* nº 57, pág. 31 a 46.

GUZMÁN, M. de (1991) *Para pensar mejor*. Barcelona: Edit. Labor (1994. Edit. Pirámide, Madrid).

HOFSTADTER, D. R. (1990). "Analogías con fluidos y la creatividad humana". En Wagensberg, J. (edit). *Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea.* Barcelona: Tusquets Editores.

KEHLMANN, D. (2006). *La Medición del Mundo.* Madrid: Maeba Ediciones.

KILPATRICK, J; RICO, L. y SIERRA, M. (1994). *Educación Matemática e Investigación.* Madrid: Ed. Síntesis.

KROPOTKIN, PIOTR A. (1973). *Memorias de un revolucionario*. Madrid: Ed. Zero.

LAKATOS, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Editorial.

MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Edit Labor y MEC.

NCTM, 1991. *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* (pág. 99). Sevilla: SAEM Thales.

POLYA, G. (1962-1965). *Mathematical Discovery* (vol 1 y 2). Nueva York: Wiley.

POLYA, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Mexico. Edit Trillas.

POLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Edit. Tecnos.

RICO, L. (2005). "Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003". En *PISA 2300. Pruebas de Matemáticas y Solución de Problemas.* Madrid: Edición MEC-inecse.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Nueva York: Academic Press.

STEWART, I. (2006). *Cartas a una joven matemática.* Barcelona: Edit. Crítica.

TATON, R. (1973). *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos.* Barcelona: Ed. Labor.

MODELIZACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL AULA

Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas

1. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.1. Introducción

Siempre me ha gustado resolver problemas. Cuanto más difíciles, más motivado me siento. Cuando intento resolver uno, ya sea de la vida real, ya sea específicamente de matemáticas, procuro utilizar todas las estrategias a mi alcance para encontrar la solución. Estas estrategias, o bien las he ido adquiriendo a través de mi experiencia diaria o de mi formación académica generalmente de forma subconsciente, o bien las he aprendido conscientemente en los libros dedicados a la resolución de problemas.

Claro que no siempre el problema es tan complejo como para recurrir a casi ninguna de dichas estrategias. De hecho, cuando el problema no es de matemáticas, sino que se presenta en mi vida cotidiana, suele ser bastante sencillo. En caso de ser un problema específicamente matemático casi siempre lo termino identificando con algún otro problema con el que me había enfrentado anteriormente (suerte de ser matemático). No me suele costar mucho trabajo encasillar los problemas y utilizar una o varias herramientas matemáticas para tratar de solucionarlo.

Como he escrito anteriormente, yo tengo la suerte de ser licenciado en matemáticas y docente y dispongo de algunos recursos y algún entrenamiento más que cualquier otro ciudadano.

Un ejemplo de ésto es un clásico ejercicio de bachillerato o primer curso de carrera:

Ejemplo. Encuentra las dimensiones del rectángulo de perímetro 40 cm cuya área sea máxima.

Cuando leo el problema lo que pasa por mi mente se podría describir:

Rectángulo -> dimensiones del triángulo igual a base y altura -> perímetro igual a suma de todos los lados -> área igual a base por altura -> máximo -> optimización -> derivadas -> Traducción -> Solución: Base=10 cm; Altura=10 cm. Un cuadrado.

Para poder seguir esa secuencia, un individuo debe conocer todos los conceptos y estructuras citados y haber adquirido los procedimientos adecuados para utilizar dichos conceptos. Sin olvidar, por supuesto, ¡que ha de tener una actitud positiva hacia el problema!

La estrategia antes mencionada tiene implícita la competencia de modelización matemática, de la que utiliza varias capacidades como "Estructurar el campo a estudiar" o "Traducir la realidad en términos matemáticos", luego sirve de ejemplo como primera situación de modelización. De hecho, en general, al enfrentarnos a un problema, visualizamos la situación y la intentamos adaptar para que la búsqueda de la solución nos resulte más cómoda.

¿Se podría plantear este problema a 1º ESO? Evidentemente, esa secuencia de ideas no tendrá sentido para ninguno de los alumnos. Pero, ¿significa eso que no son capaces de resolverlo? Más aún, ¿significa eso que no se pueden imaginar la situación e intentar elaborar alguna estrategia diferente a la que yo he usado? Ahí es donde mi labor como docente entra en juego. Claro que el alumnado de 1º ESO puede visualizar la situación, el problema es que hay que llevarla al campo matemático para resolver y eso requiere que se les desarrolle la competencia de modelar.

El uso de tablas y gráficos puede ayudar a solucionar el problema. También se puede plantear una situación gráfica mediante el uso de un programa de geometría dinámica (ver Figura 1).

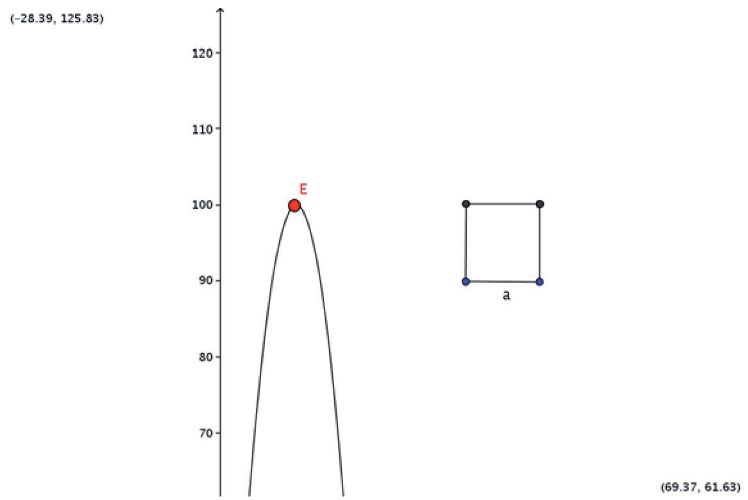


Figura 1. Representación del ejemplo 1.

Según el Real Decreto 1631/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la ESO, en su sección dedicada a las matemáticas, la resolución de problemas forma un bloque transversal que "constituye el eje vertebrador de los conocimientos matemáticos"[1]. Este bloque es el centro de gravedad de la actividad matemática general. Es más, entre los once objetivos establecidos en el Real Decreto citado, al menos cuatro están directamente relacionados con el análisis del mundo real a partir de conceptos matemáticos.

Todo lo anterior hace que la intención y la obligación del docente deba ser el desarrollo de la competencia de modelización matemática en el alumnado. Para ello, no cabe duda de que, al menos, se debe:

1. Determinar claramente lo que se entiende por modelización.
2. Identificar todas las capacidades relacionadas con ella. Las capacidades no sólo sirven para determinar el campo de acción sino que sirven para establecer relaciones con otras competencias matemáticas y permiten, una vez modificadas, evaluar el grado de adquisición de la competencia.
3. Tratar de desarrollar dichas capacidades en el alumnado. Este paso es el más complejo. Requiere:
   a) determinar qué problemas son los más adecuados para esta labor,
   b) secuenciar dichos problemas,
   c) establecer unos criterios de valoración de las capacidades,
   d) ...

para, finalmente, conseguir que los alumnos sean capaces de enfrentarse a situaciones reales mediante el uso de las técnicas matemáticas que les pueda aportar la Enseñanza Secundaria[2] y, si no poseen las técnicas suficientes, sean capaces de dirigir el proceso de modelización hacia el aprendizaje de dichas técnicas.

1.2. Qué es modelar (o modelizar)

La definición más usual en educación matemática suele ser la de "expresar en términos matemáticos determinados hechos y sus relaciones"[3] y, por tanto, un modelo matemático es una estructura que aproxima o describe dichas relaciones.

---

[1] GUZMÁN, M. de (1991) *Para pensar mejor*. Barcelona: Edit. Labor. (1994. Edit. Pirámide, Madrid).

[2] Enseñanza Secundaria tanto obligatoria como postobligatoria.

[3] CASTRO, E.; CASTRO, E. (1997). "Representaciones y modelización". En RICO, R. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Univ. Barcelona y Horsori.

Ese sería un primer enfoque de modelar porque, además, al igual que las matemáticas modelizan fenómenos, ciertos fenómenos pueden servir como modelos para conceptos matemáticos y así se permite una trasmisión de dicho concepto de forma visual mejorando el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Entonces, se puede y se debe utilizar la modelización en su doble vertiente. Por una parte, modelar la realidad, llegar al alumnado con problemas que se puedan encontrar a lo largo de su vida y enseñarles a utilizar las matemáticas para encontrar las soluciones. Por otra parte, como algunos de estos problemas necesitan modelos matemáticos que aún no conocen, usar la modelización en sentido contrario, es decir, usar situaciones visuales para modelar conceptos.

1.3. Cómo modelizar

Suele ocurrir que a la hora de abordar una clase de matemáticas surgen dudas como:

- ¿Cómo se modeliza?
- ¿Cuándo hay que modelizar?
- ¿Qué problemas son los más adecuados?
- ¿Qué modelos reales modelizan los conceptos matemáticos?
- ¿Qué modelos son mejores y por qué?
- ¿Podemos relacionar las distintas modelizaciones de un mismo problema?
- ...

Las respuestas no siempre son sencillas. Con respecto a la primera pregunta, cómo se modeliza, indagando un poco en textos especializados (ver Castro y Castro antes citado) se pueden encontrar hasta tres formas diferentes de hacerla:

1) Resolución de problemas en los que las operaciones surgen como generalización de acciones reales.
2) Problemas de la vida real que el alumno organiza, estructura, determina la matemática relevante y resuelve.
3) Problemas de la vida real para los que se desarrollan nuevos conceptos matemáticos.

No cabe duda de que los docentes conocen y usan la primera de las formas de modelización matemática y, además, procuran trasmitirla diariamente a su alumnado. Como ejemplo, en cualquier libro de texto se pueden encontrar problemas aritméticos en los que hay que usar alguna operación para resolverlo:

Ejemplo. Ana compra una docena de huevos que le cuesta 15 €. Si llevaba un billete de 20 €, ¿cuánto dinero le ha sobrado?

Basta usar una resta para resolverlo. Aunque se esté habituado al uso cotidiano de esta operación, si uno se detiene a pensarlo, la resta resulta ser un modelo matemático.

Un ejemplo un poco más sofisticado de esta forma de modelización en la que las operaciones surgen como generalización de acciones reales es la aplicación directa de algún concepto o procedimiento no tan elemental como una operación aritmética. A continuación se presenta un ejemplo orientado a la aplicación del teorema de Tales a triángulos semejantes.

Ejemplo. Al profesor Gerardo le gustaría saber cuánto mide el edificio del Instituto. Como no llega al tejado y no sabe mucho de matemáticas, le pregunta a Juan Francisco cómo podría hacerlo. Este le responde que podría aplicar el teorema de Tales y, para ello, realizan las siguientes medidas con la ayuda de Antonio el orientador (ver figuras 2 y 3):

Longitud de la sombra del edificio: 6,80 m

Altura de Gerardo: 1,81 m

Longitud de la sombra de Gerardo: 94 cm

Figura 2.

Figura 3.

Tras estos ejemplos, se presentan algunos más orientados a la segunda forma de modelizar: tomar problemas de la vida real para que el alumno organice, estructure, determine la matemática relevante y resuelva.

> **Ejemplo**. Dos edificios, cuyas alturas son 35 m y 50 m respectivamente, están separados por una calle de 40 m de anchura. Se desea tender un cable de teléfono entre las azoteas de ambos. ¿Cuál es la longitud mínima que debe tener el cable?

El modelo matemático más común para resolver el problema es el Teorema de Pitágoras. El alumnado debe organizar la información, estructurarla[4] y determinar que la matemática relevante es la aplicación del Teorema de Pitágoras ya que el triángulo que aparece es rectángulo.

El problema es bastante adecuado para ejemplificar este tipo de modelización aunque, ¿no es cierto que aparece en las aulas sólo cuando estamos trabajando específicamente un concepto o queremos evaluar dicho contenido matemático? ¿Somos conscientes de que la competencia de modelar está implícita en todo el proceso?

[4] Quizá mediante un dibujo o un diagrama.

La tercera forma de modelar es menos popular y se trabaja en menor medida: proponer problemas de la vida real para los que se desarrollan nuevos conceptos matemáticos. Es más, no es que no se trabaje en el aula, es que no es habitual enfrentar este tipo de problemas. Sin embargo, este tipo de modelización puede ayudar a avanzar en el proceso de enseñanza y aprendizaje puesto que los nuevos conceptos matemáticos a desarrollar a los que se refiere pueden ser los que no conocen los alumnos.

1.4. Capacidades relacionadas con la modelización

Otra cuestión de interés sobre la modelización es determinar las capacidades relacionadas con ella. Estas capacidades nos ayudarán en el proceso de adquisición de la competencia por el alumnado y en la valoración del grado de adquisición.

Las capacidades relacionadas con la modelización son[5]:

1. Estructurar el campo o situación que va a modelarse.
2. Traducir la realidad a una estructura matemática.
3. Interpretar los modelos matemáticos en términos reales.
4. Trabajar con un modelo matemático.
5. Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.
6. Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).
7 Dirigir y controlar el proceso de modelización.

Atendiendo a este esquema, establecido en el documento PISA 2003, se identificarán en los siguientes ejemplos las capacidades principales que forman parte del proceso de resolución.

1.5. Otras consideraciones previas

Modelos sencillos

Como se ha visto en un ejemplo previo, los problemas del mundo real que dan lugar a un modelo, a veces son "sencillos" y si se presentan con frecuencia se crea el modelo por la comunidad matemática. De esta forma, queda

[5] Pisa 2003. *Pruebas matemáticas y de solución de problemas*. INECSE. Madrid, 2005.

determinado un modelo matemático que se puede aplicar para resolver todo un campo de problemas asociado al mismo. Por ejemplo, la expresión a+b=c es un modelo que representa matemáticamente una serie de actuaciones de la vida real, reunir colecciones de objetos, comparar colecciones de objetos, aumentar una colección hasta conseguir igualar a otra en número, etc. En este caso, como en otros muchos, el modelo corresponde a la expresión de una operación matemática y dicha operación matemática lleva asociado un concepto, la suma.

Un problema a resolver mediante el modelo anterior será aquel que presente dos datos conocidos y un tercero por conocer. Por ejemplo:

Ejemplo. María tenía unas canicas y ha ganado 5 en el juego, ahora tiene 7. ¿Cuántas canicas tenía María?

Notemos que si todos los datos son conocidos, existe el modelo pero no habrá problema a resolver con el mismo. Además, no se podrá resolver con dicho modelo un problema que pertenezca a otro campo de problemas, por ejemplo:

Ejemplo. María tiene 18 canicas y las reparte entre sus tres amigas de forma que a todas les da la misma cantidad. ¿Cuántas canicas ha dado María a cada una de sus amigas?

Será necesario un modelo matemático también aritmético pero de división a:b=c.

Tiempo para completar los contenidos de la materia

Es una queja habitual entre los profesores de matemáticas la falta de tiempo para explicar todos los contenidos de los cursos; por ejemplo, se suele emplear mucho tiempo con las fracciones lo que conlleva a que se tenga poco tiempo para explicar la estadística; al alumnado le cuesta bastante trabajo la comprensión lectora y así es complicado enseñar a resolver problemas. Por si no es suficiente, el Real Decreto 1631/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la ESO, pretende que se fomente más la relación de las matemáticas con la realidad. El aula de matemáticas se convierte así en un lugar donde no sólo hay que aprender y transmitir conceptos, estructuras, destrezas y procedimientos matemáticos sino que habrá, además, que plantear y resolver problemas que se dan en situaciones reales, a las cuales se puedan aplicar las capacidades matemáticas que se van adquiriendo a lo largo de la etapa.

¿Dónde está el truco? ¿Puede ayudar la modelización matemática a solucionar estas dificultades? ¿No es cierto que la visualización es fundamental para la resolución de problemas y para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

1.6. Estructura

En lo siguiente, trataré de responder a alguna de las preguntas anteriores dando el mayor número de ejemplos posible. De las pruebas PISA y de las pruebas PED se analizarán algunas actividades y problemas viendo qué capacidades relacionadas con modelar se pueden encontrar y cómo se podrían modificar dichas actividades para trabajar otras capacidades. Posteriormente, se darán ejemplos de modelos reales de conceptos matemáticos. Un tema muy interesante es analizar varias modelizaciones de un mismo problema y las relaciones que haya entre las distintas modelizaciones. Más ejemplos se encuentran en la historia y el arte, que nos surten de situaciones susceptibles de ser analizadas matemáticamente, lo cual nos permitirá trabajar la modelización en el aula, sobre todo si usamos las tecnologías de la información y la comunicación. Todo debe ser utilizado en el aula con el objetivo de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

2. EJEMPLOS DE PROBLEMAS PISA Y PED

Dado que la matematización de situaciones reales se ha convertido en una parte importante del currículo de secundaria[6], es importante encontrar problemas que sirvan como ejemplo de situaciones modelables y que puedan ser utilizadas en un aula.

No cabe duda de que los libros de texto incluyen este tipo de problemas, pero al incluirlos distribuidos por unidades o temas concretos dedicados a determinados conceptos, es decir, al distribuir los problemas de forma estanca, pierden ese cariz de realidad que se pretende encontrar. Acudiendo a las pruebas PISA 2003 y las Pruebas de Evaluación de Diagnóstico[7] propuestas al alumnado de Andalucía[8] se puede esperar encontrar ejemplos de problemas en los que el

---

[6] Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
[7] De ahora en adelante PED.
[8] Propuestas a 3º ESO al comienzo del curso 2007/08.

alumnado tenga que realizar este tipo de actividad. Sin embargo, en la mayoría de las denominadas "Pruebas de matemáticas" la modelización no forma parte de la tarea a realizar y, en las escasa ocasiones en las que sí forma parte del problema, la modelización suele estar ya hecha.

2.1. Ejemplo: "Caminar" (PISA)

La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas. Para los hombres, la fórmula n/P = 140 da una relación aproximada entre n y P donde: n = número de pasos por minuto, y P = longitud del paso en metros.

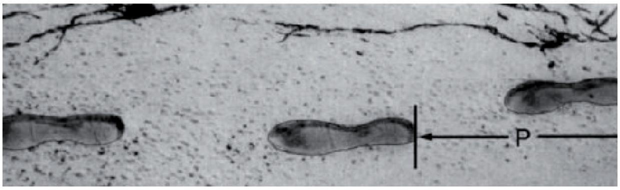


Figura 4. "Caminar".

Pregunta 1: Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos.

Pregunta 2: Bernardo sabe que sus pasos son de 0,80 metros. El caminar de Bernardo se ajusta a la fórmula. Calcula la velocidad a la que anda Bernardo en metros por minuto y en kilómetros por hora. Muestra tus cálculos.

En este caso la capacidad que se puede evaluar: "Trabajar con un modelo matemático".

En este ejemplo se presenta el modelo a aplicar n/P = 140. El modelo matemático es una expresión algebraica. Todo el trabajo de la actividad se centra en la manipulación de una expresión algebraica, es decir, el trabajo con dicho modelo.

Para resolver esta prueba se podría haber usado otro modelo evitando la expresión algebraica. Así, se podría haber considerado un simple problema aritmético que requeriría un modelo de división, o bien abordarlo como un problema de proporcionalidad.

Tanto el modelo de proporcionalidad como el algebraico que aparece en el ejercicio, pueden ser relacionados con otros modelos como pueden ser las funciones (incluyendo en éstas sus distintas representaciones: verbal, algebraica, gráfica y de tabla de valores).

También, este problema planteado de manera más elemental (eliminando el modelo) hubiese permitido evaluar la actividad de matematización horizontal "Reconocer isomorfismo con otros problemas ya conocidos" o las capacidades específicas de modelar como "Traducir la realidad a una estructura matemática".

Sin embargo, al dar el modelo se eliminan los rastros que permitirían al alumnado hacer modelización y al profesorado evaluar dicha competencia.

2.2. Ejemplo: "Cubos" (PISA)

En esta fotografía puedes ver seis dados, etiquetados desde la (a) a la (f). Hay una regla que es válida para todos los dados: La suma de los puntos de dos caras opuestas de cada dado es siempre siete. La actividad consiste en determinar el valor de las caras inferiores.

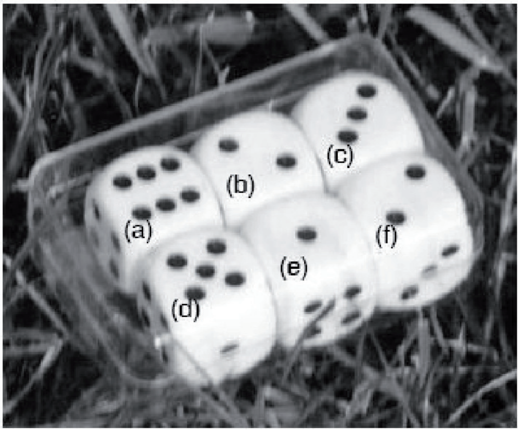


Figura 5. "Cubos".

Este problema requiere un modelo tan sencillo que usualmente no lo identificamos como tal. El modelo matemático de la suma. En este caso, por tanto, la capacidad que se utiliza es "Traducir la realidad a una estructura matemática", usando el modelo sencillo descrito anteriormente a+b=c.

2.3. Ejemplo “Carpintero” (PISA)

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre. La actividad consiste en decidir si es posible construir los parterres de la imagen.

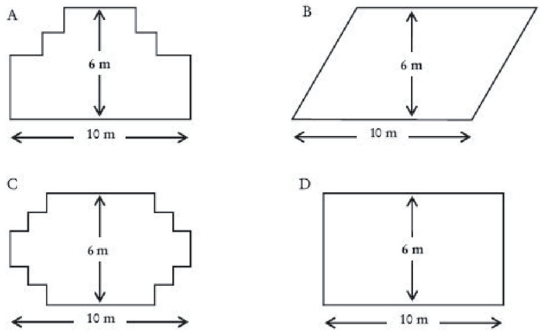


Figura 6. “Carpintero”.

En este ejercicio se presentan los modelos para trabajar con ellos. En particular, aquí se han de determinar los perímetros para comprobar si se puede o no construir ese tipo de parterre.

Desde el punto de vista de la modelización, se puede utilizar este problema dejando que el diseño geométrico del parterre sea de libre elección para el alumno. Podría haberse expresado como:

Modificación. Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Diseña un parterre que tenga área 60 m^2. Diseña un parterre que tenga área máxima (o bien, otras preguntas similares).

En ese caso, se podrían trabajar capacidades como “Estructurar el campo o situación que va a modelarse”, “Traducir la realidad a una estructura matemática” que podría ser un polígono cualquiera u otra figura plana no poligonal, “Interpretar los modelos matemáticos en términos reales”, “Trabajar con un modelo matemático”, “Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados” pues no todas las figuras planas son de utilidad en la vida real, ya sea por la dificultad para construirlas ya sea porque no son útiles para el fin de plantar un árbol y “Dirigir y controlar el proceso de modelización”.

El proceso de modelización podría ser dirigido y graduado por niveles. Una idea es trabajar este problema con distintos polígonos: primero utilizar triángulos, después rectángulos para determinar cuáles de ellos maximizan el área y, posteriormente, ir añadiendo lados a los polígonos. Una dificultad añadida podría ser dar una forma para el jardín, de manera que no todos los tipos de parterre fuesen válidos.

2.4. Ejemplo: "Examen de Ciencias" (PISA)

En el colegio de Irene, su profesora de ciencias les hace exámenes que se puntúan de 0 a 100. Irene tiene una media de 60 puntos de sus primeros cuatro exámenes de ciencias. En el quinto examen sacó 80 puntos. ¿Cuál es la media de las notas de Irene en ciencias tras los cinco exámenes?

Este problema se puede considerar de la vida real del alumnado. A todos ellos se les hace la media de sus notas.

El modelo estadístico más sencillo consiste en utilizar medidas, como la media, en representación de un conjunto numeroso de datos. Para resolver este problema se hace uso de la propiedad de que "la medida de las medias parciales es igual a la media global". Así, la capacidad que se puede evaluar referente a la modelización es "Trabajar con un modelo matemático" y "Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados".

2.5. Ejemplo: "La balanza" (PED)

Para enviar por una empresa de transportes estas cuatro latas de membrillo iguales, necesito saber su peso. Con ayuda de unas pesas consigo equilibrar la balanza como se ve en la figura 7: ¿Cuánto pesa cada lata? Explica razonadamente cómo lo has averiguado.

Aunque no es necesario traducir esta situación a un modelo matemático para poder resolverla, parece que la intención de esta actividad es evaluar las capacidades relacionadas con la modelización: "Traducir la realidad a una estructura matemática", que en este caso es una expresión algebraica, "Trabajar con un modelo matemático" para resolver la ecuación y "Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados" para dar la solución.

Figura 7. "La balanza".

2.6. Ejemplo: "El túnel" (PED)

El alumnado de Alcornocal va a estudiar al Instituto de Cieloazul. El camino para el transporte escolar de Alcornocal a Cieloazul debe pasar actualmente por Buenabrisa. La Consejería de Obras Públicas y Transportes ha proyectado un túnel bajo el monte que permitirá conectar directamente Alcornocal con Cieloazul.

Cuando se termine la obra del túnel que conectará las dos localidades, ¿cuántos kilómetros se ahorrarán?

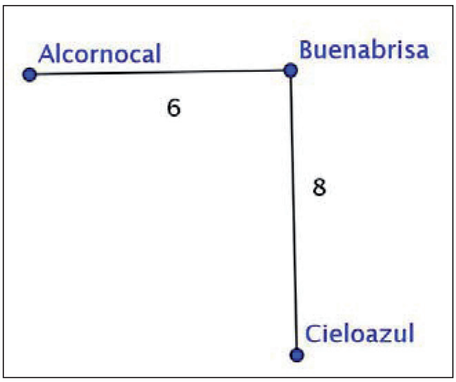


Figura 8. "El túnel".

De todas las actividades y problemas de las pruebas PISA 2003 y las pruebas de evaluación de diagnóstico de la Junta de Andalucía 2007 para 3º ESO, esta es la que más se parece a un problema en el que haya que usar un modelo matemático, el teorema de Pitágoras. Las capacidades "Estructurar el campo o situación que va a modelarse", "Traducir la realidad a una estructura matemática", "Trabajar con un modelo matemático", "Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados" y "Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados" se pueden evaluar.

3. ALGUNOS MODELOS MATEMÁTICOS Y MODELOS HEURÍSTICOS

La mejora en la adquisición de la competencia modelar en el alumnado irá requiriendo una gradación de los problemas y, por tanto, un aumento en la dificultad de los mismos. Para esto, a su vez, será necesario que el alumnado conozca cada vez más conceptos y mejore sus procedimientos matemáticos. Es aquí donde se pueden usar los denominados modelos heurísticos que no son más que fenómenos físicos que modelizan conceptos matemáticos.

Dentro del conjunto de estos modelos se destacan los materiales manipulativos. Su carácter de objeto real y manipulable hace que su uso se pueda enfocar no sólo para visualizar conceptos matemáticos para hacerlos más cercanos y fácilmente asimilables, sino que mediante el mismo se pueden plantear problemas que requieran estrategias matemáticas en su resolución.

3.1. Geometría

La observación de la realidad puede utilizarse para producir modelizaciones matemáticas en el sentido más elemental de "Estructurar el campo o situación que va a modelarse" y "Traducir la realidad a una estructura matemática" mediante la identificación de elementos geométricos.

Los fenómenos naturales siempre han sido fuente de estudio e inspiración de la actividad humana y los orígenes de la geometría hay que buscarlos en las situaciones y problemas del entorno.

Muchos fenómenos naturales han hecho crecer, desarrollar y aplicar los conocimientos geométricos para su descripción, control y estudio. Se pueden destacar: los problemas de medición del tiempo, la localización geográfica, la descripción y reproducción de paisajes, la forma, el tamaño, la explicación del cosmos, ...

El ser humano ha modelizado matemáticamente todos estos fenómenos para su estudio. Nosotros en el aula podemos proponer este tipo de actividades que inician al alumnado en la modelización como pueden ser:

- Descripción de elementos geométricos en arquitectura: plantas, arcos, cúpulas, frisos, mosaicos, rosetones,volúmenes, ...
- Descripción de elementos geométricos en pintura y escultura: trazados reguladores, proporciones, figuras, ..
- Construcción de mosaicos, frisos, maquetas, ...

Las actividades propuestas tienen la ventaja de poderse adecuar a diferentes niveles educativos.

Ejemplo. Sea r la tubería principal de un gaseoducto. Se quiere distribuir gas a dos centros de población A y B de modo que la longitud de la tubería de A a la conexión más la de B a la conexión sea la mínima posible para evitar averías y reducir costes. ¿Dónde se situará el centro distribuidor?

Este ejemplo que solemos utilizar en el aula en el tema de simetrías, puede servirnos para dirigir el proceso de modelización. Así, si seguimos la secuencia (figura 9):

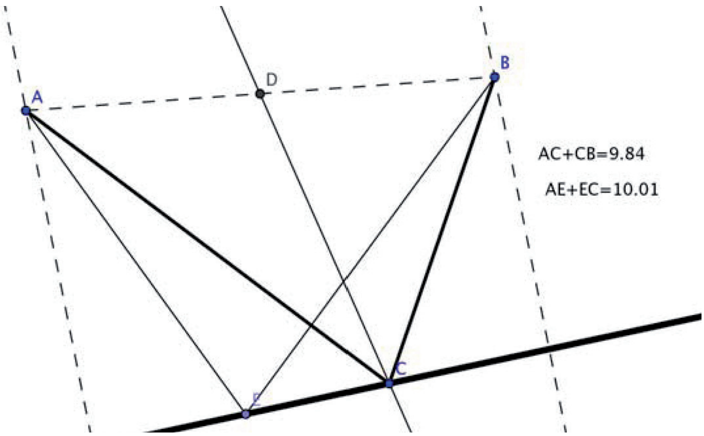


Figura 9. Optimizar la longitud de una tubería.

- ¿Qué punto de la tubería principal se encuentra más cerca de A?
- ¿Qué punto C de la tubería se encuentra a la misma distancia de A y de B?

- Busquemos un punto D tal que la suma de las distancias AD y BD sea la mínima posible.

Finalmente, la solución viene dada por la intersección de la mediatriz del segmento AB y su intersección con la tubería.

Materiales en geometría

El uso de los materiales manipulativos en las aulas está cada vez más extendido. Estos materiales sirven para modelar conceptos matemáticos pero, a su vez, nos permiten plantear situaciones que permiten al alumno investigar.

Por ejemplo, el uso de mapas de carreteras permite plantear y resolver una gran variedad de problemas interesantes de la vida real, con el aliciente de la interdisciplinariedad: problemas de mínimos, caminos posibles, ...

Otro recuso es el uso de espejos para generar polígonos regulares y estudiar relaciones entre ángulos y ejes de simetría.

Otros materiales son: geoplanos, poliminós, tamgrams, pantógrafos y los modelos de poliedros.

3.2. Números naturales

Para representar los números y las diferentes operaciones podemos encontrar diversos modelos[9]. Entre otros, existen;

- Los modelos lineales, que incluyen la recta numérica, escaleras, reglas numeradas, etc.
- Los modelos cardinales, que incluyen los diagramas conjuntistas. Para la suma podemos representar (figura 10):
- Los modelos funcionales, en los que la operación es una máquina que transforma unos números en otros.
- Los modelos con medidas, como las regletas de Cuisenaire (figura 11).

---

[9] Ver, por ejemplo, POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I (2006). *La proporción trascendental*. Barcelona: Ariel.

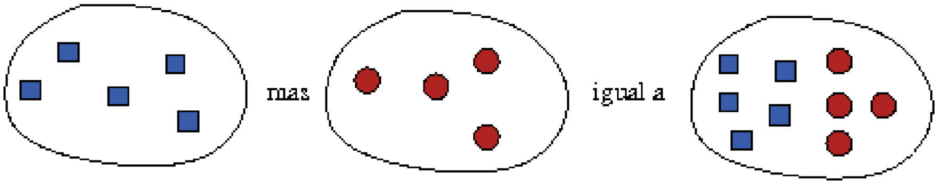


Figura 10. Diagrama conjuntista para la suma.

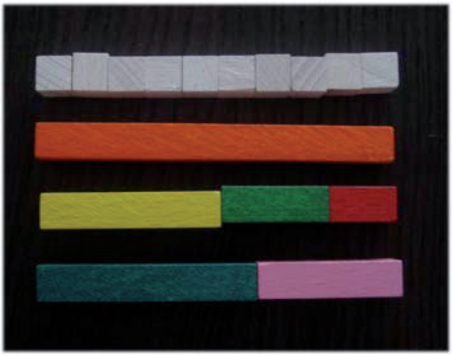


Figura 11. Regletas de Cuisenaire.

3.3. Números enteros

Los números negativos escasamente aparecen en la vida cotidiana del alumnado. Salvando los casos de temperaturas, ascensores, nivel sobre o bajo el mar y deber o tener dinero. Son pocos los casos en los que los estudiantes se enfrentan a ellos, incluso cuando forman parte de un contexto, no suele ser habitual la necesidad de operar con ellos.

En 1º de ESO, cuando los alumnos empiezan a operar con enteros, rápidamente se desvelan las diferentes velocidades de aprendizaje de cada uno de ellos. Este es uno de los primeros temas de la Enseñanza Secundaria que es más matemático que real. Es tan poco cotidiano que hasta matemáticos tan importantes como D'Alembert intentaron evitarlos y hasta el siglo XIX no se integraron en los sistemas numéricos.

Para los números enteros también existen modelos de representación[10] que nos pueden ayudar a mejorar su enseñanza:

[10] VARGAS-MACHUCA, I y Otros (1990). *Números enteros*. Síntesis.

Modelos aritméticos, como las tablas, permiten introducirlos y definir las operaciones con generalización de operaciones conocidas para los números reales. Así, por ejemplo el alumno puede construir una tabla para la resta de enteros (ver tabla 1).

	-2	-1	-0	-(-1)	-(-2
3	3-2=1	3-1=2	3-0=3	3-(-1)=4	3-(-2)=5
2	2-2=0	3-2=1	2-0=2	2-(-1)=3	2-(-2)=
1	1-2=-1	3-3=0	1-0=1	1-(-1)=	1-(-2)=
0	0-2=-2	0-1=-1	0-0=0	0-(-1)=	0-(-2)=
(-1)	(-1)-2=-3	(-1)-1=	(-1)-0=	(-1)-(-1)=	(-1)-(-2)=
(-2)	(-2)-2=-4	(-2)-1=	(-2)-0=	(-2)-(-1)=	(-2)-(-2)=
(-3)	(-3)-2=-5	(-3)-1=	(-3)-0=	(-3)-(-1)=	(-3)-(-2)=

Tabla 1: Modelo aritmético para la resta de enteros.

- Modelos algebraicos, los enteros aparecen en las matemáticas como solución de ciertas ecuaciones. Así, se puede entender la noción de número negativo como la solución de la ecuación $x+b=0$, donde b es un número natural.
- Modelos geométricos. Mediante un origen en una escala numérica y la noción de sentido es posible introducir los números negativos

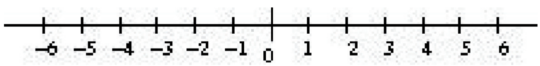


Figura 12. Escala o recta numérica.

y la suma y resta mediante traslaciones entre dos rectas numéricas. Así, -4-3=-7 se puede ver como:

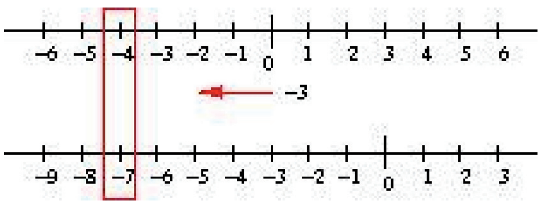


Figura 13. Modelo geométrico para la resta de naturales.

y volviendo a considerar las nociones de sentido x-(-3) se convierte en la traslación opuesta a la de x-3.

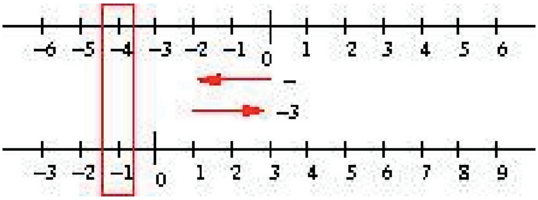


Figura 14. Modelo geométrico para restar enteros.

Con este modelo la multiplicación se puede interpretar como una dilatación.

Las situaciones concretas son el mejor medio para comprender que los números negativos no sólo se encuentran en las matemáticas y aunque los escenarios son escasos, el uso de números de los ascensores, las temperaturas o las fechas históricas son habituales en las aulas.

Ejemplo. El matemático griego Euclides nació el 330 a.C. y murió el 275 a.C. ¿Cuántos años vivió? ¿Cuántos años han pasado desde su muerte?

Para proponer problemas en los que hay que multiplicar números negativos, el uso de distintos sentidos nos facilita la labor.

Ejemplo. Un tren se dirige desde Santander hacia Madrid a 95 km/h. ¿A que distancia de Burgos se encontrará dos horas después de pasa por allí? ¿Y dos horas antes de pasar por allí?

Si por el contrario el tren va hacia Santander, ¿a que distancia de Burgos se encontrará dos horas después de pasa por allí? ¿Y dos horas antes de pasar por allí?

Considerando +95 la velocidad de Santander a Madrid, la primera pregunta se respondería (+95)·(+2)=180 km. Para la segunda, el tiempo se puede tomar como una magnitud negativa (-2) y el resultado sería -180 km, es decir, le faltan 180 km hasta llegar a Burgos. Para las dos últimas preguntas es la velocidad lo que se puede considerar negativo.

3.4. Álgebra

El álgebra constituye una de las fuentes más importantes de modelos matemáticos. Sólo hay que pensar en todos los problemas que se pueden modelizar con una ecuación. Se trabajan todas las capacidades relacionadas con la modelización en este tipo de problemas, por eso es fundamental que el alumno aprenda a resolver problemas utilizando ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Para eso, a parte de traducir un enunciado al lenguaje algebraico, debe aprender a manipular expresiones algebraicas y resolver ecuaciones. Son conocidos los modelos heurísticos[11] utilizados para esta labor: balanzas, diagramas, máquinas, gráficos, tableros de fichas de colores y juegos. De ellos, se destacan a continuación las balanzas.

Balanzas

Manipular la adquisición del concepto de ecuación, la construcción de ecuaciones equivalentes y la resolución de ecuaciones sencillas. El interés desde el punto de vista de la modelización es que pueden servir tanto para modelizar situaciones reales como paso previo a su modelo algebraico, como para modelizar una ecuación para facilitar el procedimiento de resolución de la misma.

Ejemplo. Resuelve la ecuación $4x+5=2x+15$.

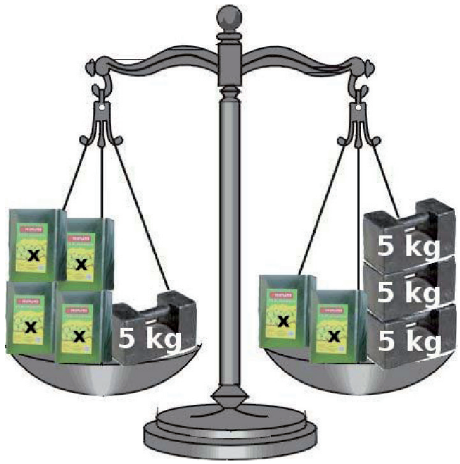


Figura 15. Modelo para 4x + 5 = 2x +15.

Su modelización mediante el uso de balanzas viene dada por la figura 15, en la que las latas representan a las incógnitas y las pesas a los números utiliza-

[11] PUIG, L.; CERDÁN, F. *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis, 1988.

dos. Los pasos a seguir son: primero, eliminar elementos que se repitan en los dos platillos (ver figura 16) y, segundo, dividir el peso entre dos para obtener el valor de la incógnita x= 5 (figura 17).

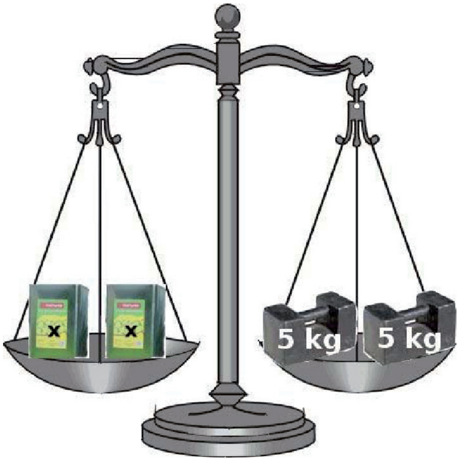


Figura 16. 2x = 10.

Figura 17. x = 5.

Ejemplo. Dada la siguiente figura (figura 18), determinar cuánto pesa la lata de membrillo.

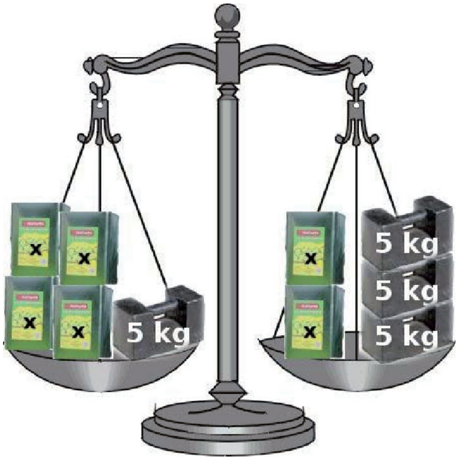


Figura 18. 4x + 5 = 2x + 15.

3.5. Tratamiento de la información

En el bloque de contenidos referido al tratamiento de la información, los modelos matemáticos más sencillos son los que modelizan situaciones numéricamente. Por ejemplo, las medidas de centralización de una distribución de datos modelizan dicha distribución pues dan un valor con significado matemático que la representa.

En la misma línea están los números índice, los cuales se utilizan para conocer la evolución de cualquier variable, fenómeno o magnitud medible. Son números abstractos (con significado estadístico) que muestran los cambios en una o varias variables entre dos situaciones de las que una de ellas se toma como referencia.

Uno de los índices más usado en los medios de comunicación y que, por tanto, forma parte de la vida cotidiana, es el IPC, que tiene como finalidad obtener la evolución del coste de la vida comparando los cambios experimentados en el transcurso del tiempo.

La manipulación o el uso de este concepto requiere "Traducir la realidad a una estructura matemática" e "Interpretar los modelos matemáticos en términos reales".

3.6. El área del rectángulo

El área del rectángulo presenta grandes posibilidades heurísticas. Alguno de los casos en los que se presenta como modelo son:

- Modelización del concepto de fracción (figura 19):

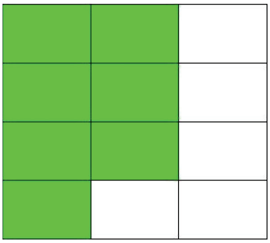


Figura 19. Fracción 7/12.

- Suma de fracciones (figura 20):

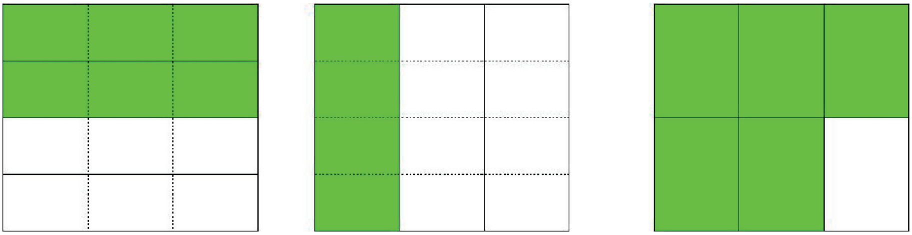


Figura 20. 1/2 + 1/3 = 5/6.

- Identidades notables:

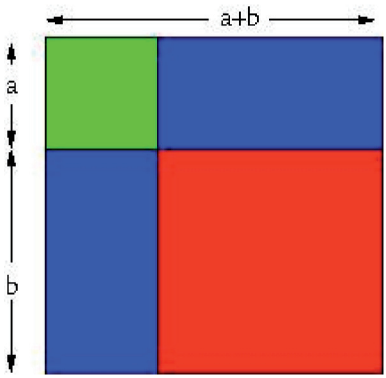


Figura 21. Cuadrado de la suma.

3.7. Azar

Experimentos que requieren eliminación de miembros de la población, que sean costosos y, en general, los que no se pueden realizar en la práctica se pueden sustituir por simulaciones realizadas con máquinas de probabilidad, como la máquina de Galton, con urnas, con calculadoras o con ordenadores.

Trabajar los conceptos de probabilidad y azar haciendo uso de modelos de urnas permitirá al alumno resolver problemas más complejos y encontrar probabilidades de sucesos que son difíciles de observar. Este modelo es, además, fácil de manipular y permite realizar simulaciones de un experimento aleatorio.

4. MODELIZACIONES EN LA HISTORIA Y EL ARTE. NUEVAS TECNOLOGÍAS

4.1. Método de falsa posición

La solución de problemas de la vida real ha sido la que ha provocado el desarrollo de nuevos conceptos matemáticos. Estos conceptos nos permiten resolver una gran cantidad de problemas que englobaríamos dentro de su campo de acción, Pero, ¿qué ocurría antes de que las matemáticas se hubieran desarrollado tanto?

El ejemplo del uso de la falsa posición no sólo responde a dicha pregunta sino que sirve de modelo prealgebraico para la solución de ecuaciones y puede resultar muy adecuado en cursos en los que aún el alumnado no tenga nociones algebraicas. Como se puede suponer, este modelo no es potente en sí mismo, aunque si se estudia con detenimiento se puede observar que es el precursor del conocido método de la falsa posición para el cálculo de raíces de funciones.

El problema 19 del papiro de Moscú (1890 a.C.) plantea:

Ejemplo. Determinar una cantidad tal que ella más su mitad, junto con 4 de 10.

Su modelo algebraico correspondería a $\left(1+\frac{1}{2}\right)x+4=10$. La solución que se aporta en el papiro de Moscú es la misma que nosotros haríamos. Se calcula el exceso de 10 sobre 4 y se determina el inverso de 1+1/2, que es 2/3, que al multiplicarlo por 6 da 4.

Otro modelo para la solución de este problema y otros que se pueden escribir de la forma ax +b , viene dado por el siguiente procedimiento descrito en el papiro de Rhind (siglo XIX a.C.), que se ejemplificará con la ecuación $\left(1+\frac{1}{7}\right)x=19$:

1. Se supone un valor inicial x_1 (por ejemplo, $x_1=7$), que es la falsa posición.
2. Se sustituye x_1 en la ecuación, para obtener $ax_1=b'$ ($\left(1+\frac{1}{7}\right)7=8$).
3. Se busca n tal que $nb'=b$ (en el ejemplo, $n=\frac{19}{8}$).
4. La solución es $x=nx_1$ ($x=\frac{19}{8}\cdot 7$).

La razón es que $\frac{x}{x_1}=\frac{b}{b'}=n$ y, por tanto, $x=\frac{x_1 b}{b'}$.

Este procedimiento basado en la proporcionalidad directa, es muy interesante porque permite ser analizado con una representación gráfica.

Otro aspecto interesante es que se puede generalizar para ecuaciones no lineales del tipo ax + b = c. Para este tipo de ecuaciones se utiliza la "Regla de la doble falsa posición", método conocido en China en el siglo XIII y descrito detalladamente por AL-Marrakushi (1251-1321) en su obra *Taljīs fi a'māl al-Hisāb*[12]. Se puede representar gráficamente como:

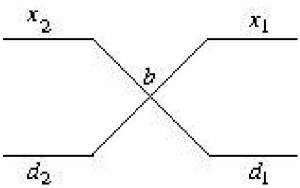


Figura 22. Falsa oposición.

En ella, x_1 y x_2 representan falsas posiciones, d_1 y d_2 los errores y b el número dado. Se opera según la regla

$$x=\frac{x_2 d_1 - x_1 d_2}{d_1 - d_2}.$$

[12] *Breve exposición de las operaciones aritméticas.*

4.2. El álgebra geométrica griega

Los elementos de Euclides evitan las magnitudes inconmensurables mediante el uso de figuras geométricas. Las propiedades obtenidas geométricamente permiten deducir propiedades algebraicas muy conocidas como la del cuadrado de la suma.

Mediante estas propiedades se pueden resolver ecuaciones de primer grado y algunos tipos de segundo e incluso de tercer grado. De nuevo, aparecen aquí los rectángulos como modelos matemáticos para conceptos propios de las matemáticas.

Por ejemplo, para resolver una ecuación lineal del tipo ax=b, usamos la proposición I.43 en la que se demuestra que en un paralelogramo los complementos de la diagonal tienen las mismas áreas (figura 23).

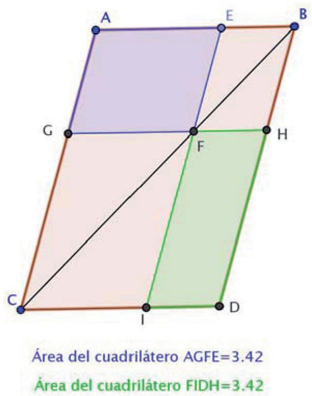


Figura 23. Proposición I.43 de los Elementos.

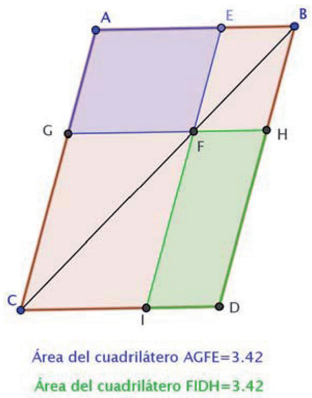


Figura 23. Proposición I.43 de Euclides.

Si se quiere resolver una ecuación del tipo $3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, basta con hacer un cuadrado de lado 3/2, alargar uno de sus lados 3 unidades y construir un rectángulo en el que los complementos estén determinados por dichas medidas. Así, el lado desconocido del complemento que tiene 3 por uno de sus lados es la solución.

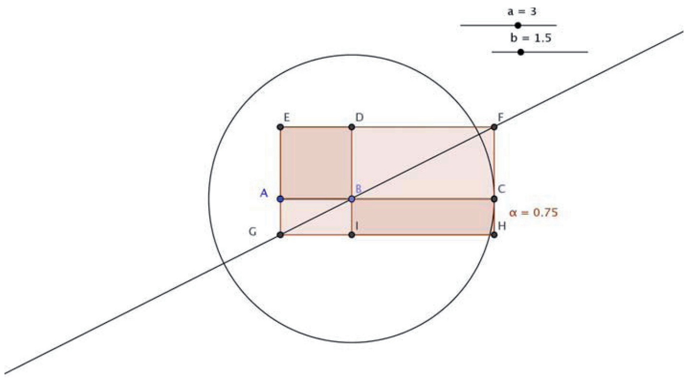


Figura 24. Resolución geométrica de $3x = (3/2)^2$.

4.3. Medición del radio de la Tierra

Erastótenes de Alejandría (276-196 a.C.) hizo cálculos sobre el tamaño de la superficie terrestre con un margen de error relativamente pequeño si consideramos los medios y el método empleado. Observó Erastótenes en Siena que la dirección de los rayos solares era perpendicular a la superficie terrestre en el solsticio de verano, mientras que en Alejandría tenían una cierta inclinación y pensó que este fenómeno podría ser debido a la redondez de la Tierra.

Para demostrarlo viajó siguiendo el curso del Nilo a una distancia de un meridiano, unos 790 km (5000 estadios).

En Alejandría, con un gnomon, midió el ángulo α, que en pleno solsticio de verano formaban los rayos solares con la vertical obteniendo 7º 12’. Este ángulo resultaba igual al ACS de las verticales de Alejandría y Siena, debido a que los rayos solares en ambas poblaciones podía considerarlos paralelos dada la gran distancia al sol (figura 25).

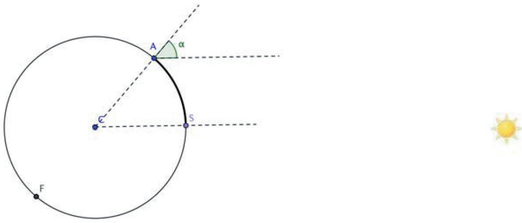


Figura 25. Medición de Erastótenes.

Con estas mediciones, resolvió el problema mediante una regla de tres. Comparó la longitud total de la circunferencia meridiana ASF con la del arco meridiano AS:

$$\frac{2\pi R}{AS} = \frac{360^{o}}{\alpha} \Rightarrow R = \frac{360^{o} AS}{2\pi\alpha}$$

4.4. Arte y nuevas tecnologías

Dentro de las disciplinas artísticas de la pintura, escultura y la arquitectura, los elementos que intervienen no están colocados al azar. El artista usó una geometría que nuestro alumnado puede descubrir. Para ello, hoy contamos con la inestimable ayuda de las nuevas tecnologías para localizar las obras de arte así como de los programas de geometría dinámica que sustituyen a los clásicos regla y compás. Los miembros del grupo *Geometría dinámica*[13] nos ofrecen la oportunidad en su página web de disfrutar del análisis de 23 cuadros.

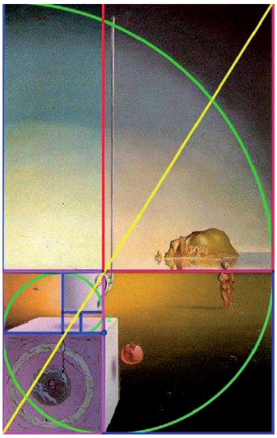


Figura 26. Proporciones y Dalí.

[13] ARRANZ, J. M.; LOSADA, R.; MORA, J.A.; SADA, M. página web: http://www.geometriadinamica.es/

Arcos

Una bonita experiencia de modelización se puede realizar al analizar distintos tipos de arcos utilizados en la arquitectura. Esta es la aplicación del círculo más abundante y visible que existe aparte de la rueda.

Con ella se pueden trabajar las siguientes capacidades relacionadas con la competencia: "Estructurar el campo o situación que va a modelarse", "Traducir la realidad a una estructura matemática", "Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones)" y "Dirigir y controlar el proceso de modelización".

Su desarrollo se puede hacer de manera tradicional[14]: fotos, reglas, compás, lápiz y papel o bien mediante el uso de algún programa de geometría dinámica[15]. Uno de estos programas de geometría es *Geogebra*, un software que tiene la ventaja de ser libre[16] (ver figura 27).

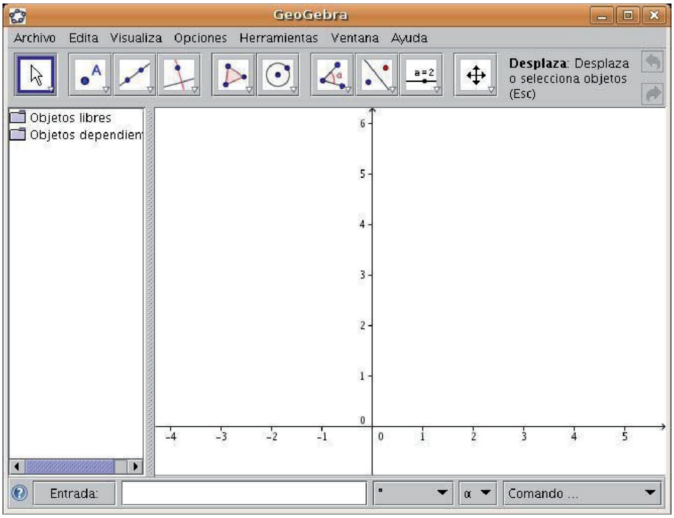


Figura 27. Página inicial de Geogebra.

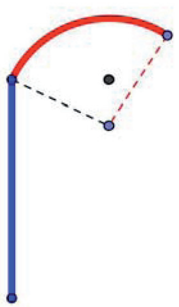
- Arco de medio punto: Su sección en una semicircunferencia. Lo podemos encontrar en el arco del triunfo de París (figura 28).

---

[14] FERNÁNDEZ, M.; PADILLA, F.J.; SANTOS, A.L.; VELÁZQUEZ, F. (1991). *Circulando por el Círculo*. Síntesis.
[15] MORA, J. A. Página web http://jmora7.com/
[16] HOHENWARTER, M. http://www.geogebra.org

Figura 28. Arco de medio punto en París.

- Arco rebajado; es una variante del arco de medio punto en la que el centro se rebaja (figura 29).
- Arco ojival: es un arco apuntado y formado por dos arcos de círculo que se cortan en la clave (E) (figura 30).



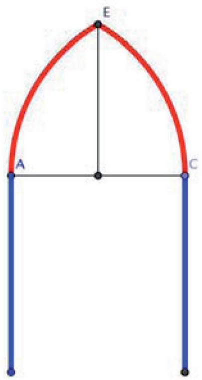


Figura 29. Arco rebajado. **Figura 30.** Arco ojival.

- Arco de herradura: abarca más de una semicircunferencia y cuya flecha es mayor que el semiluz. Es habitual en la mezquita de Córdoba (figura 31).
- Arco árabe apuntado o de herradura apuntado: tiene sus centros dentro del vano o de las prolongaciones de las verticales de apoyo (figura 32).

Figura 31. Arco de herradura en Córdoba.

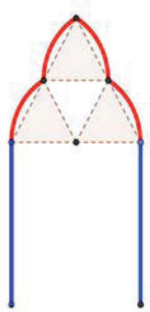


Figura 32. Arco árabe apuntado.

Otros Arcos son el arco conopial o de talón que consta de dos arcos de circunferencia contrapuestos y unidos entre sí, el arco carpanel cuyo trazado consta de varias porciones de circunferencia en número impar o el arco angrelado que está compuesto por una serie de arcos de circunferencia que forman ángulos u ondas.

5. USO DE LA MODELIZACIÓN EN EL AULA. MÁS PROBLEMAS

5.1. ¿Soluciones matemáticas y soluciones no matemáticas?

En algunas ocasiones los dibujos pueden ayudar al alumno a resolver un problema.

Ejemplo. En un corral hay gallinas y conejos. Hay 11 animales. Entre todos tienen 32 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

En algunas ocasiones el alumno estima que una solución como[17] la siguiente no debe presentarse al profesor.

[17] PUIG, L.; CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.

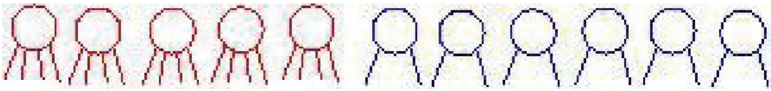


Figura 33. Solución gráfica del problema de las patas.

De hecho, muchos de nosotros nos sorprenderíamos de que un alumno nos presentase esta respuesta en 3º ESO. No sólo es una solución, sino que además se pueden apreciar en ella las capacidades: "Estructurar el campo o situación que va a modelarse", "Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones)" (en caso de que el alumno de la solución numérica) y "Dirigir y controlar el proceso de modelización". Además, "Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados" está cerca de su alcance comentando simplemente que este método no sirve si en lugar de ser 11 animales fuesen 10000.

Es evidente que la modelización a través de un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=11 \\ 2x+4y=32 \end{cases}$$

cuya solución es x=6 e y=5, es decir, 6 gallinas y 5 conejos.

5.2. Dividir la pizza en tres partes iguales

La pizza es un alimento que forma parte de nuestra dieta y que todos sabemos partir. El corte tradicional en forma de sector circular es el más extendido. Pero, ¿es la única forma de dividir una pizza?[18].

Trozos tradicionales

Tenemos dos formas para hacer esta división: calculando el centro de la circunferencia y, con ayuda de un transportador de ángulos, hacer sectores de 360º/3=120º; o medir la longitud de la circunferencia y dividirla en tres partes. En cualquier caso el resultado se asemeja al de la figura 34.

[18] POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. (2006). *La proporción trascendental*. Barcelona: Ariel.

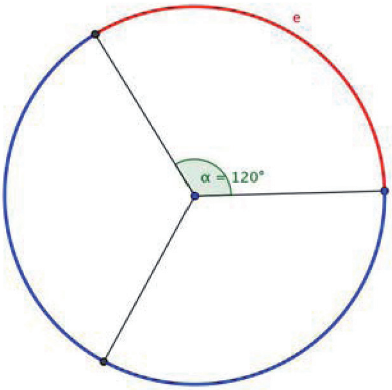


Figura 34. División de la pizza en trozos tradicionales.

Círculos concéntricos

Se trata de encontrar los radios r_2 y r_1 de los círculos concéntricos con respecto al radio de la pizza r.

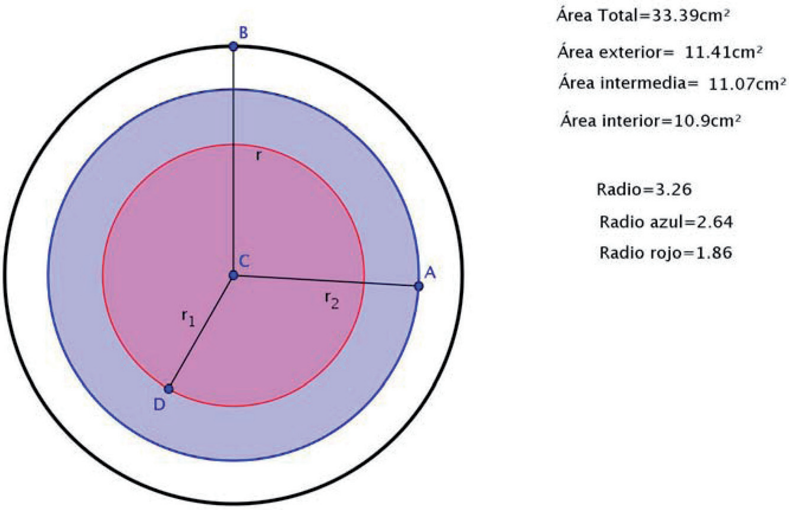


Figura 35. División de la pizza en trozos concéntricos.

Algebraicamente, las áreas de la corona exterior, la corona interior y el círculo central deben coincidir, es decir, $\pi\left(r^2 - r_2^2\right) = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$, $\pi\, r_1^2 = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$ y, por tanto, $r_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{3} r$ y $r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} r$.

Trozos de fantasía con forma de lágrima

Trisecando el diámetro se usan semicírculos (figura 36).

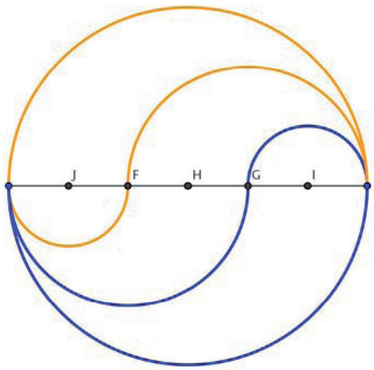


Figura 36. Divisiones de la pizza en forma de lágrima.

Si la pizza tiene radio r, el área de la lágrima superior es $\frac{1}{2}\cdot\left(\pi r^2-\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2+\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)=\frac{1}{3}\pi r^2$ es decir, un tercio del área total. Luego, las tres áreas son iguales.

Trozos paralelos

Otra posibilidad interesante y de ejecución factible en la práctica es la de dividir la pizza en trozos paralelos como muestra la figura 37.

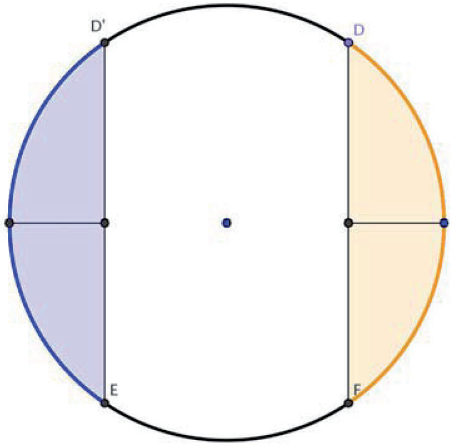


Figura 37. Divisiones de la pizza usando rectas paralelas.

5.3. La farola

Este problema consiste en colocar una farola en una isleta triangular de forma que ilumine el máximo posible. Está tomado de un artículo titulado “El cristo de la farola”[19] y, además de ser estéticamente muy atractivo, es muy apropiado para la modelización porque admite dos tipos: en su primera parte se trabaja el segundo modo de modelizar consistente en organizar, estructurar, determinar las matemáticas relevantes y resolver. En su segunda parte, hay que desarrollar nuevos conceptos.

Que dice el jefe que debes enviar a los operarios a colocar una farola en este triángulo. Y que se preparen, porque habrá que hacerlo en muchas más isletas triangulares. Parece que está de moda. El jefe quiere que la pongan deforma que quede a igual distancia de las tres esquinas. Él dice que sólo así logrará iluminarlo todo.

El encargo recibido por el protagonista del problema consiste en calcular el circuncentro (estructura la situación, traduce a un modelo matemático y lo utiliza). Parece una buena solución hasta que se da cuenta de que, en ocasiones, el circuncentro no está incluido en el triángulo (triángulos obtusángulos) concluyendo que hay que mover la farola a lo largo de la mediatriz hasta que pertenezca al triángulo (interpretación del modelo y control del proceso de modelización).

La segunda parte es mucho más compleja. En ella, se tiene en cuenta el radio de la luminosidad de la farola y los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, centrando la discusión en la parte de isleta eclipsada por la luminosidad de la farola. La solución óptima para triángulos no obtusángulos son los puntos de la hipérbola de Stammler, que pasa por circuncentro, incentro y excentros del triángulo.

Y concluyendo que:

Dado un triángulo no obtusángulo, todos los círculos que maximizan el área de intersección con el triángulo tienen sus centros en el arco hiperbólico que une el incentro con el circuncentro sobre la hipérbola de Stammler.

---

[19] ARRANZ, J. M.; LOSADA, R.; MORA, J.A.; SADA, M. página web: http://www.geometriadinamica.es/

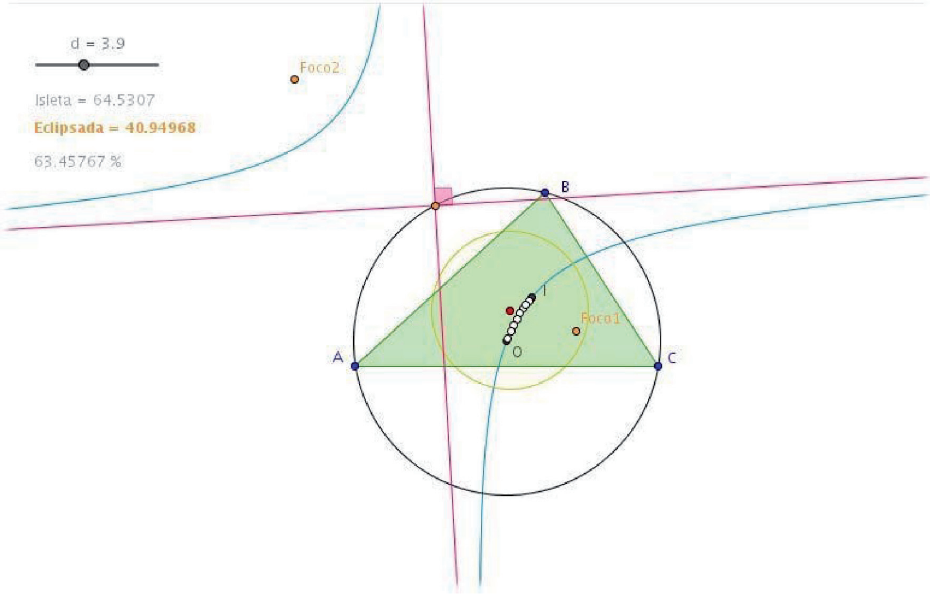


Figura 38. Hipérbola de Stammler sobre el problema de la farola.

Si el triángulo es obtusángulo, esos centros se sitúan en el segmento MH y en el arco hiperbólico HI sobre la hipérbola de Stammler, siendo M el punto medio del lado mayor del triángulo y **H** el punto de intersección de la hipérbola con el segmento que une M con el punto de Lemoine.

6. IDEAS FINALES

1. La búsqueda y selección de problemas adecuados es quizá la labor más compleja y la que más tiempo requiere cuando pretendemos que nuestro alumnado desarrolle cierta competencia
   Es difícil encontrar ejercicios que representen situaciones cotidianas en los cuales el alumno deba organizar, estructurar, determinar la matemática relevante, resolver el problema y devolver una respuesta coherente con la situación planteada.
   Por ello, debemos dirigir un esfuerzo especial para incluir actividades en las cuales los alumnos encuentren este tipo de reto.

2. La formación del profesor de matemáticas de Enseñanza Secundaria no incluye la competencia de modelización. Este la ha ido adquiriendo a lo largo de su formación y, casi siempre, realiza las modelizaciones identificando los problemas con otros que ya conoce. Es muy natural,

incluso, evitar los problemas que requieran modelos matemáticos que no conozcamos. Debemos tener cuidado para que esta situación no se reproduzca en nuestro alumnado. Nuestra influencia en ellos es muy grande y, aunque en ocasiones creamos que no van a ser capaces de desarrollar una competencia, su no adquisición no puede estar provocada por nuestra culpa.

3. Cuando un problema es adecuado permite realizar diferentes modelizaciones. Es muy interesante y enriquecedor en el proceso de enseñanza y aprendizaje discutir las ventajas e inconvenientes de dicho modelo y hacer modificaciones del problema en las que puedan surgir nuevas modelizaciones.

BIBLIOGRAFÍA

ALSINA, C.; BURGUES, C.; FORTUNY, J.M. (1995). *Invitación a la didáctica de la Geometría.* Madrid: Síntesis.

CASTRO, E.; CASTRO, E. (1997). "Representaciones y modelización", en RICO, R. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Univ. Barcelona y Horsori.

CASTRO, E.; RICO, L.; CASTRO, E. (1992). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Síntesis.

FERNÁNDEZ, M.; PADILLA, F.J.; SANTOS, A.L.; VELÁZQUEZ, F. (1991). *Circulando porel Círculo*. Síntesis.

GRUPO BETA. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Síntesis.

NORTES CHECA, A. (1995). *Encuestas y precios*. Madrid: Síntesis.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. (2006). *La proporción trascendental*. Barcelona: Ariel.

PUIG, L.; CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.

SOCAS, M. M.; CAMACHO, M.; PALAREA, M.; HERNÁNDEZ, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

VARGAS-MACHUCA, I; OTROS. (1990). *Números enteros*. Síntesis.

Páginas web

ARRANZ, J. M.; LOSADA, R.; MORA, J.A.; SADA, M. página web: http://www.geometriadinamica.es/

HOHENWARTER, M. http://www.geogebra.org

MORA, J. A. Página web http://jmora7.com/

Documentos

Pisa 2003. *Pruebas matemáticas y de solución de problemas*. INECSE. Madrid, 2005.

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

MODELIZACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS. UN CAMINO DE IDA Y VUELTA POR LAS ESFERAS DE DANDELÍN

Tomás Ortega del Rincón
Didáctica de la Matemáticas. Universidad de Valladolid

INTRODUCCIÓN

Considerando como punto de partida la acepción de modelo del Diccionario de la Real Academia Española (Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento).

El uso de los esquemas de modelización aparece ligado a aplicaciones de la matemática y tienen un flujo lineal (matematización → solución → traducción), pero tales esquemas se fueron enriqueciendo y, de hecho, son muchos los autores que han publicado esquemas de modelización muy parecidos a este que se presenta aquí, que es debido a De Lange[1] y que se podrían sintetizar en la representación del esquema de la figura 1:

[1] DE LANGE, 1987, pág. 43.

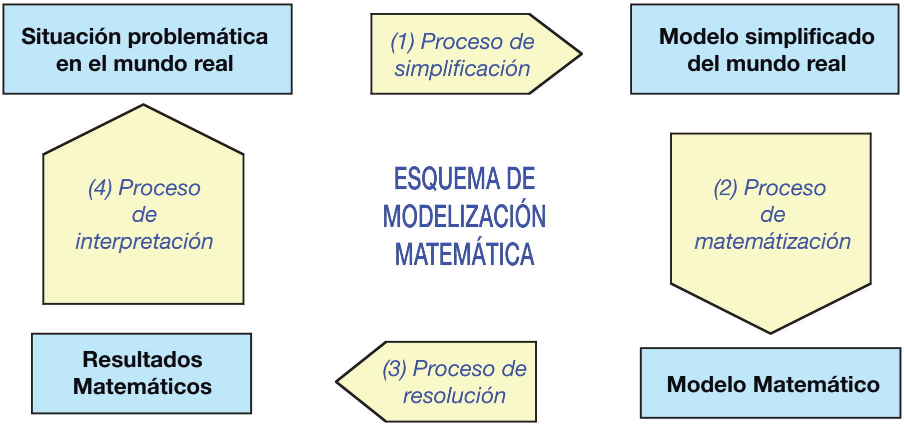


Figura 1. Esquema de modelización de De Lange.

Con el paso de los años, la perspectiva didáctica varía sustancialmente ya que considera restricciones tanto en la selección de los datos como en la representación matemática de los mismos, como puede apreciarse en esquema de Schoenfeld[2], que data de 1997 y se presenta en la figura 2:

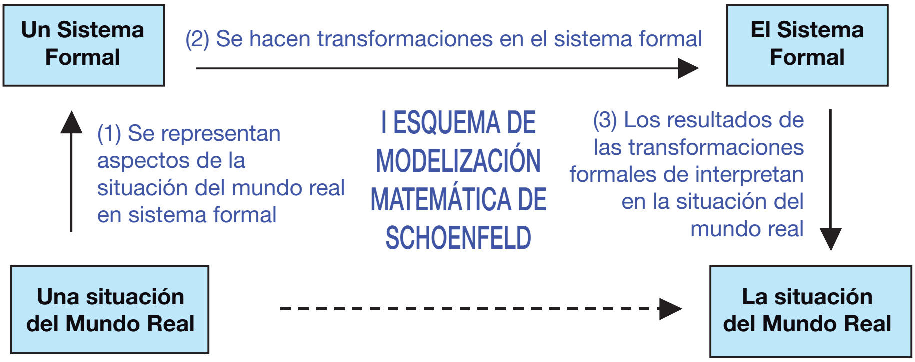


Figura 2. Primer esquema de modelización de Schoenfeld.

En Pisa 2003[3], aparece un modelo de matematización bastante diferente, que comprende cinco fases y que se completa con el esquema de la figura 3. Las fases son éstas:

---

2 SCHOENFELD, 2002, pág. 449.
3 INECSE, 2004, págs. 39, 40.

Autores que han colaborado en la ponencia: Asunción García. IES de Saldaña. Saldaña (Palencia). Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid. **Inés Ortega.** IES Virgen del Espino (Soria). Didáctica de la Expresión Plástica. Universidad de Valladolid

1. Se inicia con un problema enmarcado en la realidad.
2. Se organiza de acuerdo a conceptos matemáticos que identifican las matemáticas aplicables.
3. Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Ello potencia los rasgos matemáticos de la situación y transforma el problema real en un problema matemático que la representa fielmente.
4. Se resuelve el problema matemático.
5. Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución.

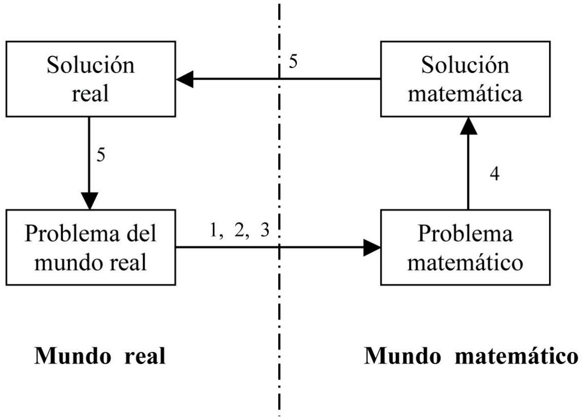


Figura 3. Esquema de modelización de Pisa 2003.

En este modelo de Pisa, sin duda, la presentación de las tres primeras fases que tienen lugar en el paso del mundo real al mundo matemático resulta abrumadora por su densidad.

El mismo autor citado antes, Schoenfeld[4], hace una extensión del esquema de modelización de la figura 2 e introduce varios cambios, entre los que destaca que la realidad nunca es abstraída directamente, sino que es filtrada por unos mecanismos de consciencia o inconsciencia. Esto le lleva a considerar los correspondientes estadios de “modelos conceptuales”, obteniendo como resultado el esquema de la figura 4:

[4] Schoenfeld, 2002, pág. 450

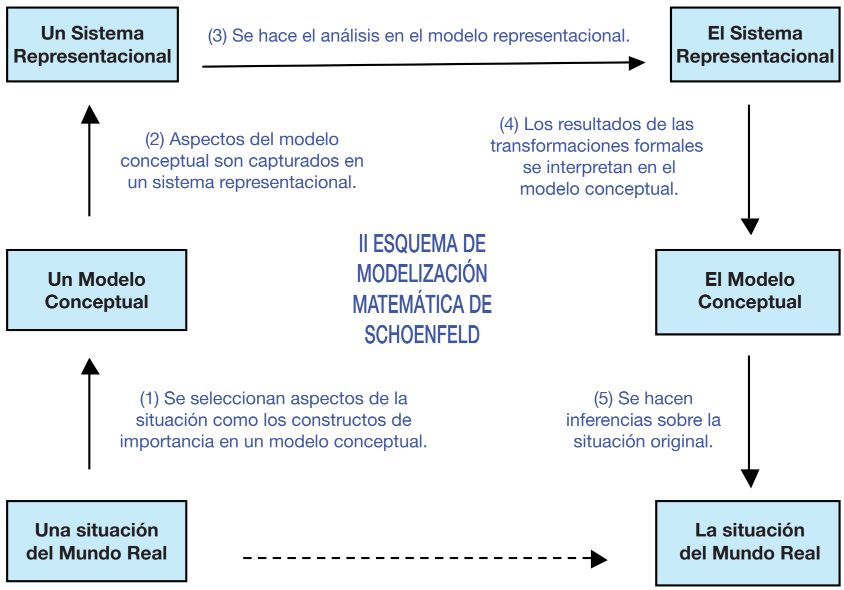


Figura 4. Segundo esquema de modelización de Schoenfeld.

En estos esquemas de Schoenfeld, la última fase del modelo recibe información de la situación real de partida, cosa que se verá con absoluta claridad en el modelo que se presenta, donde en las últimas cuestiones se plantean y se resuelven problemas conceptuales matemáticos, cuyos resultados se pueden interpretar en la situación original.

Filloy and Sutherland[5] atribuyen a la modelización dos componentes fundamentales: la traslación (que dota de significación a objetos y operaciones abstractas) y la separación (que permite construir sistemas de signos matemáticos más abstractos). En esta segunda fase tiene lugar una separación semántica del modelo conocido y, al final, tienen que resolver una situación más compleja por medio de situaciones más abstractas.

También es interesante el apunte de Rojano[6] sobre la integración de software adecuado y cómo la creación de entornos interactivos, como CABRI, puede transformar profundamente los procesos de enseñanza-aprendizaje, conectando las matemáticas con el mundo físico y usando diferentes sistemas de representación y modelizaciones. Con esta orientación y haciéndonos eco de la competencia transversal de Pisa 2003 sobre *uso de herramientas*, aquí se utili-

---

5 FILLOY and SUTHERLAND, 1996.
6 ROJANO, 2002.

zará CABRI y EXCEL a lo largo de todo la modelización, y MAPLE en una de las *tareas de investigación*.

English et al[7] se hacen eco de numerosas investigaciones que destacan como, de forma colaborativa, se resuelven problemas complejos aplicando tecnología apropiada (en particular hojas de cálculo y software gráfico, justo lo que se utiliza aquí) y estiman que las aplicación de estas ideas y la consideración de modelos matemáticos comprensivos son fundamentales para alcanzar el éxito, tanto en ambientes de trabajo como en contextos de la vida en general. Este mismo autor da cuenta de las investigaciones de Stevens[8] y Hoyles et al.[9], que van más allá de la consideración de la modelización matemática, interpretan que las aplicaciones matemáticas pueden considerarse como parte de otras disciplinas y proponen focalizar nuestra atención desde las perspectivas de esas ciencias.

El Instituto Nacional de Evaluación de la Calidad del Sistema Educativo, INECSE[10], en la descripción y análisis sobre los marcos teóricos de PISA 2003, considera que la construcción de modelos es una de las siete competencias especificas que deben estar presentes en Educación Matemática y enuncia las acciones propias de esta competencia, acciones que se muestran en el ANEXO I, junto con las que corresponden a las otras seis competencias específicas y los tres grados de complejidad. Bastante anterior, pero no menos importantes, son los planteamientos del NCTM[11] al hacer suyos los principios enunciados por Pollak[12], que destacan el aspecto práctico de las Matemáticas, y crear los Estándares Curriculares. En ellos, entre otros principios, se considera que saber matemáticas es saber usarlas y que el contenido que se desarrolle en los mismos debe ser apropiado para todos los estudiantes. Sobre el uso de las matemáticas, se hacen eco los libros de texto, pero según Barquero, Bosch y Gascón[13], parece que no pasan de meras aplicaciones. Finalmente, Ortiz, Rico y Castro[14] analizan las acciones que son consideradas por un grupo de profesores en formación y detectan serias dificultades, tanto en la comparación y ajuste de modelos como en la identificación de condiciones inesperadas, siguiendo la generación de problemas a partir de una situación dada y la justificación y relevancia de condiciones.

---

[7] ENGLISH et al, 2002.
[8] STEVENS,1999.
[9] HOYLES et al., 2001.
[10] INECSE, 2004, pág. 41.
[11] NCTM, 1991, pág. 4.
[12] POLLAK, 1987 (Tomado de NCTM, 1991, pág. 4).
[13] BARQUERO, BOSCH y GASCÓN, 2007, págs. 22-24.
[14] ORTIZ, RICO y CASTRO, 2008.

El segundo principio del NCTM aquí enunciado es un poco más complicado de llevar a cabo en la práctica y requiere un planteamiento metodológico específico. Asumiendo que las aulas de Educación Secundaria Obligatoria son muy heterogéneas y que buena parte de sus alumnos apenas trabajan durante el período lectivo, en García[15] se diseñó y se contrastó una metodología específica con el objetivo fundamental de conseguir que todos los alumnos permanezcan trabajando la totalidad del período lectivo de la clase de Matemáticas. Esta metodología, que recibe el nombre de Metodología de Educación en la Atención a la Diversidad (MEAD), se basa en las siguientes consideraciones: distribución de los alumnos en grupos colaborativos (que se forman teniendo en cuenta diversos informes y sus tipos de inteligencia); respeto de los ritmos de aprendizaje de cada grupo; inclusión de un test de autocontrol; presentación muy breve de los contenidos, práctica, acomodación y consolidación (fases que favorecen la memorización); tareas adecuadas para todos los grupos (que estén relacionadas con un problema del mundo real, redactadas en un orden creciente de dificultad, independientes unas de otras, no todos los grupos tienen que hacer todas, se aconseja el uso de tecnologías, las últimas pueden ser de tipo investigador,…). La metodología resultó ser un éxito, pero se reconoce que una de las mayores dificultades es la preparación de material didáctico adecuado.

Desde otra perspectiva, Castro[16] señala que la invención de problemas es una actividad consustancial con la Resolución de Problemas y, siguiendo a Silver[17], interpreta la creación de tareas como una característica de la actividad y de la capacidad matemática, y como medio para mejorar la actitud de los estudiantes hacia la matemática, pero reconoce que es una tarea un tanto complicada.

Ninguno de los tres planteamientos precedentes tiene mucho que ver con la propuesta de actividades aisladas en las que se apliquen resultados matemáticos de forma más o menos inmediata, actividades que se muestran muy repetitivas en los manuales escolares y cuya propuesta no presenta dificultades serias. Sin embargo, cuando se trata de generar múltiples actividades derivadas de un modelo real, como se trató en la MEAD, se produce un cambio radical y esta práctica educativa resulta algo más complicada para el profesorado. Como ejemplo de este recurso didáctico, en lo que sigue se hará una formulación de actividades de este tipo, utilizando como vehículo conductor el segundo esquema de modelización de Schoenfeld, por ser el más completo, y las orientaciones de la Metodología de la Educación en la Atención a la Diversidad, según las

[15] GARCÍA, 2008.
[16] CASTRO, 2008, 121.
[17] SILVER, 1994.

especificaciones del trabajo de tesis de García[18]. Por otra parte, para ser justos con esta metodología se debe tener presente que no se han propuesto redacciones básicas relacionadas con la forma y con la medida, ya que estarían fuera de la finalidad de las tareas que constituyen el camino de ida, que no es otro que la construcción del modelo. Sin embargo, estas tareas básicas son importantísimas en la MEAD, porque constituyen el núcleo formativo fundamental de los alumnos menos aventajados. Finalmente, siguiendo la perspectiva competecial, al final de cada una de las actividades propuestas, se señalan en cursiva las competencias implícitas.

1. CONCEPCIÓN DEL MODELO. UNA SITUACIÓN DEL MUNDO REAL

Es bien conocido que todas las cónicas proceden de seccionar conos de revolución por planos (cortando a todas las generatrices, siendo paralelos al eje o siendo paralelos a alguna generatriz). Aquí, se propone un proyecto de trabajo interdisciplinario para que sea llevado a cabo por los alumnos de Educación Secundaria de Dibujo y de Matemáticas mediante representaciones verbales, gráficas, numéricas, y algebraicas. En el proyecto se tiene que construir una maqueta, similar a la que está representada en la figura 5 y, entre otras cosas, se utilizará para explicar las dos definiciones de elipse y los dos teoremas de Dandelín que se enuncian:

I. La elipse es una curva cerrada y plana, tal que la suma de las distancias de uno cualquiera de sus puntos a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Esta constante es el diámetro principal de la elipse.
II. La elipse es una curva cerrada y plana, tal que la razón de las distancias de uno cualquiera de sus puntos a un punto fijo, llamado foco, y a una recta fija, llamada directriz, es una constante menor que la unidad. Esta constante es la excentricidad.

Estos teoremas se enuncian con mayor precisión si se relacionan con la sección que produce en el cono el plano inclinado. Se escriben con mayor precisión:

I. La elipse que determina la sección de un cono por un plano oblicuo tangente a dos esferas inscritas en el cono tiene sus focos en los puntos de tangencia de dicho plano con las esferas, y la longitud del eje mayor

[18] GARCÍA, 2007.

de la elipse es la del segmento de cualquier generatriz delimitado por las circunferencias que son las tangencias del cono con las esferas.

II. La elipse que determina la sección de un cono por un plano oblicuo tangente a dos esferas inscritas en el cono tiene sus focos en los puntos de tangencia de dicho plano con las esferas, y sus directrices son las rectas intersección de dicho plano con los planos determinados por circunferencias que son las tangencias del cono con las esferas.

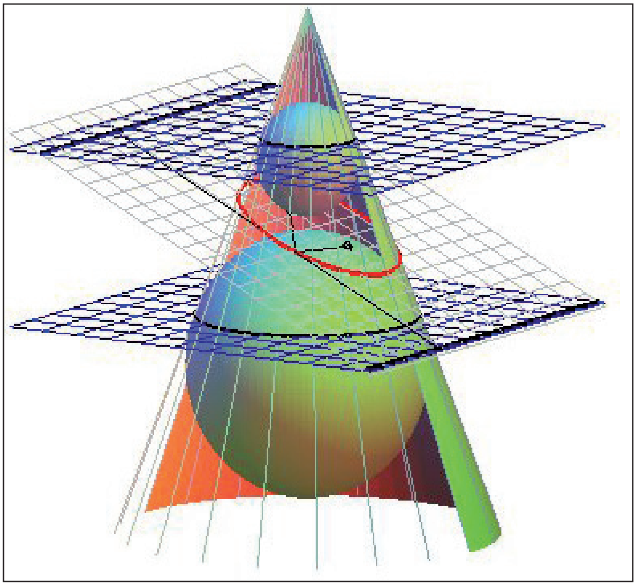


Figura 5. Nuestro propósito.

1.1. Un mundo conceptual

En nuestro caso, sin perder de vista la perspectiva de una educación competencial, se pretende integrar modelización matemática y metodología didáctica, manipulación de objetos físicos y software, medición y cálculo.

El modelo que se va a construir no se agota en un curso, ya que se puede y se debe utilizar tanto en Matemáticas como en Dibujo para desarrollar contenidos de Geometría Sintética y en Geometría Descriptiva, y en Matemáticas para potenciar los procesos de enseñanza de Geometría Analítica Análisis Matemático y, por qué no, Geometría Descriptiva.

La construcción de dicha maqueta actúa como elemento motivador y, para ello, se tienen que proponer y resolver numerosos problemas de cálculo y de dibujo, pero también se pueden enunciar, y de hecho se enuncian, otros sobre los elementos que intervienen en la construcción, algunos más sobre elementos que forman parte de la propia maqueta y, en fin, otros que están relacionados con ella. Las alternativas de las dos áreas curriculares son claras: por una parte, desde Dibujo, se construye la figura con un programa de geometría métrica (CABRÍ) y se mide; por otra, desde Matemáticas, se calcula con una hoja de cálculo (EXCEL). Obviamente, se tienen que obtener las mismas soluciones, salvo errores de redondeo.

En suma, sin pasar por alto el elemento motivador, los objetivos de este proyecto son los siguientes:

- Proponer y resolver los problemas de cálculo y de dibujo necesarios para construir la maqueta.
- Explicar con la maqueta los teoremas de Dandelín.
- Proponer y resolver los problemas de cálculo y de construcciones geométricas derivados de la propia maqueta.
- Formular alguna cuestión derivada de la maqueta para algunos alumnos aventajados, que pueda tener carácter de investigación.

Concretamente, para la construcción de la maqueta de la figura 5, se ha partido de dos esferas de radios *r=2* y *R=3,5 cm* (que se compran), transparencias de *297x210* y *420x297 mm* para la superficie del cono (en realidad se utiliza para cuatro superficies), y una cartulina de *297x210* mm, que se utilizará para representar los tres planos.

1.2. Un sistema representacional

En la figura 6 se representa una sección de la maqueta por un plano que contiene al eje del cono y es perpendicular a las rectas intersección de los planos paralelos con el oblicuo.

En ella, el diámetro mayor de la elipse está representado por el segmento *AB*, que está situado sobre el plano oblicuo, π *F1* y *F2* son los puntos de tangencia de las esferas de centros *O1* y *O2* con dicho plano, π. Las rectas denotadas por δ y φ representan los planos determinados por las circunferencias de tangencia del cono y las esferas, planos que son perpendiculares al eje del cono.

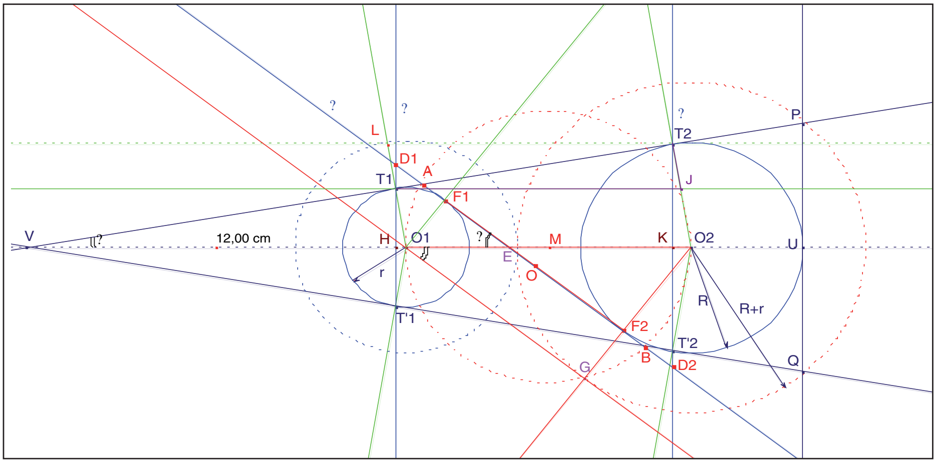


Figura 6. Sección que contiene al eje del cono y al eje mayor de la elipse.

En la misma figura, los puntos denotados por *D1* y *D2* representan a las rectas (*de punta*) que son las intersecciones del plano π con los planos δ y φ. La primera esfera, que está representada por la circunferencia de centro *O1* y radio r, se sitúa a una distancia de *12 cm* del vértice del cono *VO1=12 cm*. A continuación se dibujan las tangentes, *VT1* y *VT'1*, a dicha circunferencia desde el vértice y, finalmente, se dibuja la circunferencia de centro *O2* y radio *R=3,5 cm* que sea tangente a las rectas *VT1* y *VT'1* con centro en la recta *VO1*.

2. EL CAMINO DE IDA. EL SISTEMA REPRESENTACIONAL

Para construir el cono, es necesario dibujar el sector circular de su desarrollo y, para ello, antes hay que calcular la longitud de la generatriz del cono, *VP*, y el radio de la base, *UP*, señalados ambos en la figura 6.

Es interesante que se vayan combinando los procedimientos gráficos y los numéricos: los primeros se pueden hacer con CABRI y conviene ir guardándolos todos de forma ordenada; en cuanto a los segundos, aconsejo que se hagan de forma ordenada en una única hoja de cálculo, invocando a las celdas que contienen datos y guardándolos. Estos aparecen en la tabla de resultados del ANEXO II.

En este paso del modelo ya se considera un sistema representacional proporcionado por múltiples conceptos la Geometría Sintética: rectas, semirrectas, segmentos, ángulos, paralelismo, perpendicularidad, bisectriz, mediatriz, triángulos y cuadriláteros, circunferencias, sectores, tangencias, teorema del ángulo inscrito, teorema de Thales, escalas, semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas.

La tarea que se propone a continuación constituye el primer paso en la construcción del cono y consiste en trazar las tangentes a una circunferencia dada desde un punto exterior a la misma, Al fijar el vértice, quedan determinadas las generatrices como las rectas tangentes a la esfera pasando por dicho punto, y también se fija el eje del cono, como la recta que pasa por el vértice y por el centro de la esfera. Uno de los fines de esta tarea es tantear la posible situación de las esferas para poder construir la maqueta con los elementos disponibles.

1. La figura 6 se ha construido dibujando la circunferencia de centro *O1* y radio el de la esfera pequeña (2 cm), de tal manera que *VO1=12 cm*. A continuación se trazan por *V* las tangentes a dicha circunferencia. Hazlo con CABRI y explica el proceso constructivo. *Representar y comunicar.* El proceso constructivo se omite, pero está basado en el teorema del ángulo inscrito.

A la vista de la figura 6, parece que los triángulos *O1T1V*, *VT'1O1* y *O1GO2* son rectángulas, pero conviene estar seguros de que eso es así.

2. Explica las razones que permiten asegurar que los ángulos *O1T1V*, *VT'1O1* y *O1GO2* son rectos. *Argumentar y comunicar.*

La siguiente tarea, que consiste en dibujar una circunferencia de radio dado tangente a dos rectas dados, tiene su equivalencia en el espacio tridimensional a situar la esfera mayor en el interior del cono de manera que todas las generatrices del mismo sean tangentes a esta esfera. En su construcción se utiliza el concepto de semejanza.

3. El paso siguiente para construir la figura 6 consiste en situar la circunferencia de centro *O2* y radio el de la esfera grande (3,5 cm), de manera que su centro esté en el eje *VO1* y que tenga las mismas rectas tangentes *VT1* y *VT2* que la circunferencia que representa a la esfera pequeña. Hazlo y explica dicho proceso constructivo. *Representar y comunicar.*

La próxima tarea, en la que se dibujan las tangentes interiores a las dos circunferencias que representan a las dos esferas dadas, tiene su equivalencia en el espacio tridimensional a representar el plano oblicuo que corta a todas las generatrices y es tangente a las dos esferas.

4. Explica el procedimiento para trazar las tangentes interiores, comunes a las dos circunferencias, que representan a las esferas, en los puntos *F1* y F2. Haz el correspondiente dibujo sobre el anterior. *Representar y comunicar.*

Es evidente que en la figura 6 aparecen muchos triángulos semejantes a *O1T1V* y que el reconocimiento de los mismos, señalando el porqué en cada caso, es un ejercicio de reproducción interesante.

5. Identifica el mayor número posible de triángulos semejantes a *O1T1V* que están presentes en la figura 6, indicando en cada caso por qué los son. *Argumentar.*

La siguiente tarea tiene que ver con el aprovechamiento de recursos que son fáciles de conseguir: las cartulinas de tamaño A4, que tienen dimensión 21x29'7 cm^2. En ella, se dibujarán después las circunferencias de tangencia de las esferas con el cono y la elipse, y se recortarán.

6. Hay que dividir una cartulina de tamaño "A4" en tres bandas horizontales iguales para dibujar sobre ellas los tres planos representados en la figura 5. Calcula las dimensiones de cada una. Sitúa un punto en el entro de simetría de cada banda. *Pensar y razonar.*

El siguiente cálculo va a permitir dibujar en el sector circular el arco de circunferencia que, cuando se construya la maqueta, representará la circunferencia de tangencia de la esfera pequeña con el cono.

7. Ya se sabe que el triángulo *VO1T1* de la figura 6 es rectángulo. Calcula la longitud del cateto *VT1*. *Pensar y razonar.*

El cálculo de la longitud del segmento *T1T2* es crucial para poder determinar la longitud de *VT2*. Ésta va a permitir dibujar en el sector circular el arco de circunferencia que, cuando se construya la maqueta, representará la circunferencia de tangencia de la esfera grande con el cono.

8. Ya se tiene que haber establecido que el triángulo *JT2T1* es rectángulo y semejante al triángulo *O1T1V*. Calcula las longitudes de los lados *T1J*, *T1T2* y con ellas la longitud de *VT2*. *Pensar y razonar.*

El cálculo de la longitud de la generatriz *VP* permitirá dibujar el sector circular, que será el desarrollo del cono, y los cálculos de la siguiente tarea están orientados a este fin.

9. Las soluciones del problema anterior permiten calcular la altura del cono, *UV*, de forma inmediata, pero los cálculos del radio de la base, *PU*, y de la generatriz, *VP*, no son tan inmediatos. Sin embargo, una vez que se haya calculado *VU*, considerando que *O1T1V* es semejante a *VUP,* puedes calcular *VP* y *PU*. Haz los cálculos y mide en la figura correspondiente con CABRI. *Pensar y razonar.*

Para dibujar el sector circular, además de conocer el radio del círculo, es preciso hallar el ángulo central que determina su amplitud, pero una vez que se ha calculado el radio de la base del cono y la generatriz, su cálculo es muy sencillo.

10. Los resultados del ejercicio anterior permiten calcular el ángulo del sector circular, γ. Determina su valor midiendo y calculando. *Pensar y razonar.*

Ahora, ya se puede dibujar el sector circular en una cartulina y los arcos que corresponden a las circunferencias tangentes del cono y las esferas. Sin embargo, aunque es muy fácil hacer el dibujo con CABRI a tamaño real, no se puede imprimir en este tamaño desde este programa de dibujo y, por tanto, se requiere dibujarlo a una escala apropiada, por ejemplo 1:2.

11. Dibuja con CABRI el sector circular para construir la maqueta utilizando la escala 1:2. Dibuja también una generatriz que contiene el punto de la elipse por el que trazarás los radios vectores, que son los segmentos que le unen con los focos. *Representar.*

Para recuperar el tamaño del sector en una transparencia A4 se puede pasar el dibujo anterior a MsWord, recuperar el tamaño real y, finalmente, imprimirlo. Esta será la tarea siguiente.

12. Pasa a MsWord este dibujo, copiando y pegando, recupera las dimensiones reales, imprímelo en una transparencia “A4”. Recórtala dejando un borde para que al formar el cono se pueda pegar. *Representar.*

Al pasar el dibujo a Word aparece un nuevo problema: el dibujo no cabe. Ahora se pueden optar por distintas soluciones:

a) Comprar otra esfera con un radio menor que el de la pequeña.

b) Situar esta esfera más cerca del punto V (vértice del cono).

c) Hacer los dibujos del sector circular en A3 y pedir que las transparencias las hicieran en un estudio de reprografía. En este caso se podrían hace a escala 1:2 y dibujarlas en un A4. Si se adopta esta solución, pensando en un taller para que los alumnos tuvieran su maqueta, es posible que se pudieran dibujar más de dos sectores en un A3.

En fin, si los cálculos se han hecho de forma ordenada en una hoja de cálculo, se pueden tantear estas posibilidades. También conviene tener presente que el ángulo del sector tiene una amplitud de 60º.

13. Tantear las posibilidades planteadas en el texto precedente con la hoja de cálculo (cálculos) y con un A3 y decidir una opción. Quizás pueda haber alguna otra solución. Redacta un informe. *Modelizar, plantear y resolver problemas, comunicar.*

Con el fin de poder dibujar la circunferencia de tangencia de las esferas con el cono y recortarlas después, en la siguiente tarea se calculan los radios de dichas circunferencias. Así, se puede introducir el cono por los orificios resultantes hasta las circunferencias de tangencia dibujadas en el mismo.

14. Utiliza la semejanza de triángulos y calcula las longitudes de los segmentos *HT1* y *KT2* (figura 6). Dibuja las circunferencias correspondientes centradas en la 1ª y 2ª bandas de la cartulina y recórtalas sin estropear el contorno para que ajusten los planos horizontales. *Representar y modelizar.*

Los ángulos α (formado por las generatrices del cono con su eje) y β (formado por el plano oblicuo con el eje del cono) están determinados por la dimensión de las esferas y por la separación de sus centros. Así, ambos aumentan al disminuir la distancia de un centro y al aumentar la razón de las longitudes de los radios. La siguiente tarea está dedicada a tales ángulos.

15. Haz un dibujo con CABRI que permita ver de forma dinámica la variación de los ángulos α y β en función de los radios de las esferas y de la separación de sus centros. Para ello, tienes que dibujar las tangentes exteriores e interiores a dos circunferencias de radios arbitrarios, que representan a las esferas. Redacta un informe. *Representar y comunicar.*

Las tareas siguientes están orientadas a dibujar la elipse en el plano del papel. Un procedimiento es calcular las longitudes de sus diámetros principales y representarla utilizando CABRI para recortarla después.

En la primera tarea, se van a establecer las igualdades entre los segmentos, *AT1=AF1*, por una parte, y *BF2=BT'2,* por otra (figura 6). Esto va a permitir calcular la longitud del segmento AB, que es el diámetro mayor de la elipse, mediante la relación *AB=T1T2=T'1T'2* (distancia entre las circunferencias de tangencia, que coincide con la longitud de los segmentos de cualquier generatriz determinados por estas circunferencias tangentes).

16. Considera la figura 6 y explica razonadamente las siguientes relaciones: *AT1=AF1*, *BF2 =BT2*. También puedes medir con CABRI en la figura apropiada. *Argumentar y comunicar.*

Un poco más difícil es explicar que *AF1=BF2,* cosa que debe hacerse para: establecer que *AB=T1T2* es el diámetro principal de la elipse, *2a*, fijar que *F1* y *F2* son los focos de la elipse, calcular la distancia focal, *2c,* y hallar la longitud del diámetro menor, *2c*. Éste es el cometido de las dos tareas siguientes.

17. Explica por qué se verifican las siguientes relaciones: *AF1=BF2, AB=T1T2=T'1T'2.* También puedes verificarlo midiendo en la figura hecha con CABRI. *Argumentar, comunicar.*

18. Ahora, calcula la longitud del segmento *AB*, que es el diámetro mayor de la elipse, *2a*, la distancia focal, *2c,* y el diámetro menor de la elipse, *2b.* También se puede medir con CABRI. *Pensar y calcular.*

La longitud del eje mayor de la elipse, *2a*, y la distancia entre los focos, *2c,* permiten dibujar la elipse y determinar la longitud del eje menor. Estos son los apartados de la siguiente tarea.

19. Dibuja la elipse en el centro de la tercera banda de la cartulina, explica los pasos y recórtala sin estropear ni la elipse ni el contorno. Calcula la longitud del eje menor. *Representar, y pensar y calcular.*

Los ángulos α y β se pueden determinar aplicando las definiciones de razones trigonométricas a varios triángulos de la figura 6. Por ejemplo, la razón *seno* a los triángulos *O1T1V* y *O1GO2*.

20. Calcula las amplitudes de los ángulos α y β ¿Qué relación debe haber entre α y β para que el plano π corte a todas las generatrices? *Pensar y calcular, argumentar, representar y comunicar.*

La longitud del los segmentos *AD1* y *T1D1,* por una parte, *y BD2 y T’2D2,* por otra, permiten engarzar el plano oblicuo con los planos horizontales de la maqueta. Esta tarea no es tan sencilla y, para ello, se tienen que resolver los triángulos *T1AD1* y *T’2D2B.* En el primer triángulo, se conoce el lado *AT1=AF1=a-c*, y los ángulos *D1T1A*=$\pi/2-\alpha$ y *T1AD1*=$\beta+\alpha$. En el segundo triángulo, *BT’2=BF2=a-c* y los ángulos *D2T’2B*=$\pi/2+\alpha$ y *T’2BD2*=$\beta-\alpha$. Las tareas siguientes se ocupan de esta cuestión.

21. Obtener la longitud de los segmentos *AD1* y *T1D1*. Dibuja en las correspondientes bandas de la cartulina la recta intersección del plano horizontal superior y el plano oblicuo. Esta recta en la figura 6 está representadas por *D1*. *Pensar y calcular, representar y comunicar.*

22. Obtener la longitud de los segmentos *BD2* y *T´2D2*. Dibuja la recta intersección de dichos planos en las bandas correspondientes de la cartulina A4. Esta recta está representada por *D2* en la figura 6. *Pensar y calcular, representar y comunicar.*

Ahora, ya se puede montar la maqueta como se muestra en la figura 5, de manera que el punto de la elipse, P, por el que se trazan los radios vectores que unen dicho punto con los focos, coincida con la generatriz dibujada en el sector.

23. Recorta las bandas de la cartulina, las circunferencias, la elipse y el sector circular y ensambla la maqueta. El resultado será el que aparece en la figura 7.

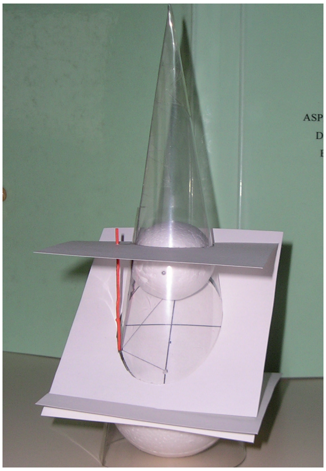


Figura 7. Maqueta de las esferas y cono de Dandelín.

Como se ha podido apreciar en el proceso seguido hasta ahora, la educación en competencias está implícita en todo el desarrollo que se ha llevado a cabo y, de hecho, en cada una de las tareas se han formulado las competencias formativas que le son propias. Asimismo, la competencia que preconiza el uso de nuevas tecnologías, aquí está completamente integrada y en casi todas las actividades se ha propuesto el uso de CABRI o EXCEL. Sin embargo, no se han tenido en cuenta los tres niveles de complejidad que aparecen reflejados en el ANEXO I (*Reproducciones, Conexiones y Reflexiones)* y consideramos que sería muy interesante un ejercicio de reflexión consistente en asignar a cada tarea propuesta el nivel de complejidad que pueda tener asociado.

Para ser justos con los principales agentes de nuestro proceso educativo, hay que indicar que esta orientación educadora (educación en competencias) es diferente de la que han recibido nuestros alumnos que, como señalan, Castro y Molina[19]; Calleja, Ortega, Calleja, Árias y Crespo[20], entre otros autores, no han recibido una educación matemática en competencias y, por tanto, el puesto 26 que ocupa España en la lista de los 40 países de la OCDE, que participaron en la evaluación curricular del proyecto PISA 2003, no refleja los rendimientos de nuestros alumnos en Matemáticas. (En PISA 2006, España ocupa el 30 de 57 países y, en la misma escala, la puntuación pasó de 485 a 480 puntos).

3. EL CAMINO DE VUELTA. EL MODELO CONCEPTUAL

Ahora, estamos en condiciones de utilizar la maqueta para establecer los teoremas de Dandelín y para plantear y resolver otras tareas matemáticas interesantes. En este paso del modelo se amplía el sistema representacional, dando paso a la Geometría Analítica (plana y tridimensional), a la Geometría Descriptiva y al Análisis Matemático de varias variables.

En la siguiente tarea, se utiliza la maqueta para identificar la definición métrica de elipse con la curva que se ha obtenido seccionando el cono por un plano inclinado (plano que corta a todas las generatrices) y el primer teorema de Dandelín.

24. Utiliza la maqueta para establecer la primera definición de elipse junto con el primer teorema de Dandelín. *Modelizar, argumentar y comunicar.*

[19] CASTRO y MOLINA (2005).
[20] CALLEJA, ORTEGA, CALLEJA, ÁRIAS y CRESPO (2007).

Asimismo, utilizando la maqueta, se puede establecer la segunda definición de elipse y el segundo teorema de Dandelín. Sin embargo, el proceso no es sencillo y conviene proyectar un punto arbitrario *P* de la elipse sobre el plano vertical al eje del cono, φ, (recta perpendicular a φ que pasa por *P* determina *P'*) y sobre la directriz *d1* (plano perpendicular a *d1* que pasa por *P* determina *P''*). Así se obtiene el triángulo *P P' P''*, que es rectángulo en *P'*. Este será el cometido de la siguiente tarea y en la siguiente se deducirá el teorema.

25. Utiliza la maqueta y dibuja sobre ella el triángulo *PP'P''* como se ha indicado en el texto precedente. *Representar.*

26. Utiliza la maqueta para establecer la segunda definición de elipse, junto con el segundo teorema de Dandelín. *Argumentar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático.*

Solución: el ángulo que forma *PP'* con la generatriz directriz es α y el ángulo *PP''P'* es $\pi/2-\beta$. Por tanto:

$$\frac{PF1}{PP''}=\frac{PT1}{PP''}=\frac{PP'}{cos(\alpha)}:\frac{PP'}{sen(\pi/2-\beta)}=\frac{cos(\beta)}{cos(\alpha)}<1.$$

La puerta a la Geometría Analítica y al Análisis Matemático se abre considerando un sistema de referencia. Es evidente que puede especular con múltiples opciones, pero aquí se utiliza el sistema cartesiano $\{O, X, Y\}$ en el que *OX* contiene al eje del cono y *OY* es la perpendicular a *OX* por *V*.

27. Determinar la ecuación de la recta *VT1* y la ecuación de la semirrecta *VT2* de origen V. *Argumentar y utilizar el lenguaje matemático.*

28. Determina las ecuaciones de las circunferencias que en la figura 6 representan a las esferas: *C(O1, r)* y *C(O2, R)*. *Argumentar y utilizar el lenguaje matemático.*

En la siguiente tarea, conviene utilizar resultados del "camino de ida", pero es interesante el análisis de los elementos de la figura 6.

29. Halla las coordenadas de los puntos *F1* y *F2*, y obtén la ecuación de la recta que determinan y la distancia focal *d(F1, F2)*. *Pensar y razonar.*

Las dos tareas siguientes se pueden hacer utilizando geometría elemental o la integral definida. Será interesante hacer ambos cálculos y ver que los resultados son coincidentes.

30. Calcular el área del recinto mixtilíneo delimitado por el eje del cono, la recta *VT1* y el arco de la circunferencia *T'1HT1*. *Pensar y razonar.*

31. Calcula el volumen de revolución generado por el recinto de la tarea anterior al girar alrededor del eje OX. *Pensar y razonar.*

Aunque aquí no se ha considerado ninguna tarea propia del cálculo diferencial, es evidente que se pueden proponer enunciados derivados de la maqueta, por ejemplo utilizando como base la figura 6, propios de este campo. Así, por ejemplo, se pueden crear enunciados para determinar la expresión algebraica de funciones con uno o varios criterios, límites, continuidad, tangencias y extremos. Una vez que se ha hecho este comentario, el proceso está abierto y su seguimiento es más sencillo.

3.1. La situación del Mundo Real

A partir de ahora, se va a considerar el espacio tridimensional y se van a proponer tareas de representación gráfica, propias de Geometría Descriptiva, actividades de representación simbólica, propias de Geometría Analítica, y problemas de cálculo que se resuelven con técnicas de Análisis Matemático.

32. Representa en el sistema diédrico el cono de la maqueta, las esferas, los planos δ y φ perpendiculares al eje y las secciones que producen en el mismo. Las dimensiones aconsejan utilizar una escala 1:2. La figura 8 reproduce esta gráfica como guía de la construcción. *Utilizar el lenguaje matemático, representar y comunicar.*

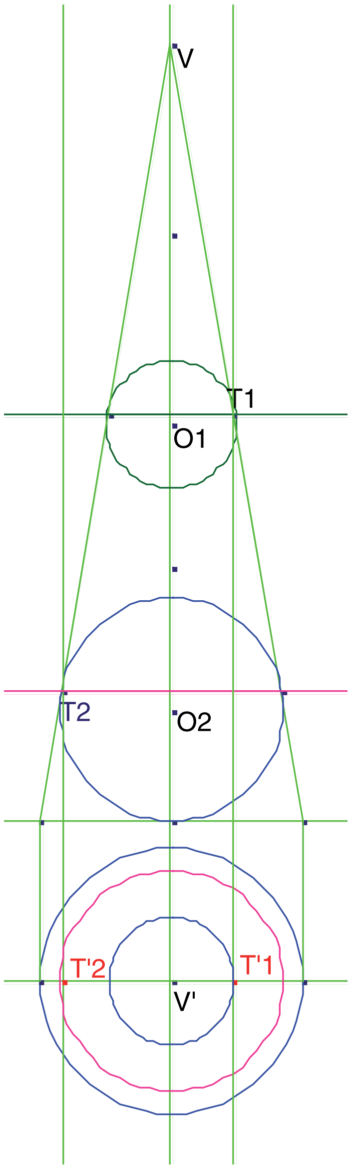


Figura 8. Representación del cono y esferas en diédrico.

33. Representa en el sistema diédrico los planos π con δ y φ, y determina las intersecciones de π con δ y con φ. La figura 9 reproduce esta gráfica como guía de la construcción. *Utilizar el lenguaje matemático, representar y comunicar.*

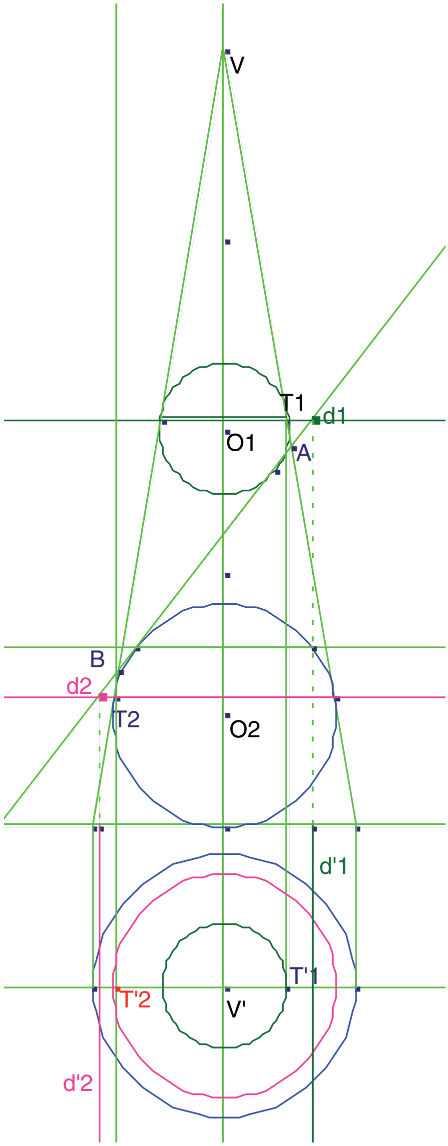


Figura 9. Representación del cono, esferas, planos e intersección de planos en diédrico.

34. Representa en el sistema diédrico el plano δ y la sección que produce en el cono (La elipse). Dibuja en el propio sistema la elipse en dimensión real y mide los ejes y la distancia focal. La figura 10 reproduce esta gráfica como guía de la construcción. *Utilizar el lenguaje matemático, representar y comunicar.*

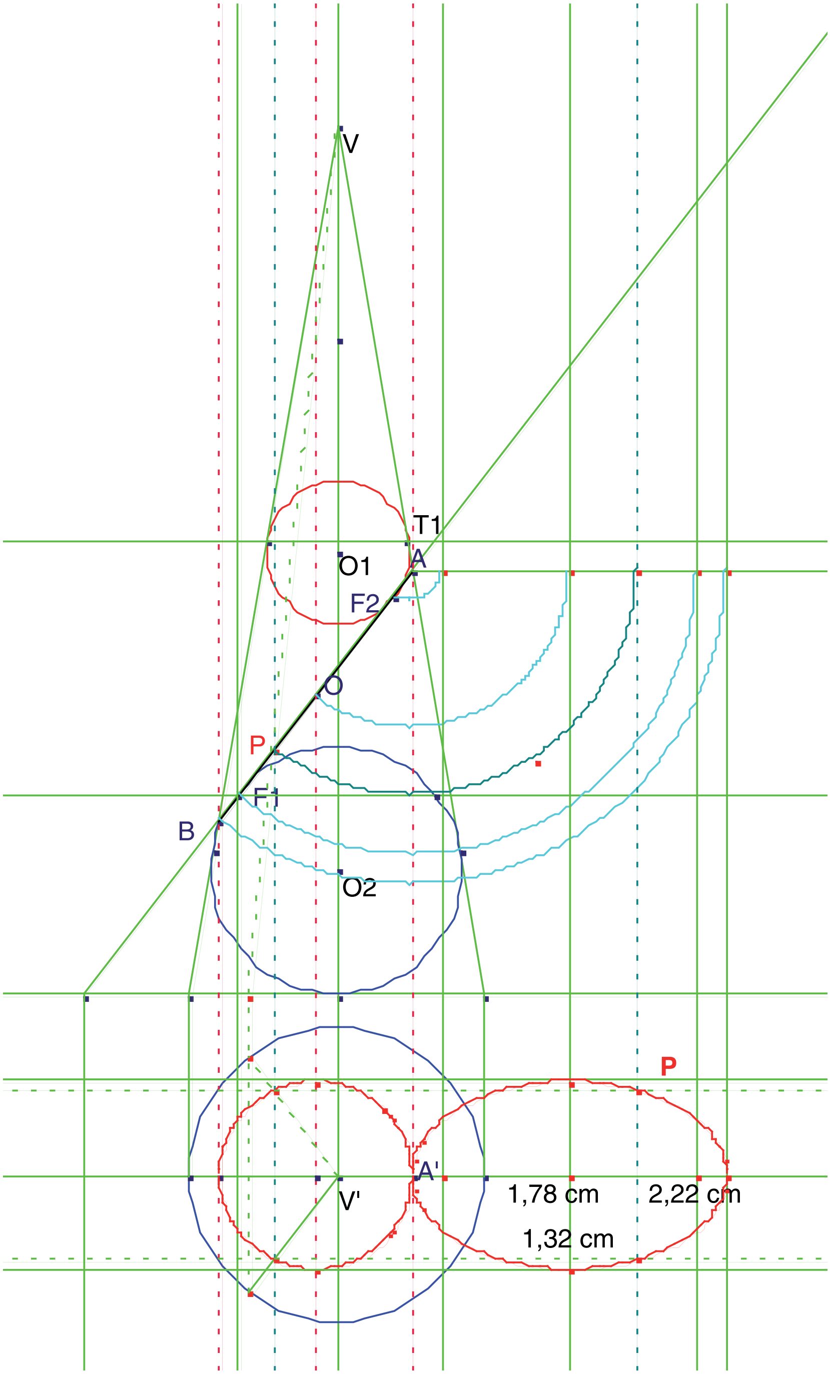


Figura 10. Sección del cono por el plano oblicuo, dibujo de la elipse a tamaño real y verificación de longitud de los ejesen en diédrico.

Lo mismo que anteriormente, se pueden considerar diferentes sistemas de representación, pero se ha optado por el sistema cartesiano tridimensional $\{O,X,Z\}$, tal que O sea el vértice del cono, el eje del cono coincida con OZ y el plano OYZ seccione a la maqueta por el eje mayor de la elipse. Las tareas que siguen se han redactado pensando en este sistema.

35. Escribe las ecuaciones de las generatrices que están contenidas en el plano OYZ. *Argumentar, representar y utilizar el lenguaje matemático.*

Solución: Las dos rectas contienen al origen y, además, una pasa por T1=(0, 1´97, 11’66), y la otra por T’1=(0, -1´97, 11’66). $\begin{cases} x = 0 \\ z = \pm \dfrac{11'66}{1'97} x \end{cases}$

36. Escribe las ecuaciones de las dos esferas. Argumentar, representar y utilizar el lenguaje matemático.

Solución: $x^2+y^2+(z-12)^2=4$, $x^2+y^2+(z-21)^2=12{,}25$.

37. Escribe las ecuaciones de los planos δ, φ y π.

Solución. Los planos horizontales tienen las siguientes ecuaciones: $z=21$, $z=12$. La ecuación del plano oblicuo pasa por determinar un vector perpendicular al mismo, por ejemplo, $\overrightarrow{O1F1}$; O1=(0,0,12), F1=(0,-1’58,13’22), $\overrightarrow{O1F1}$=(0,-1’58, 1’22); -1,58(y+1´58)+1,22(z-13,22)=0.

38. Determina las ecuaciones del cono. *Argumentar, representar y utilizar el lenguaje matemático.*

Solución: $x^2+y^2-(\tan(\alpha)z)^2=0$. $\quad x^2+y^2-0{,}17^2z^2=0$.

39. Determina las ecuaciones de la circunferencia que es la tangencia del cono con la esfera pequeña. *Argumentar, representar y utilizar el lenguaje matemático.*

Solución: $\begin{cases} x^2+y^2=HT1^2 \\ z=VH \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=1{,}97^2 \\ z=11{,}66 \end{cases}$

40. Escribe las ecuaciones de la recta que contiene al eje mayor de la elipse. *Argumentar, representar y utilizar el lenguaje matemático.*

Solución:

Como intersección del plano $x=0$ y π, $\begin{cases} x=0 \\ -1{,}58(y+1{,}58)+1{,}22(z-13{,}22)=0 \end{cases}$

como recta que pasa por $F1$ y $F2$, $\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y+1{,}58}{4{,}35}=\dfrac{z-13{,}22}{5{,}64} \end{cases}$.

41. Escribe la ecuación de la elipse en el sistema referido. *Argumentar, representar y utilizar el lenguaje matemático.*

Solución: $\begin{cases} -1{,}58(y+1{,}58)+1{,}22(z-13{,}22)=0 \\ x^2+y^2-0{,}17^2z^2=0 \end{cases}$

Se podría hacer aquí un comentario similar al que sigue a la terea 31 y proponer tareas de cálculo diferencial, pero ahora en R^3. Algunas de estas actividades podrían ser consideradas como tareas de investigación y, por tanto, debieran encuadrarse en el siguiente apartado.

3.2. Tareas de investigación

A continuación se proponen cuatro tareas que tienen como finalidad despertar en los alumnos más aventajados la investigación en matemáticas, el uso de software adecuado y la comunicación y uso adecuado de los sistemas de representación.

42. Utiliza la integral de volumen para calcular el volumen de la porción tronco de cono que contiene al triángulo AVB y que está delimitado por el cono y por el plano oblicuo π. *Argumentar, pensar y razonar y utilizar el lenguaje matemático.*

43. Construir un programa, por ejemplo en MAPLE, que dibuje la maqueta utilizando las ecuaciones paramétricas de los planos, de las esferas, del cono y de la elipse. *Argumentar, representar, comunicar y utilizar el lenguaje matemático.*

Solución:

```
> with(plots):
```

Parametrización de las esferas:

```
>esf1:=plot3d([2*cos(u)*cos(v),2*cos(u)*sin(v),
  12+2*sin(u)],u=-Pi/2..Pi/2,v=0..2*Pi):
```

```
> esf2:=plot3d([3.5*cos(u)*cos(v),3.5*cos(u)*sin(v),
21+3.5*sin(u)],u=-Pi/2..Pi/2,v=0..2*Pi):
```

Parametrización de los planos:

```
> pl1:=plot3d([u,v,21],u=-6..6,v=-6..6):
> pl2:=plot3d([u,v,12],u=-6..6,v=-6..6):
> pl3:=plot3d([u,-1.58+1.22/1.58*(v-13.22),v],
  u=-..6,v=10..23):
```

Parametrización del cono

```
cono:=plot3d([u*cos(t),u*sin(t),u/0.17],
  t=0..2*Pi,u=0..4.17,style=wireframe):
```

Las siguientes sentencias parametrizan la elipse

```
> f:=x^2+y^2-0.17^2*(13.22+1.58/1.22*(y+1.58))^2;
> f:=expand(%);
> f:=f/.9515278420;
> f := 1.050941397*x^2+y^2-7.078478490-1.200978911*y;
> f:=1.050941397*x^2+(y-1.200978911/2)^2
  -1.200978911^2/4-7.078478490;
> x:=sqrt(7.439066076/1.050941397)*cos(t);
> y:=.6004894555+sqrt(7.439066076)*sin(t);
> z:=13.22+1.58/1.22*(.6004894555+2.727465137*sin(t)+1.58);
```

La siguiente sentencia permitirá dibuja la elipse

```
elipse:=spacecurve([x,y,z],t=0..2*Pi,
  color=red,thickness=3):
```

Finalmente, esta sentencia dibuja las esferas, los planos, el cono y la elipse en pantalla

```
> display(esf1,esf2,pl1,pl2,pl3,cono,elipse);
```

La implementación de este programa dibuja la figura 11, que representa la maqueta construida. Esta figura tridimensional se puede mover con el ratón como se quiera para visualizarla desde distintos puntos de vista.

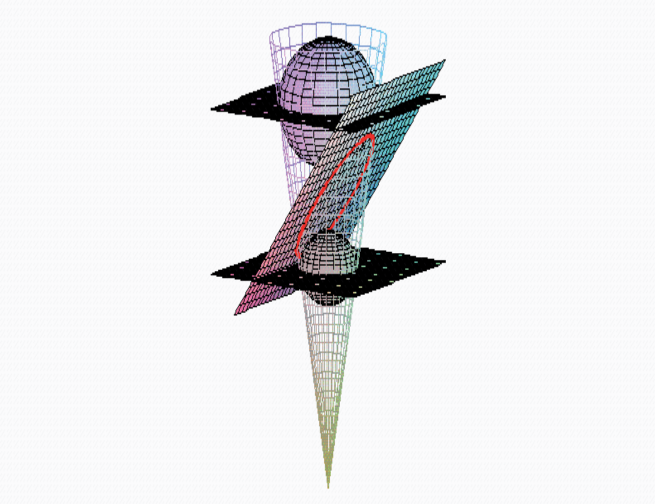


Figura 11. Representación de la maqueta con MAPLE.

Se puede construir la maqueta seccionando el cono por la elipse. En este caso hay que dibujar la curva plana “transformación de la elipse” al desarrollar el cono. Se trata de un problema bastante complejo.

44. Redacta verbalmente el procedimiento encaminado a plasmar sobre el plano del dibujo la curva transformada de la elipse cuando se desarrolla el cono. *Argumentar, utilizar el lenguaje matemático y comunicar.*

45. Dibuja en el sistema diédrico de representación la curva plana en que se transforma la elipse al desarrollar el cono. Esta curva recibe el nombre de poligasteroide, su construcción correspondiente aparece en la figura 12 y aparece representada en la parte inferior derecha de la misma. *Argumentar, representar utilizar el lenguaje matemático y comunicar.*

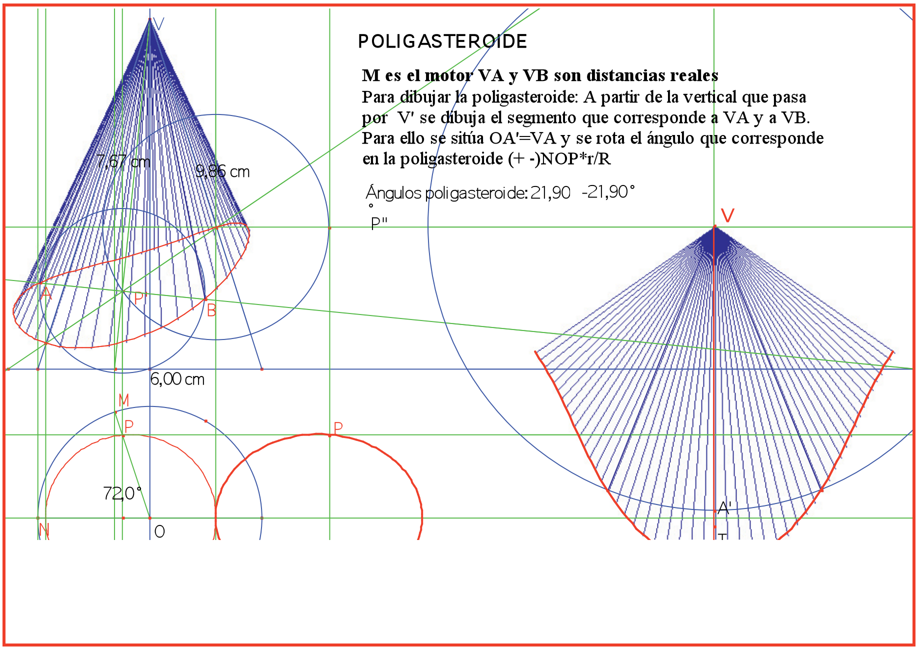


Figura 12. Construcción de la poligasteroide en el sistema diédrico.

ANEXO I

Competencias específicas: capacidades de los alumnos que les permiten aplicar sus conocimientos destrezas y habilidades en la ejecución de procedimientos matemáticos.

El proyecto PISA distingue las siguientes competencias específicas y cada una de ellas incluye las capacidades que se relacionan a continuación:

1. *Pensar y razonar:* Plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Qué…? ¿Cómo…? ¿Cuántos…? ¿Cuál…? Valorar el tipo de respuestas matemáticas. Distinguir entre los diferentes tipos de enunciados (definiciones, ejemplos, cálculos, demostraciones)
2. *Argumentar:* Seguir cadenas de razonamientos. Distinguir entre razonamientos universales y particulares. Valorar la heurística (búsqueda de solución por métodos no rigurosos) y la función explicativa de la argumentación.
3. *Comunicar:* Entender y saber expresar temas de contenido matemático de forma verbal (oral y escrita) simbólica gráfica y numérica.
4. *Modelizar:* Expresar matemáticamente situaciones problemas de contextos reales, tratamiento matemático del problema e interpretar la solución matemática en términos contextuales.
5. *Plantear y resolver problemas:* Plantear y formular problemas matemáticos de diferentes tipos (teóricos, numéricos, gráficos, algebraicos, de respuesta abierta o cerrada). Resolverlos mediante diferentes procedimientos.
6. *Representar:* Utilizar los sistemas de representación apropiados al contexto y hacer las traducciones oportunas entre ellos.
7. *Utilizar el lenguaje matemático:* Manipular los símbolos numéricos y algebraicos propios de cada nivel educativo observando las reglas sintácticas del lenguaje matemático, pasando del lenguaje natural al formal.

Para valorar estas competencias se consideran **tres niveles de complejidad**.

- *Reproducciones:* Uso de procedimientos rutinarios. Aplicaciones directas de la alfabetización matemática.
- *Conexiones:* Resolución de problemas estándar en contextos cercanos. Los alumnos tienen que interpretar una situación.
- *Reflexiones:* Razonamiento, argumentación, generalización o justificación de resultados al tratar con problemas originales.

ANEXO II

La siguiente tabla recoge los cálculos efectuados con EXCEL siguiendo el orden de las actividades propuestas.

DATOS			
r	2,00		
R	3,50	1,50	
VO1	12,00	5,50	
Altura bandas A4	9,90		
CÁLCULOS			
VT1	11,83		
T1J	9,00		
T1T2	8,87		
O1O2	9,00		
VT2	20,71		
VO2	21,00		
UV	24,50		
PU	4,14		
VP	24,85		
Ángulo sector _	60,00		
Ancho del sector	21,52		
HT1	1,97		
KT'2	3,45		
AB=T1T2=T1A+AF2=T1A+AF1+F1F2=2AF1+F1F2		T1A=BT'2	
AB=T'1T'2=T'2B+BF1=T'2B+BF2+F1F2=2BF2+F1F2			
AB=2a=T1T2	8,87		
F1F2=OG=2c	7,12	2c=raíz(O1O2^2-(R+r)^2))	
a	4,44		
c	3,56		
b	2,65		
α	9,59	0,17	Radianes
β	37,67	0,66	Radianes
AT1=AF1=a-c	0,88		
AD1	1,09	AD1/sen(90-β)=AT1/sen(90–β)	
T1D1	0,81	TD1/sen(β+α)=AT1/sen(90-β_	
BT'2=AT1	0,88		
BD2	1,09	BD2/sen(90+α)=AT1/sen(90-β)	
T'2D2	0,52	T'2D2/sen(β–α)=AT1/sen(90-β)	
HD1=HT1+T1D1	2,78		

OD1=OA+AD1	5,53		
KD2=KT'2+T'2D2	3,97		
OD2=OB+BD2	5,53		
VH	11,67	raiz(VT1^2-Ht1^2)	
Pendiente VT1=tan(α)	0,17		
Pendiente VT'1	-0,17		
C(O1,r)	(x-12)^2+y^2=4		
C(O2,r)	(x-21)^2+y^2=12,25	12,25	
Recta AB			
Abscisa de F1 en R2	-1,22	"-r*sen(β)	
Ordenada de F1 en R2	1,58	r*cos(β)	
Pendiente (tan(-β))	-0,77		
Recta AB en R2	y-1,58=-0,77(x-1,22)		
Ordenada de F1	-1,58	"-rcos(β)	
Altura de F1	13,22	V01+rsen(β)	
Ordenada de F2	2,77	Rcos(β)	
Altura de F2	18,86	V02-Rsen(β)	
Coord. del vector F1F2	0,00	4,35	5,64
Parámetro v	4,17	V=h_cono*0,17	

BIBLIOGRAFÍA

BADDELEY, A. (2003). *Memoria humana: Teoría y práctica*. Madrid: Ed. McGrawHill/Interamericana de España.

BARQUERO, B, BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2007). *Ecología de la modelizacón matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias.* 2º Congrès TAD. Uzès.

CALLEJA, F., ORTEGA, T., CALLEJA, I., ARIAS, B. Y CRESPO, M.T. (2007). "Síntesis del Proyecto de Investigación de la Línea II: Determinantes Psicológicos del Rendimiento Académico en Matemáticas" (capítulo 3). En *Estudio de Evaluación de las Matemáticas en Castilla y León.* Valladolid: Dirección General de Coordinación, Inspección y Programas Educativos. Consejería de Educación. Junta de Castilla y León.

CASTRO, E. Y CASTRO, E (1997). "Representaciones y modelización". En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (95-124). Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona.

DE LANGE, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht, Países Bajos: OW and OC, Utrecht University.

ENGLISH ET AL. (2002). "Future Issues and Directions in International Mathematics Education Research". In *Handbook of International Mathematics Research Education*. Mahwah, New Jersey: Editor, L.D. English. NCTM and LEA.

FILLOY, E. y SUTHERLAND, R. (1996). "Desining Curricula for Teaching and Learning Algebra". *International Handbook of mathematics Educations.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

GADNER, H. (1989). "Multiple Intelligences go to School". *Educational Researcher,* Vol. 18, Nº. 8.

GARCÍA, A. Y ORTEGA, T. (2003). *Educación en la diversidad. Inicio de una investigación en didáctica de la matemática*. Actas del VII SEIEM. Granada.

GARCÍA, A. (2008). *Educación Matemática atendiendo a la diversidad. Análisis de una metodología específica.* Tesis doctoral. Valladolid: Biblioteca Reina Sofía Universidad de Valladolid.

HOYLES, C. ET AL. (2001). “Proporcional reasoning in nursing practice”. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (1), 4-27.

INECSE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003.* Madrid: OCDE Ministerio de Educación y Ciencia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2005). *Pruebas de Matemáticas y de solución de problemas.* Madrid: PISA 2003.

NCTM (1996). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. S.A.E.M.* Utrera, Sevilla: Editado por Thales.

ORTEGA, T. (2005). *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática* (p. 213). Barcelona: GRAÓ. ISSN: 84-7827-415-4.

ORTIZ, J.; RICO, L. y CASTRO, E. (2004). *Uso de la Modelización Matemática en Actividades Didácticas. Análisis de una situación problema*. Actas del XVIII RELME. Chiapas. México.

ROJANO, T. (2002). “Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Student’s Access to Significant Mathematical Ideas”. In *Handbook of International Mathematics Research Education*. Mahwah, New Jersey: Editor, L.D. English. NCTM and LEA.

SCHOENFELD (1984). “Research Methods in (Mathematics) Education”. In *Handbook of Internacional Research in Mathematics Education*. Mahwah, New Jersey, London: LEA, NCTM.

SOCAS, M. (2002). “Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática”. *RELIME.* Vol. 5, núm. 2, 199-216. México D.F.

STEVENS, R (1999). *Disciplined perception: Comparing the development of embodied mathematical practise in school and work.* Unpublished doctoral dissertation. Berkeley: University of California.

RICO, L. (2005). La alfabetización matemática y el proyecto PISA de la OCDE en España. *Padres y Madres de Alumnos (CEAPA). Núm. 82, p. 7-13.* Madrid.

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Pascual Jara Martínez
Departamento de Algebra
Universidad de Granada

1. PRESENTACIÓN

Cuando, en 1900, propusieron a D. Hilbert[1] participar en una Conferencia Plenaria en el Congreso Internacional de Matemáticos de Paris, entre los muchos temas que pudo haber elegido para la misma optó por uno que tituló *"Problemas en Matemáticas"*. La razón que adujo para hacer esto y no hablar, como siempre se suele hacer, sobre resultados ya conocidos, es que la Matemática está modelada sobre los problemas que los matemáticos se plantean o tratan de resolver. Esta razón es la que nos ha inspirado a elaborar este texto.

En el fondo la idea de hablar sobre lo que aún no se conoce pero que marcará la evolución de una disciplina como es la Matemática no deja de ser

[1] David Hilbert (1862-1943) fue profesor de la Universidad de Göttingen. Hilbert marcó el desarrollo de la Matemática del siglo XX al proponer en el Congreso Internacional de Matemáticos de Paris en 1900 sus famosos 23 problemas.

un intento de hacer ciencia ficción. Por otro lado, sobre los problemas aún por resolver de la Matemática es sobre lo que trabajan los matemáticos que están en primera línea, y por tanto poner de relieve cuáles son los problemas fundamentales que se están abordando en un momento dado en una Teoría, contribuye a clarificar y hacer avanzar ésta. Además, el desarrollo de la Matemática, como el de cualquier otra Ciencia, se ha producido planteando, atacando y superando los problemas, las contradicciones y los puntos oscuros que han ido apareciendo.

Se podría hacer una Historia de la Matemática simplemente enumerando los problemas que se han abordado en las diferentes épocas, los intentos que los matemáticos han realizado para resolverlos y los problemas que han vuelto a crear en estas, unas afortunadas y otras no tanto, *"resoluciones"*. Un desarrollo de este tipo tendría como aspecto importante a destacar la forma y el modo en que surgen o se plantean los problemas de la Matemática y el mecanismo que hace que unos problemas sean interesantes y otros no. Pero posiblemente esto sobrepase el alcance que se pretende en este texto.

Como no se trata pues de hablar de la Historia de la Matemática, sino de la forma de transmitirla y enseñarla, cabe la pregunta de si el planteamiento y resolución de problemas puede ser útil para esta labor. Es claro que la respuesta que vamos a dar, y que vamos a tratar de justificar, es que sí: *mediante el análisis de problemas podemos contar y enseñar Matemáticas.*

Es claro también que acercarse a la Matemática a través del planteamiento y resolución de problemas debe hacerse con mesura. Podemos comenzar por un problema difícil y hacer que los alumnos lo aborden, bien de forma individual bien en forma cooperativa. Una simple reflexión nos indica que éste no va a ser el mejor modo. A este respecto, una de las muchas anécdotas que se pueden citar para prevenir a nuestros maestros y profesores trata sobre lo que le aconteció a J. E. Littlewood, célebre matemático británico, quien al acabar sus estudios pidió a uno de sus maestros un problema para trabajar en el verano antes de dedicarse a la investigación al inicio del siguiente curso académico. Éste le propuso que determinase todos los ceros de una función de variable compleja: la *función zeta de Riemann.* Ni qué decir tiene que Littlewood no resolvió el problema (de su resolución trata el problema sobre la **Hipótesis de Riemann,** aún no resuelto y por cuya resolución el Instituto Clay ofrece una sustanciosa cantidad de dinero). Esto nos enseña que el maestro tiene que calibrar muy bien qué tipo de problemas propone a sus alumnos. El caso de Littlewood[2] (1885-1977) finalmente

[2] J. E. Littlewwod (1885-1977) fue profesor de matemáticas en la Universidad de Cambridge y trabajó sobre la f*unción zeta de Riemann*.

resultó bien, no porque resolviera la Hipótesis de Riemann, sino porque le puso en contacto con otros matemáticos con los que estuvo colaborando durante prácticamente toda su vida profesional.

Un ejemplo en otro sentido es el siguiente. Siendo alumno en Berkeley en 1933, G. Dantzing llegó tarde a una de sus clases y comenzó copiando lo que había en la pizarra mientras el profesor hablaba, sin aparente conexión con lo que en la pizarra había, sobre el tema de la clase de ese día. Antes, el profesor había enunciado en la pizarra dos problemas famosos de los que en ese momento no se conocía la solución. Ya en casa Dantzing creyó que estos problemas eran tareas para hacer en casa, por lo que estuvo trabajando en ellos y los entregó resueltos al cabo de unos cuantos días. Uno de ellos trataba de la Programación Lineal y entusiasmó tanto al profesor que propuso a Dantzing la publicación de un artículo sobre el tema. Esta historia no creo que sea verdad, sino sólo una más de las muchas leyendas urbanas que pueblan la historia de la Matemática, pues la Programación Lineal, y en concreto el Método del Simplex, se utilizó por primera vez en 1947, precisamente por Dantzing[3] (1914-2005), y un resultado de este tipo no se tiene guardado durante tanto tiempo sin darlo a conocer a los colegas. Pero qué bonito si la historia hubiese sido cierta, ¿verdad? Tener alumnos así en clase debería ser sin duda un estímulo extra para el profesor. Pensemos por un momento en el maestro del joven Gauss.

En conclusión, los problemas deben ser propuestos según los alumnos a los que vayan dirigidos. Los dos ejemplos que hemos mencionado nos cuentan dos casos que se han resuelto de forma satisfactoria para alumnos, profesores y la comunidad matemática en su conjunto. Pero ¿cuántos casos habrá habido en los que por no graduar bien la dificultad del problema se hayan conseguido efectos negativos?

En el desarrollo de este texto hemos hecho hincapié en algunos temas centrales de la Matemática actual y los hemos acompañado de problemas relacionados con ellos. La posible lista de temas es inmensa, por esta razón nos hemos limitado a elegir algunos de ellos y a dar unas pinceladas sobre la forma de trabajo que se propone. Es necesario destacar que éste es un texto abierto, como lo es la exposición que del mismo se haga, y que ha sido diseñado para estimular la discusión sobre los temas que trata. Creemos también que es conveniente que se conozcan métodos estándar de resolución de problemas y que es-

[3] G. Dantzing (1914-2005) introdujo el **Algoritmo de Optimización del Simplex,** posiblemente creado a partir de sus trabajos para la fuerza aérea de los EE. UU. Fue profesor de la Universidad de Stanford.

tos métodos deben ir acompañados de una amplia colección de enunciados, a modo de ejemplo y aplicación de los métodos de resolución. Los enunciados y problemas planteados están tomados, unas veces como desarrollo de la teoría y de resultados matemáticos, y otras como problemas de la vida ordinaria. En estos últimos el primer trabajo a realizar es la formalización del enunciado y el planteamiento del problema en términos matemáticos; el segundo es resolver el problema eligiendo la técnica más adecuada y el tercero es traducir el resultado a la situación concreta de partida. Nosotros hemos elegido como técnica a emplear **el principio del palomar,** y esperamos que los problemas planteados ayuden al lector a avanzar en el proceso de construcción de modelos matemáticos para la resolución de problemas.

2. GEOMETRÍA Y ARITMÉTICA

La Matemática en su origen es una Ciencia que trata de interpretar la realidad física, y por lo tanto se desarrolla desde intuiciones y certezas físicas que podemos clasificar en dos tipos: geométricas y aritméticas. Así pues la Matemática en su origen trata de dar respuesta a dos problemas fundamentales: el de controlar la forma y el de controlar la cantidad.

Rápidamente la Matemática evoluciona tratando de buscar verdades ciertas independientemente del contexto: *la extensión de una superficie cuadrada se puede calcular siempre conociendo la medida de uno de sus lados.* Este es un resultado matemático y no lo es el que en una mesa cuadrada dada su superficie sea igual al cuadrado de la longitud de uno de sus lados. Por lo tanto para entender y usar la Matemática rápidamente tenemos que introducir nociones y conceptos abstractos o ideales y establecer leyes para su manipulación. Mientras no se dé este paso no podremos comprender lo que es la Matemática.

En este punto conviene recordar que los ejemplos de la vida real que estudiemos son simplemente ejemplos y puede que no reflejen la verdad real en toda su extensión, pues únicamente nos podemos fijar en unos pocos de sus atributos.

La primera aproximación a la Matemática, tal y como la hemos enunciado en el párrafo anterior, la vamos a situar en la escuela griega: Platón, Pitágoras, Euclides, ... De particular importancia son *"Los Elementos"* de Euclides[4],

---

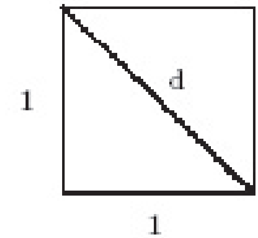
[4] Euclides de Alejandría (325-265 AC) ha ejercido una gran influencia en la Matemática occidental. Los *Elementos* han sido libro de texto de las Universidades Europeas hasta mitad del siglo XIX.

en los que se establece una axiomatización de la Geometría (Euclídea). Una aclaración, en la época de Euclides los números no eran más que segmentos o posiciones del ábaco y no existía una representación de los mismos tal y como la manejamos hoy en día.

Veamos un problema.

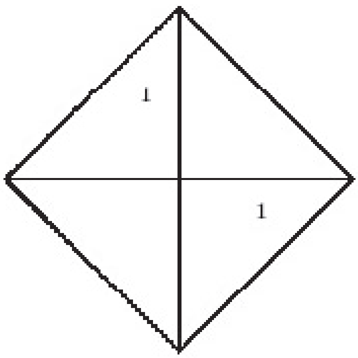
Problema. 2.1.

Determinar cuánto mide la longitud de la diagonal de un cuadrado si la longitud de su lado es 1.



Trazando la diagonal dividimos el cuadrado en dos triángulos isósceles con catetos de longitud 1.

Con dos cuadrados de este tipo podemos construir la siguiente figura:



Observa que la superficie de este cuadrado es cuatro veces la superficie del triángulo, y si ésta era $\frac{1}{2}$ la superficie del nuevo cuadrado es 2

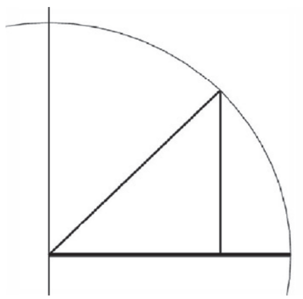
Por lo tanto el lado de este cuadrado, que coincide con la diagonal *d,* mide $\sqrt{2}$

El número $\sqrt{2}$ era un problema para los griegos, pues como hemos señalado sus números eran en cierto modo posiciones del ábaco, esto es, podían trabajar con números enteros (sólo positivos) y números racionales, pero no podían escribir $\sqrt{2}$ como uno de sus números, ya que no es un número racional.

¿Cómo se resuelve este problema?

Muy fácil: Ampliando el conjunto de números.

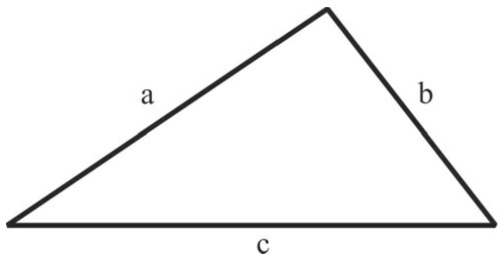
De este modo llegaron a determinar nuevos números, que aparecían en la vida real y para los cuales no tenían una representación, pero que sin embargo tenían existencia real al poderse describir como segmentos de recta, esto es, tenían una representación geométrica de estos números y no una representación simbólica.



Los problemas surgen en la Matemática de forma natural y pueden ser un vehículo para introducir los resultados fundamentales. El primero de los resultados que vamos a tratar aquí es el Teorema de Pitágoras. Ya hemos estudiado un caso particular, cuando los dos catetos son iguales.

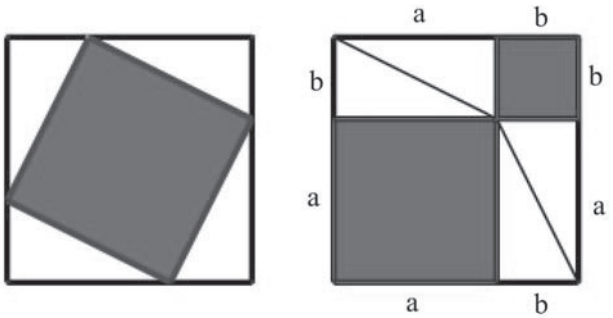
Problema. 2.2. (Teorema de Pitágoras)

Para cada triángulo, uno de cuyos ángulos es un ángulo recto, existe una relación, $c^2 = a^2 + b^2$, entre los lados.



El lado mayor del triángulo rectángulo se llama la hipotenusa y los menores los catetos. Así pues el Teorema de Pitágoras se enuncia: *"El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"*.

Una demostración de este hecho se puede ver en la siguiente figura.



Esta misma figura nos permite introducir otra de las relaciones más importante de la aritmética: *"el binomio de Newton"*. El cuadrado de $a + b$ es $a^2 + b^2 + 2ab$.

$$(a+b)^2 = 2ab + b^2.$$

Veamos una ilustración del uso del binomio de Newton.

Problema. 2.3.

Pedro tiene cinco euros y Juan tres. Ambos quieren emplear estos euros en comprar canicas. El vendedor de canicas tiene un método extraño de venta; por un euro te da una canica, por dos te da cuatro, y en general por n euros te da n^2 canicas. No se admiten cantidades fraccionarias de euros. ¿Cómo harán Pedro y Juan si quieren, entre ambos, obtener el mayor número de canicas?

Solución. Analizamos los diferentes casos.

(1) Si compran por separado en total obtendrían $5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$ canicas.

(2) Si juntan su dinero para comprar las canicas obtendrían: $(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$ canicas.

Es claro que les interesa juntar el dinero para comprar las canicas. La razón es que de esta forma se tiene

$(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \times 5 \times 3 = 25 + 9 + 30 = 64$ canicas.

Es decir, comprando juntos tienen una ganancia de 30 canicas.

Hasta ahora han aparecido dos tipos de problemas. Unos relacionados directamente con el mundo físico: determinar la longitud de la hipotenusa de un triángulo o establecer el Teorema de Pitágoras. Otros que se pueden considerar internos a la Matemática: ¿cómo representar $\sqrt{2}$? ¿Qué tipo de número es?

Tenemos que jugar con ambos tipos de problemas, pues unos ejercitarán la intuición geométrica o de cálculo y otros crearán los mecanismos de razonamiento propios de la Matemática y sus elementos.

Problema. 2.4.

Una terna pitagórica es una terna de números (a, b, c) enteros positivos que verifican $a^2 + b^2 = c^2$. Determina todas las ternas pitagóricas.

Antes de iniciar la resolución observamos que si (a, b, c) es una terna y multiplicamos cada uno de sus elementos por un entero positivo k, entonces (ka, kb, kc) es también otra terna, por lo que para determinar todas las ternas vamos a intentar buscar aquellas que no son del tipo (ka, kb, kc), con $k > 1$.

Solución. Primero observamos que si un entero primo divide a dos de los números $a, b, c,$ entonces divide al tercero. Suponemos entonces que los enteros a, b, c son primos relativos dos a dos.

En la relación $a^2 + b^2 = c^2$ podemos suponer que se tiene la relación: $a, b < c$, y por tanto podemos escribir $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$.

Llamando $u = c + b$ y $v = c - b$ se tiene $c = (u + v)/2$, $b = (u - v)/2$ y $a^2 = uv$.

Si un entero primo $p \neq 2$ divide a u y a v, entonces divide a $c, b, a,$ lo que es una contradicción.

Si 4 divide a u y a v, entonces 2 divide a $c, b, a,$ lo que es una contradicción.

Puesto que u y v son ambos pares o ambos impares, observa que entonces u y v tienen dos posibilidades: (1) son impares primos relativos, cada uno de ellos un cuadrado, o (2) son pares, dobles de números primos relativos uno par y otro impar, cada uno de ellos un cuadrado.

Veamos los siguientes ejemplos de ternas pitagóricas:

u	v	c	b	a
9	1	5	4	3
8	2	5	3	4
18	8	13	5	12

La respuesta dada no se puede considerar totalmente satisfactoria, pues hacemos intervenir a muchos elementos. Esto es, no tenemos un método sencillo para obtener todas las soluciones. Vamos a ver que con un poco más de esfuerzo podemos dar con una fórmula que es más efectiva. Para ello observamos que el valor de c en los casos que tenemos es siempre impar; veamos como el uso de este hecho simplifica la descripción de las soluciones.

Partimos probando el siguiente hecho: Si *a, b, c son números enteros primos relativos dos a dos que verifican $a^2 + b^2 = c^2$, entonces c es impar.* Basta observar que si $a = 2\alpha + 1$ y $b = 2\beta + 1$ son impares y $c = 2\gamma$ es par, se tiene:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ (2\alpha+1)^2 + (2\beta+1)^2 &= (2\gamma)^2 \\ 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 + 4\beta^2 + 4\beta + 1 &= 4\gamma^2 \\ 4(\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta) + 2 &= 4\gamma^2 \end{aligned}$$

y dividiendo por 2 llegamos a que un número par es también impar, lo que es imposible. (Es conveniente destacar la importancia de dar este resultado para tener una mejor descripción de la solución del problema).

Ahora podemos rehacer el mismo razonamiento anterior en el siguiente sentido: Con los números a, b, c suponemos que se tiene $a, b < c$ y que a es par. Escribimos como antes: $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$.

Llamando $u = c + b$ y $v = c - b$ se tiene que a, u, v e son enteros pares. Llamamos $u = 2m$ y $v = 2n$, entonces $c = m + n$, $b = m - n$ y $a^2 = 2mn$.

Ahora comprobamos que m y p son primos relativos. Si un entero primo p divide a m y a n, entonces divide a c, b, a, lo que es una contradicción. Finalmente de la relación $a^2 = 2mn$ y del hecho de que m y n son primos relativos, se obtiene que m y n son cuadrados. Si llamamos y $m = r^2$ y $n = s^2$, entonces cualquier terna pitagórica (a, b, c) es de la forma:

$$a = 2rs, \qquad b = r^2 - s^2, \qquad c = r^2 + s^2$$

para cualesquiera enteros positivos r, s con $r \geq s$.

La siguiente tabla muestra alguna de estas ternas pitagóricas:

$r \setminus s$	1	2	3	4	5
1	$(2,0,2)$	–	–	–	–
2	$(4,3,5)$	$(8,0,8)$	–	–	–
3	$(6,8,10)$	$(12,5,13)$	$(18,0,18)$	–	–
4	$(8,15,17)$	$(16,12,20)$	$(24,7,25)$	$(32,0,32)$	–
5	$(10,24,26)$	$(20,21,29)$	$(30,16,34)$	$(40,9,41)$	$(50,0,50)$
6	$(12,35,37)$	$(24,32,40)$	$(36,27,45)$	$(48,20,52)$	$(60,11,61)$

Observa que las ternas pitagóricas que se obtienen no tienen por qué verificar la condición de que sus elementos sean primos relativos dos a dos.

Pregunta: *De los dos tipos de problemas que antes hemos comentado, ¿en cuál encuadrarías éste?*

Observación. 2.5.

Observa que si permitimos que los elementos r y s varíen en todo Z y quitamos la restricción $r \geq s$, en realidad hemos resuelto en Z la ecuación $X^2 = Y^2 + Z^2$

Y ya metidos en faena proponemos el siguiente problema:

Problema. 2.6.

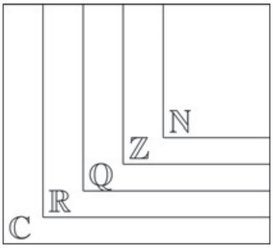
Resuelve en Z la ecuación $X^3 = Y^3 + Z^3$, y más en general la ecuación $X^p = Y^p + Z^p$, con p entero primo positivo.

¡Discusión! Comentarios sobre el último Teorema de Fermat.

3. EL PROBLEMA ES CONTAR

A lo largo de la Historia de la Matemática ha habido ciertas teorías que han marcado un nuevo rumbo en la misma. Una de estas es la Geometría Analítica o Cartesiana[5]. En efecto, a partir de Descartes los objetos geométricos no son sino los conjuntos de soluciones de ecuaciones o de sistemas de ecuaciones (lineales o no). Este nuevo punto de vista permite hacer construcciones más rápidas y precisas.

Para poder entender en toda su amplitud este nuevo universo hemos necesitado ampliar los diversos *sistemas de números.* Digo ampliar, porque partiendo de los números enteros positivos, primero se ve la necesidad de considerar los números racionales (positivos), luego los irracionales (positivos), bien sean algebraicos, como $\sqrt{2}$, o trascendentes, como π. Todos ellos rellenan la recta real positiva. Más adelante se introduce el cero y los números negativos: naturales, enteros, racionales y reales, obteniendo así la recta real. Con estos sistemas de números no basta, ya que tenemos ecuaciones que no tendrían raíces, por ejemplo $X^2 + 1$. Es necesario pues ampliar los sistemas de números con los números complejos. De esta forma toda ecuación polinómica en una variable tiene tantas soluciones como indica su grado, y la teoría en su forma elemental está completa; obteniéndose así una correspondencia uno a uno entre objetos geométricos y sistemas de ecuaciones polinómicas.



Esta nueva Teoría de Números nos va a permitir dar respuesta a viejos problemas, entre otros citamos los tres problemas de la Grecia Clásica: (1) la cuadratura del círculo, (2) la duplicación del cubo y (3) la trisección de ángulos.

Se trata pues de ver como el uso de ecuaciones, y por ende de polinomios, permite hacer construcciones geométricas o, en caso contrario, determinar que éstas son imposibles.

[5] Introducida por el matemático francés R. Descartes (1596-1650) pone de manifiesto la estrecha relación existente entre Algebra y Geometría y es la base sobre la que reposan de los desarrollos de la Matemática desde el siglo XVII a la actualidad.

Veamos un ejemplo en el que el uso de números irracionales se muestra útil, y hasta cierto punto imprescindible, para estudiar números enteros.

Problema. 3.1.

Considera la sucesión de Fibonacci[6]*. Ésta es una sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *que está definida de la siguiente forma:*

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a(n+2) = a_{n+1} + a_n, \quad \text{si } n \geq 0.$$

Observa que todos los valores de la sucesión son números enteros.

Cuando queremos calcular el término a_{10} *tenemos que calcular* a_{10}, , a_9, *lo cual no es demasiado engorroso. Pero si queremos calcular* a_{10000} *la cosa cambia. Es pues de interés buscar una expresión del término* a_n *que no dependa del cálculo de los términos anteriores.*

Determina la expresión general del término a_n.

Esta expresión existe, de hecho se tiene conocida como la Fórmula de Binet.

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Observa que en este caso el uso de los números irracionales es de mucha utilidad para describir ciertos conjuntos de números enteros positivos.

Existen otras formas de obtener la expresión del término general de la sucesión de Fibonacci:

1. Mediante el cociente de polinomios $X/1 - X - X^2$ haciendo uso de series de potencias. Los coeficientes de este cociente son los términos de la sucesión de Fibonacci.

---

[6] La sucesión de Fibonacci fue introducida por Leonardo de Pisa (Fibonacci) (1170-1250). El problema que estudia Fibonacci es la evolución de una población de conejos sometida a la siguiente regla: se inicia el proceso con una pareja recién nacida. Cada pareja es fértil al cabo de un mes, y se reproduce cada mes dando lugar a una nueva pareja. En el momento cero no hay ninguna pareja. Al inicio del primer periodo se introduce una pareja. Al inicio del segunda periodo tenemos solamente una pareja. Al inicio del tercer periodo tenemos dos parejas. Al inicio del cuarto periodo tenemos tres parejas y así sucesivamente.

2. En términos de número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, se puede también escribir $a_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$.

La demostración de la fórmula de Binet, y de ésta última, se puede hacer por inducción sobre *n*.

Veamos otros problemas curiosos que tienen que ver con las sucesiones recurrentes.

Problema. 3.2.

Andrés tiene n euros para gastar. Puede gastarlos:
- *en caramelos; una bolsa de caramelos le cuesta un euro, o*
- *en pasteles; hay dos tipos de pasteles y cada uno cuesta dos euros.*

¿De cuántas formas distintas puede Andrés gastar los n euros?
(Nota. Importa el orden en que Andrés hace el gasto.)

Observación. 3.3.

Comenzar con ejemplos sencillos: 1, 2, 3, 4, 5,..., y elaborar una estrategia para el caso general.

Solución. Llamamos a_n al número de formas en que Andrés puede gastar n euros. Veamos qué relaciones verifica a_n.

1. Si el último gasto de Andrés fue de un euro, sólo lo puede gastar de una forma, luego tenemos a_{n-1} formas de gastar n euros.

2. Si el último gasto de Andrés fue de dos euros, puede gastarlo en uno de los dos tipos de pasteles, luego tenemos $2a_{n-2}$ formas de gastar n euros.

La suma de estas posibilidades será el número que andamos buscando:

$$a_n = a(n-1) + 2a(n-2)$$

Tenemos además los siguientes casos: $a_0 = 1$ (se puede muy bien prescindir de este término si lo consideramos oportuno), $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$.

Así pues se trata de averiguar el término general de una sucesión recurrente de orden 2 dada por la relación $a_n = a(n-1) + 2a(n-2)$, $n \geq 1$, con los valores iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

El término general se puede calcular varias formas. Veamos primero el método utilizando Álgebra Lineal. La ecuación característica es: $r^2 = r + 2$, y sus raíces son: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$.

La sucesión recurrente general es: $a_n = \lambda_1(-1)^n + \lambda_2 2^n$. Que verifica:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 + \lambda_2, & \lambda_1 &= \tfrac{1}{3} \\ 1 &= \lambda_1(-1) + \lambda_2 2, & \lambda_2 &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Y el término general es:

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^{n+1}.$$

Un método alternativo es el proporcionado por las funciones generatrices. Definimos una función $F(x) = a_0 + a_0 X + a_2 X^2 + \ldots$, en la que los coeficientes son los términos de la sucesión. Se verifica

$$F(X) - X\,F(X) - 2X^2\,F(X) = a_0 + (a_1 - a_0)X + (a_2 - a_1 - 2a_0)X^2 + (a_3 - a_2 - 2a_1)\ldots$$

Observa que $a_2 - a_1 - 2a_0 = 0$, $a_2 - a_1 - 2a_0 = 0, \ldots$ Por lo tanto tenemos la relación

$$F(X) - X\,F(X) - 2X^2\,F(X) = a_0 + (a_1 - a_0)X.$$

y al dar los valores iniciales se tiene:

$$F(X)\,(1 - X - 2X^2) = 1,$$

esto es, hemos obtenido $F = 1/(1 - X - 2X^2)$, que nos describe completamente la sucesión.

Ver el problema 3.8 al final de esta sección para ver una modificación de este problema. Planteamos ahora un problema semejante al estudiado.

Problema. 3.4.

¿De cuántas formas se puede cubrir un tablero rectangular de dimensión $2 \times n$ *con piezas de dimensiones* 2×1 y 2×2.

Buscar analogía con el problema 3.2.

Veamos otro problema en el que también el uso de sucesiones recurrentes es una herramienta útil para resolver uno de sus apartados.

Problema. 3.5.

Se considera una bandera, la cual se puede pintar, por franjas horizontales, de cuatro colores, sean A, B, C y D. Queremos averiguar cuál es el número total de banderas que podemos pintar con n franjas atendiendo a las siguientes condiciones:

1. *Cada franja está pintada de un color.*
2. *Cada franja está pintada de un color y dos franjas continuas lo están de colores distintos.*
3. *Cada franja está pintada de un color, dos franjas contiguas están pintadas de colores distintos y la franja superior y la franja inferior están pintadas de distinto color.*

Observación. 3.6.

En este caso tenemos en realidad tres problemas en uno. En las dos primeras partes nos reducimos a contar; en la parte tres es conveniente utilizar una sucesión recurrente. Inicial el análisis con ejemplos para valores de n pequeños: $n = 1, 2, 3, ...$

Solución. Cada uno de los apartados se resuelve de una forma diferente ya que involucra cuestiones distintas.

1. Es claro que cada franja puede ser pintada de cualquiera de los cuatro colores, luego el número total de banderas de n franjas es: 4^n.

2. La primera franja se puede pintar con cualquiera de los cuatro colores, en cambio la segunda, tercera, etc. sólo pueden pintarse de tres de los cuatro colores, luego el número total de banderas es: $4 \times 3^{n-1}$.

3. Vamos a averiguar el número de banderas a_n que podemos pintar con nn franjas, suponiendo que conocemos las banderas que se pueden pintar con menos de n franjas. De cualquier bandera de $n - 1$ franjas podemos obtener otra de n franjas sin más que pintar una n-ésima franja de un color distinto a la primera franja y a la última franja; el número total de banderas así obtenido es $2a_{n-1}$.

De cualquier bandera de $n-2$ franjas podemos obtener otra de n franjas sin más que pintar la franja $n-1$ del mismo color que la primera y la franja n-ésima de un color diferente. El número total de banderas así obtenido es $3a_{n-2}$.

Es claro que cada bandera de n franjas verificando las condiciones del enunciado está entre las consideradas, ya que si la franja primera y penúltima son distintas, se obtiene a partir de la primera construcción, y si son iguales a partir de la segunda.

Tenemos entonces $a_n = 2a(n-1) + 3a(n-2)$, para $n \geq 4$. Los valores iniciales son: $a_2 = 12$; las banderas son: *AB, AC, AD, BC, BD, CD* y las que se obtienen cambiando el orden, en total 12. El valor de a_3 es 24, ya que tenemos las banderas *ABC, ABD, ACD y BCD* y todas las que se obtienen permutando los colores, en total $4 \times 6 = 24$. Los valores de a_0 y a_1 son iguales a cero; podemos no considerarlos en nuestra sucesión. La ecuación característica es: $r_2 = 2r + 3$, sus raíces son: $\alpha_1 = -1$ y $\alpha_2 = 3$.

El término general es:

$$a_n = \lambda_1(-1)^n + \lambda_2(3)^n,$$

que da las ecuaciones:

$$\begin{cases} 12 = \lambda_1(-1)^2 + \lambda_2(3)^2 \\ 24 = \lambda_1(-1)^3 + \lambda_2(3)^3 \end{cases}$$

Las soluciones son

$$\lambda_1 = 3 \text{ y } \lambda_2 = 1.$$

El término general es

$$a_n = 3(-1)^n + 3^n$$

para $n \geq 2$.

Observación. 3.7.

Es posible que en el problema 3.2 haya surgido la discusión de por qué considerar el orden en las compras de Andrés. Planteamos ahora el mismo problema sin tener en cuenta esta condición. Observa que esto equivale a realizar todo el gasto de una sola vez.

Discutir sobre el modo en el que es posible obtener ahora el resultado.

Problema. 3.8.

Andrés tiene n euros para gastar. Puede gastarlos:

- *en caramelos; una bolsa de caramelos le cuesta un euro, o*
- *en pasteles; hay dos tipos de pasteles y cada uno cuesta dos euros.*

¿De cuántas formas distintas puede Andrés gastar los n euros?

Solución. Ahora el problema es distinto. Tenemos por un lado caramelos, *C,* y por otro pasteles, *P* y *Q*. Cada gasto consiste en una colección *C*... *CP*... *PQ* ... *Q,* en donde, como no importa el orden, hemos agrupado los caramelos y cada uno de los dos tipos de pasteles. Cada una de estas listas representa un posible gasto. No es necesario que aparezcan siempre todas las letras *C, P* y *Q;* por ejemplo, si Andrés dispone de un sólo euro, el gasto es: *C*.

Observa que de cualquier n par tenemos una distribución de $n + 1$ impar sin más que agregar una letra *C*, y de cualquier n impar tenemos una distribución de $n - 1$ par sin más que eliminar una letra *C*. Por tanto podemos considerar que n es par y considerar $m = n/2$ que es un número entero. Como ahora el número de letras C es par, podemos agruparlas por parejas, no así para la letras *P* o *Q*.

El problema consiste en ver cuántas listas de longitud m existen de la forma *C*... *CP* ... *PQ* ... *Q,* con $m = n/2$; letras (ahora cada letra *C* representa una pareja de las C originales). Como tenemos letras consideramos m huecos, cada uno irá relleno de una de las tres letras, manteniendo la estructura anterior. Para contar el número de tales distribuciones agregamos dos nuevos huecos en los que pondremos los separadores de *C* a *P* y de *P* a *Q*. Por tanto ahora el problema es elegir dos elementos, los separadores, de una lista de $m + 2$, y no importa el orden a la hora de realizar la elección. El número total de posibilidades es:

$$\binom{m+2}{2} = \frac{(m+2)(m+1)}{2}$$

Volviendo a la situación original resulta que el número total de formas en que Andrés puede gastar n euros es:

$$\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}{2} = \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2)(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)}{2}.$$

Como es habitual, dado un número racional x, el símbolo $[x]$ representa el mayor entero menor o igual que x.

4. JUEGOS DE LÓGICA

Vamos a analizar algunos problemas relacionados con la lógica. Comenzamos por uno que es bien conocido.

Problema. 4.1.

En una habitación hay dos puertas, una conduce a prisión y otra conduce a la libertad. Hay también dos carceleros y un preso, uno de los carceleros siempre dice verdad, el otro siempre miente y sólo contestan con monosílabos SI o NO.

¿Puede el preso averiguar cuál es la puerta que conduce a la libertad haciendo una sola pregunta a los carceleros?

Como este juego es bien conocido, tras una breve discusión llegaremos a que la pregunta a formular a uno de los carceleros es, señalando a una de las puertas:

¿Tu compañero diría que esta puerta conduce a la libertad?

Vamos a hacer un análisis de las posibles situaciones y resultados. Como las dos puertas juegan un papel semejante y vamos a señalar sólo una, la llamamos P y le asignamos el valor +1, si conduce a la libertad, y el valor –1, si conduce a prisión. A los dos carceleros los llamamos A y B. Si el carcelero miente lo señalamos con –1 y si dice verdad con +1. Las situaciones que se presentan, al hacer la pregunta a A, son exactamente cuatro:

P	A	B	Respuesta de A		Puerta que conduce a la libertad
+1	+1	-1	NO		Puerta señalada
+1	-1	+1	NO		Puerta señalada
-1	+1	-1	SI		Puerta no señalada
-1	-1	+1	SI		Puerta no señalada

Como se observa siempre hay que elegir la puerta que no nos aconseja el carcelero. Mirando la tabla anterior vemos que la columna primera y la columna cuarta son una opuesta de la otra.

Plantear en este punto discusión con otras posibles preguntas y estrategias.

Vamos a hacer una variación de este problema.

Problema. 4.2.

Ahora no estamos en prisión, sino en una situación más tranquila y menos arriesgada. Estamos en una habitación con dos personas, A y B, de las que sabemos que una siempre miente, la otra siempre dice verdad y sólo contestan con monosílabos: SI o NO.

¿Cómo podrías averiguar cuál de las dos personas miente y cuál dice verdad con una sola pregunta a alguna de ellas?

En este caso podemos volver a reproducir la tabla, esta vez hay menos posibilidades, exactamente dos:

A	B	Respuesta de A		Quién dice verdad
+1	-1			
-1	+1			

Establecer discusión sobre la pregunta a formular.

Una posible elección es:

¿El Otro dice que Tú dices verdad?

Al igual que antes, suponemos que hacemos la pregunta a A y analizamos los posibles casos:

A	B	Respuesta de A		Quién dice verdad
+1	-1	NO		A dice verdad
-1	+1	SI		B dice verdad

Analizar esta tabla y los números que aparecen en cada columna y relacionarlos con la columna tercera.

Establecer discusión sobre los resultados y posibles alternativas.

Podemos modificar este problema para analizar aún más casos.

Problema. 4.3.

Supongamos que estamos como en la situación anterior, pero que ahora no sabemos si las dos personas mienten, dicen la verdad o una miente y la otra dice la verdad.

¿Cómo podrías averiguar cuál es la situación: quién miente y quién dice la verdad?

El caso en el que una miente y la otra dice la verdad ya ha sido analizado. Pero no sabemos si estamos en este caso o no. Además, las posibilidades que tenemos son ahora cuatro, por lo que necesariamente tenemos que hacer más de una pregunta.

Discusión. Explicar por qué son ahora cuatro casos y necesitamos hacer al menos dos preguntas. Comparar con el problema 4.1.

Las preguntas a hacer son en ambos casos la misma que antes, pero ahora formulada a cada una de las dos personas.

¿El Otro dice que Tú dices verdad?

El análisis esta vez nos dice:

A	B	Respuesta de A	Respuesta de B	¿Quién dice verdad?
+1	-1	NO	SI	A dice verdad y B dice mentira
+1	+1	SI	SI	A dice verdad y B dice verdad
-1	-1	NO	NO	A dice mentira y B dice mentira
-1	+1	SI	NO	A dice mentira y B dice verdad

Observa que las cuatro posibilidades se analizan en dos fases. La primera preguntando a A; la respuesta nos dice si B miente o no. Ver las columnas segunda y tercera. Y la segunda pregunta hace lo mismo con A. En cada caso dividimos por dos el número de posibilidades para llegar a sólo una en función de las respuestas obtenidas.

Establecer discusión sobre los resultados y posibles alternativas.

Ya que dominamos la técnica, vamos a introducir un elemento nuevo en el problema.

Problema. 4.4.

En vez de dos personas vamos a suponer que hay tres, de las cuales una siempre miente, otra siempre dice la verdad, la tercera contesta lo que le viene en gana, esto es, unas veces dirá verdad y otras dirá mentira, pero no sabemos a ciencia cierta cuándo miente o cuándo dice verdad.

¿Cómo podrías averiguar quién miente siempre, quién dice siempre verdad y quién dice a veces verdad y a veces miente?

Esta vez tenemos seis casos, por lo tanto no vamos a poder decidir con sólo dos preguntas. Esto es, vamos a necesitar al menos hacer tres preguntas. Éstas no tienen que ser siempre la misma y podemos dirigirlas a cualquiera de las tres personas.

La notación. Si una persona siempre dice la verdad la señalamos con +1, si siempre miente la señalamos con –1, y si a veces miente y a veces dice la verdad la señalamos por 0. Las posibilidades que tenemos son:

A	B	C
+1	-1	0
+1	0	-1
0	+1	-1
0	-1	+1
-1	+1	0
-1	0	+1

Podemos seguir varias estrategias, por ejemplo intentar averiguar quién a veces dice la verdad y a veces miente o intentar encontrar a alguno que siempre mienta o siempre diga la verdad. Voy a señalar aquí una de estas posibles estrategias.

Establecer discusión sobre el tipo de pregunta que debemos hacer.

Observar que al preguntar a A:

1. si A tiene el valor 0, entonces no vamos a poder obtener información;

2. si A tiene el valor +1 entonces tenemos que decidir entre dos posibles configuraciones (+1, –1, 0) y (+1, 0, –1), y

3. si A tiene el valor –1, tenemos que decidir entre (–1, +1, 0) y (–1, 0, +1).

Para poder distinguir entre estos dos pares vamos a realizar una pregunta "múltiple".

Preguntamos a A:

¿Es verdad, que al menos, una de las dos configuraciones (+1, –1, 0) o (–1, 0, +1) es cierta?

Con la respuesta podemos completar la tabla:

A	B	C	Respuesta de A
+1	-1	0	SI
+1	0	-1	NO
0	+1	-1	–
0	-1	+1	–
-1	+1	0	SI
-1	0	+1	NO

Si la respuesta de A es SI tenemos las configuraciones

A	B	C	Respuesta de A
+1	-1	0	SI
0	+1	-1	
0	-1	+1	–
-1	+1	0	SI

y si la respuesta de A es NO, tenemos:

A	B	C	Respuesta de A
+1	0	-1	NO
0	+1	-1	
0	-1	+1	–
-1	0	+1	NO

Observa que en cada caso una de las otras dos personas dice siempre verdad o siempre mentira, y sabemos cuál es. Analizamos el caso del SI, el del NO se hace igual.

Segunda pregunta.

En este caso preguntamos a B, la persona que siempre dice verdad o siempre miente.

¿Dices mentira?

Podemos completar nuestra tabla del siguiente modo:

A	B	C	Respuesta de A	Respuesta de B
+1	-1	0	SI	SI
0	+1	-1	–	NO
0	-1	+1	–	SI
-1	+1	0	SI	NO

Observa que esta pregunta ha servido para dividir el total de casos (cuatro) en dos grupos del mismo tamaño.

Tercera pregunta.

Para terminar solo queda resolver, mediante otra pregunta, los dos casos hasta ahora indistinguibles. Preguntamos a B.

¿Es A quien a veces dice verdad y a veces miente?

La tabla se completa ahora de la siguiente forma:

A	B	C	Respuesta de A	Respuesta de B	Segunda respuesta de B
+1	-1	0	SI	SI	SI
0	+1	-1		NO	SI
0	-1	+1	–	SI	NO
-1	+1	0	SI	NO	NO

Trabajo para casa.

Este tipo de problemas puede ampliarse a nuevas situaciones. Veamos la siguiente que planteamos como ejercicio.

Problema. 4.5.

Estamos en una habitación con tres personas que se comunican por gestos, uno para la respuesta SI y otro distinto para la respuesta NO. De estas personas una siempre dice verdad, otra siempre miente y la tercera a veces dice verdad y a veces miente. Tenemos un problema adicional, y es que no sabemos qué gesto indica SI y cuál indica NO.

¿Cómo podrías averiguar cuál es cada una de las personas? ¿Cuál es el número mínimo de preguntas que necesitarás?

Nota. Observa que no te pido que me digas qué gesto indica SI y qué gesto indica NO, esto requeriría una pregunta adicional.

5. COLORACIÓN DE GRAFOS: EL SUDOKU

Un pasatiempo muy famoso en estos días es el llamado Sudoku. Este consiste en un cuadrado 9x9, dividido a su vez en nueve cuadrados 3x3, en el que algunos de los cuadrados unidad están rellenos de números del 1 al 9. El juego consiste en rellenar todos los cuadrados unidad con números del 1 al 9 de forma que no haya números repetidos en la misma fila, la misma columna ni en el mismo cuadrado 3x3.

Un Sudoku puede que no tenga solución, si los números iniciales están mal colocados, puede que tenga una única solución o puede que tenga varias soluciones.

				4				
					5			
	1							

No vamos a estudiar este caso, sino uno más sencillo que nos permitirá poder variar condiciones a nuestra voluntad de una forma sencilla.

Planteamos el problema del Sudoku pero con los números del 1 al 4 en un tablero 4x4. El problema inicial puede ser:

Problema. 5.1.

Resolver el Sudoku

1			
2			
	1		
			3

Con la condición adicional de que las diagonales también tienen que tener números distintos.

Observa que la siguiente es una solución:

1	3	4	2
2	4	3	1
3	1	2	4
4	2	1	3

Veamos un método para resolverlo. Este método se basa en el uso de colores. Para ello asignamos un color a cada número. Por ejemplo

1	—>	azul	—> A
2	—>	verde	—> V
3	—>	magenta	—> M
4	—>	rojo	—> R

Partiendo de la posición inicial del Sudoku

1			
2			
	1		
			3

podemos completar la primera fila (la fila superior) con A de azul, indicando que en esos cuadros no aparecerá el número

1	A	A	A
2			
	1		
			3

Lo mismo hacemos para la columna de la izquierda, el cuadrado 2x2 superior izquierdo y la diagonal principal del cuadrado.

1	A	A	A
2	A		
A	1	A	
A			3

Seguimos el mismo proceso con el número 2 y el color verde.

1	AV	A	A
2	AV	V	V
AV	1	A	
AV			3

Seguimos con el 1 que ocupa la tercera fila segunda columna.

1	AV	A	A
2	AV	AV	V
AV	1	A	A
AV	A		3

Tenemos ya dos casillas en las que podemos colocar el número 1.

1	AV	A	A
2	AV	AV	V 1
AV	1	A	A
AV	A	1	3

El número 2 podemos también colocarlo en una de las casillas:

1	AV	A	A
2	AV	AV	V 1
AV	1	A	A
AV	A 2	1	3

Volvemos ahora a completar casillas con el color verde, en este caso el que corresponde al número situado en la cuarta fila.

1	AV	A	A
2	AV	AV	V 1
AV	1	A	A
AV	A 2	1	3

En particular el número 2 situado en la diagonal debe estar en la primera fila, cuarta columna, y el número 2 en el cuadrante inferior derecha está situado en la tercera fila tercera columna. Como ya hemos colocados todos los números 2, las casillas que no ocupan éstos se pueden colorear de verde.

1	AV	AV	A 2
2	AV	AV	V 1
AV	1	A 2	AV
AV	A 2	1	3

Ahora trabajamos con el número 3 y coloreamos las casillas que no están ocupadas por otros números.

1	AV	AV	A 2
2	AVM	AV	V 1
AV	1	A 2	AVM
AVM	A 2	1	3

Podemos por tanto colocar el número 4 en tres

1	AV	AV	A 2
2	AVM 4	AV	V 1
AV	1	A 2	AVM 4
AVM 4	A 2	1	3

Coloreamos de rojo, el color asociado al número 4, las casillas que podamos:

1	AVR 3	AV 4	A 2
2	AVM 4	AVR 3	V 1
AVR 3	1	A 2	AVM 4
AVM 4	A 2	1	3

Esto ya nos permite completar el sudoku

1	AVR	AV	A 2
2	AVM 4	AVR	V 1
AVR	1	A 2	AVM 4
AVM 4	A 2	1	3

Obteniendo el que escribimos al principio.

1	3	4	2
2	4	3	1
3	1	2	4
4	2	1	3

Caben muchas preguntas sobre la construcción que acabamos de hacer.

1. Observa que la solución de este Sudoku es única. Sin la condición de las diagonales, ¿es también única la solución?

2. ¿Cuál es el número mínimo de casillas que tenemos que fijar para tener solución única? ¿Importa qué casillas fijemos?

3. ¿Podemos sustituir la condición de las diagonales por la condición del que el cuadrado 2x2 central también tenga sus cuatro elementos distintos?

4. Plantearse el mismo problema en el caso estándar 9x9 (sin imponer la condición sobre las diagonales).

Establecer discusión sobre estas y otras preguntas.

Posibles extensiones

La construcción que hemos hecho se basa en el uso de colores, y en efecto podemos plantear el Sudoku como un juego de colores prescindiendo de los números. Esto nos lleva a un problema clásico que es la coloración de grafos. Un grafo se puede colorear si es posible asignar un color a cada uno de sus vértices de forma que cada dos vértices, unidos por un lado del grafo, tengan siempre colores distintos.

En este caso cada casilla representaría un vértice y los lados unirían vértices que representan a casillas que están en la misma fila, la misma columna, el mismo cuadrado 2x2 o la misma diagonal. ¿Es así más fácil de resolver el problema?

Observa que en el fondo lo que hemos hecho para la resolución del Sudoku ha sido colorear el grafo que antes hemos descrito.

Notas finales

1. En la discusión se habrá planteado cómo responder a la pregunta de cuál es el número mínimo de casillas que necesitan ser dadas para que el Sudoku tenga solución única y cuáles serán éstas.

2. Plantear la posibilidad de dar un tratamiento algebraico del problema y analizar las posibles soluciones.

Problema abierto

En el caso del Sudoku 9x9 es un problema abierto el determinar el número mínimo de casillas que pueden ser dadas para que el Sudoku tenga solución única. Existen configuraciones con 17 casillas ocupadas que tienen solución única; la conjetura es que se pueden encontrar configuraciones con 16 que tienen solución única. ¿Cuál es el número mínimo que es necesario rellenar inicialmente en un sudoku 4x4 para que la solución sea única?

6. ACCIÓN DE UN GRUPO: EL PUZZLE-15

Una de las revoluciones que se han producido en la Matemática Contemporánea, y que ha cambiado completamente la forma de entender ésta es la introducción de la Teoría de Grupos. A partir de la Teoría de Grupos se puede entender, por ejemplo, qué es una Geometría atendiendo a sus grupos de transformaciones.

No es nuestra intención hacer una introducción formal a la Teoría de Grupos, pero sí ver alguna aplicación. Para ello vamos a utilizar un juego. En un principio habíamos pensado en el cubo de Rubik con el que nuestros alumnos juegan, ya sea manipulándolo físicamente, ya sea a través del ordenador en las muchas simulaciones que del mismo existen en Internet.

El limitado espacio de que disponemos no nos permite analizar este juego pero sí tratar un juego semejante más sencillo de describir: *"el puzzle quince"*.

01	02	03	04
05	06	07	08
09	10	11	12
13	14	15	

Figura 1. Puzzle-15.

Los movimientos permitidos en este tablero de juego consisten en deslizar hacia el hueco piezas contiguas, dejando éstas a su vez un nuevo hueco. Por ejemplo, la siguiente figura muestra el estado del juego tras mover la pieza con el número 12.

01	02	03	04
05	06	07	08
09	10	11	
13	14	15	12

Figura 2. Puzzle-15. Movimiento 1.

La siguiente figura representa el movimiento de la pieza con el número 11.

01	02	03	04
05	06	07	08
09	10		11
13	14	15	12

Figura 3. Puzzle-15. Movimiento 2.

El juego es famoso debido a un reto que en el siglo XIX propuso un creador de acertijos y divertimentos matemáticos, Sam Loyd, que consiste en llegar a la posición de la Figura 1 partiendo de la posición inicial dada en la Figura 4. El premio para quien lograse hacerlo era de 1.000 dólares de la época.

15	02	03	04
05	06	07	08
09	10	11	12
13	14	01	

Figura 4. Reto de San Loyd.

El análisis del juego se basa en la existencia de dos órbitas, en el conjunto de todas las posiciones del mismo, de forma que cada movimiento, de entre los permitidos, lleva una posición a otra dentro de la misma órbita.

Desde el punto de vista matemático llegaremos a reducir el problema a analizar una situación del tipo de la Figura 5.

01	02	03	04
05	06	07	08
09	10	**11**	**12**
13	14	**15**	

Figura 5. Puzzle-15.

Limitándonos a trabajar con las piezas marcadas en negrita.

Estas tres piezas pueden estar en seis posiciones distintas, que corresponden a las permutaciones de tres elementos: una órbita corresponde a las permutaciones pares:

11	**12**
15	

12	**15**
11	

15	**11**
12	

y otra a las tres permutaciones impares:

11	**15**
12	

15	**12**
11	

12	**11**
15	

Estos dos grupos de tres posiciones forman las dos órbitas existentes en el conjunto de todas las posiciones del juego.

7. EL PRINCIPIO DEL PALOMAR

En las secciones anteriores hemos tratado problemas aislados, relacionándolos con situaciones reales, con juegos bien conocidos y con partes importantes en el desarrollo de la Matemática. Vamos ahora a estudiar una técnica para resolver problemas, y vamos a construir una colección de problemas basados en esta técnica.

El **principio del palomar o principio de Dirichlet**[7], fue introducido por este matemático alemán al que se le atribuye el actual concepto de función. Se puede enunciar en los siguientes términos. Sea *A un conjunto con n elementos y B un conjunto con m elementos, si $n > m$, entonces no existe ninguna función inyectiva de A a B*. Esto es, para cada aplicación $f\colon A \rightarrow B$ existen elementos $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$.

También podemos enunciar este principio en la siguiente forma. *Tenemos n palomas, palomares y colocamos cada paloma en un palomar, cuando $n > m$ al menos un palomar debe contener dos palomas.*

---

[7] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) fue un matemático alemán que desarrolló parte de su formación en Francia y que murió siendo profesor en Göttingen.

Este principio tiene multitud de aplicaciones, a modo de ejemplo veamos la siguiente.

Problema. 7.1.

Prueba que en la ciudad de Barcelona al menos dos personas tienen el mismo número de cabellos (en la cabeza).

Solución. Si estimamos en aproximadamente 300.000 el número máximo de cabellos que puede tener en la cabeza una persona, y hacemos corresponder a cada persona el número de cabellos que tiene en la cabeza, resulta que, al haber más de 300.000 personas en la ciudad de Barcelona, al menos dos de ellas deben de tener el mismo número de cabellos.

Este principio puede generalizarse, lo cual será útil en determinadas aplicaciones.

Principio del palomar generalizado. Sea A un conjunto con m elementos y B un conjunto con m, si $f\colon A \to B$ es una aplicación, existe al menos un elemento de B que es imagen de al menos $[n/m] + 1$ elementos de A.

Aplicándolo al problema anterior, si suponemos que la población de la ciudad de Barcelona es de 2.000.000, entonces habrá al menos $[2000000/300000] + 1 = 7$ personas con el mismo número de cabellos en la cabeza.

A continuación vamos a mostrar una colección de problemas que se pueden abordar mediante el principio del palomar o el principio del palomar generalizado. Incluiremos una solución desarrollada de algunos de ellos.

Problema. 7.2.

Se escriben los números del 1 al 101 en un orden arbitrario. Prueba que se pueden elegir noventa de ellos de forma que los que queden formen una sucesión monótona ascendente o una sucesión monótona descendente.

Solución. Probamos un resultado más general. Si $n \geq (p-1)(q-1) + 1$, entonces cada sucesión de n números enteros contiene una sucesión monótona ascendente de p números o una sucesión monótona descendente de q números.

Para cada número de la sucesión x definimos dos números como sigue:

C_x, es la longitud máxima de las sucesiones monótonas ascendentes que acaban en x.

D_x, es la longitud máxima de las sucesiones monótonas descendentes que comienzan en x.

Observa que dados dos números de la sucesión, r e y, si $x > y$, se tiene:

$$C_X > C_y \text{ y } D_Y > D_x$$

Por lo tanto, si a cada número de la sucesión x le asignamos un par (C_X, D_X), sabemos que si $x + y$ son números de la sucesión se tiene $(C_X, D_X) + (C_Y, D_Y)$.

Si no existe una sucesión monótona ascendente de p números y no existe una sucesión monótona descendente de q números, entonces para cada x se verifica $C_X < p$ y $D_X < q$, y todos los pares (C_X, D_X) están en el conjunto $\{1,..., p - 1\}$ x $\{1,..., p - 1\}$. Este conjunto tiene exactamente $(p - 1)$ $(q - 1)$ elementos y nosotros tenemos $n \geq (p - 1)(q - 1) + 1$ elementos en la sucesión y el mismo número de pares. Esto es una contradicción y por tanto debe existir al menos una sucesión monótona ascendente de longitud p o una sucesión monótona descendente de longitud q.

El problema se resuelve aplicando este resultado a nuestro enunciado para los siguientes valores: $n = 101, p = 11, q = 11$.

Observación

Es posible plantear este problema estudiando qué ocurre con algunas ordenaciones de los números realizadas por los alumnos, después se eliminan los 90 números y se obtiene la sucesión monótona pedida. Este proceso es de interés ya que nos permite estudiar el problema de cómo hacer la eliminación de estos 90 números, esto es, elaborar una estrategia para descartar los 90 números y quedarnos con los 11 números que forman la sucesión monótona.

Problema. 7.3.

Un tenista dispone de 30 días para preparar un campeonato. Durante esos días quiere jugar al menos un partido al día y no más de 44 partidos en total. Prueba que hay una sucesión de días consecutivos en los que en total juega exactamente 15 partidos.

Solución. Vamos a construir una sucesión p_i, $i = 1,..., 30$, definiendo p_i como el número total de partidos que juega hasta el i-ésimo día. De eta forma la sucesión forma una cadena estrictamente creciente, salvo en los extremos:

$$1 \leq p_1 < p_2 < ... < p_{29} < p_{30} \leq 44.$$

Sumamos a cada término de esta cadena el número 15 y obtenemos una nueva cadena:

$$16 \leq p_1 + 15 < p_2 + 15 < ... < p_{29} + 15 < p_{30} + 15 \leq 59.$$

Observa que tenemos 60 números enteros: $p_1, p_2, ... p_{29}, p_{30}, p_1 + 15, p_2 + 15, p_{30} + 15$ comprendidos entre 1 y 59. Por el principio del palomar al menos dos de ellos son iguales. Supongamos que

$$p_1 = p_1 + 15.$$

Entonces $p_j < p_i$ y por lo tanto $j < t$. Los partidos que juega los días $j + 1$, $j + 2,....,\ i$ son exactamente 15.

Observación. Al abordar este problema se puede intentar hacer diversas configuraciones del régimen de entrenamiento del tenista y observar que en todos los casos se puede obtener la sucesión de días que se menciona.

Problema. 7.4.

Sea x un número entero que no es múltiplo de 10. Prueba que para cualquier entero positivo n existe una potencia de x que acaba en 0...01, en donde aparecen exactamente n ceros.

Solución. Supongamos que el resultado no es cierto. Consideramos las siguientes potencias de x:

$$x, x^2, ..., x^{(10)^{n+1}},$$

y calculamos los restos módulo 10^{n+1}. Como tenemos exactamente 10^{n+1} restos no nulos y módulo 10^{n+1} hay exactamente $10^{n+1} - 1$ restos no nulos distintos, por el principio del palomar existen $1 \leq u < v \leq 10^{n+1}$ tales que $x^u \equiv x^v$ $(mod\ 10^{n+1})$.

Se tiene $10^{n+1} | x^v - x^u = x^u (x^{v-u} - 1)$, como 10 no divide a x, se tiene $10^{n+1} | x^{v\text{-}v} - 1$, y por tanto $x^{v\text{-}v} = 10^{n+1}k + 1$.

Problema. 7.5.

Si un número entero positivo n no es par ni múltiplo de 5, prueba que existe un múltiplo de n que está formado sólo por unos.

Solución. Consideramos los restos, módulo n, de los números 1, 11, ..., 1...1, donde el último está formado por exactamente n dígitos todos iguales a 1. Si alguno de estos restos es cero, éste será múltiplo de n y tenemos el resultado. Si ninguno de los restos es cero tenemos n restos no nulos módulo n, pero como sólo hay $n - 1$, dos de ellos serán iguales. Su diferencia es un número de la forma 1... 10... 0, en el que aparecen a la derecha exactamente s ceros y a la izquierda r dígitos todos iguales a uno. Es por tanto iguala $1... 1 \times 10^5$, en el que el primer factor está formado por r dígitos, todos iguales a uno, con $r < n$; este producto es un múltiplo de n. Como n es primo relativo con 10, se tiene $n|1...1$, lo que es una contradicción.

Observación

¿Cómo calcular el múltiplo de n que está formado sólo por unos?

Hacer algunos intentos con números pequeños. Por ejemplo $3 \times 37 = 111$, y $111111 = 7 \times 15873$, utilizando la resolución del problema.

Problema 7.6

En una habitación de 5,5 m^2 se recubre el suelo con 10 tapices de forma arbitraria y de 1 m^2 de área. Prueba que hay dos tapices que se solapan al menos en la décima parte de su área.

Solución: Suponemos que los tapices se solapan menos de 1/10 vamos a calcular en este caso el área que recubren.

- Primer tapiz: recubre 1 m^2, esto es, 10/10.
- Segundo tapiz: recubre un área estrictamente mayor que 9/10.
- Tercer tapiz: recurecubre un área estrictamente mayor que 8/10 (menos 1/10 por cada tapiz ya colocado).
- Décimo tapiz: recubre un área estrictamente mayor que 1/10.

El total los 10 tapices recubren un área estrictamente mayor que

$$\frac{10}{10}+\frac{9}{10}+\dots+\frac{1}{10}=\frac{55}{10}$$

lo que es una contradicción.

Problema 7.7.

Prueba que en un grupo de seis personas siempre hay tres que se conocen mutuamente o tres que son completamente desconocidas.

Solución. Consideramos las seis personas como los vértices de un hexágono. Entre cada dos vértices del hexágono dibujamos una línea, de color azul si las personas se conocen y de color rojo en caso contrario. Dado cualquier vértice del hexágono, de él salen 5 líneas, una a cada uno de los restantes cinco vértices. Al menos tres de estas líneas son del mismo color, supongamos que éstas son de color azul y van a los vértices *A, B* y *C*. Si entre dos de los vértices *A, B* y *C* existe una línea azul tenemos un triángulo azul, y por lo tanto las tres personas que corresponden a estos vértices se conocen entre sí. Si por el contrario las tres líneas entre los vértices *A, B* y *C* son rojas, tendremos un triángulo rojo y de las tres personas que corresponden a estos vértices ningún par se conocen.

Oobservación

Observa que con cinco personas el resultado no es cierto, pues al hacer lo mismo podemos colorear los lados y diagonales de un pentágono de colores distintos de forma que no se pueda construir un triángulo de un solo color.

Problema 7.8.

En una clase hay estudiantes de los dos sexos, de tres ciudades distintas y que practican cuatro deportes distintos. ¿Cuántos estudiantes tenemos que reunir para asegurarnos que hay dos del mismo sexo, de la misma ciudad y que practican el mismo deporte?

Solución. A cada estudiante le asignamos una terna (S, C, D), donde S indica el sexo: hombre o mujer, C la ciudad: C_1, C_2 *o* C_3 *y* D el deporte que practica: D_1, C_2 *o* C_3 *y* D_4. En total podemos tener 2x3x4=24 ternas distintas, así pues, para asegurarnos que tenemos un par con los mismos tres datos tenemos que reunir como mínimo a 25 estudiantes.

Problema 7.9.

Prueba que en un grupo de dos o más personas siempre hay dos que tienen el mismo número de amigos en el grupo.

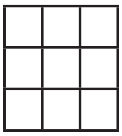
Solución. Si el número de personas es n y a cada una le asociamos el número de amigos en el grupo, estos números varían entre 1 y n (una persona siempre se supone amiga de sí misma). Si hay más de una persona a la que asignamos el valor 1, entonces tenemos el problema resuelto. Si sólo hay una persona con número 1, podemos excluirla del grupo y así tenemos un grupo con $n - 1$ personas y a ninguna le asignamos el número 1. Vamos a tratar este caso; como los números asignados varían entre 2 y $n - 1$, y tenemos $n - 1$ personas, dos de ellos tienen que tener el mismo número asignado, y el problema está resuelto.

Queda el último caso, aquel en el que no hay personas a las que hemos asignado el número 1; pero éste tiene un tratamiento idéntico al caso anterior.

Problema 7.10.

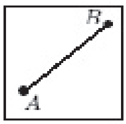
En un cuadrado de lado 3 señalamos diez puntos. Prueba que siempre hay dos puntos que distan como máximo $\sqrt{2}$.

Solución. Dividimos el cuadrado en 9 celdas 1x1, como se indica en la figura:



El principio del palomar nos dice que al menos dos puntos están en una misma celda. Ahora probamos que dos puntos que están en la misma celda distan, como máximo, $\sqrt{2}$.

En efecto, la situación será como la indicada en la figura:



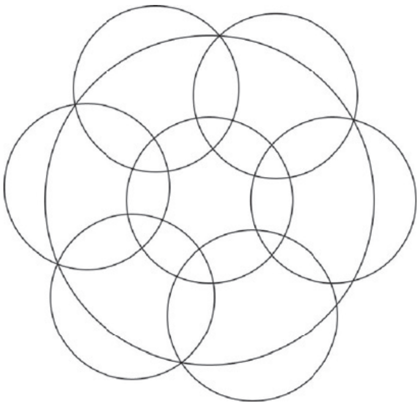
Dados dos puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$; se tiene $|a_1 - b_1| \leq 1$ y $|a_2 - b_2| \leq 1$, entonces

$$\textit{Distancia } (A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \leq \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

Problema 7.11.

En un círculo de radio 1 se eligen ocho puntos (pueden ser elegidos sobre la circunferencia). Prueba que hay dos de ellos que están a distancia menor (estrictamente) que uno.

Solución. Considera la siguiente figura



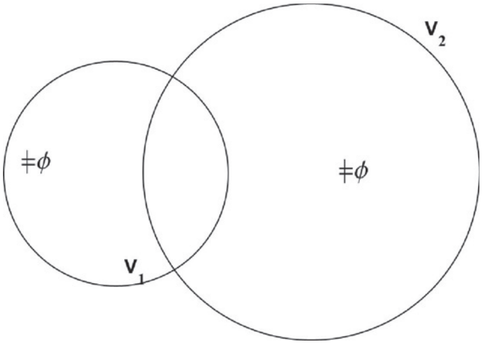
Construir la resolución a partir de esta figura.

Problema 7.12.

Un grupo de personas visita una exposición de 100 cuadros. Ninguno de los visitantes llega a ver todos los cuadros, pero cada cuadro ha sido visto por alguno de los visitantes. Prueba que hay una pareja de visitantes (v_1, v_2) y una pareja de cuadros (c_1, c_2) tal que v_1 ha visto c_1, pero no c_2 y v_2 ha visto c_2, pero no c_1. (Olimpiada Israel, 1988).

Solución. A cada visitante v le asociamos el conjunto V de los cuadros que ha visto.

La existencia de parejas como las del enunciado supone que existen conjuntos de cuadros V_1 y V_2 tales que $V_1 \setminus V_2 \neq \emptyset$ y $V_2 \setminus V_1 \neq \emptyset$



Por lo tanto $V_1 \not\subseteq V_2$ **y** $V_2 \not\subseteq V_1$

Si no existen pares como los que describe el enunciado, para par de visitantes v_1 y v_2 se tiene $V_1 \subseteq V_2$ o $V_2 \subseteq V_1$. Tenemos entonces que existe un V_0 tal que $V_0 \subseteq V$ para cada visitante v, y descartando V_0.

Descartamos al visitante v_0, ya que todos los cuadros que ha visto v_0 los han visto todos los demás visitantes. Por los mismos argumentos existirá un visitante v_1 tal que $V_1 \subseteq V$ para cada visitante v, y así sucesivamente.

Como el número de visitantes es finito, encontramos una cadena de conjuntos de cuadros $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_t$, siendo $v_1, \ldots, v_t$ todos los visitantes. Observa que como todos los cuadros han sido vistos, todos deben pertenecer al conjunto mayor, en este caso V_t, y por tanto V_t ha visto todos los cuadros, lo que es imposible. Así pues la suposición nos lleva a contradicción, de donde se deduce que esta suposición es falsa. Esto es, existen pares como los que se mencionan en el enunciado.

Problema. 7.13.

Dado un conjunto de diez enteros positivos, distintos dos a dos y menores que 107, prueba que hay dos subconjuntos disjuntos que tienen la misma suma.

Solución. Dados los diez números la suma de cualquier subconjunto suyo puede ir desde 1 hasta 97+98+…+106=1015. El conjunto de los diez números tiene $2^{10} = 1024$ subconjuntos. Si calculamos las sumas de todos estos subconjuntos, en total tendremos 1024, y por lo tanto dos de ellas, correspondientes a conjuntos distintos, serán iguales. Si los subconjuntos que definen estas sumas son disjuntos tenemos el resultado, y si no lo son, basta con retirar los elementos comunes para tener el resultado.

Problema. 7.14.

Dado un conjunto de cualesquiera n enteros positivos, siempre existe un subconjunto tal que la suma de sus elementos es un múltiplo de n.

Solución. Llamamos a los números a_1, ..., a_n. Si algún a_n es múltiplo de n tenemos el resultado.

Si ninguno es múltiplo de n consideramos las sumas:

$$a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Al calcular el resto módulo n de todos estos resultados tenemos n elementos. Si alguno de los restos es cero, tendremos una suma que es múltiplo de n. Si ninguno de los restos es cero, entonces dos de ellos deben coincidir. Supongamos que $a_1 + a_2 + ... + a_2$, y $a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + ... + a_n$ tienen el mismo resto módulo n, entonces $a_{n+1} + ... + a_n$ es un múltiplo de n.

REFERENCIAS

DE GUZMÁN, Miguel. (1988). *Aventuras matemáticas*. Barcelona: Labor.

ENGEL, Arthur (1998). *Problem-Solving Strategies*. Problems Books in Mathematics. New York: Springer.

PARRONDO, Juan M. R. (2008). "El problema de los tres dioses". Sección: Juegos Matemáticos. *Investigación y Ciencia, 381,* 90-01.

RAMÍREZ UCLÉS, Rafael. (2006-2008). "¿Somos realmente tan cuadriculados?" *Epsilon, 66*, 229-437.

ASPECTOS DIDÁCTICOS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Mª José González, Pascual Jara, Tomás Ortega, Juan F. Ruiz

INTRODUCCIÓN

El ámbito de la modelización y de las aplicaciones matemáticas es heterogéneo y variado. Al interpretarlo desde el punto de vista del desarrollo de competencias asumimos que es un vehículo para promover aprendizajes de largo recorrido y evaluación compleja. El propósito de este trabajo es llevar a cabo una reflexión, desde la práctica, sobre el desarrollo de la competencia de modelización. Para ello, comenzamos caracterizando la competencia de modelización en el marco de las competencias básicas; dado que una enseñanza tradicional de las matemáticas en nuestro contexto consiste en aprender primero las matemáticas de un tema para después buscar algunas aplicaciones, planteamos la dicotomía entre aplicaciones de las matemáticas y modelización; un elemento integrador y relevante en situaciones de modelización es el uso de nuevas tecnologías, por ello, analizamos el papel de algunas tecnologías en la enseñanza de la modelización; terminamos reflexionando sobre cómo evaluar esta competencia.

1. LA COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN Y SU CONTRIBUCIÓN AL DESARROLLO DE OTRAS COMPETENCIAS BÁSICAS

La traducción de problemas y situaciones de la vida real a un contexto matemático es un proceso largo y recientemente ha dado lugar a bastante literatura en el ámbito educativo (Blum et al, 2007). Este proceso tiene una marcada componente cultural y social, y precisa de un ejercicio y preparación previa, tanto en las destrezas matemáticas que se pretende potenciar (Aritmética: números, operaciones, algoritmos; Geometría: figuras planas, espaciales), como en el conocimiento de los problemas y situaciones reales que se pretenden abordar, bien sea para resolverlas, bien para utilizarlas de ejemplo.

Este planteamiento general se ha concretado recientemente, en desarrollos teóricos que han profundizado en la noción de competencia, en general, de competencias básicas, en nuestro actual currículo, y de competencia matemática, especialmente a partir del marco teórico que recoge el proyecto PISA (OCDE, 2004). En este marco, la competencia de modelización forma parte del conjunto de competencias matemáticas y se caracteriza por las siguientes capacidades que debe desarrollar el alumno:

- estructurar el campo o situación que va a modelarse,
- traducir la realidad a una estructura matemática,
- interpretar los modelos matemáticos en términos reales,
- trabajar con un modelo matemático,
- reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados,
- comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones), y
- dirigir y controlar el proceso de modelización.

En la propia caracterización de esta competencia aparece, de manera explícita, su contribución al desarrollo de competencias básicas como *representar* y *comunicar*. Pero lo que nos parece más destacable es la observación de que hay un desarrollo homogéneo e interrelacionado de las competencias. Los alumnos se hacen competentes a través de procesos complejos y de largo recorrido en los que intervienen conjuntamente grupos de competencias. Esto no implica, necesariamente, que al final de una etapa educativa se hayan desarrollado todas por igual, pero sí se establecen niveles de desarrollo de competencias que vienen caracterizados por una evolución coordinada de las mismas.

2. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA O APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS ¿EL ORDEN DE LOS FACTORES ALTERA EL PRODUCTO?

Aunque la modelización y las aplicaciones van de la mano, entendemos que en la segunda acepción es más apropiada una estructura lineal, Matemáticas $\rightarrow$ Realidad, mientras que la estructura de la primera es mucho más compleja, como se puede deducir de los esquemas de modelización presentados en otros trabajos de este volumen.

Las aplicaciones de un solo tema de matemáticas suelen ser elementales (problemas de palabras o tareas matemáticas expresadas en lenguaje cotidiano, muchas veces alejadas de lo que sería un verdadero problema real) y pueden dejar fuera las capacidades más genuinas de las tareas de modelización. Por ejemplo, un problema de aplicación clásico en el tema de la derivada sería el siguiente:

> *Fondo de inversión*
>
> Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad de dinero invertida, según la fórmula:
>
> $$R(x)= -0.002\ x^2 + 0.8\ x - 5$$
>
> donde R(x) representa la rentabilidad generada cuando se invierte la cantidad x. Determina cuánto dinero debemos invertir para obtener la máxima rentabilidad posible.

Seguramente ninguno de nosotros conoce las fórmulas concretas que emplea el banco, seguramente esa fórmula tenga muchos parámetros que desconocemos y, en todo caso, la manera en que el banco nos presenta la información nos da resuelto el problema o lo reduce a sencillos cálculos de sumas y restas (por ejemplo, si inviertes más de 6000 euros la rentabilidad es de 5% y si inviertes menos es del 3%). En cualquier caso, resolver el problema planteado se reduce a aplicar una sencilla destreza matemática en el nivel educativo en que suele presentarse.

Pero si vamos buscando auténticos problemas de modelización podemos encontrarnos, en los niveles de Educación Secundaria, sin los suficientes conocimientos y sin la base teórica necesaria que nos permita poder abordarlos.

Una posible propuesta acorde al planteamiento curricular actual consiste en comenzar utilizando problemas reales para motivar, justificar y fundamentar ciertas construcciones teóricas; continuar resolviendo otros problemas reales para los que estas construcciones y las destrezas que ellas implican se puedan aplicar, cubriendo así un abanico amplio de usos de las matemáticas que se estén enseñando; finalizar identificando nuevos desarrollos teóricos que los problemas planteados hayan necesitado, volviendo a comenzar el ciclo. La selección de situaciones de modelización adecuadas al nivel pretendido es una tarea compleja para la que no disponemos de suficientes materiales y recursos, aunque recientemente se está avanzando en ese sentido. Por otro lado, este planteamiento exige reconsiderar la estructura disciplinar de los contenidos matemáticos (álgebra, funciones, geometría, números, estadística) que ahora tendrán que aparecer necesariamente conectados. Los objetivos de aprendizaje correspondientes tendrán que poner el énfasis tanto en las estrategias de resolución de problemas como en la activación del conocimiento matemático necesario para poder concebir dichas estrategias y desarrollarlas con éxito.

3. EL PAPEL DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

Actualmente disponemos de dispositivos que son capaces de realizar simulaciones de experimentos o de realizar de cálculos asombrosos. ¿Por qué prescindir de ellos? Imaginemos el experimento de tirar un dado un cierto número de veces (10, 100, 1000 veces) o cualquier otro tipo de simulación (construcciones geométricas en el plano o en el espacio, etc.), ¿cómo realizarlas sin la ayuda de máquinas de cálculo adecuadas? Las nuevas tecnologías dan a los alumnos la posibilidad de investigar situaciones nuevas que posteriormente deberán analizar dentro de un adecuado proceso de modelización.

Además de la potencia de cálculo, el concurso de las nuevas tecnologías también es fundamental desde el punto de vista del abanico de nuevas representaciones que se abren al alumno. La manipulación de imágenes mediante programas de geometría dinámica y la posibilidad de hacer representaciones gráficas interactivas en la infinidad de recursos que se pueden encontrar en la red introducen una componente visual que facilita y potencia el proceso de aprendizaje. El intercambio de información entre sistemas de representación, reconocido como elemento que caracteriza una comprensión avanzada de las nociones matemáticas, se potencia desde una variedad de sistemas informáticos cada vez más adaptados al nivel y a las necesidades del alumno de secundaria. El desarrollo de la modelización de las esferas de Dandelín presentado en otro trabajo de este volumen por Tomás Ortega no hubiera sido posible sin el uso de Cabri, Excel y Maple.

Por lo tanto, estas tecnologías son decididamente útiles en situaciones de modelización. Sin embargo, el uso de estos medios debe programarse cuidadosamente para que ayuden a desarrollar destrezas, no a adormilarlas. Resolver una ecuación es hoy en día elemental hasta en una calculadora de bolsillo, no digamos ya en un ordenador con un programa adecuado en una plataforma en red; pero también debería de serlo para cualquier alumno en el nivel adecuado. El software puede cambiar el énfasis de nuestros objetivos de aprendizaje: ya no será necesario dedicar muchas horas a que un alumno resuelva ecuaciones estándar de segundo grado sin cometer errores de cálculo, pero tiene que saber el método y, además, deber ser capaz de interpretar la solución en una variedad de contextos y sistemas de representación. A esta segunda parte le ayuda la tecnología contextualizada a las diferentes situaciones de modelización.

4. EVALUACIÓN DE LA COMPETENCIA DE MODELIZACIÓN

En nuestros actuales currículos los apartados dedicados a la evaluación muestran una constante la referencia a la utilización práctica del conocimiento matemático. Las expresiones 'vida diaria', 'situaciones reales', 'vida cotidiana', 'diseños cotidianos', 'interpretar informaciones', 'hacer predicciones' aparecen prácticamente en todos los criterios de evaluación de todos los cursos de la etapa obligatoria.

Pero mientras la evaluación de las destrezas vinculadas a contenidos matemáticos es más sencilla de cuantificar, la evaluación de la competencia de modelización –de las competencias, en general– no parece una tarea sencilla en la práctica. La evaluación continua y de tipo cualitativo es una referencia importante. Pero los criterios de evaluación que se enuncian permanecen en un nivel de redacción poco concreto y no es evidente asociarlos a instrumentos de evaluación estandarizados. Como ejemplo tenemos el siguiente criterio que aparece en la redacción del Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (RD 1631/2006 de 29 de Diciembre) en 3º, 4ºA y 4ºB:

> *Planificar y utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines y comprobar el ajuste de la solución a la situación planteada y expresar verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas, e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello.*

Si bien el criterio puede orientarnos sobre el tipo de actividades de evaluación más pertinentes, la solución a dichas actividades no consiste en una respuesta cerrada sino en un proceso con una variedad de matices que hay que evaluar. Por otro lado, como hemos indicado con anterioridad, las competencias se desarrollan de forma conjunta. Modelizar va de la mano de plantear y resolver problemas, entre otras competencias. Se trata, por tanto, de establecer niveles de desarrollo de las competencias y de encontrar buenos indicadores que nos orienten sobre su desarrollo. En Lupiáñez & Rico (2004) podemos encontrar algunos instrumentos que nos ayudan en este proceso y otros autores plantean modelos novedosos, por ejemplo Lingefjärd & Holmquist (2005), que se pueden adaptar a la evaluación en secundaria.

Pero también nos parece importante resaltar que la orientación competencial no tiene un carácter de finalidad inmediato. Las competencias expresan objetivos de aprendizaje de largo recorrido. Por tanto, a efectos de evaluación, no nos parece necesario –ni posible, en muchos casos– realizar evaluaciones frecuentes de las competencias, ni considerarlas todas en todo momento. El tener como referencia el desarrollo de competencias nos marca una tendencia en la enseñanza, nos permite seleccionar tareas en función del tipo de competencias que deseemos desarrollar, nos permite poner los énfasis en unos u otros aspectos de una actividad para controlar lo que pretendemos desarrollar. Al ser la evaluación una imagen del desarrollo de la docencia y que debe quedar integrada en la misma, la evaluación se apoyará en esos tipos de actividades y tendrá en cuenta los énfasis pretendidos. En su función de reguladora del aprendizaje, la evaluación puede apoyarse en elementos tradicionales: controles, trabajos, intervención en clase. Posteriormente, tras un proceso de una cierta duración, estaremos en condiciones de determinar el nivel cognitivo alcanzado por los alumnos en las competencias pretendidas. Un modelo de evaluación de referencia para identificar los niveles alcanzados puede ser el establecido en el Proyecto PISA (Pajares, Sanz & Rico, 2004), en el que se proponen cuestiones escalonadas, discriminatorias, que tengan diferentes grados de dificultad y que permiten establecer tres niveles de desarrollo del alumno.

5. CONCLUSIÓN

La competencia de modelización se desarrolla de forma coordinada con otras competencias matemáticas y otras competencias básicas. La integración de conocimientos es fundamental en la resolución de las situaciones problemáticas que se proponen en situaciones de modelización. Por ello, el proceso lineal de aprender la matemática primero y después aplicarla a la resolución de problemas tipo puede dejar fuera la complejidad que requieren las situaciones de modelización genuinas. Pero es no es obvio encontrar buenos problemas adaptados a los conocimientos de los alumnos. Las nuevas tecnologías, tanto por su capacidad de cálculo como por la interactividad y el dinamismo que generan, pueden facilitar el planteamiento y el tratamiento de situaciones vinculadas al mundo real. La evaluación de la competencia de modelización ha de estar integrada en el proceso docente. Puesto que el desarrollo de competencias es un objetivo a largo plazo, no es necesario ni posible realizar pruebas de evaluación con excesiva asiduidad. Es importante, para ello, utilizar los instrumentos e indicadores adecuados.

BIBLIOGRAFÍA

BLUM W.; GALBRAITH P.; HENN W. & NISS M. (Eds.) (2007). *Modelling. and applications in mathematics education.* The 14th ICMI Study Series, Vol. 10. Heidelberg: Springer.

LINGEFJÄRD T. & HOLMQUIST M. (2005). "To assess student's attitudes, skills and competencies in mathematical modelling". *Teaching Mathematics and its Applications* 24(2-3), pp. 123-133.

LUPIÁÑEZ, J. L.; RICO, L. (2008). "Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares". *PNA,* 3, 1, 35-48.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo. Publicado originalmente por la OCDE en Inglés y Francés.

PAJARES, R.; SANZ, A. & RICO, L. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

EDICIONES DEL INSTITUTO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO, INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA

Subdirección General de Documentación y Publicaciones del Ministerio de Educación

EDICIONES DEL INSTITUTO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO, INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA

Subdirección General de Documentación y Publicaciones del Ministerio de Educación, Política Social y Deporte

El Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa, tiene como objetivo impulsar, incentivar, financiar, apoyar y promover acciones formativas realizadas por las instituciones, Universidades y entidades sin ánimo de lucro, de interés para los docentes de todo el Estado Español que ejercen sus funciones en las distintas Comunidades y Ciudades Autónomas. Pero, tan importante como ello, es difundir, extender y dar a conocer, en el mayor número de foros posible, y al mayor número de profesores, el desarrollo de estas acciones. Para cumplir este objetivo, este Instituto pondrá a disposición del profesorado español, con destino a las bibliotecas de Centros y Departamentos, dos colecciones, divididas cada una en cuatro series.

Con estas colecciones, como acabamos de señalar, se pretende difundir los contenidos de los cursos, congresos, investigaciones y actividades que se impulsan desde este Instituto, con el fin de que su penetración difusora en el mundo educativo llegue al máximo posible, estableciéndose así una fructífera intercomunicación dentro de todo el territorio del Estado.

La primera de nuestras colecciones se denomina **Aulas de Verano**, y pretende que todo el profesorado pueda acceder al conocimiento de las conferencias, ponencias, mesas redondas, talleres y actividades profesionales docentes que se desarrollan durante los veranos en la *Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander*, en los cursos de la *Universidad Complutense en El Escorial*, en los de *la Universidad Nacional de Educación a Distancia en Ávila y* en los de la *Fundación Universidades de Castilla y León en Segovia*. En general, esta colección pretende dar a conocer todas aquellas actividades que desarrollamos durante el período estival.

Se divide en cuatro series, dedicadas las tres primeras a la Educación Secundaria (la tercera a F.P.), y la cuarta a Infantil y Primaria, identificadas por los colores de las páginas internas:

- Serie “Ciencias” .... Color verde
- Serie “Humanidades” ....Color azul
- Serie “Técnicas” .... Color naranja
- Serie “Principios” ....Color amarillo

La segunda colección se denomina **Conocimiento Educativo.** Con ella pretendemos difundir investigaciones realizadas por el profesorado o grupos de profesores, el contenido de los cursos de verano de carácter más general y dar a conocer aquellas acciones educativas que desarrolla el Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa durante del año académico.

La primera serie está dedicada fundamentalmente a investigación didáctica y, en particular, a las didácticas específicas de cada disciplina; la segunda serie se dirige al análisis de la situación educativa y estudios generales, siendo esta serie el lugar donde se darán a conocer nuestros Congresos; la tercera serie, "Aula Permanente", da a conocer los distintos cursos de carácter general que realizamos durante el período estival, y la cuarta serie, como su nombre indica, se dedica a estudios, siempre desde la perspectiva de la educación, sobre nuestro Patrimonio.

Los colores de las páginas internas que identifican cada serie son:

- Serie "Didáctica"..Color azul claro
- Serie "Situación"... Color verde claro
- Serie "Aula Permanente" ....Color rojo
- Serie "Patrimonio" .... Color violeta

Estas colecciones, como hemos señalado, tienen un carácter de difusión y extensión educativa, que prestará un servicio a la intercomunicación, como hemos dicho también, entre los docentes que desarrollan sus tareas en las distintas Comunidades y Ciudades Autónomas de nuestro Estado. Pero, también, se pretende con ellas establecer un vehículo del máximo rigor científico y académico en el que encuentren su lugar el trabajo, el estudio, la reflexión y la investigación de todo el profesorado español, de todos los niveles, sobre la problemática educativa.

Esta segunda función es singularmente importante, porque incentiva en los docentes el imprescindible objetivo investigador sobre la propia función, lo que constituye la única vía científica y, por tanto, con garantías de eficacia, para el más positivo desarrollo de la formación personal y los aprendizajes de calidad en los niños y los jóvenes españoles.

NORMAS DE EDICIÓN DEL INSTITUTO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO, INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA

- Los artículos han de ser inéditos.
- Se entregarán en papel y se añadirá una copia en disquete o CD con formato word.
- Los autores debe dar los datos personales siguientes: referencia profesional, dirección y teléfono personal y del trabajo y correo electrónico.
- Hay que huir de textos corridos y utilizar con la frecuencia adecuada, epígrafes y subepígrafes.
- Debe haber, al principio de cada artículo, un recuadro con un índice de los temas que trata el mismo, y que debe coincidir con los epígrafes y subepígrafes del apartado anterior.
- Cuando se reproduzcan textos de autores, se entrecomillarán y se pondrán en cursiva.
- Al citar un libro, siempre debe aparecer la página de la que se toma la cita, excepto si se trata de un comentario general.
- Se deben adjuntar fotografías, esquemas, trabajos de alumnos,... que ilustren o expliquen el contenido del texto.
- Al final de cada artículo, se adjuntará la lista de la bibliografía utilizada.
- La bibliografía debe ser citada siguiendo la normativa APA.

CENTRAL DE EDICIONES DEL INSTITUTO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO, INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA

- ***Dirección y coordinación:***
  Paseo del Prado 28, 6ª planta. 28014. Madrid.
  Teléfono: 91.506.57.17.

- ***Suscripciones y distribución:***
  Instituto de Técnicas Educativas.
  C/ Alalpardo s/n. 28806. Alcalá de Henares.
  Teléfono: 91.889.18.50.

- ***Puntos de venta:***
  Ministerio de Educación.
  C/ Alcalá, 36. Madrid.
  Subdirección General de Documentación y Publicaciones del Ministerio de Educación.
  C/ San Agustín, 5.

TÍTULOS EDITADOS

COLECCIÓN: AULAS DE VERANO

SERIE: Humanidades

La iconografía en la enseñanza de la Historia del Arte
La dimensión artística y social de la ciudad
La lengua, vehículo cultural multidisciplinar
El entorno de Segovia en la historia de la dinastía de Borbón
Aprendizaje de las lenguas extranjeras en el marco europeo
El impacto social de la cultura científica y técnica
Lenguas extranjeras: hacia un nuevo marco de referencia en su aprendizaje
Habilidades comunicativas en las lenguas extranjeras
Didáctica de la Filosofía
Nuevas formas de aprendizaje en las lenguas extranjeras
Filosofía y economía de nuestro tiempo: orden económico y cambio social
Las artes plásticas como fundamento de la educación artística
La ficción novelesca en los siglos de oro y la literatura española
La empresa y el espíritu emprendedor de los jóvenes
La dimensión humanística de la música: reflexiones y modelos didácticos
La enseñanza de las lenguas extranjeras desde una perspectiva europea
Valores del deporte en la educación (año europeo de la educación a través del deporte)
El pensamiento científico en la sociedad actual
Hacia el aula intercultural. Experiencias y referentes
La biblioteca: un mundo de recursos para el aprendizaje
El portfolio europeo de las lenguas y sus aplicaciones en el aula
Las lenguas españolas: un enfoque filológico
El espacio geográfico español y su diversidad
Personajes y temáticas en la literatura juvenil
Condición física, habilidades deportivas y calidad de vida
La articulación de los recursos en el funcionamiento de la biblioteca escolar
La educación artística como instrumento de integración intercultural y social

Los lenguajes de las pantallas: del cine al ordenador
El desarrollo de competencias en lenguas extranjeras: textos y otras estrategias
50 años de teatro contemporáneo: temáticas y autores

SERIE: Ciencias

La enseñanza de las matemáticas a debate: referentes europeos
El lenguaje de las matemáticas en sus aplicaciones
Globalización, crisis ambiental y educación
La Física y la Química: del descubrimiento a la intervención
El número, agente integrador del conocimiento
De la aritmética al análisis: historia y desarrollo recientes en matemáticas
Los sistemas terrestres y sus implicaciones medioambientales
Metodología y aplicaciones de las matemáticas en la ESO
Últimas investigaciones en Biología: células madres y células embrionarias
Ramón y Cajal y la ciencia española
Usos matemáticos de internet
Química y sociedad, un binomio positivo
La empresa y el espíritu emprendedor de los jóvenes
Nuevos enfoques para la enseñanza de la Física
Del punto a los espacios multidimensionales
Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas
Las matemáticas y sus aplicaciones en el mundo social y económico
La bioética en la educación secundaria

SERIE: Técnicas

Grandes avances de la ciencia y la tecnología
Nuevas profesiones para el servicio a la sociedad
Servicios socioculturales: la cultura del ocio
La transformación industrial en la producción agropecuaria
La formación profesional como vía para el autoempleo: promoción del espíritu emprendedor
Actualización de las competencias profesionales: Sanidad y Formación Profesional
Las competencias profesionales relacionadas con las TIC y el espíritu emprendedor

SERIE: Principios

La Educación Artística, clave para el desarrollo de la creatividad
La experimentación en la enseñanza de las ciencias
Metodología en la enseñanza del Inglés
Destrezas comunicativas en la Lengua Española
Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas
La Geografía y la Historia, elementos del medio
La seducción de la lectura en edades tempranas
Lenguas para abrir camino
Los lenguajes de la expresión
La comunicación literaria en las primeras edades
Los lenguajes de las ciencias
Perspectivas para las ciencias en la Educación Primaria
Leer y escribir desde la Educación Infantil y Primaria
Números, formas y volúmenes en el entorno del niño
El lenguaje de las artes plásticas: sensibilidad, creatividad y cultura
Andersen, Ala de Cisne: actualización de un mito (1805 – 2005)
Aplicaciones educativas de las Tecnologías de la Información y la Comunicación
Aplicaciones de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de la Lengua Castellana
Juego y deporte en el ámbito escolar: aspectos curriculares y actuaciones prácticas
Descubrir, investigar, experimentar: iniciación a las ciencias
El cuento como instrumento para el desarrollo de la creatividad artística
Introducción temprana a las TIC: estrategias. Estrategias para educar en un uso responsable en educación infantil y primaria
Enseñar a pensar: sentando las bases para aprender a lo largo de la vida
La magia de las letras. El desarrollo de la lectura y la escritura en educación infantil y primaria
Aprender matemáticas. Metodología y modelos europeos
La competencia en comunicación lingüística en las áreas del currículo

COLECCIÓN: CONOCIMIENTO EDUCATIVO

SERIE: Situación

EN CLAVE DE CALID@D: La Dirección Escolar
Investigaciones sobre el inicio de la lectoescritura en edades tempranas
EN CLAVE DE CALID@D: Hacia el éxito escolar
La convivencia en las aulas: problemas y soluciones
La disrupción en las aulas: problemas y soluciones

SERIE: Didáctica

Didáctica de la poesía en la Educación Secundaria
Los fundamentos teórico-didácticos de la Educación Física
La estadística y la probabilidad en el Bachillerato
La estadística y la probabilidad en la Educación Secundaria Obligatoria
Orientaciones para el desarrollo del currículo integrado hispano-británico en Educación Infantil
Orientaciones para el desarrollo del currículo integrado hispano-británico en Educación Primaria
Bases para un debate sobre investigación artística

SERIE: Aula Permanente

Contextos educativos y acción tutorial
Imagen y personalización de los centros educativos
Nuevos núcleos dinamizadores en los centros de Educación Secundaria: los Departamentos Didácticos
Diagnóstico y educación de los alumnos con necesidades educativas específicas: alumnos intelectualmente superdotados
Gestión de calidad en la organización y dirección de centros escolares
La orientación escolar en los centros educativos
El profesorado y los retos del sistema educativo actual
El tratamiento de la diversidad en los centros escolares
Participación de las familias en la vida escolar: acciones y estrategias
La acción tutorial: su concepción y su práctica
Equipos directivos y autonomía de centros
Coeducación y prevención temprana de la violencia de género

El desarrollo de las competencias docentes en la formación del profesorado
La evaluación como instrumento de aprendizaje. Técnicas y estrategias

TÍTULOS EN COEDICIÓN

Internet en el aula: Abecedario para la Educación Primaria
Educación Intercultural en el aula de Ciencias Sociales
Prensa y educación: acciones para la desaparición de un gueto
Diagnóstico y educación de los más capaces
Colección Los Reales Sitios:
Palacio Real de Aranjuez
Palacio Real de Madrid
Real Monasterio de La Encarnación
Real Monasterio de Santa Clara de Tordesillas
Palacio Real de La Granja de San Ildefonso
Monasterio de San Lorenzo de El Escorial

TÍTULOS EN EL AÑO

	COLECCIÓN	SERIE
Competencia matemática e interpretación de la realidad	*AULAS DE VERANO*	*Principios*
Nuevas enseñanzas en las escuelas oficiales de idiomas: renovación metodológica	*AULAS DE VERANO*	*Humanidades*
Educación emocional y convivencia en el aula	*CONOCIMIENTO EDUCATIVO*	*Aula Permanente*
800 años de Mío Cid: una visión interdisciplinar	*AULAS DE VERANO*	*Humanidades*
El desarrollo del pensamiento científico-técnico en la educación primaria	*AULAS DE VERANO*	*Principios*
La competencia artística: creatividad y apreciación crítica	*AULAS DE VERANO*	*Principios*
La novela histórica como recurso didáctico para las ciencias sociales	*AULAS DE VERANO*	*Humanidades*
Percepción y expresión en la cultura musical básica	*AULAS DE VERANO*	*Humanidades*
La biblioteca escolar como espacio de aprendizaje	*AULAS DE VERANO*	*Principios*
Fuentes de energía para el futuro	*AULAS DE VERANO*	*Ciencias*
Autonomía e iniciativa personal en educación primaria	*AULAS DE VERANO*	*Principios*
Funciones del departamento de orientación	*CONOCIMIENTO EDUCATIVO*	*Aula Permanente*
Autonomía de los centros educativos	*CONOCIMIENTO EDUCATIVO*	*Aula Permanente*
Dibujo técnico y matemáticas: una consideración interdisciplinar	*AULAS DE VERANO*	*Ciencias*

TÍTULOS EN EL AÑO

	COLECCIÓN	SERIE
La música como medio de integración y trabajo solidario	*AULAS DE VERANO*	*Principios*
De la educación socioemocional a la educación en valores	*CONOCIMIENTO EDUCATIVO*	*Situación*
Formación del magisterio en España. La legislación normalista como instrumento de poder y control (1834-2007)	*CONOCIMIENTO EDUCATIVO*	*Situación*

Este volumen tiene su origen en el CURSO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO: "Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas", que se celebró en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander, el verano de 2008.

ISBN: XXX-XX-X-X-XXX
PVP.: XX€ (IVA incluido)

GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN