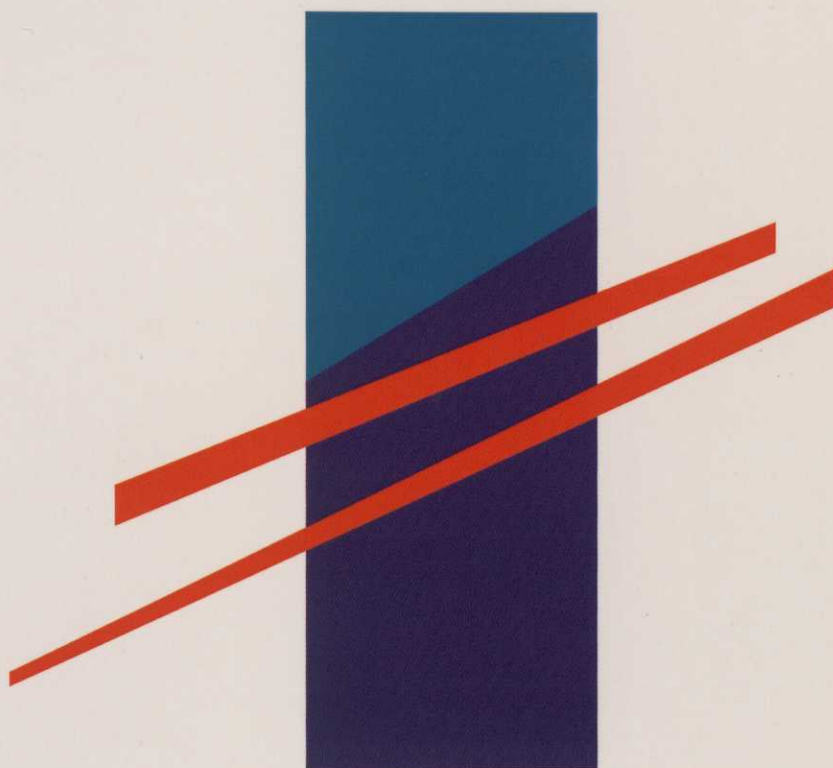


1

Materiales Didácticos  
Matemáticas: Opción A

4º CURSO



SECUNDARIA  
OBLIGATORIA



Ministerio de Educación y Ciencia

42828

1001600

42828

3183

# Materiales Didácticos

DEPARTAMENTO DE INFORMACIÓN DOCUMENTACIÓN  
C. M. R. E. E. Y SERVICIO DE RENOVACIÓN PEDAGÓGICA  
Coordinación de la edición: Ana Francisca Aguilar Sánchez  
Maquetación y supervisión de imprenta: Salvador Ferré Nave

## Prólogo

La finalidad de estos materiales didácticos para la Educación Secundaria Obligatoria, en su segundo ciclo, es orientar a los profesores que, a partir de septiembre de 1993, enseñarán en los centros que se articulan y desarrollan en el desarrollo curricular de las correspondientes áreas, en el primer año, aunque alguna de ellas se presenta para el segundo ciclo escolar. El Ministerio de Educación y Ciencia quiere facilitar a los profesores la aplicación del nuevo currículo en su práctica docente, proporcionándoles sugerencias de programación y unidades didácticas que les ayuden en su trabajo; unas sugerencias, desde luego, no prescriptivas ni tampoco cerradas, sino abiertas y con posibilidades varias de ser aprovechadas y desarrolladas. Esperamos que para los centros educativos y los profesores supere anticipar la implantación de las nuevas enseñanzas, constituyéndose con ello en pioneros de lo que será más adelante la implantación general. El presente ofrece no sólo un cumplido reconocimiento, sino también un apoyo por parte del Ministerio, que a través de estos materiales didácticos pretende ayudar a los profesores a afrontar ese desafío.

4º Curso

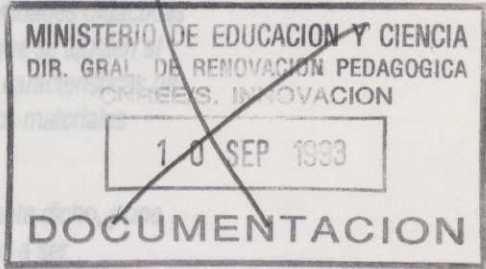
## Matemáticas: Opción A

El Ministerio valora muy positivamente el trabajo que se ha realizado para adaptar a un esquema general propuesto por el Servicio de Innovación, de la Subdirección General de Programación Experimental, y han sido elaborados en estrecho contacto con los asesores de este Servicio. Por consiguiente, aunque la autoría pertenece de pleno derecho a las personas que los han preparado, el Ministerio considera que son dignos ejemplos de programación y de unidades didácticas para la correspondiente área, y que su utilización por los profesores, en la medida que el marco de los proyectos curriculares que los centros establezcan y se adecuen a las necesidades de sus alumnos, servirá para perfeccionarlos y para elaborar en un futuro próximo otros materiales semejantes.

La presentación misma, en forma de documentos de trabajo y no de libro propiamente tal, es un signo de que se trata de materiales con cierto carácter experimental, destinados a ser contrastados en la práctica, depurados y completados. El Ministerio seguirá realizando ese trabajo de contrastación y depuración a lo largo del curso, precisamente a partir de las sugerencias y contrapropuestas que anticipan a la reforma.

Para cada una de las áreas de la Educación Secundaria Obligatoria se han elaborado una o más propuestas de materiales didácticos. En este último caso, con dos volúmenes correspondientes a sus dos opciones para el cuarto curso, Lengua Extranjera, con una propuesta para Francés y otra de Inglés, Educación Física, con dos materiales alternativos y Ciencias Sociales, Geografía e Historia, que además de la propuesta de la correspondiente área para el segundo ciclo se complementa con una específica para el bloque sobre la vida moral y la reflexión ética.

Los materiales así dirigidos a los profesores tienen un carácter netamente experimental. Son materiales para ser desarrollados con alumnos que proceden mayoritariamente de la Enseñanza



Autores:

Menchu Bas López

Guillermo Cabañas Navarro

Coordinación:

Javier Brihuega Nieto  
del Servicio de Innovación

R. 275

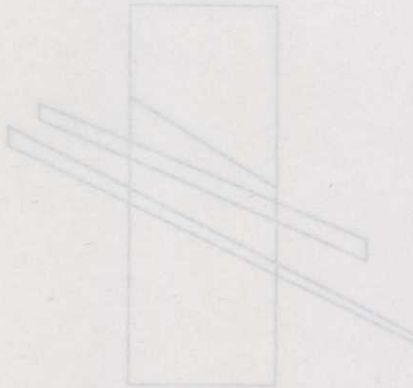


Ministerio de Educación y Ciencia



R. 129757

- *Coordinación de la edición:* Ana Francisca Aguilar Sánchez
- *Maquetación y supervisión de pruebas:* Salvador Peña Neva



4º Curso

Matemáticas: Opción A



Autores:

Menchu Bas López  
Guillermo Cabanes Navaro

Coordinación:

Javier Brinaga Irujo  
del Servicio de Innovación



Ministerio de Educación y Ciencia  
Secretaría de Estado de Educación

N. I. P. O.: 176-93-084-8

I. S. B. N.: 84-369-2388-x

Depósito legal: Z-2175-93

Realización: EDELVIVES



Ministerio de Educación y Ciencia

3. 109724

# Prólogo

## Índice

La finalidad de estos materiales didácticos para la Educación Secundaria Obligatoria, en su segundo ciclo, es orientar a los profesores que, a partir de septiembre de 1993, impartirán las nuevas enseñanzas en los centros que se anticipan a implantarlas. Son materiales para facilitarles el desarrollo curricular de las correspondientes áreas, en particular para el cuarto año, aunque alguna de ellas se presenta para el segundo ciclo completo. Con estos materiales el Ministerio de Educación y Ciencia quiere facilitar a los profesores la aplicación y desarrollo del nuevo currículo en su práctica docente, proporcionándoles sugerencias de programación y unidades didácticas que les ayuden en su trabajo; unas sugerencias, desde luego, no prescriptivas, ni tampoco cerradas, sino abiertas y con posibilidades varias de ser aprovechadas y desarrolladas. El desafío que para los centros educativos y los profesores supone anticipar la implantación de las nuevas enseñanzas, constituyéndose con ello en pioneros de lo que será más adelante la implantación generalizada, merece no sólo un cumplido reconocimiento, sino también un apoyo por parte del Ministerio, que a través de estos materiales didácticos pretende ayudar a los profesores a afrontar ese desafío.

El Ministerio valora muy positivamente el trabajo de los autores de estos materiales, que se adaptan a un esquema general propuesto por el Servicio de Innovación, de la Subdirección General de Programas Experimentales, y han sido elaborados en estrecha conexión con los asesores de este Servicio. Por consiguiente, aunque la autoría pertenece de pleno derecho a las personas que los han preparado, el Ministerio considera que son útiles ejemplos de programación y de unidades didácticas para la correspondiente área, y que su utilización por los profesores, en la medida que se ajusten al marco de los proyectos curriculares que los centros establezcan y se adecuen a las características de sus alumnos, servirá para perfeccionarlos y para elaborar en un futuro próximo otros materiales semejantes.

La presentación misma, en forma de documentos de trabajo y no de libro propiamente dicho, pone de manifiesto que se trata de materiales con cierto carácter experimental, destinados a ser contrastados en la práctica, depurados y completados. Es intención del Ministerio seguir realizando ese trabajo de contrastación y depuración a lo largo del próximo curso, y hacerlo precisamente a partir de las sugerencias y contrapropuestas que vengan de los centros que se anticipan a la reforma.

Para cada una de las áreas de la Educación Secundaria Obligatoria se han elaborado una o más propuestas de materiales didácticos. En este último caso se trata de Matemáticas, con dos volúmenes correspondientes a sus dos opciones para el cuarto curso, Lenguas Extranjeras, con una propuesta de Francés y otra de Inglés, Educación Física, con dos materiales alternativos y Ciencias Sociales, Geografía e Historia, que además de la propuesta de la correspondiente área para el segundo ciclo se complementa con una específica para el bloque sobre la vida moral y la reflexión ética.

Los materiales así ofrecidos a los profesores tienen un carácter netamente experimental. Son materiales para ser desarrollados con alumnos que proceden mayoritariamente de la Enseñanza

Páginas

7

8

9

11

12

15

15

16

18

18

21

21

21

28

39

45

45

46

46

48

49

50

53

General Básica y que se han incorporado al segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria sin haber realizado el primer ciclo. Se trata, por tanto, de materiales para un momento transitorio y, por eso, también particularmente difícil: el momento de tránsito de la anterior a la nueva ordenación. En ellos se contiene, sobre todo, la información imprescindible sobre distribución y secuencia de contenidos para poder organizar éstos en el cuarto año de la etapa a lo largo del curso 1993/94. Las sugerencias y contrapropuestas que los profesores realicen, a partir de su práctica docente, respecto a esos materiales o a otros con los que hayan trabajado serán, en todo caso, de enorme utilidad para el Ministerio, que a través de futuras propuestas, que complementen a las actuales, podrán redundar en beneficio de los centros y profesores que en cursos sucesivos se incorporen a la reforma educativa.

Prólogo

La finalidad de estos materiales didácticos para la Educación Secundaria Obligatoria, en su segundo ciclo, es orientar a los profesores que, a partir de septiembre de 1993, impartirán las nuevas enseñanzas en los centros que se anticipan a implantar. Son materiales para facilitar el desarrollo curricular de las correspondientes áreas, en particular para el cuarto año, aunque algunas de ellas se presenta para el segundo ciclo completo. Con estos materiales el Ministerio de Educación y Ciencia quiere facilitar a los profesores la aplicación y desarrollo del nuevo currículo en su práctica docente, proporcionándoles sugerencias de programación y unidades didácticas que les ayuden en su trabajo; unas sugerencias, desde luego, no prescriptivas, ni tampoco cerradas, sino abiertas y con posibilidades varias de ser aprovechadas y desarrolladas. El deseo que para los centros educativos y los profesores supone anticipar la implantación de las nuevas enseñanzas, constituyéndose con ello en pioneros de lo que será más adelante la implantación generalizada, merece no sólo un cumplimiento, sino también un apoyo por parte del Ministerio, que a través de estos materiales didácticos pretende ayudar a los profesores a afrontar ese desafío.

El Ministerio valora muy positivamente el trabajo de los autores de estos materiales, que se adaptan a un esquema general propuesto por el Servicio de Innovación, de la Subdirección General de Programas Experimentales, y han sido elaborados en estrecha conexión con los asesores de este Servicio. Por consiguiente, aunque el autor pertenece de plano primero a las personas que los han preparado, el Ministerio considera que son útiles ejemplos de programación y de unidades didácticas para la correspondiente área, y que su utilización por los profesores, en la medida que se ajusten al marco de los proyectos curriculares que los centros establezcan y se adecuen a las características de sus alumnos, servirá para perfeccionarlos y para elaborar en un futuro próximo otros materiales semejantes.

La presentación misma, en forma de documentos de trabajo y no de libro propiamente dicho, pone de manifiesto que se trata de materiales con cierto carácter experimental, destinados a ser contactados en la práctica, debatidos y completados. Es intención del Ministerio seguir realizando ese trabajo de contrastación y depuración a lo largo del próximo curso, y hacerlo precisamente a partir de las sugerencias y contrapropuestas que vengan de los centros que se anticipan a la reforma.

Para cada una de las áreas de la Educación Secundaria Obligatoria se han elaborado una o más propuestas de materiales didácticos. En este último caso se trata de Matemáticas, con dos volúmenes correspondientes a sus dos opciones para el cuarto curso; Lengua Castellana, con una propuesta de Francés y otra de Inglés; Educación Física, con dos materiales alternativos y Ciencias Sociales, Geografía e Historia, que además de la propuesta de la correspondiente área para el segundo ciclo se complementa con una específica para el primer sobre la vida moral y la relación ética.

Los materiales así ofrecidos a los profesores tienen un carácter netamente experimental. Son materiales para ser desarrollados con alumnos que procedan experimentalmente de la Enseñanza

63	.....	Anexo: Fotografías del material manipulable
78	.....	IV. Recursos didácticos
87	.....	Bibliografía
89	.....	Materiales didácticos

# Introducción

## Índice

	<u>Páginas</u>
I. INTRODUCCIÓN .....	7
II. ORIENTACIONES PARA LA ENSEÑANZA Y LA EVALUACIÓN .....	9
Aspectos metodológicos .....	9
Trabajo en el aula .....	11
Evaluación .....	12
III. PROGRAMACIÓN .....	15
Objetivos .....	15
Tipos de contenidos .....	16
Tratamiento de los temas .....	18
Criterios de evaluación .....	18
IV. DESARROLLO DE LA PROGRAMACIÓN .....	21
Temas y Unidades didácticas. Temporalización .....	21
Tema primero: Geometría .....	21
Tema segundo: Las matemáticas y la información .....	28
Tema tercero: Las matemáticas del azar .....	39
V. DESARROLLO DE LA UNIDAD: FIGURAS Y CUERPOS .....	45
Introducción .....	45
Objetivos .....	46
Contenidos .....	46
Materiales .....	48
Organización del trabajo .....	48
Evaluación .....	50
Actividades .....	53

Anexo: Fotografías del material manipulable.....	63
VI. RECURSOS DIDÁCTICOS .....	67
Bibliografía .....	67
Materiales didácticos .....	69

## Índice

Páginas	
7	I. INTRODUCCIÓN .....
8	II. ORIENTACIONES PARA LA ENSEÑANZA Y LA EVALUACIÓN .....
8	Aspectos metodológicos .....
11	Trabajo en el aula .....
12	Evaluación .....
15	III. PROGRAMACIÓN .....
15	Objetivos .....
16	Tipos de contenidos .....
18	Tratamiento de los temas .....
18	Criterios de evaluación .....
21	IV. DESARROLLO DE LA PROGRAMACIÓN .....
21	Temas y Unidades didácticas. Temporalización .....
21	Temas primero: Geometría .....
28	Temas segundo: Las matemáticas y la información .....
30	Temas tercero: Las matemáticas del azar .....
42	V. DESARROLLO DE LA UNIDAD: FIGURAS Y CUERPOS .....
45	Introducción .....
46	Objetivos .....
46	Contenidos .....
48	Materiales .....
48	Organización del trabajo .....
50	Evaluación .....
53	Actividades .....



## Introducción

La diferencia de intereses, actitudes y orientaciones profesionales entre el alumnado de este nivel educativo obliga a un tratamiento diferenciador del área (en contenidos, objetivos, metodología, etc.), que se concreta en la oferta al alumnado de una doble opción para el Área de Matemáticas.

Por el carácter más *terminal* de la Opción A, y la orientación previsible del alumnado ante la continuación de sus estudios, nos encontraremos con alumnos y alumnas que seguirán distintos caminos; principalmente cursarán a continuación un módulo 2 y abandonarán los estudios de matemáticas, y en el caso de que continúen con un bachillerato lo más probable es que no sea ni en la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, ni en la de Tecnología. De modo que hemos procurado realizar un tratamiento de los temas atendiendo a las necesidades reales y diversas de este tipo de alumnado.

Tres consideraciones importantes han condicionado todas las decisiones que hemos tomado a la hora de realizar la presente programación:

- A)** A los 16 años un elevado porcentaje de los alumnos y alumnas están aún en niveles de pensamiento concreto. Si se les hace trabajar con conceptos expresados en términos formales, la mayoría no los comprenderán, o los comprenderán mal, y se limitarán a memorizar definiciones, rutinas, reglas y propiedades desprovistos de significados y funcionalidad.
- B)** Será necesaria una organización flexible dentro del aula, de manera que en un determinado momento tendremos a distintos alumnos y alumnas trabajando con actividades distintas, lo que implica la necesidad de disponer de suficientes recursos didácticos y de tiempo para atender a todos los alumnos y alumnas. Sería deseable que el aula de Matemáticas se transformase en un aula taller.
- C)** Antes de poner en práctica esta programación y dado que en este momento de anticipación de la LOGSE, los alumnos y alumnas que se matriculen en 4.º de E. S. O. no han cursado el correspondiente primer ciclo, creemos que es especialmente necesario recabar información personalizada de cada alumno, realizando un buen diagnóstico sobre las capacidades básicas (personales y matemáticas) de los alumnos y alumnas concretos con que vayamos a trabajar.

Proponemos una organización de los Bloques en tres centros de interés: «Geometría», «Las Matemáticas y La Información» y «Las Matemáticas del azar» que favorezcan la posibilidad de organizar los contenidos con una visión globalizadora de la actividad matemática.

El grueso de la presente programación lo constituyen las unidades didácticas. En ellas hemos querido dejar muy claro cuáles son los objetivos y el tratamiento metodológico que consideramos más conveniente. La propuesta de actividades en cada Unidad es también bastante completa, pues pensamos que es la mejor forma de expresar qué y cómo queremos planificar el trabajo en clase.

Se sugieren actividades de ampliación, así como formas alternativas de trabajar los contenidos, de modo que el profesor o profesora tenga recursos para adaptar las distintas unidades a las necesidades reales de sus alumnos y alumnas.

En la programación de 3.º de E. S. O. se retomaron muchos elementos curriculares correspondientes a la actual E. G. B. y por tanto en este 4.º curso no se podrán tratar todos los contenidos que el M. E. C. propone para toda la E. S. O., aun así, esta programación es suficientemente extensa, y deberá ser el profesor o profesora el que decida qué unidades didácticas tratar más extensamente, y en cuáles hacer un recorte, o incluso eliminar del programa; siempre en función de lo que hayan trabajado los alumnos y alumnas en las matemáticas de 3.º.

La bibliografía comentada en el capítulo VI se refiere a aquella que consideramos básica para que el profesor o profesora pueda realizar la definitiva programación de aula, y es la que hemos manejado en mayor medida durante la elaboración de la presente programación.

## Orientaciones para la enseñanza y la evaluación

---

Primeramente expondremos cuáles son nuestros Fines de la enseñanza de las matemáticas. Ellos determinan un Currículo basado en procesos y justifican los dos tipos de Objetivos que aparecen en la programación. Estos fines son:

1. Desarrollar capacidades básicas de los alumnos y alumnas, personales y matemáticas.
2. Desarrollar hábitos y actitudes positivas de trabajo.
3. Utilizar las matemáticas como un elemento esencial en la comunicación
4. Adquirir confianza en sus propias capacidades y habilidades matemáticas.

En los siguientes apartados hablaremos de las distintas situaciones, problemas y materiales de enseñanza que pueden ayudar mejor al alumno a desarrollar estas capacidades, sus implicaciones en la evaluación y en la elección de los contenidos a través de los cuales pretendemos conseguir estos fines.

La elección del método está sujeto al tipo de conocimientos, destrezas y actitudes que queremos que desarrollen nuestros alumnos y alumnas.

La metodología que presentamos se basa en los principios del aprendizaje por descubrimiento guiado, concebido como un proceso cognitivo que parte de la identificación de una situación problemática, tras cuya exploración y resolución cada alumno formula sus propias conclusiones. Para ello los alumnos y alumnas consiguen información a través de la realización de una detallada selección de actividades propuestas por el profesor o profesora con ese fin. Al final de este proceso deberán quedar contruidos y consolidados los nuevos conceptos, estructuras conceptuales o procedimientos seleccionados.

### **Principios generales**

Para el diseño de las unidades hemos tenido en cuenta los siguientes *principios metodológicos generales*:

- Seleccionar y ordenar los contenidos con una estructuración clara de sus relaciones.
- Obtener una información aproximada de las ideas previas que poseen los alumnos y alumnas sobre el tema en que vamos a comenzar a trabajar.
- Estimular la enseñanza activa y reflexiva.

## Aspectos metodológicos

### Trabajo en el aula

- Proponer actividades que faciliten varios niveles de profundización, y/o de dedicación en el desarrollo de su solución, de manera que todos los alumnos y alumnas puedan tener algún logro, aprender algo nuevo o extraer sus propias conclusiones.
- Emplear actividades y situaciones problemáticas cercanas a las vivencias personales de los alumnos y alumnas.
- Incorporar aspectos lúdicos de las matemáticas.
- Primar la intuición, el uso de tanteos, las aproximaciones sucesivas, el uso de estrategias personales, etc., en definitiva, primar el uso de los métodos inductivos frente a los deductivos, presentando el aprendizaje de las matemáticas como un proceso de construcción de conceptos, estructuras y significados.

Nuestra concepción del aprendizaje supone implicar al individuo para que aporte sus estructuras previas a la situación de aprendizaje, e ir construyendo a partir de ellas, los nuevos significados.

Se dedicará mayor tiempo a la comprensión de conceptos y a descubrir las relaciones entre unos y otros, a la motivación, orientación e interacción que a suministrar mucha información nueva, y/o a la consolidación de destrezas y dominio de rutinas.

### **Estructura de las unidades**

Para conseguir un nivel de comprensión y aprendizaje significativo hay que completar todas las fases del aprendizaje. Proponemos cuatro fases básicas en el tratamiento de cada unidad o concepto:

Partiendo de una situación real y significativa:

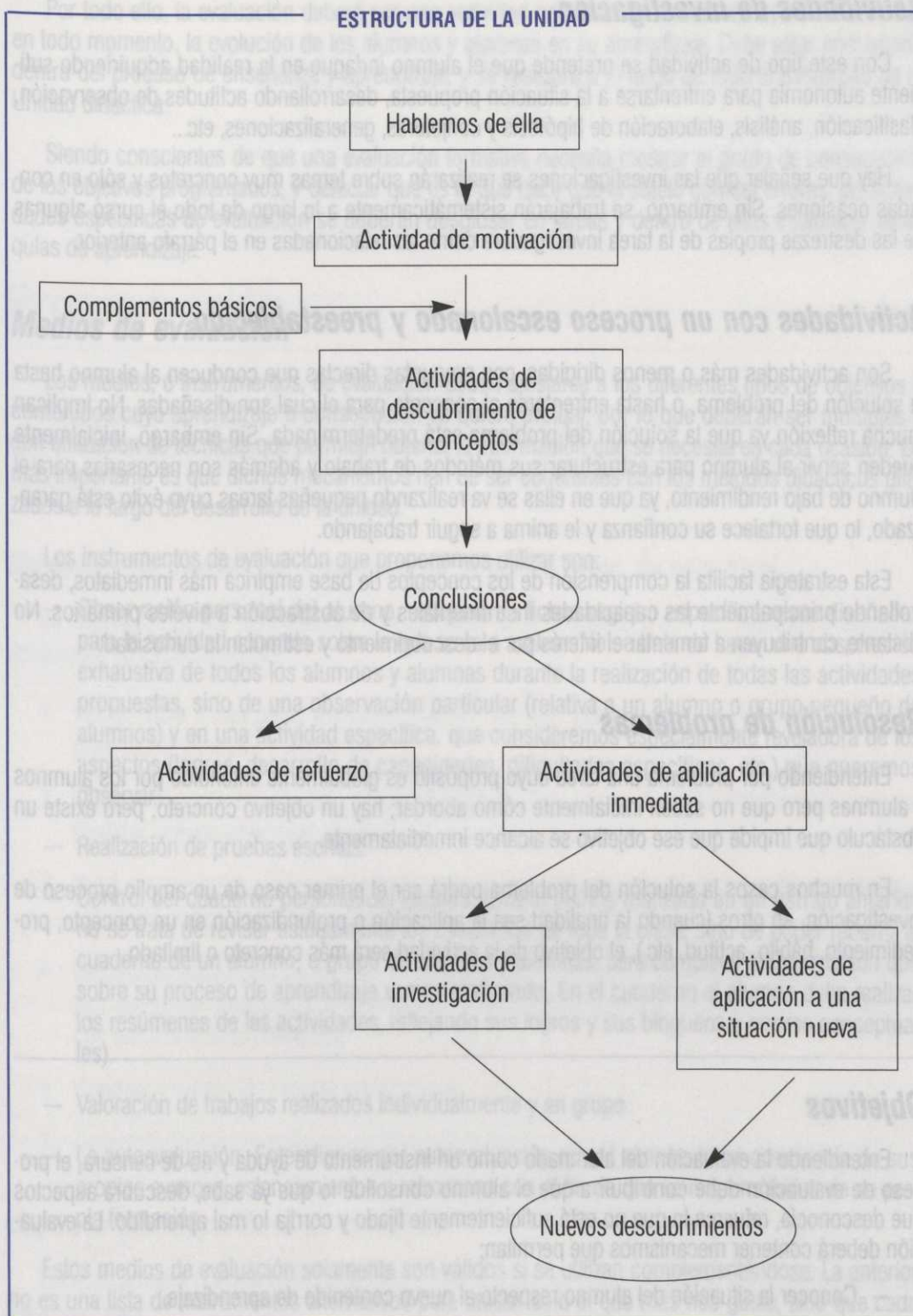
1. Experimentación.
2. Comprensión: representar y reflexionar.
3. Comunicación.
4. Aplicación.

Por otro lado, en cada tema o unidad deben de programarse actividades de enseñanza y aprendizaje que desarrollen la mayor variedad posible de competencias personales y matemáticas en el alumnado. El conocido Informe Cockcroft propone como actividades imprescindibles en todo proceso de enseñanza las siguientes:

- Exposición por parte del profesor o profesora.
- Discusión entre profesor o profesora y alumnos y entre alumno-alumno.
- Trabajo práctico apropiado.
- Consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas.
- Resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana.
- Realización de trabajos de investigación.

Recogiendo estas ideas, la estructura orgánica que proponemos para el desarrollo de cada unidad didáctica queda articulada en el siguiente cuadro:

## ESTRUCTURA DE LA UNIDAD



El trabajo en el aula se realizará, siempre que sea posible, con un soporte de materiales didácticos variados que permitan seguir trabajando los conceptos desde un planteamiento inicial basado en la intuición. Los contextos en los que se presenten los temas deberán contener ejemplos cercanos a la experiencia del alumnado y a su entorno sociocultural.

Los diferentes estilos y estrategias didácticas las podríamos clasificar en:

Trabajo  
en el aula



## **Actividades de investigación**

Con este tipo de actividad se pretende que el alumno indague en la realidad adquiriendo suficiente autonomía para enfrentarse a la situación propuesta, desarrollando actitudes de observación, clasificación, análisis, elaboración de hipótesis y conjeturas, generalizaciones, etc...

Hay que señalar que las investigaciones se realizarán sobre temas muy concretos y sólo en contadas ocasiones. Sin embargo, se trabajarán sistemáticamente a lo largo de todo el curso algunas de las destrezas propias de la tarea investigadora como las relacionadas en el párrafo anterior.

## **Actividades con un proceso escalonado y preestablecido**

Son actividades más o menos dirigidas, con preguntas directas que conducen al alumno hasta la solución del problema, o hasta enfrentarse al concepto para el cual son diseñadas. No implican mucha reflexión ya que la solución del problema está predeterminada. Sin embargo, inicialmente pueden servir al alumno para estructurar sus métodos de trabajo y además son necesarias para el alumno de bajo rendimiento, ya que en ellas se va realizando pequeñas tareas cuyo éxito está garantizado, lo que fortalece su confianza y le anima a seguir trabajando.

Esta estrategia facilita la comprensión de los conceptos de base empírica más inmediatos, desarrollando principalmente las capacidades instrumentales y de abstracción a niveles primarios. No obstante, contribuyen a fomentar el interés por el descubrimiento y estimulan la curiosidad.

## **Resolución de problemas**

Entendiendo por problema una tarea cuyo propósito es globalmente entendido por los alumnos y alumnas pero que no saben inicialmente cómo abordar; hay un objetivo concreto, pero existe un obstáculo que impide que ese objetivo se alcance inmediatamente.

En muchos casos la solución del problema podrá ser el primer paso de un amplio proceso de investigación, en otros (cuando la finalidad sea la aplicación o profundización en un concepto, procedimiento, hábito, actitud, etc.), el objetivo de la actividad será más concreto o limitado.

---

## **Evaluación**

### **Objetivos**

Entendiendo la evaluación del alumnado como un instrumento de ayuda y no de censura, el proceso de evaluación debe contribuir a que el alumno consolide lo que ya sabe, descubra aspectos que desconocía, refuerce lo que no está suficientemente fijado y corrija lo mal aprendido. La evaluación deberá contener mecanismos que permitan:

- Conocer la situación del alumno respecto al nuevo contenido de aprendizaje.
- Apreciar y juzgar el nivel de progreso de los alumnos y alumnas de acuerdo con los objetivos propuestos.
- Descubrir las principales dificultades de los alumnos y alumnas en la consecución de dichos objetivos.
- Suministrar datos sobre la eficacia de los medios e instrumentos utilizados en el desarrollo de la programación.
- Utilizarla como refuerzo en su aprendizaje.
- Informar a las familias.

Por todo ello, la evaluación deberá ser una actividad cotidiana de manera que permita conocer, en todo momento, la evolución de los alumnos y alumnas en su aprendizaje. Debe estar enmarcada dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, y se realizará a lo largo de todo el desarrollo de la Unidad didáctica.

Siendo conscientes de que una evaluación formativa necesita mostrar el grado de consecución de los objetivos programados, y detectar qué es lo que hace que el sujeto cometa errores, las actividades específicas de evaluación se deberán desglosar en tareas y dentro de ellas establecer jerarquías de aprendizaje.

## Medios de evaluación

Los medios, o instrumentos, de evaluación deben ajustarse a los diferentes tipos de objetivos y contenidos cuyo aprendizaje o consecución se quiere evaluar, por lo que deberán ser múltiples y con utilización de técnicas que permitan obtener la información que se necesita en cada ocasión. Lo más importante es que dichos mecanismos han de ser coherentes con los métodos didácticos utilizados a lo largo del desarrollo de la unidad.

Los instrumentos de evaluación que proponemos utilizar son:

- Observación personal del alumno, reflejada en fichas registro específicamente diseñadas para la actividad concreta sobre la que se va a evaluar. No se trata de hacer una observación exhaustiva de todos los alumnos y alumnas durante la realización de todas las actividades propuestas, sino de una observación particular (relativa a un alumno o grupo pequeño de alumnos) y en una actividad específica, que consideremos especialmente reveladora de los aspectos (logros, desarrollo de capacidades, dificultades específicas, etc.) que queremos observar.
- Realización de pruebas escritas.
- Control del cuaderno personal del alumno. (Como hemos matizado en un párrafo anterior, no se trata de revisar asiduamente los cuadernos de toda la clase, sino de poder recurrir al cuaderno de un alumno, o grupo de alumnos y alumnas, para completar la información que sobre su proceso de aprendizaje vamos realizando. En el cuaderno el alumno debe realizar los resúmenes de las actividades, reflejando sus logros y sus bloqueos y errores conceptuales).
- Valoración de trabajos realizados individualmente y en grupo.
- La autoevaluación. Entendiendo por autoevaluación que el alumno tome conciencia de sus propios avances, estancamientos o retrocesos con el fin de que se responsabilice de su propia formación.

Estos medios de evaluación solamente son válidos si se utilizan complementándose. La anterior no es una lista de instrumentos alternativos para utilizar sólo el que más nos guste, sino que cada uno revela una información parcial de la marcha del proceso de aprendizaje de nuestros alumnos y alumnas. Sólo con la utilización conjunta de todos ellos es como podemos llegar a establecer juicios fundamentados y realizar una evaluación realista y justa.

En el desarrollo de la Unidad didáctica (U. D. N.º 2) explicamos más en profundidad la utilización de estos medios de evaluación.







## Programación

Proponemos dos tipos de Objetivos, seleccionados de los propuestos en los documentos curriculares como Objetivos Generales de la etapa y del área; unos son de tipo *más general*, y otros *más específicos*.

### Objetivos que pueden ser asumidos por todas las áreas de este nivel

La enseñanza de las matemáticas en esta etapa debe contribuir a que los alumnos y alumnas desarrollen su capacidad para:

1. Comprender e interpretar mensajes orales y escritos producidos con algún tipo de código (científicos, técnicos, matemáticos...).
2. Seleccionar críticamente fuentes de información, tratándolas de forma autónoma y con una finalidad previamente establecida.
3. Producir mensajes orales y escritos, y transmitirlos de una manera organizada e inteligente utilizando códigos específicos adecuados.
4. Desarrollar estrategias personales lógicas y utilizar todos sus recursos para interpretar, plantear y resolver problemas, reflexionando y valorando el proceso seguido y contrastándolo con otros procesos diferentes.
5. Conocer y valorar las propias capacidades.
6. Desarrollar hábitos y actitudes positivos de trabajo.

### Objetivos más específicos de este área

Específicamente la enseñanza de las matemáticas debe contribuir a que el alumno desarrolle su capacidad para:

1. Considerar las matemáticas como un instrumento que le permite comprender, representar, analizar, explicar y predecir hechos y situaciones cotidianas de una forma rigurosa, concisa y sin ambigüedades.
2. Justificar razonadamente (verbalmente y/o comprobándolas) la validez de las propiedades, hechos y conclusiones que se utilizan en un proceso.
3. Enfrentarse con éxito a situaciones nuevas, desarrollando su autonomía personal y la habilidad para reconocer relaciones entre sus conocimientos y la realidad.

## Objetivos

4. Ser conscientes del margen de error cometido en la obtención de medidas, tanto en las obtenidas de forma directa como indirecta, expresando el resultado con el número de cifras significativas adecuado.
5. Identificar y analizar formas y configuraciones geométricas que se presentan en la realidad y ser conscientes de las propiedades matemáticas que subyacen en ellas.
6. Familiarizarse y enfrentarse ágilmente a ciertos problemas tipo que son de frecuente aparición en la vida cotidiana, tales como: repartos proporcionales, tantos por ciento, descuentos, intereses, móviles, etc., a través de la práctica reflexiva.
7. Saber planificar un trabajo de recogida de datos, y decidir la mejor forma de representarlos y comunicarlos.
8. Interpretar, y producir, informaciones matemáticas en forma de tablas, gráficas, diagramas y códigos simbólicos, dando significado al hecho o fenómeno que están representando.
9. Desarrollar estrategias personales para analizar y comprender fenómenos aleatorios de la vida cotidiana.

## Tipos de contenidos

El Decreto de Currículo<sup>1</sup> del MEC agrupa los contenidos en tres tipos: unos de tipo conceptual, otros de tipo procedimental y los terceros de tipo actitudinal. Nosotros vamos a distribuir dichos contenidos agrupándolos en cinco categorías, y expresados en este momento de forma general:

- Hechos.
- Destrezas y rutinas.
- Estrategias generales.
- Estructuras conceptuales.
- Cualidades personales.

Los aspectos curriculares que vamos a destacar, corresponden a las capacidades básicas que queremos desarrollar y consolidar en los alumnos y alumnas, y el tipo de actividad matemática que deberán realizar.

De estas 5 categorías, consideramos que las **Estrategias generales** (entendiendo por esto procedimientos que el alumno elige para resolver una situación y que incluye la utilización de las demás categorías) son el núcleo fundamental de nuestra programación. Esta opción condiciona el tipo de trabajo que deberán realizar los alumnos y alumnas en clase, así como los métodos utilizados.

Esta agrupación en categorías ayuda a clarificar los diferentes elementos que componen la actividad matemática; en el desarrollo de las unidades didácticas se irán especificando estos contenidos, adecuándolos al tema concreto de trabajo:

HECHOS:

- Recordar términos.
- Recordar notación y símbolos.
- Recordar convenciones utilizadas en matemáticas.
- Recordar resultados.

1. Real Decreto 1345/91, de 14 de junio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria («B. O. E.» n.º 220 de 13 de septiembre de 1991).

## DESTREZAS Y RUTINAS:

### — Relativas al cálculo:

- Aproximar.
- Estimar.
- Medir.
- Algoritmos tradicionales de cálculo.
- Usos de la calculadora.

### — Relativas al lenguaje:

- Terminología específica.
- Habilidad para comunicar información.

### — Manuales y de percepción:

- Construir figuras y cuerpos.
- Elaborar gráficas y diagramas con precisión.

## ESTRATEGIAS GENERALES:

### — Las correspondientes a las destrezas y rutinas...

#### — Específicas de la actividad intelectual:

- Razonar.
- Analizar.
- Clasificar.
- Sistematizar.
- Abstractar.
- Tomar decisiones.

#### — Específicas de la resolución de problemas y realización de investigaciones.

#### — Específicas del cálculo (mental, con calculadora,...).

## ESTRUCTURAS CONCEPTUALES:

- Aplicar los conceptos aprendidos a situaciones nuevas.
- Adaptar un procedimiento a otra situación distinta.
- Conceptos básicos de cada unidad.
- Relaciones entre conceptos.

## CUALIDADES PERSONALES:

- Referentes a la organización, hábitos y formas de trabajo.
- Confianza en sus capacidades.

## Tratamiento de los temas

Hemos elegido tres temas de trabajo: «Geometría», «Las Matemáticas y la Información» y «Las Matemáticas del Azar».

En cada tema surgirá un punto de encuentro entre lo específico del tema y los Bloques de «Números» y «Medida» (que no vamos a trabajar de un modo diferenciado).

El álgebra ha de estar presente a lo largo de todo el programa en aquellas situaciones o problemas que lo necesiten, siendo esos momentos los más adecuados para potenciar su aprendizaje. Es a lo largo de la programación como irán desarrollándose la serie de habilidades algebraicas relativas a la simbolización, abstracción y generalización.

Consideramos *habilidades algebraicas* básicas:

- Utilizar las letras para simbolizar cantidades conocidas y desconocidas pero determinadas
- Utilizar expresiones literales para generalizar una situación y expresar regularidades, leyes, etc.

Tampoco hemos incluido un tema sobre la resolución de problemas ya que nos adentraremos en ello en cada uno de los tres grandes temas programados, de manera que las situaciones problemáticas serán nuestro punto de partida en la mayoría de las unidades didácticas.

En cuanto a la selección de contenidos, hay que seguir insistiendo en la mayor importancia de los contenidos de tipo procedimental, por su mayor valor formativo y porque aumentan las posibilidades de éxito de los alumnos y alumnas al enfrentarse a situaciones diversas de la vida cotidiana y del mundo laboral. No podemos olvidar que estamos trabajando con alumnos y alumnas que han elegido la Opción A.

Al darle a la opción A un carácter más terminal, proponemos hacer un tratamiento de los temas donde se:

- Favorezca el desarrollo de capacidades relacionadas con la aplicación de las matemáticas: transmitir y obtener información, resolver problemas relacionados con el entorno, tomar decisiones que requieran a las matemáticas, etc.
- Presente una gran variedad de ocasiones de aplicar lo aprendido.
- Utilice las matemáticas en la comunicación habitual.
- Limite la utilización del lenguaje algebraico y el formalismo.
- Insista en la valoración de los aspectos matemáticos de la realidad y del arte, desarrollando la capacidad para disfrutar de ellos.

## Criterios de evaluación

En la sección Orientaciones Didácticas<sup>2</sup> se define un «*criterio de evaluación*» como una referencia a los aprendizajes que se consideran esenciales, y cuya forma es la de: «*un enunciado relacionado con un contenido concreto y que expresa cuál es el tipo de aprendizaje que debe alcanzarse y en qué grado*».

Estos criterios de evaluación han de entenderse como un referente a la hora de planificar la evaluación, de modo que los distintos instrumentos que se utilicen en la misma se diseñen específica-

2. Página 140 de las Orientaciones Didácticas del libro: Secundaria Obligatoria. Matemáticas. M. E. C., 1991

mente con la intención de revelar el grado de consecución de estos criterios. Cada uno de dichos instrumentos será el más adecuado para mostrar un aspecto parcial de la situación de aprendizaje de los alumnos y alumnas.

Por nuestra parte consideramos que se han cumplido los objetivos educativos si los alumnos y alumnas son capaces de:

1. Decidir y utilizar el medio más conveniente de realizar los cálculos de un problema (mentalmente, manualmente, con calculadora) y la forma de realizarlos (exacta, aproximada, con fracciones o con decimales, etc.), dando la solución con un grado de precisión adecuado a las necesidades del problema y siendo conscientes del error cometido.
2. Interpretar las medidas expresadas en notación científica que aparecen en los textos y en los medios de comunicación, siendo conscientes de los órdenes de magnitud de los números de los que se habla.
3. Comprender y manejar el concepto de escala: utilizándolo para obtener las medidas reales de los objetos representados en un dibujo a escala, y viceversa, siendo capaces de determinar las medidas que debe tener una maqueta a partir de las dimensiones reales de los objetos que deben representarse.
4. Realizar construcciones geométricas planas (tridimensionales), identificando sus elementos y justificando las propiedades que se observen en ellas, haciendo uso de los movimientos y de la semejanza y generalizando los resultados a otras figuras más complejas.
5. Utilizar técnicas de descomposición para hallar directamente y de modo aproximado el área de figuras planas y el volumen de cuerpos sencillos, expresando el resultado con la precisión y las unidades más convenientes.
6. Identificar la existencia de una relación lineal entre dos magnitudes, trazando la recta que la represente y determinando su pendiente.
7. Interpretar relaciones funcionales sencillas. Pudiendo reconocer qué gráfica entre varias que se le presenten corresponde a la relación tratada, y llegando a asociar (si la función es elemental) el tipo de expresión algebraica (lineal, cuadrática,  $1/x$ ,  $a^x$ ) correspondiente.
8. Utilizar estrategias personales y heurísticas para la solución de problemas cotidianos que exijan un tratamiento matemático (búsqueda de un problema tipo al que se ajuste, ensayo y error, simplificación del problema, etc.), adoptando formas de trabajo propias de la actividad matemática (codificación de los elementos del problema, expresión de sus relaciones, realización de gráficos y diagramas, comprobación de las soluciones, perseverancia, etc.)
9. Realizar un estudio estadístico completo referido a una o dos características de una población, y/o comparando dos poblaciones: redactando la encuesta, recogiendo los datos, elaborando tablas y diagramas adecuados, calculando los parámetros más significativos y, finalmente, redactando unas sencillas conclusiones personales sobre los resultados obtenidos.
10. Interpretar una nube de puntos correspondiente a una distribución bidimensional, dando significado al coeficiente de correlación y realizando predicciones a partir de la recta de regresión (trazada de forma intuitiva).
11. Experimentar, o simular, sencillos fenómenos aleatorios y utilizar las técnicas estadísticas (recuentos, tablas, diagramas de árbol, cálculo de frecuencias y medias) para la asignación de probabilidades, comparando éstas con las probabilidades teóricas predichas por la Ley de Laplace.



## Desarrollo de la programación

### TEMAS Y UNIDADES DIDÁCTICAS. TEMPORALIZACIÓN

#### A) Tema primero: Geometría

##### Unidad 1: Lo grande y lo pequeño

Tiempo: 3 semanas

##### Unidad 2: Figuras y cuerpos

Tiempo: 4 semanas

##### Unidad 3: Movimientos en el plano y en el espacio

Tiempo: 3 semanas

#### B) Tema segundo: Las matemáticas y la información

##### Unidad 4: Tratamiento estadístico de la información (I)

Tiempo: 5 semanas

##### Unidad 5: Tratamiento estadístico de la información (II)

Tiempo: 2 semanas

##### Unidad 6: Buscando relaciones

Tiempo: 5 semanas

#### C) Tema tercero: Las matemáticas del azar

##### Unidad 7: Las leyes del azar

Tiempo: 7 semanas

Los principales valores pedagógicos y didácticos que encontramos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría son:

- Los problemas de geometría no exigen grandes conocimientos iniciales, y permiten que todos los alumnos y alumnas puedan llegar a resultados válidos.
- Es especialmente motivadora para los alumnos y alumnas al utilizar materiales manipulables, figuras y cuerpos.

## Tema primero: Geometría

- Desarrolla la intuición espacial, que es básica tanto para la vida cotidiana, como en el resto del currículo.
- Es ideal para desarrollar el razonamiento formal y estrategias generales (clasificación, búsqueda de propiedades, formulación de conjeturas, etc.) de los alumnos y alumnas.
- Es fuente de «buenos problemas».

El problema básico de la didáctica de la geometría consiste en decidir sobre la proporción que debe predominar en su enseñanza entre el aspecto deductivo y los aspectos inductivo, intuitivo y visual.

Por ello, para trabajar este núcleo queremos destacar las siguientes consideraciones:

- La Geometría debe ser una ayuda para comprender el mundo exterior. Vivimos en un mundo tridimensional. Se deben estudiar las formas clasificando las figuras y mostrando las relaciones que hay entre ellas. Y al mismo tiempo se deben enseñar métodos y fórmulas para medir longitudes, ángulos, áreas y volúmenes.
- No se debe suprimir la intuición, hay que educarla y cultivarla para que sea un buen soporte de la razón.
- Es necesario revitalizar el pensamiento geométrico.

Si los alumnos y alumnas ya han trabajado la Geometría en tercero, se trata de avanzar en su conocimiento, favorecer el desarrollo de capacidades generales y mostrar una gran variedad de ocasiones para aplicar lo aprendido. Por tanto el profesor o profesora realizará una adecuada selección de las actividades que se le irán proponiendo, en función de la situación y necesidades reales de su grupo de alumnos y alumnas.

El tipo de actividades geométricas que proponemos requiere una manipulación inicial para que, a través de ella, surjan relaciones y conjeturas que posteriormente se justificarán.

La finalidad que perseguimos con el estudio de la geometría es contribuir a desarrollar la capacidad de los alumnos y alumnas para:

1. Adquirir destrezas de cálculo aproximado para estimar resultados de cálculos de magnitudes con números grandes, siendo conscientes de la relación entre los errores que se cometen y la precisión de los datos.
2. Reconocer, manejar y describir figuras geométricas y sus elementos fundamentales utilizando la nomenclatura adecuada.
3. Hacer construcciones geométricas utilizando propiedades conocidas y/o procedimientos sugeridos por la intuición. Utilizar las construcciones para reconocer sus propiedades.
4. Utilizar la geometría como estrategia en la resolución de problemas.

#### UNIDADES DIDÁCTICAS

Unidad 1: Lo grande y lo pequeño. (El tamaño de las cosas).

Tiempo: 3 semanas.

Unidad 2: Figuras y cuerpos.

Tiempo: 4 semanas.

Unidad 3: Movimientos en el plano y en el espacio.

Tiempo: 3 semanas.



La Unidad didáctica que hemos desarrollado como ejemplificación corresponde a la N.º2: «Figuras y cuerpos».

## **Unidad 1: Lo grande y lo pequeño**

En esta primera Unidad vamos a estudiar la geometría en sus aspectos más numéricos, centrándonos en la medida de magnitudes lineales, fundamentalmente.

El núcleo básico de trabajo que proponemos es el estudio del tamaño de los sistemas que forman el universo, tanto en el orden de lo muy grande (galaxias, sistema solar, etc.) como de lo muy pequeño (célula, molécula, átomo, etc.), realizando cálculos sencillos, pero con magnitudes de tamaños que impiden la exactitud del resultado, obligando a utilizar la notación científica y el cálculo aproximado.

Es el momento de consolidar el concepto de potencia de exponente entero y las reglas de las operaciones y su jerarquía, así como de introducir el manejo de la calculadora científica.

Al haber grandes diferencias en la capacidad numérica de los alumnos y alumnas y ser ésta de importancia para el resto de los contenidos del área, la propuesta de actividades deberá estimular el interés por los números y sus relaciones. Las actividades deberán ser suficientemente abiertas para que todos los alumnos y alumnas puedan trabajar en ellas con autonomía y lograr resultados válidos.

El aprendizaje de las unidades de medida únicamente en situaciones estáticas o meramente mecánicas, no favorece su reflexión. Hay que comprender su carácter relativo presentando ejemplos de medidas tradicionales históricas y otras de uso todavía actual. En definitiva, el uso de unidades de medida debe acompañarse de una reflexión.

Trataremos también los contenidos correspondientes a la proporcionalidad y la semejanza, presentándolos en relación con el mundo que nos rodea y en conexión con otras áreas del currículo. Por la dificultad inherente a estos conceptos, se les debe dar un tratamiento diversificado y aplicado a distintos contextos. Además, la semejanza de forma no está en correspondencia intuitiva con la proporcionalidad numérica, al igual que saber hacer multiplicaciones no basta para saber cuándo y por qué hay que hacerlo.

### **Objetivos**

Los objetivos de esta Unidad son que el alumnado :

- Se familiarice con la notación científica y las potencias de exponente entero.
- Conozca las unidades de medida para las escalas de lo muy grande y lo muy pequeño.
- Desarrolle la capacidad de estimación de magnitudes y realice cálculos aproximados con una precisión acorde con las necesidades del problema.
- Utilice la proporcionalidad geométrica para representación de objetos a escala, y en cálculos indirectos de magnitudes.
- Reconozca las distintas cónicas y las propiedades que las hacen tan valiosas e interesantes.

### **Contenidos**

Los principales contenidos que se van a trabajar en esta Unidad son:

- Significado de la notación científica.
- Potencias de exponente entero y propiedades fundamentales para el cálculo.

- Aproximación en cálculo y medida.
- Control de errores en cálculos aproximados.
- Uso de la calculadora científica.
- Unidades de medida astronómicas y microscópicas.
- La representación a escala; relaciones superficiales y volumétricas entre figuras y cuerpos semejantes.
- Las cónicas, propiedades y métodos para dibujarlas.

### **Materiales**

- Calculadora científica.
- Útiles de dibujo.
- Instrumentos para dibujar cónicas.
- Conos y cilindros de plastilina y transparentes.
- Trasparencias.
- Vídeo: «Potencias de diez».
- Revistas especializadas sobre los satélites y las antenas parabólicas.

### **Propuesta de actividades**

Aunque ya hemos explicado con anterioridad el esquema de trabajo de una Unidad didáctica, creemos que es conveniente volverlo a exponer en esta primera Unidad.

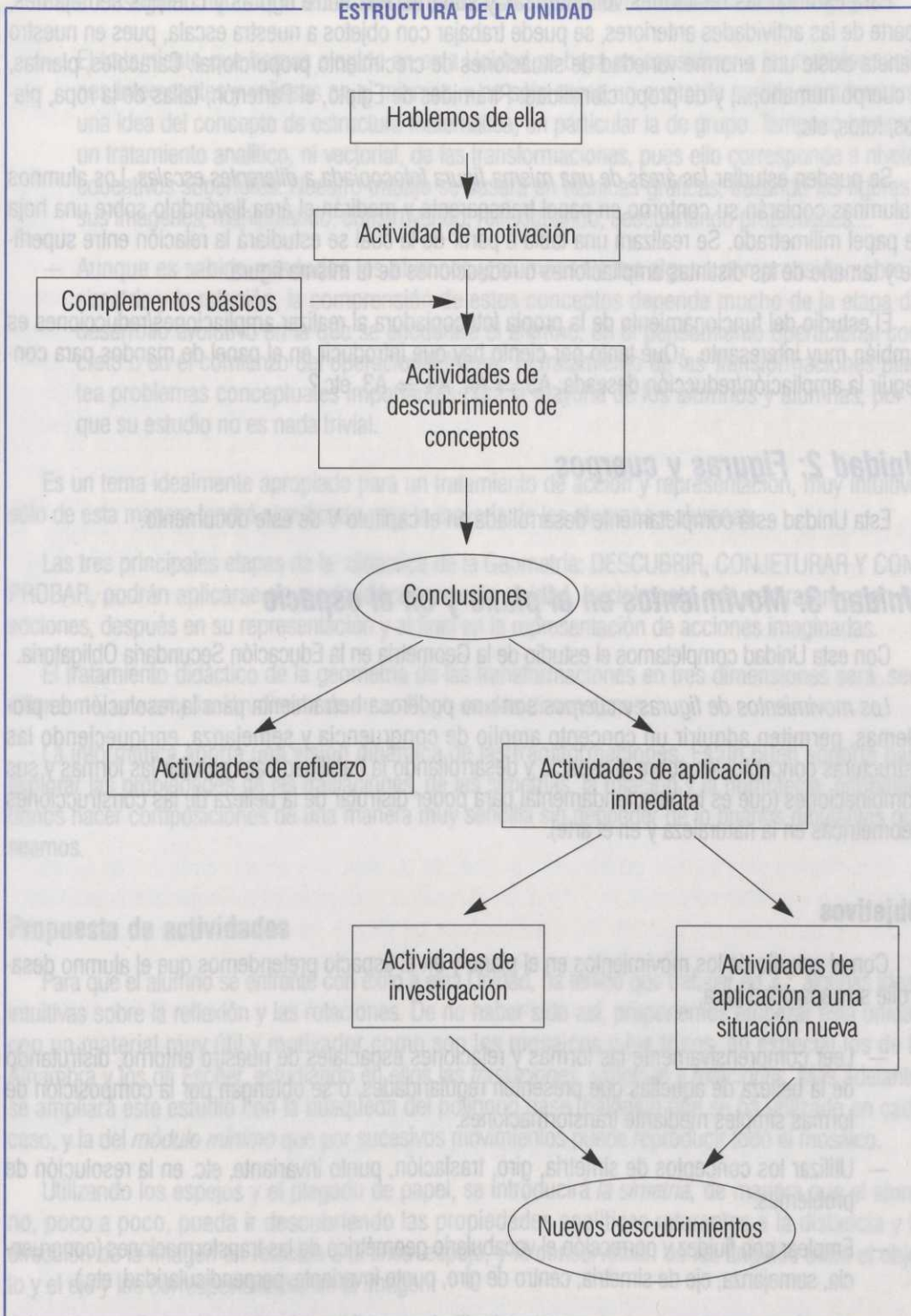
Proponemos, como actividad motivadora de introducción a la Unidad, el Vídeo didáctico «*Potencias de diez*», ya que conecta de forma idónea y creativa con el contenido de la unidad. De no disponer de él, puede sustituirse por el libro del mismo título, o por noticias de prensa sobre estos temas.

Se continuará con el *estudio de nuestro sistema solar y del planeta Tierra*. A partir de una lectura histórica sobre los trabajos de Kepler, o de Copérnico, sobre las órbitas de los planetas, se planteará la existencia de *las cónicas*. Se propondrán problemas en los que aparezcan las propiedades de las cónicas y situaciones en las que se manejen números grandes y pequeños.

Conectando con el vídeo anterior y continuando con el estudio del sistema solar, buscaremos datos sobre medidas de las órbitas, períodos de revolución, masa, radio, etc. de los planetas del sistema solar, y se resolverán problemas de medición indirecta mediante comparaciones entre ellos y los correspondientes valores de nuestro planeta. Se expresarán dichas medidas en unidades astronómicas y en unidades terrestres, haciendo ver la necesidad y la utilidad de la *notación científica* para los números muy grandes.

Se puede realizar la actividad de construcción de una maqueta del Sistema Solar, utilizando *las relaciones entre volúmenes, superficies, y longitudes de figuras semejantes*. Se desarrollará la capacidad de estimación de los tamaños a escala, al ver que no se puede hacer, razonablemente, una maqueta real a escala del sistema solar, pues los planetas serían o demasiado grandes o demasiado pequeños en relación al Sol, o bien las distancias entre los planetas serían excesivas.

## ESTRUCTURA DE LA UNIDAD



También se pueden estudiar las cónicas en relación con los satélites artificiales, pues encontramos cónicas tanto en la forma de las antenas de los radares que los controlan y las antenas de comunicación, como en las mismas órbitas de los satélites. Los alumnos y alumnas pueden realizar interesantes trabajos, buscando información en la prensa, y otros medios, pues son abundantes las noticias sobre satélites y naves espaciales.

Otra posibilidad es realizar *actividades de referencia histórica*, como la medida del radio de la Tierra por Eratóstenes, estudiar las órbitas de los cometas más famosos, etc.

Para estudiar las relaciones volumétricas y superficiales entre figuras y cuerpos semejantes, aparte de las actividades anteriores, se puede trabajar con objetos a nuestra escala, pues en nuestro planeta existe una enorme variedad de situaciones de crecimiento proporcional: Caracoles, plantas, el cuerpo humano,...; y de proporcionalidad: Pirámides de Egipto, el Partenón, tallas de la ropa, planos, fotos, etc.

Se pueden estudiar *las áreas de una misma figura fotocopiada a diferentes escalas*. Los alumnos y alumnas copiarán su contorno en papel transparente y medirán el área llevándolo sobre una hoja de papel milimetrado. Se realizará una tabla a partir de la cual se estudiará la relación entre superficie y tamaño de las distintas ampliaciones o reducciones de la misma figura.

El estudio del funcionamiento de la propia fotocopiadora al realizar ampliaciones/reducciones es también muy interesante. ¿Qué tanto por ciento hay que introducir en el panel de mandos para conseguir la ampliación/reducción deseada:  $A3 \Rightarrow A4$ ,  $A4 \Rightarrow A3$ , etc.?

## **Unidad 2: Figuras y cuerpos**

Esta Unidad está completamente desarrollada en el capítulo V de este documento.

## **Unidad 3: Movimientos en el plano y en el espacio**

Con esta Unidad completamos el estudio de la Geometría en la Educación Secundaria Obligatoria.

*Los movimientos de figuras y cuerpos* son una poderosa herramienta para la resolución de problemas, permiten adquirir un concepto amplio de congruencia y semejanza, enriqueciendo las estructuras conceptuales sobre el espacio y desarrollando la habilidad para percibir las formas y sus combinaciones (que es la base fundamental para poder disfrutar de la belleza de las construcciones geométricas en la naturaleza y en el arte).

### **Objetivos**

Con el estudio de los movimientos en el plano y en el espacio pretendemos que el alumno desarrolle su capacidad para:

- Leer comprensivamente las formas y relaciones espaciales de nuestro entorno, disfrutando de la belleza de aquellas que presenten regularidades, o se obtengan por la composición de formas simples mediante transformaciones.
- Utilizar los conceptos de simetría, giro, traslación, punto invariante, etc. en la resolución de problemas.
- Emplear con fluidez y corrección el vocabulario geométrico de las transformaciones (congruencia, semejanza, eje de simetría, centro de giro, punto invariante, perpendicularidad, etc.).
- Manejar con soltura los instrumentos de dibujo y medida en la obtención de figuras transformadas de otras mediante movimientos.
- Justificar adecuadamente los procedimientos y propiedades utilizadas en la resolución de problemas de movimientos geométricos.
- Elaborar conjeturas, comprobando su validez, sobre las propiedades geométricas de la composición de movimientos.
- Organizar trabajos de investigación para realizar en equipo.

Para conseguirlo habrá que tener muy en cuenta las siguientes consideraciones pedagógicas:

- El tratamiento que hemos elegido en esta Unidad se basa en considerar a las transformaciones interesantes y valiosas en sí mismas, y no sólo como un punto de partida para formarse una idea del concepto de estructura matemática, en particular la de grupo. Tampoco haremos un tratamiento analítico, ni vectorial, de las transformaciones, pues ello corresponde a niveles educativos superiores. Nuestro trabajo se basará en técnicas gráficas, trazando las figuras y sus imágenes, manipulando, construyendo, reflexionando, descubriendo propiedades....
- Aunque es sabido que todos los alumnos y alumnas tienen alguna comprensión sobre la simetría y la rotación, la comprensión de estos conceptos depende mucho de la etapa del desarrollo evolutivo en la que se encuentre el alumno: en el pensamiento operacional concreto o en el comienzo del operacional formal. El tratamiento de las Transformaciones plantea problemas conceptuales importantes para la mayoría de los alumnos y alumnas, por lo que su estudio no es nada trivial.

Es un tema idealmente apropiado para un tratamiento de acción y representación, muy intuitivo; sólo de esta manera tendrá significado para la mayoría de los alumnos y alumnas.

Las tres principales etapas de la didáctica de la Geometría: DESCUBRIR, CONJETURAR Y COMPROBAR, podrán aplicarse de modo idóneo en esta unidad. Inicialmente nos centraremos en las acciones, después en su representación y al final en la representación de acciones imaginadas.

El tratamiento didáctico de la geometría de las transformaciones en tres dimensiones será, sencillamente, una ampliación directa de su análogo en dos dimensiones.

La informática aporta una visión dinámica de las transformaciones. Es un buen soporte para explorar las propiedades de las traslaciones, de las simetrías, la rotación y la homotecia, permitiéndonos hacer composiciones de una manera muy sencilla sin depender de lo buenos dibujantes que seamos.

## Propuesta de actividades

Para que el alumno se enfrente con éxito a esta Unidad, ha tenido que trabajar en 3.º algunas ideas intuitivas sobre la reflexión y las rotaciones. De no haber sido así, proponemos empezar esta unidad con un material muy útil y motivador como son los mosaicos y los frisos, en especial los de la Alhambra y los de Escher, estudiando en ellos las *traslaciones*, *simetrías* y *rotaciones*. Más adelante, se ampliará este estudio con la búsqueda del polígono base (baldosa) que se ha utilizado en cada caso, y la del *módulo mínimo* que por sucesivos movimientos puede reproducir todo el mosaico.

Utilizando los espejos y el plegado de papel, se introducirá *la simetría*, de manera que el alumno, poco a poco, pueda ir descubriendo las propiedades analíticas referentes a la distancia y la dirección de la imagen en relación a la línea-espejo, y la conservación de los ángulos entre el objeto y el eje y los correspondientes de la imagen.

Una buena actividad de aplicación sería la construcción de polígonos regulares, no regulares y estrellados utilizando los espejos. Con ella no solamente se trabaja la generalización del valor del ángulo central del polígono según el número de lados, y la relación entre los polígonos estrellados y los demás polígonos, sino que permite además estudiar la reflexión con ejes no verticales (respecto al alumno), y aparece la necesidad de utilizar los conceptos de distancia y perpendicularidad para construir correctamente las figuras.

De la misma manera se debe introducir *la rotación*, empezando con aquellos casos en los que el centro de rotación esté en un extremo de la figura (pues es el más sencillo e intuitivo) y progresivamente ir variando la posición del centro de giro con respecto al objeto.

Las traslaciones surgirán de forma natural en el desarrollo de las actividades.

La elaboración de conjeturas y conclusiones llevará al alumno a formarse una idea clara sobre las propiedades de estas transformaciones y sobre los elementos necesarios para definir cada una de ellas. Se pueden ir recogiendo todas estas conclusiones en una tabla que caracterizará a cada isometría.

La necesidad de utilizar un lenguaje específico del tema: puntos invariantes, recta invariante, centro de giro, vector traslación etc., se irá haciendo más necesario para los alumnos y alumnas a medida que avanzamos en la unidad.

Otro material muy útil para estudiar la relación que hay entre *las isometrías* y para efectuar fácilmente sus composiciones es el retroproyector. Los alumnos y alumnas deben trabajar sobre transparencias, y así, al copiar las figuras que se le dan (polígonos regulares u otras figuras) e ir las superponiendo, se darán cuenta de que efectuar varios movimientos consecutivos se podría sustituir en algunos casos por un solo movimiento. De esta manera podrán confeccionar tablas con los resultados obtenidos en el estudio de la composición de movimientos.

Al trasladar las transformaciones estudiadas en el plano al espacio, nos encontramos con diferencias que es preciso aclarar cuanto antes. Así, el giro en el espacio tiene eje de giro, en lugar de centro de giro como ocurría en el plano, la simetría plana respecto de un eje es ahora simetría especular, que deja invariante a todos los puntos de un plano. Sin embargo la traslación es idéntica en el plano y en el espacio.

Además aparecen isometrías nuevas: *la simetría central* y *el movimiento helicoidal*. Pero creemos que estas últimas deben de estar fuera de los contenidos mínimos.

El estudio de las transformaciones en el espacio cae fuera de los objetivos prioritarios de la unidad. Sin embargo, si un grupo de alumnos y alumnas estuvieran dispuestos y preparados para afrontarlo, se podría trabajar como ampliación del tema.

Proponemos para trabajar las transformaciones en el espacio el estudio completo de *las transformaciones invariantes del tetraedro y del cubo*; *la realización de trabajos sobre geometría en la naturaleza*; y la utilización por parte de los arquitectos de los giros y traslaciones en el diseño de edificios (escaleras de caracol, elementos modulares, etc.).

Para estudiar las isometrías en el espacio podemos utilizar también la idea de motivo mínimo, o *módulo*, con fotografías de edificios, de animales y plantas o cuerpos geométricos conocidos.

También como ampliaciones del tema, se podría abordar el estudio de las isometrías en los poliedros regulares y su conexión con la dualidad. Así como el estudio completo de las isometrías en el espacio, incluyendo la simetría central y el movimiento helicoidal.

---

## Tema segundo: Las matemáticas y la información

En este tema el alumnado trabajará con conceptos y procedimientos correspondientes a la Estadística y a la Teoría de las Funciones. Aunque se van a trabajar unos después de otros, hemos querido englobarlos bajo el mismo bloque temático para resaltar la unidad de objetivos y de tratamiento de ambos aspectos del conocimiento matemático.

La finalidad principal del tema es desarrollar la capacidad del alumnado para:

- Interpretar críticamente las Informaciones de tipo matemático que se va a encontrar tanto en sus estudios, como en su vida cotidiana.
- Formarse criterios para deducir conclusiones y tomar decisiones a partir del análisis de dichas Informaciones.

- Valorar positivamente la utilidad de los métodos estadísticos (tablas, gráficas, símbolos, etc.), y del lenguaje de las funciones, para comprender, representar y predecir hechos, fenómenos y situaciones con un lenguaje riguroso, conciso y sin ambigüedades.
- Aplicar con autonomía las técnicas estadísticas y funcionales para enfrentarse a situaciones problemáticas y para comunicar sus ideas sobre la realidad.

Como la mayor parte de los contenidos ya se han trabajado en cursos anteriores, se trata este año de presentar datos y situaciones más realistas, complejas y variadas, obtenidas directamente por los alumnos y alumnas, o de los medios informativos, y que aludan no tan sólo a temas del ámbito personal de los estudiantes, sino también al mundo adulto (económico, político, social, etc.) al que están próximos a incorporarse.

Habrán que presentar las informaciones y los datos con la mayor variedad de formatos posible, para que, además de conocer e interpretar todos los elementos presentes, puedan traducir, si es preciso, de una forma de presentación a otra, extraer información implícita, realizar predicciones y tomar decisiones razonables a partir del análisis de los datos.

Siendo un objetivo fundamental del tema desarrollar la capacidad de análisis crítico de la información, habrá que trabajarla a lo largo de todo él.

#### UNIDADES DIDÁCTICAS:

Unidad 5: Tratamiento estadístico de la información (I)

Tiempo: 5 semanas

Unidad 6: Tratamiento estadístico de la información (II)

Tiempo: 2 semanas

Unidad 7: Buscando relaciones

Tiempo: 5 semanas

### **Unidad 4: Tratamiento estadístico de la información (I)**

Esta primera Unidad dedicada a la estadística, se centrará en el estudio de la estadística de una variable, dejando la correlación y regresión para una segunda unidad con el mismo título.

#### **Objetivos**

El objetivo principal es reflexionar sobre el significado y utilidad de cada uno de los pasos del proceso estadístico, esto es: la interpretación de datos y gráficas relativas a una población, el problema de la selección de muestras, la recogida de los datos y su presentación más adecuada, y el uso de los distintos parámetros que nos permiten aceptar o negar las conjeturas que sobre el comportamiento de la población se habían formulado; y comparar unas poblaciones con otras.

El tratamiento metodológico se hará desde el punto de vista del usuario de Informaciones estadísticas, y no del experto que las genera. El esfuerzo se dedicará principalmente a interpretar y «dar sentido» a los datos y parámetros, y no tanto al cálculo de los mismos. Es preciso enseñar a «leer» las tablas y gráficas estadísticas y a extraer información no explícita (totales, subtotales, porcentajes, aumentos y disminuciones, etc.), así como a formar criterios que permitan a los alumnos y alumnas emitir juicios relativos a la población representada. Para el cálculo de los pará-

metros más complejos (varianza, desviación típica) se recurrirá a los medios tecnológicos (calculadoras y/o ordenadores).

A lo largo de toda la Unidad los alumnos y alumnas trabajarán en grupos de 4 ó 5, de modo que necesariamente deban utilizar expresiones y conceptos matemáticos para comunicarse entre ellos, para comprender a los demás y hacerse comprender, aportando sus puntos de vista y su interpretación de los problemas planteados.

## Contenidos

Contenidos básicos de esta unidad son:

- Interpretación de diagramas, tablas y gráficos estadísticos.
- Uso de fracciones, porcentajes y números índices.
- Comprensión y aplicación de medidas de centralización y dispersión para hacerse una idea global de la población y comparar unas con otras.
- Uso elemental de las técnicas de muestreo y de su representatividad.
- Diseño de un experimento estadístico, ejecución del mismo y comunicación de los resultados.
- Utilización de fuentes documentales para obtener información sobre una población.
- Detección de falacias y deformaciones tendenciosas en la presentación y formulación de afirmaciones estadísticas.
- Reconocimiento y valoración de la utilidad de los métodos estadísticos para representar y resolver problemas de la vida cotidiana.
- Sensibilidad y gusto por la precisión y el orden al tratar y presentar datos y resultados.
- Valoración del trabajo en equipo, del espíritu de cooperación y de comprensión de las ideas ajenas.

Muchos de los conceptos con los que van a trabajar los alumnos y alumnas en esta unidad no son nuevos para ellos (tablas de frecuencias, medias, gráficos de barras y de sectores, etc.), se trata por tanto y principalmente de enfrentarles a situaciones nuevas en las que deban aplicar lo que ya saben, enriqueciendo los significados y aplicaciones de los conceptos.

Se deberá trabajar con gráficos y tablas estadísticas más complejas, con un uso más frecuente de datos dados en forma de porcentaje, frecuencias relativas y frecuencias acumuladas.

Se profundizará en el estudio de caracteres continuos y el uso de datos agrupados en clases.

Las medidas de dispersión se utilizarán de forma intuitiva, centrándonos en dar significado a un valor que nos viene dado o cuyo cálculo realizamos por estimación sobre la gráfica, o con ayuda de calculadoras.

Con el trabajo en equipo pretendemos que valoren el trabajo en equipo como la manera más eficaz de realizar actividades de planificación, diseño y realización de estadísticas.

## Materiales

- Tablas y gráficos estadísticas obtenidas de revistas y periódicos. En particular:
  - Publicitarias.
  - Deportivas.



- Económicas.
- Sociológicas.
- Políticas.
- Geográficas.

- Instrumentos de dibujo: reglas, papel milimetrado, cartulinas, lápices y rotuladores.
- Calculadoras científicas.
- Ordenadores con programas específicos de estadística, o con hojas de cálculo.

## Propuesta de actividades

### Trabajando con tablas

Podemos comenzar trabajando sobre tablas estadísticas, interpretando el significado de cada uno de sus elementos, añadiendo nuevas filas que reflejen los totales, convirtiendo valores absolutos en porcentajes, calculando valores acumulados, etc.; dividiendo las tablas en tablas parciales, o al contrario reuniendo en una tabla mayor el contenido de varias tablas; calculando los parámetros de centralización y por último traduciendo la tabla a un formato gráfico adecuado.

Siempre se pedirá a los alumnos y alumnas que respondan a preguntas que les obliguen a emitir juicios sobre la información que se les presenta:

- ¿Qué significa tal o cual dato?
- ¿Cuál ha sido el índice de aumento o disminución de determinado valor?
- ¿Qué conclusión puedes deducir de los datos?
- ¿Qué tendencia observas?

### Las gráficas estadísticas

De un modo similar a como lo hemos hecho con las tablas, trabajaremos con las gráficas. Esforzándonos por desarrollar la capacidad de análisis crítico de las informaciones de tipo matemático en todos los alumnos y alumnas, yendo más allá del simple conjunto de datos sin sentido, y llegando a predecir resultados, y viceversa a buscar las causas que han producido los resultados que se analizan a través de la gráfica.

Inicialmente se les suministrarán gráficas ya elaboradas, cuyo significado deberán encontrar los alumnos y alumnas por sí mismos en el trabajo en grupos. En algunos casos habrá que utilizar la capacidad de estimar la medida de una barra, o amplitud de un sector, pues muchas veces las gráficas publicadas son muy incompletas, o traen errores.

Se insistirá mucho en el trabajo con series temporales, introduciendo el concepto de número índice.

Para la elaboración de gráficas a partir de tablas se utilizará algún programa informático que agilice la tarea. Tan sólo deberán realizar los gráficos sobre papel en la exposición final de los resultados del experimento estadístico que tienen que realizar por grupos.

## Las medidas de dispersión

Las medidas de dispersión se introducirán en la comparación de valores correspondientes a dos muestras, o poblaciones, haciendo ver claramente la insuficiencia de las medidas de centralización para hacerse una idea global de la distribución de los valores. Se introducirá el concepto de rango, y después se presentará la desviación típica ( $\sigma$ ) como la medida del radio del intervalo centrado en la media y en el que se concentran aproximadamente el 68% de los valores.

Se desarrollará la capacidad para estimar el valor de  $\sigma$ , y se comentará el efecto que sobre ella ejercen los valores más alejados de la media.

## Realización de un estudio estadístico

Se planteará la realización de un estudio o experimento estadístico por grupos de 4 ó 5 alumnos y alumnas. El tema pueden elegirlo libremente, pero se les puede sugerir que trabajen simulando ser una empresa que necesita datos para hacer sondeos con fines comerciales, un partido político que quiere conocer los problemas y preocupaciones de los ciudadanos, etc. *Se trata de hacerles ver que los datos se recogen siempre con un fin determinado.*

A la hora de hacer el estudio estadístico surge el *problema de la elección de muestras*. Es importante que los alumnos y alumnas comprendan que las muestras aleatorias son siempre las más fiables. Para tomar consciencia del problema de la representatividad de una muestra, se realizará alguna actividad como puede ser una de recogida de datos dentro del grupo clase, tomando datos de grupos pequeños, elegidos de forma aleatoria en unos casos y de forma subjetiva en otros, y comparando los parámetros de centralización y dispersión obtenidos de las muestras con los correspondientes al total de la clase.

Los datos para los trabajos de los grupos se deberán recoger fuera del aula, y el tiempo de la clase se dedicará al diseño de la encuesta, cómputo de los resultados, realización de las tablas y gráficas, y la redacción de unas conclusiones personales del grupo.

Para terminar la Unidad cada grupo realizará una exposición de su experiencia, relatando las dificultades que han tenido y cómo las han ido solucionando, así como las conclusiones.

## Unidad 5: Tratamiento estadístico de la información (II)

En esta Unidad vamos a trabajar el concepto de dependencia estadística entre dos variables, y los conceptos de correlación y regresión lineal. Con ello completamos la formación estadística en esta etapa.

Hemos dedicado 2 semanas para el desarrollo individualizado de esta unidad, pues los conceptos y procedimientos específicos de la correlación y regresión pueden estudiarse independientemente de la unidad anterior. Pero debe quedar claro que sólo pretendemos hacer una primera toma de contacto, lo que supone que el tratamiento se realizará desde un punto de vista fundamentalmente intuitivo, ya que no trivial, evitando cualquier demostración formal, deducción o justificación de las fórmulas de los parámetros que se van a introducir.

Esta Unidad sirve a su vez de enlace con la siguiente (funciones), con la que comparte muchos objetivos, contenidos y procedimientos: representación de puntos en el plano, dependencia entre variables, traducción entre datos de una tabla y su forma gráfica, estimación y predicción de valores, etc.

## Objetivos

Los Objetivos de la Unidad son:

- Desarrollar la intuición del significado de la existencia de correlación entre dos variables, y de la capacidad para estimar el coeficiente de correlación a partir de la observación de la nube de puntos.

- Utilizar la recta de regresión, estimada «a ojo» eligiéndola entre varias rectas posibles, para predecir valores estimados de las variables (interpolación), o el comportamiento esperado para la evolución de la variable que se estudia (extrapolación).
- Desarrollar criterios que permitan realizar correctas deducciones a partir de la existencia de correlación entre dos variables, y criticar las deducciones incorrectas que se suelen realizar, tal como suponer que correlación implica relación de causa–efecto.

Se presentarán los cálculos de correlación y regresión como una de las herramientas más importantes de la investigación científica, como ayuda para la búsqueda de las causas de los fenómenos, y para predecir resultados.

## Contenidos

Los contenidos básicos que se van a trabajar son:

- Concepto de dependencia aleatoria, o estadística, entre variables.
- Idea intuitiva del coeficiente de correlación y de recta de regresión.
- Valoración de la importancia y utilidad del estudio de la dependencia entre variables para el conocimiento de las causas de los fenómenos, así como para predecir su evolución.
- Uso de la calculadora estadística para el cálculo de los parámetros.

Los alumnos y alumnas trabajarán en parejas o en pequeños grupos. Se planificarán desde el primer día las actividades a realizar y los alumnos y alumnas tendrán que buscar datos de variables cuya correlación les interese estudiar, a partir de fuentes documentales, realizando pequeñas encuestas, etc.

## Materiales

- Reglas y papel milimetrado.
- Calculadoras científicas con estadística bidimensional.
- Tablas de valores y/o gráficas obtenidas de los medios informativos.
- Retroproyector.

## Propuesta de actividades

Al ser éste un tema totalmente nuevo para los alumnos y alumnas, será preciso que el profesor o profesora realice una breve introducción, planteando a los alumnos y alumnas *el problema de cómo saber si dos fenómenos están relacionados y si uno es causa o efecto del otro*. Así mismo planteará la necesidad de buscar métodos para predecir la evolución de una variable, o la estimación de valores que no figuran en la tabla de datos. Después los alumnos y alumnas propondrán situaciones, o fenómenos en que les resulte interesante estudiar la posible existencia de relación entre las variables que intervienen, y para lo que buscarán datos dentro o fuera del aula.

El estudio se puede comenzar representando distribuciones bidimensionales que muestren nubes de puntos alargadas y globulares, por ejemplo:

- N.º de zapato–longitud del palmo  $\Rightarrow$  nube alargada
- Peso–altura  $\Rightarrow$  nube alargada, pero menos
- Perímetro de la cabeza–calificaciones  $\Rightarrow$  nube globular

Para desarrollar la capacidad de estimar *el coeficiente de correlación* se debe trabajar la emparejación de *nubes de puntos*, elaboradas previamente por el profesor o profesora, con sus respectivos coeficientes. Es el momento para interpretar el significado del signo negativo de algunas distribuciones. La vida cotidiana nos ofrece multitud de fenómenos correlacionados para ser estudiados: contaminación, deportes, agricultura, etc.

Después se intentará estimar «a ojo» la correlación de otras distribuciones propuestas por ellos, y se utilizará la calculadora para obtener el valor correcto, bastando para ello que los alumnos y alumnas aprendan a programar el modo estadístico bidimensional y a introducir los datos, después con la sola pulsación de una tecla se obtendrá el coeficiente de correlación. No es necesario por tanto presentar, y mucho menos deducir, las fórmulas correspondientes salvo para aquellos alumnos y alumnas que las deseen explícitamente. El objetivo es que desarrollen la *intuición visual*, y ante la nube de puntos correspondiente a una distribución bidimensional puedan hacerse una idea aproximada del grado de correlación entre las variables (muy débil, débil, moderado, fuerte, muy fuerte, o funcional).

Las primeras *rectas de regresión* se trazarán «a ojo», desplazando una recta dibujada en una transparencia, sobre papel milimetrado en el que previamente se habrá representado la nube de puntos, utilizando para ello distribuciones anteriormente estudiadas y que hayan mostrado alta correlación. El profesor puede realizar una primera experiencia a la vista de toda la clase, bastando que sustituya el papel por otra transparencia y realice la actividad con el retroproyector. Sobre la recta de regresión se estimarán valores intermedios entre los ya conocidos, y se realizarán predicciones sobre comportamientos más allá del rango de valores de la tabla. Después se compararán los resultados estimados con los obtenidos directamente en la calculadora.

Será necesario insistir en la *inutilidad de la recta de regresión cuando la correlación no es alta*, y por contra se hará ver la exactitud de las predicciones cuando la correlación es máxima. A partir de una misma tabla de valores correlacionados, se recogerán los diferentes valores estimados por cada alumno (o grupo) sobre su recta de regresión para un mismo valor de la variable X, y se estudiará la dispersión entre todos ellos. Es muy fácil ver cómo varía la dispersión de los valores estimados según las variables estén más o menos correlacionadas.

El enlace con la siguiente unidad se puede ir preparando si se utilizan valores experimentales de variables en relación de *dependencia funcional* (alargamiento de un muelle con el peso, dilatación con la temperatura, etc.), entonces la correlación será prácticamente de 1, y la recta de regresión nos dará el valor exacto para los datos estimados.

Como ampliación del tema se puede trazar la recta de regresión con la fórmula de la función lineal ( $y=a+bx$ ), a partir de los coeficientes suministrados por la calculadora, y se comparará con la trazada «a ojo». Si bien es cierto que en este curso no se ha estudiado todavía el tema de funciones, tampoco es la primera vez que los alumnos y alumnas representan rectas, por lo que no deben presentarse problemas para realizar esta tarea entre los más aventajados.

Del mismo modo, el profesor decidirá si es interesante para la clase conocer otras propiedades de la recta de regresión, como son:

- pasa por el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$
- hace mínimos la suma de los cuadrados de las distancias entre los puntos y la propia recta.

Insistimos en que no pretendemos justificar las fórmulas de los diferentes parámetros: correlación, pendiente de la recta e regresión, covarianza, etc. sino sólo contribuir a desarrollar la intuición de su significado y utilidad.

## **Unidad 6: Buscando relaciones**

Esta Unidad completa el aprendizaje del lenguaje de las funciones en la educación obligatoria. Nos centraremos en la interpretación, y utilización, de gráficas, tablas y expresiones algebraicas para representar y describir situaciones y fenómenos del mundo real.

## Objetivos

El principal objetivo de la Unidad es *desarrollar la capacidad de los alumnos y alumnas para interpretar el tipo de relación existente entre dos variables*, ya sea describiendo la situación (o fenómeno) mediante un enunciado, un dibujo, una tabla de valores, una gráfica o una expresión algebraica; y en la traducción de un modo a otro; así como en la formación de modelos de situaciones reales, que puedan ser analizados a partir del estudio de las características globales de las gráficas.

*El método de trabajo será fundamentalmente cualitativo*, pues aunque los alumnos y alumnas deban, en algunos casos, realizar cálculos, medidas y representación ajustada de puntos, es necesario que estas actividades no les desvíen la atención del objetivo fundamental que es «dar sentido» a las gráficas. En algunas actividades el profesor o profesora debe indicar explícitamente a los alumnos y alumnas que no deben preocuparse por graduar los ejes, ni representar los puntos con exactitud, sino limitarse a buscar o decidir qué modelo general de gráfica se ajusta más al fenómeno descrito; y viceversa, en otros casos deberán idear situaciones que se ajusten a un modelo de gráfica que se da tan sólo de un modo esquemático.

Es imprescindible que el profesor o profesora se comporte a lo largo de toda esta Unidad como un *animador imparcial de las discusiones* y puestas en común de los grupos, animando a que todos los alumnos y alumnas expresen sus ideas, *sin emitir ningún juicio valorativo*, aceptando la propuesta errónea de un alumno justo después de otra más acertada emitida por otro. Hay que huir de la «*solución correcta*», pues en realidad, todo modelo que los alumnos y alumnas hagan de una situación real admitirá mejoras sin límite, de modo que el grado de sofisticación de las respuestas dependerá del esfuerzo y ganas de los alumnos y alumnas, es decir, del momento en que *ellos se sientan satisfechos de la solución encontrada*.

Aunque esté sobreentendido, *es fundamental crear un ambiente en la clase propicio para que los alumnos y alumnas utilicen el lenguaje matemático* en las discusiones, tanto en pequeño como en gran grupo, para comunicar sus interpretaciones y soluciones de las actividades propuestas. El profesor estará muy atento a que los alumnos y alumnas utilicen correctamente el lenguaje de las funciones y las gráficas.

## Contenidos

Los contenidos que se van a trabajar en esta Unidad son:

- Valoración de la utilidad de los métodos gráficos como una poderosa herramienta matemática.
- Dibujo cualitativo e interpretación de gráficas que expresen situaciones presentadas verbal o pictóricamente.
- Interpretación y análisis de las características globales de una gráfica: intervalos, crecimiento, máximos y mínimos, gradientes, etc.
- Elaboración de deducciones lógicas sobre el comportamiento del fenómeno o situación representados por una gráfica.
- Búsqueda de modelos de situaciones realistas e identificación de las relaciones funcionales entre sus variables.
- Identificación de la existencia de una dependencia lineal entre dos variables. Gráfica y expresión algebraica de la función lineal.
- Reconocimiento de las gráficas de otras funciones elementales: cuadráticas, recíprocas, exponenciales y periódicas.

Los alumnos y alumnas ya han trabajado en cursos anteriores parte de los conceptos y contenidos de esta unidad, pero el trabajo hasta ahora se ha centrado más en: construcción de gráficas sencillas, calculando valores de la gráfica y utilizando reglas graduadas para la representación de los puntos en el plano, o en la obtención de parejas de valores a partir de la gráfica, etc. Las situaciones estudiadas eran sencillas y el tratamiento algebraico escaso. Se trata ahora de profundizar en capacidades más difíciles: interpretación, generación de modelos, estudio de la dependencia entre las variables que influyen en una situación, elaboración de deducciones y predicciones, y en la medida de las posibilidades de los alumnos y alumnas interpretación y generación de expresiones algebraicas para representar fenómenos o situaciones.

## **Materiales**

- Calculadoras: de 4 operaciones y calculadoras gráficas programables.
- Papel milimetrado y reglas.
- Gráficas experimentales elaboradas en el Taller de Matemáticas.
- Ordenadores con programas didácticos para representación de gráficas.

## **Propuesta de actividades**

Para el desarrollo de esta Unidad será muy valioso disponer del libro: *El lenguaje de las funciones y gráficas* producido por el Shell Center y editado en español por el MEC y la Universidad del País Vasco. Las ideas que en él se exponen constituyen un método inmejorable para trabajar los contenidos de esta unidad, y han sido una referencia continua para la propuesta de actividades que presentamos.

Vamos a partir de la interpretación de puntos en el plano, trabajando de un modo cualitativo, hasta llegar a un tratamiento algebraico más profundo de la función lineal. Es importante considerar cuidadosamente el orden en que se presentan las ideas gráficas, guardando siempre relación con la etapa de desarrollo y madurez de los alumnos y alumnas.

Muchas de las actividades propuestas ya se habrán trabajado, con mayor o menor profundidad, en cursos anteriores; por tanto el profesor o profesora realizará una adecuada selección de las que ahora proponemos en función de la situación y las necesidades reales de su grupo de alumnos y alumnas.

### **Significado cualitativo de las gráficas**

#### **a) Interpretación de puntos**

Se muestran al alumno diversas situaciones presentadas mediante un dibujo, o un enunciado, acompañados de una gráfica con varios puntos, y se le pide que interprete cada uno de los puntos representados en los ejes cartesianos (que estarán rotulados pero no graduados). Razonando por parejas, o grupos pequeños, y de modo cualitativo, es preciso que todos los alumnos y alumnas lleguen a expresar sus ideas. El papel del profesor o profesora será el de observador, y/o guía en los momentos oportunos, pues uno de los objetivos principales de la unidad es fomentar la confianza y la autonomía de alumnos y alumnas para enfrentarse a situaciones novedosas y problemáticas. Las explicaciones se deberán hacer a cada individuo, o al grupo pequeño, ya que no es conveniente interrumpir el trabajo de toda la clase para dar explicaciones generales, que en la mayoría de los casos influirán negativamente en la marcha de la actividad.

## b) Traducción entre la descripción verbal y gráfica de una situación o fenómeno

De todos es sabido que los alumnos y alumnas tienen impresiones visuales incorrectas de lo que representa una gráfica. Para tratar este aspecto se presentarán al alumno diversas situaciones o fenómenos descritos mediante un enunciado, un dibujo o un esquema, y el alumno debe asociar cada uno de ellos con una gráfica adecuada (de entre un conjunto de ellas que se le presentan); los ejes de las gráficas, en principio, no están rotulados ni graduados, de modo que el alumno debe decidir qué variables representativas puede asociar a cada eje, pudiendo asignar más de una gráfica a cada situación. La sofisticación de las explicaciones, o de la representación elegida no debe forzarse por parte del profesor o profesora.

## c) Estudio de la pendiente

Para el análisis cualitativo de las diferentes pendientes que puede presentar una función en distintos puntos de su gráfica, se puede realizar la actividad de estudiar la altura del nivel de líquido en diferentes botellas, en función del volumen de líquido almacenado, asociando diferentes botellas con su correspondiente gráfica.

El profesor o profesora podrá dar explicaciones o técnicas para estudiar la evolución de la pendiente de la gráfica a lo largo de ella. Una vez introducido el concepto de pendiente, se debe avanzar en los aspectos que son de mayor dificultad para los alumnos y alumnas como son: la comparación entre distintas tasas de crecimiento, concluir que en la recta la pendiente es la misma en todos los puntos, y utilizar la idea de pendiente para decidir si dos rectas son paralelas o no.

## Construcción de gráficas

### a) Gráficas a partir de tablas

Se trata de estudiar las variaciones, regularidades y tendencias que muestran los valores de una tabla, deduciendo el modelo de gráfica que le corresponde. Antes del trazado de la gráfica es preciso que el alumno exprese verbalmente sus conclusiones. Se representarán los puntos que se deseen, pero no es necesario hacerlo con exactitud, ya que el objetivo de la actividad es la interpretación de los valores de la tabla, y del fenómeno que representa, de un modo global y cualitativo.

### b) Buscando relaciones

Es el momento de presentar situaciones y fenómenos realistas expresados mediante un enunciado en el contexto de solución de un problema (problemas sencillos de enunciado que se resuelvan con una sola incógnita). Los alumnos y alumnas deben, trabajando en grupos, analizar la situación, concretar las variables que intervienen, y estudiar el tipo de dependencia que existe entre ellas, y ayudándose de una gráfica, y una tabla de valores si es preciso, dar una solución al problema.

Los pasos a seguir son:

- Análisis de la situación, con la identificación de las variables y del modelo de dependencia que las relaciona.
- Generación de una gráfica aproximada que represente el fenómeno y pueda indicar el camino para la solución del problema.
- Elaboración de una tabla de valores (entre los que puede estar la solución, o que se deba interpolar en casos no lineales).
- Búsqueda de la fórmula de la función (planteada como un reto al que no todos los alumnos y alumnas deben responder).

Antes de escribir la fórmula de la función, se les debe pedir que describan verbalmente y por escrito los pasos a seguir para calcular el valor de la función a partir del valor de la variable independiente; pues es a partir de dicha formulación como el alumno llega a comprender la expresión simbólica, resumida en una fórmula, de la dependencia entre las variables.

### *La función lineal*

Por ser la función más elemental e importante, es el momento de detenerse a realizar un estudio más profundo de la función lineal. Habrá que pedir a los alumnos y alumnas que:

- Identifiquen la existencia de una relación de dependencia lineal entre dos variables a partir de un enunciado que describa la situación, de una tabla de valores, de una gráfica y de su expresión algebraica.
- Traducir entre sendas formas de expresar la dependencia lineal, en particular entre las formas gráfica y algebraica.
- Utilizar con soltura los conceptos de pendiente y de ordenada en el origen de la función lineal.

Hay una gran disparidad entre el desarrollo de la capacidad de leer la información representada en una gráfica y la de apreciación de las relaciones algebraicas entre las variables. La conexión entre una expresión algebraica y una gráfica no es sencilla, pero no se trata de empezar de cero, pues los alumnos y alumnas deben haberse enfrentado hasta ahora numerosas veces con funciones lineales. El fin de la actividad es consolidar lo ya sabido, haciendo hincapié en los dos últimos objetivos. Para conseguirlos se propone el trabajo con calculadoras gráficas programables, o bien con algún programa de ordenador específico para representaciones gráficas; siendo preferible el uso de calculadoras.

Se comenzará trazando rectas cualesquiera en la pantalla de la calculadora, para ello se ha de ajustar el tamaño adecuado de la ventana gráfica (rango). Después se variará uno solo de los coeficientes de la función observando su efecto. Después se programa la calculadora para que genere rectas aleatorias (sometiendo los coeficientes a ciertas restricciones) y los alumnos y alumnas deberán deducir la expresión algebraica sirviéndose, si es preciso, de la función TRACE que les da directamente las coordenadas de cualquier punto de la recta.

Es el momento también de enfrentarse a problemas cuya solución implique el planteamiento y resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales. La solución se realizará de forma gráfica; el punto de corte de las dos rectas se encontrará trazándolas simultáneamente en la calculadora; con ayuda de la función TRACE se recorrerá cualquiera de ellas hasta llegar al punto común (solución).

Tan sólo se profundizará en las técnicas de solución algebraica de los sistemas con aquellos alumnos y alumnas que estén preparados para ello. Primeramente se buscarán valores para X e Y que satisfagan una ecuación, y posteriormente se enseñará el proceso algebraico para obtener la solución del sistema. Pero aunque parezca un proceso sencillo, supone el uso de conceptos difíciles de entender y aprender incluso para alumnos y alumnas brillantes.

### *Otras funciones elementales*

Como complemento y ampliación de la Unidad se puede trabajar con las representaciones gráficas de funciones cuadráticas, exponenciales, recíprocas, etc. Se utilizará la calculadora tanto para la elaboración de tablas de valores como para la representación gráfica. El objetivo es que el alumno no termine sus estudios sin haberse enfrentado a la gráfica de funciones elementales tan importantes como las mencionadas, y al menos llegue a asociar cada tipo de modelo de gráfica con su correspondiente expresión estándar. El marco de la actividad debe seguir siendo la resolución de problemas. Dada la facilidad de generar gráficas con la calculadora, los alumnos y alumnas pueden



llegar a establecer conclusiones sobre aspectos generales de las gráficas mencionadas, tales como que:  $a$  debe ser menor que 1 para que la gráfica de  $y = a^x$  sea decreciente, que la gráfica de  $y = 1/x$  no puede cortar los ejes, o  $a$  asociar la forma parabólica con la función cuadrática.

No debe ser esta la primera vez que los alumnos y alumnas se enfrenten con los fenómenos aleatorios en la clase de matemáticas. En cursos anteriores han ido creándose esquemas e intuiciones sobre el comportamiento del azar a través del estudio de fenómenos aleatorios sencillos, experimentando en clase con materiales manipulativos (dados, monedas, bolas, cartas, etc.), y realizando simulaciones de otras experiencias más complejas.

El concepto de probabilidad se ha asociado al de frecuencia relativa de un suceso, y en casos sencillos se ha utilizado la Ley de Laplace para la asignación de probabilidades a priori.

En este 4.º curso de la E. S. O. pretendemos seguir avanzando en el conocimiento de las leyes del azar, fundamentalmente a través de:

- Una ampliación del repertorio de herramientas matemáticas y estrategias adecuadas para estudiar los fenómenos aleatorios.
- Abordar el estudio de fenómenos aleatorios más complejos, tales como: experimentos compuestos, probabilidad condicionada, probabilidad geométrica, etc.

El objetivo fundamental es trabajar para conseguir:

- Que el alumno valore los métodos estadísticos y del cálculo de probabilidades como los más adecuados para enfrentarse a situaciones de la vida en que interviene el azar.
- Utilice sus conocimientos sobre el azar para tomar decisiones razonables ante situaciones y fenómenos imprevisibles.
- Corregir los errores más extendidos sobre el comportamiento del azar y mejorar sus esquemas sobre el azar.
- Que el alumno se forme criterios que le permitan analizar críticamente las teorías y mensajes de las pseudociencias, sectas, y personajes que se presentan como detentadores de poderes paranormales; así como de las falsas creencias populares sobre el azar, tales como: corazoadas, amuletos, gafes, etc.

La idea es contribuir a que el alumno desarrolle estrategias personales para analizar y comprender fenómenos aleatorios, ya sea recurriendo a una experimentación repetida, una simulación, un análisis gráfico, etc. recogiendo información significativa en tablas y diagramas que le permitan emitir juicios sobre el comportamiento esperado del fenómeno en cuestión.

Las fórmulas y conceptos de la combinatoria no son en sí mismos un objeto de estudio, pues siempre se podrá recurrir a métodos alternativos para realizar los recuentos necesarios. Hay que primar los contenidos procedimentales, y la fijación de valores y actitudes, sobre los contenidos conceptuales y formales del tema; de modo que la probabilidad se seguirá tratando de un modo empírico y experimental, posponiendo para posteriores estudios su presentación axiomática.

UNIDADES DIDÁCTICAS:

Unidad 7: Las leyes del azar

Tiempo: 7 semanas.

## Tema tercero: Las matemáticas del azar

## Unidad 7: Las leyes del azar

El objetivo de esta Unidad es enfrentar a los alumnos y alumnas a una gama lo más amplia posible de situaciones y fenómenos en los que interviene el azar, dándoles la oportunidad de ir consolidando sus esquemas e intuiciones sobre el comportamiento del azar y sus leyes.

No se trata de dotar al alumno de un arsenal de fórmulas y técnicas para la solución de problemas de azar y probabilidad, sino de conseguir que desarrollen sus propias intuiciones y estrategias para procesar informaciones de tipo probabilístico de un modo significativo y útil, independientemente del grado de formalización de los conceptos al que hayan llegado.

Se trata, por tanto, de fortalecer la autonomía del alumno para aplicar en su vida cotidiana sus esquemas sobre el azar, de manera que le permitan tomar decisiones razonables ante dichas situaciones.

La metodología se basará en proponer actividades de tipo experimental en las que el alumno tenga una parte activa, y pueda realizar conjeturas sobre un fenómeno o situación, idear estrategias para la experimentación y buscar modelos para la simulación del fenómeno aleatorio. No se deben realizar actividades de probabilidad como una simple colección de juegos de azar, sino que se plantearán simulaciones de situaciones y fenómenos de interés en otras áreas, por ejemplo la genética. Los alumnos y alumnas deberán pensar sobre la mejor forma de recoger datos e información significativa de los experimentos propuestos, y aplicar las técnicas estadísticas para la elaboración de conclusiones: valores más probables, valor medio esperado, etc.

Los fenómenos y situaciones aleatorias con los que se va a trabajar serán lo más variados posible, aunque se pueden clasificar en dos tipos:

- Juegos de azar, con el uso de monedas, cartas, dados, ruletas, etc.
- El azar en la vida cotidiana (sociedad, economía, política, etc.): genética, esperanza de vida, causas de accidentes, controles de calidad, investigación científica, análisis de riesgos, etc.

### Objetivos

Resumiendo, los objetivos de la Unidad se concretan en contribuir a que los alumnos y alumnas desarrollen su capacidad para:

- Analizar críticamente las Informaciones de contenido probabilístico que aparecen en los medios de comunicación.
- Tomar decisiones razonables ante situaciones azarosas.
- Valorar y aplicar técnicas y conceptos estadísticos (tablas, diagramas, cálculo de frecuencias, etc.) y estrategias probabilísticas (experimentación, simulación, etc.) para la solución de problemas de azar.
- Aplicar sus conocimientos sobre el azar para analizar la equidad de los juegos de azar que abundan en la sociedad, detectar el sesgo de un generador aleatorio, y ser críticos ante las falsas creencias tan populares en relación con el azar: corazonadas, amuletos, etc.

Los contenidos con los que vamos a trabajar en esta Unidad son más amplios que en otras unidades anteriores, pero hay que tener en cuenta que es la unidad más extensa y a la que hemos destinado más tiempo en la programación (7 semanas).

## Contenidos

Los contenidos que se trabajarán en esta Unidad son:

- Terminología básica sobre sucesos: elementales, contrarios, complementarios, dependientes e independientes, seguro e imposible, experimento compuesto, suceso condicionado, etc.
- Utilizar el lenguaje verbal, gráfico y simbólico para describir situaciones aleatorias.
- Reconocimiento y valoración de las leyes del azar para describir, predecir y tomar decisiones sobre situaciones inciertas.
- Utilizar tablas y diagramas para efectuar el recuento de los resultados en un experimento aleatorio simple y compuesto.
- Asignación empírica de probabilidades a sucesos, y en casos sencillos calculándolas teóricamente, utilizándolas para reconocer el posible sesgo de un generador aleatorio.
- Planificación de experiencias para el estudio de fenómenos aleatorios. Diseñando, si fuera preciso, una simulación de aquellos fenómenos que no se puedan reproducir en el aula.
- Sentido crítico ante las falsas creencias sobre el azar.
- Valoración del trabajo en equipo.
- Gusto y sensibilidad por la precisión y el orden en la presentación de los resultados de un trabajo.

## Materiales

- Dados de 4, 6, 8, 10 y 20 caras.
- Dados en blanco y dados cargados.
- Ruletas y pirindolas.
- Monedas diversas y fichas de colores.
- Juegos de naipes.
- Bolsas negras y bolas de colores.
- Tableros.
- Calculadoras.
- Ordenadores con Basic o Logo.

## Propuesta de actividades

La siguiente propuesta de actividades cubre un amplio abanico con el que trabajar con todo tipo de alumnos y alumnas y puntos de partida.

Se trabajará siempre en parejas o en pequeños grupos. La secuencia típica de cada actividad será:

- Realizar una primera conjetura en respuesta a los interrogantes de la actividad.
- Manipular/experimentar/simular el fenómeno con los materiales adecuados.
- Recoger los datos en tablas / elaborar diagramas.

- Reformular las conjeturas (y nueva experimentación si es necesario).
- Exponer las conclusiones / puesta en común.
- Consolidar los aprendizajes aplicando lo aprendido a otras situaciones.

### **Realización de un diagnóstico**

Este diagnóstico servirá para conocer lo mejor posible el tipo y grado de conocimiento que tienen nuestros alumnos y alumnas sobre el azar, así como el grado de desarrollo de las capacidades matemáticas previas y necesarias para construir sobre ellas los nuevos aprendizajes sobre el azar y la probabilidad. El diagnóstico se puede basar en una prueba escrita, o en una actividad inicial realizada por toda la clase en diálogo con el profesor o profesora, en la que éste interroga constantemente a los alumnos y alumnas, descubriendo sus esquemas sobre el azar, y las soluciones que van proponiendo. Con esta prueba debe quedar claro la situación de los alumnos y alumnas en relación a:

- Uso coloquial del lenguaje probabilístico.
- Concepto de fracción y ordenación de fracciones.
- Procedimientos y técnicas de recogida de datos.
- Ideas previas sobre el azar: equiprobabilidad de sucesos, espacio muestral, lógica de sucesos, etc.

Una vez que se realice el diagnóstico se puede comenzar a concretar el programa de actividades, adecuándolas a las necesidades del grupo.

### **Reconocimiento de fenómenos aleatorios e ideas previas**

Los alumnos y alumnas deben asignar, de forma intuitiva, un número entre 0 y 1 a diferentes sucesos de la vida cotidiana, unos aleatorios y otros deterministas. Se hará una puesta en común y se explicará el vocabulario básico.

### **Sucesos elementales no equiprobables**

Es necesario que los alumnos y alumnas aprendan las limitaciones de la Ley de Laplace, y asocien la probabilidad de un suceso al valor límite de la frecuencia relativa. Debemos enfrentarles por ello a situaciones en que no se cumpla, o no puedan aplicar, la Ley de Laplace, y deban recurrir necesariamente a la experimentación para la asignación de probabilidades. Por ejemplo: lanzamiento de chinchetas, dados cargados, ruletas de sectores desiguales, etc.

### **Estabilidad de la frecuencia relativa y probabilidad**

Experimentando con el lanzamiento de monedas, dados, pirindolas y ruletas, etc. se estudiará la frecuencia relativa de sucesos elementales y compuestos, observando cómo la variación de la frecuencia relativa obtenida por unos y otros grupos se estabiliza al agrupar los resultados de toda la clase y se corresponde con el valor previsto antes de realizar el experimento.

### **Probabilidad y estadística**

Se pueden plantear muchas cuestiones probabilísticas estudiando los datos de una tabla estadística. A partir de un estudio de audiencia de programas de televisión, por ejemplo, se puede preguntar sobre la probabilidad de que una persona elegida al azar haya visto cierto programa, o por el número esperado de alumnos y alumnas de la clase que hayan visto 1, 2 o más programas de la lista, etc.

Este tipo de actividades de probabilidad basadas en datos de una tabla, o de un gráfico estadístico, es básico. Permiten trabajar sobre situaciones cuya experimentación y simulación escapa a las posibilidades de los alumnos y alumnas; y por otro lado es una oportunidad para presentar usos de la estadística y la probabilidad en contextos de gran importancia social, económica o política.

Así, la estadística viene en ayuda de la probabilidad. Por ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo niño que nazca en un hospital sea hembra?
- ¿Sería importante disponer de una relación de los nacimientos habidos en dicho hospital en los últimos años?

De este modo, los alumnos y alumnas van aprendiendo a utilizar los conceptos de la probabilidad en situaciones realistas, interpretando enunciados complejos que suponen la unión e intersección de sucesos más simples y el concepto (más o menos formalizado) de probabilidad condicionada.

### *La ley de Laplace*

El principal problema es llegar a desarrollar la intuición sobre la desviación que es razonable esperar entre la frecuencia experimental de un suceso, y la correspondiente frecuencia calculada por la Ley de Laplace. Se realizarán experiencias (lanzamiento de monedas, dados, ruletas, etc.) para ver cómo crece la diferencia entre el valor medio esperado y la frecuencia absoluta de un suceso al aumentar el número de pruebas, y cómo al mismo tiempo la frecuencia relativa se acerca cada vez más a un valor límite que coincide con el calculado por la Ley de Laplace.

### *Apuestas equitativas*

En muchos casos la probabilidad de un suceso se expresa como razón entre las posibilidades a favor y en contra de que se produzca. Es el momento de abordar conocidos juegos de azar (maquinas tragaperras, lotería, bingo, loto, etc.), simplificando las características si es preciso, estudiando si el premio es equitativo con la apuesta realizada. ¿Cómo se determina la apuesta que se debe realizar en un juego de azar para que sea equitativo? Se introducirá entonces la esperanza matemática, pero sin necesidad de hablar de variable aleatoria, ni de distribución de probabilidad.

### *Experimentos compuestos*

Seguramente se ha trabajado ya con fenómenos aleatorios que se podían incluir en este apartado. Por ejemplo, hemos podido estudiar el experimento consistente en tirar dos dados y sumar o restar los valores de cada uno, y los alumnos y alumnas han utilizado diagramas de árbol o tablas bidimensionales para encontrar el espacio muestral correspondiente. Es el momento de estudiar más sistemáticamente los experimentos compuestos, ya consistan en experiencias iguales repetidas, o en la composición de experimentos de naturaleza muy diferente.

Conviene comenzar de nuevo con sencillos experimentos compuestos de dos pruebas distintas, e ir aumentando la dificultad. La pregunta clave es ¿suponer cierto un suceso puede modificar o no la probabilidad de otro?

Se introducirá el principio de multiplicación con la ayuda de diagramas de árbol.

La dependencia o independencia entre dos pruebas la estudiaremos experimentalmente a partir de la extracción consecutiva de dos o más bolas de una urna (o de cartas de una baraja), primero con reposición de cada bola extraída y después sin reposición, de modo que se observe claramente la diferencia entre ambas situaciones. También es conveniente, y fácil, realizar experiencias compuestas lanzando monedas: primero con 2 y estudiando la situación con diagramas de árbol, y después con 3 y utilizando diagramas de Venn.

Los alumnos y alumnas se quedan a las puertas del Teorema de Bayes, pero creemos que es prematuro introducirlo en este nivel educativo de un modo general y para todos. Siempre está abierta la puerta para aquellos alumnos y alumnas más aventajados que pueden resolver sencillos problemas de probabilidad de las causas de forma intuitiva con los conocimientos que ya han adquirido.

### Probabilidad geométrica y simulaciones

Es muy interesante el estudio de problemas que impliquen cálculo de áreas para hallar la probabilidad de un suceso.

En principio escapa a las posibilidades de los alumnos y alumnas el tratamiento formal de los espacios de probabilidad continuos. Pero existen multitud de experiencias de azar que son fácilmente comprensibles por ellos y que se corresponden con este tipo de espacios continuos. Por ejemplo: experiencias de azar con ruletas, dianas, y todas aquellas en que el resultado de la experiencia sea un punto del interior de una figura.

Las primeras actividades de este tipo se realizarán con ruletas cuyos sectores tendrán distinta superficie. Experimentando con ruletas, los alumnos y alumnas deben llegar a asociar por sí mismos la probabilidad de un sector con el ángulo que abarca.

Después se pueden estudiar problemas del tipo «lluvia aleatoria de puntos». La simulación de la lluvia se puede realizar muy fácilmente con ayuda de ordenadores o calculadoras programables, con lo que rápidamente tendremos el resultado de miles de experiencias. En caso de carecer de ellas se puede simplificar el tablero, recurriendo a superficies cuadrículadas (donde la lluvia aleatoria de puntos se puede simular con el lanzamiento de dos dados, uno para cada coordenada del punto). Los alumnos y alumnas asociarán rápidamente la probabilidad de un suceso con la superficie de tablero cuyas casillas le corresponden.

El principal objetivo de la Unidad es desarrollar la intuición visual para saber ver el espacio e interpretar las relaciones entre sus formas.

- Características y propiedades de los Poliedros
- Clasificación de poliedros
- Desarrollar capacidades básicas de tipo intelectual: reflexión, observación, capacidad de análisis y síntesis, etc.
- Los poliedros como secciones planas de cuerpos

## Desarrollo de la Unidad: Figuras y cuerpos

### Introducción

Un factor muy importante que influye en el desarrollo de la capacidad espacial es la habilidad para reconocer un objeto cuando se ve desde diferentes posiciones. Para potenciar la intuición espacial trabajaremos las formas y figuras construyéndolas, observándolas, comparándolas, transformándolas y modificándolas.

La Unidad presenta inicialmente un tratamiento intuitivo con un planteamiento inductivo, actuando sobre la manipulación con materiales físicos, potenciando la reflexión para que el alumno construya sus propias ideas matemáticas. En este planteamiento, hay que dejar sitio para presentar ocasiones en las que el alumno pueda desarrollar la capacidad de formular hipótesis y anticipar teoremas.

Utilizaremos como un elemento más de motivación la propuesta de actividades al alcance de los conocimientos de todos los alumnos.

Trabajaremos con diferentes materiales ya que esto ayuda a visualizar las propiedades y características de las figuras geométricas desde distintos aspectos.

Como decíamos en la introducción del Tema Primero, el alumno ya ha trabajado en cursos anteriores la geometría de las formas por lo tanto se trata de avanzar en su conocimiento, favorecer el desarrollo de capacidades generales y mostrar una gran variedad de ocasiones para aplicar lo aprendido.

El planteamiento que hemos hecho en esta Unidad, requiere:

- Haber construido en 3.º los polígonos con materiales diversos: varillas de mecano, libro de espejos, tamgrans...
- Haber trabajado algo las propiedades geométricas de los polígonos y utilizarlas para su estudio y construcción.
- Haber trabajado las áreas por equivalencia de figuras a partir de una unidad de área previamente elegida.

Si el tratamiento de la Geometría en 3.º no ha sido este, debería seguirse una línea más clásica en el desarrollo de esta unidad, o introducir poco a poco estos métodos utilizando materiales más acordes con la metodología utilizada.

La propuesta de actividades que hemos hecho no significa que deberán ser trabajadas todas ellas; deberá ser el profesor el que haga una selección eligiendo aquellas que mejor se adecuen al grupo de alumnos con los que esté trabajando. Sin embargo, deberá mantenerse su estructura, esto es, se realizarán actividades de los tres tipos planteadas: las de introducción de conceptos, las de aplicación y las de investigación.

---

## Objetivos **Didácticos**

El principal objetivo de la Unidad es desarrollar la intuición visual para saber ver el espacio e interpretar las relaciones entre sus formas.

Todo el trabajo a desarrollar en el aula tratará de responder a cuatro objetivos básicos:

- Desarrollar capacidades básicas de tipo intelectual: reflexión, observación, capacidad de análisis y síntesis, etc.
- Desarrollar estrategias de resolución de problemas.
- Comunicar de manera precisa y coherente los resultados de sus trabajos.
- Ser conscientes de sus habilidades matemáticas.

### **De la Unidad**

- Reconocer, manejar y describir figuras geométricas y sus elementos fundamentales utilizando la nomenclatura adecuada.
- Hacer construcciones geométricas utilizando propiedades conocidas y/o procedimientos sugeridos por la intuición. Utilizar las construcciones para reconocer sus propiedades.
- Medir directa o indirectamente longitudes, ángulos, superficies y volúmenes tratando de estimar el error cometido.
- Clasificar según criterios lógicos mediante razonamientos sencillos.
- Realizar estimaciones y aproximaciones de volúmenes de objetos cercanos al alumno.
- Hacer representaciones de figuras geométricas a escala.
- Desarrollar la percepción a partir de la observación de las figuras desde distintos ángulos.
- Descomponer las figuras según unas condiciones dadas.
- Descubrir fórmulas que permitan calcular volúmenes de cuerpos sencillos.
- Utilizar eficazmente instrumentos de dibujo.
- Reconocer y explicar figuras congruentes, semejantes o equivalentes según un criterio dado.
- Consolidar aprendizajes asignados a momentos anteriores.

---

## Contenidos

Se pretende que el alumno trabaje conjuntamente el plano y el espacio, se familiarice con las formas y cuerpos geométricos, descubra las propiedades de los poliedros regulares y calcule volúmenes a través de las relaciones que se pueden establecer entre ellos.

A lo largo de la Unidad nos iremos familiarizando con los cuerpos geométricos a través de la manipulación de materiales diversos.

El núcleo básico lo constituyen los poliedros y en especial el Cubo.



## **Conocimientos básicos**

### **Cuerpos geométricos: Poliedros:**

- Descripción e identificación de sus elementos.
- Características y propiedades de los Poliedros.
- Clasificación de poliedros.
- Los polígonos como secciones planas de poliedros.
- Relaciones de inscripción, descomposición e intersección de figuras y cuerpos.
- Valoración de la importancia y utilidad de algunas formas geométricas para propósitos concretos.

### **Volumen:**

- Determinación de una unidad de volumen arbitraria.
- Volumen de cuerpos geométricos por descomposición en paralelepípedos.
- Algoritmos básicos elementales para el cálculo de volúmenes.
- Representaciones espaciales.

## **Capacidades básicas que se potenciarán a lo largo de la Unidad**

En las situaciones de experimentación y en los problemas planteados se potenciará la búsqueda sistemática de :

### **Estrategias:**

- Recoger, organizar y tratar informaciones diversas.
- Buscar un esquema que simplifique la tarea.
- Enunciar y desarrollar ideas comprobándolas posteriormente.
- Tomar decisiones.
- Emplear material de trabajo apropiado.
- Utilizar diagramas, dibujos...
- Revisar sistemáticamente las diferentes alternativas.
- Generalizar.

### **Procedimientos de investigación:**

- Abstracter del enunciado los datos relevantes.
- Tomar nota de las observaciones y resultados.
- Tener en cuenta todos los factores que pueden surgir y tomar decisiones.
- Predecir y visualizar los resultados.
- Hacer cálculos cuando sea necesario.

En el caso de las investigaciones, además, tendrán que presentar el trabajo siguiendo un esquema inicial presentado por el profesor que aparece detallado en el apartado «Metodología». Una vez elaboradas las conclusiones, es importante someter a discusión los resultados de las investigaciones ya que si no, se pierde gran parte de su valor. *El pensamiento en voz alta aclara muchas ideas.*

## Materiales

El uso de materiales favorece el desarrollo de la imaginación espacial y mejora la competencia geométrica de los alumnos.

Para trabajar esta unidad proponemos los siguientes materiales:

- Colecciones de sólidos.
- Colecciones de polígonos (Polydron y polígonos troquelados).
- Cubos de porexpan.
- Cuters o cuchillas.
- Pegamento para el porexpan (ceyx-porex).
- Espejos.
- Policubos.

Recomendamos como libros de lectura para los alumnos:

- *Los cuentos de Gulliver.*
- *El electrón es zurdo.*
- *Planilandia.*

## Organización del trabajo

### Metodología

El tratamiento de la Geometría como investigación, descripción y organización del espacio y sus formas implica la actividad de los alumnos como procedimiento primordial.

Estableceremos una correspondencia entre la construcción de polígonos trabajada en tercero, la equivalencia de áreas y el cálculo de áreas por descomposición con la construcción de poliedros, equivalencia de volúmenes y el cálculo de volúmenes por métodos empíricos y por descomposición.

Los *principios metodológicos* en los que basaremos el desarrollo de la Unidad serán:

- Los alumnos descubrirán y construirán los conceptos seleccionados a través de la experimentación y la observación.
- Presentaremos las actividades con distintos niveles de profundización para que todos los alumnos puedan trabajar en ellas.
- Introduciremos elementos históricos, lúdicos y conectados con el arte y nuestro entorno.

Como ya hemos dicho en la introducción, trabajaremos con amplio uso de material manipulable presentando situaciones problema y proponiendo temas de investigación.

Las fases por las que pasarán los alumnos en su actividad serán:

- Manipulativa-reflexiva.
- Recogida de datos de las observaciones de forma organizada y sistemática: elaboración de tablas, diagramas, esquemas...
- Formulación de conjeturas o hipótesis siempre que sea oportuno.
- Comprobación de las conjeturas y formulación de conclusiones válidas en esos casos (abstracción y generalización).
- Expresión por escrito y a veces oralmente de los procesos seguidos en sus razonamientos, conjeturas y conclusiones.
- Consolidación de los contenidos tratados.
- Aplicación de esos contenidos a otras situaciones.

### El trabajo en el aula

Se iniciarán las actividades con un coloquio entre profesor y alumnos sobre las intenciones de la Unidad y los objetivos que se persiguen con ella. A continuación, se «identificarán» las ideas o conocimientos previos que tienen los alumnos sobre el tema. No creemos necesario pasar una prueba inicial escrita ya que son mínimos los requisitos previos necesarios para que el alumno pueda trabajar las actividades, pero sí es necesario que el alumno, como decíamos en la introducción de la unidad, esté familiarizado con esta forma de trabajo.

Cada alumno dispondrá de un cuaderno personal para las matemáticas. En él quedará recogido todo su trabajo correspondiente a las siete fases de su actividad. Además hará en él la corrección de las pruebas escritas individuales.

El trabajo en el aula se centrará en la introducción de los conceptos mediante la realización de las actividades de observación y experimentación, y en la elaboración de las conclusiones de estas actividades que serán realizadas por cada alumno individualmente, con una breve discusión posterior con sus compañeros en pequeños grupos. Para completar las conclusiones, ampliarlas o modificarlas se hará una puesta en común en el gran grupo, de modo que todos los alumnos deberán tener recogidas en sus cuadernos personales ambas conclusiones (la realizada inicialmente por él mismo y la del grupo clase).

Las actividades de aplicación se realizarán fuera del aula, así como la mayor parte de las actividades llamadas de investigación.

Los trabajos de investigación, que se realizarán en pequeños grupos o individualmente, deberán ser planificados previamente por el profesor.

Se le dará al alumno una ficha inicial con las pautas del trabajo:

- Nombre o título del tema de la investigación.
- Condiciones mínimas que requiere la realización del trabajo:
  - Recogida y análisis de datos.
  - Desarrollo del trabajo.
  - Elaboración de conclusiones.
  - Presentación del trabajo.

— Fuentes de información utilizadas.

— Fecha de entrega.

El alumno realizará en esta Unidad al menos dos de este tipo de actividades, una casi al comienzo de la Unidad, y otra finalizada ya la Unidad.

## **El profesor en el aula**

A lo largo de la Unidad la actividad del profesor será grande. Será el orientador de la actividad e intervendrá desbloqueando y animando siempre que lo considere necesario, pues él es el que conoce cada elemento del proceso y dónde se encuentra cada alumno en cada momento. Su actitud será abierta y de diálogo; atenderá a cada alumno en particular y al grupo; planteará nuevos interrogantes en función de los razonamientos que vaya escuchando. Además, tendrá que ayudar en la organización del trabajo y en la tarea de síntesis.

## **Agrupamiento de los alumnos y Aula-taller**

La propuesta de actividades a partir de una situación problema de observación y experimentación, necesita de un agrupamiento de los alumnos en el aula que les permita trabajar conjuntamente, comunicarse las ideas y sugerencias y/o discutir sobre el mejor camino a seguir. Esto no significa un trabajo en grupo. Sencillamente es un intercambio de ideas. No obstante, algunas de las actividades las tendrán que trabajar en grupo.

Sería deseable disponer de un Aula Taller, es decir, de un lugar en el que se pueda tener el material guardado, con amplias mesas y con espacio para trabajar cómodamente.

## **Evaluación**

El trabajo diario del alumno será la principal fuente de información para su evaluación. Los controles escritos tendrán escasa importancia en esta Unidad.

La apreciación por parte del profesor de los progresos de los alumnos, es un instrumento de evaluación especialmente significativo. La observación diaria de los alumnos en el aula aportará datos al profesor sobre ellos, y debe convertirse en una actividad cotidiana. El profesor recogerá estos datos en una tabla de observación elaborada expresamente para ello. Para que esta recogida de datos sea una tarea sencilla, se elaborará una tabla de doble entrada en la que aparezcan las actividades que realizará el alumno y el tipo de contenidos más representativos que se tratan en cada una de ellas. De esta manera, el profesor, al evaluar cada actividad, sabe qué tipo de capacidades, procedimientos, estrategias y otra serie de actitudes marcadas como objetivos está desarrollando el alumno.

El diálogo entre profesor y alumno descubrirá el grado de aceptación por parte del alumno de la evaluación que de él se va haciendo.

A lo largo de la Unidad se realizarán pruebas escritas sobre aspectos concretos de la unidad en las que el alumno se enfrentará a tareas acordes con los criterios de evaluación. En ellas, y en el resto de las actividades, se primarán los procesos frente a los resultados, valorando los razonamientos (ya sean acertados o no) expresados oralmente o por escrito.

La recogida periódica de los cuadernos personales, la realización de las actividades de aplicación y los trabajos de investigación individuales, aportarán más información sobre cada alumno en particular: de lo que es capaz de hacer, si tiene los conceptos e ideas bien o mal elaboradas, su nivel de expresión y de sus hábitos de trabajo.

## **Cómo evaluar al alumno y qué evaluar**

Los instrumentos de evaluación que a continuación describimos, no constituyen una relación de medios alternativos de evaluación. *Deberán aplicarse todos ellos* de manera que se complementen unos con otros.

Cada uno de ellos aportará datos sobre una serie de indicadores que hemos seleccionado de acuerdo con el medio de evaluación que se está utilizando.

### *Cuaderno personal del alumno*

- Expresión escrita.
- Elaboración de conclusiones y resúmenes.
- Corrección personal de los controles y actividades realizadas.
- Métodos de trabajo.

### *Observación en el aula*

- Hábitos de trabajo.
- Comunicación lógica de sus pensamientos y dificultades.
- Capacidades de tipo intelectual: reflexivo, observador, etc.
- Interés, motivación, concentración, atención...
- Conceptos mal aprendidos.
- Aceptación del trabajo cooperativo.

### *Trabajos de investigación*

- Utilización de la información recogida y del material de clase.
- Exposición y comunicación de los resultados.
- Uso de instrumentos matemáticos y el contenido matemático.
- Corrección de los resultados y conclusiones.
- La toma de decisiones.
- Diseño global.

### *Pruebas escritas*

Con ellas se recogerá información principalmente sobre:

- Conocimientos básicos de la Unidad.
- Utilización de los diferentes niveles de los métodos de razonamiento.
- Técnicas instrumentales.

### *Criterios de evaluación*

Los criterios de evaluación que hemos fijado para esta Unidad son los siguientes:

- Utilizar convenientemente la aproximación en un contexto de resolución de problemas, controlando el error que se comete.

- Utilizar con precisión términos geométricos.
- Analizar formas y configuraciones geométricas utilizando los conceptos de incidencia, ángulos, movimientos, semejanza y medida.
- Estimar el volumen de los cuerpos geométricos con una precisión acorde con la regularidad de sus formas y su tamaño, y calcularlo cuando se trate de formas compuestas por ortopedros.
- Utilizar la proporcionalidad geométrica para el cálculo de las medidas (dimensión, superficie, volumen) de figuras y cuerpos semejantes.
- Reconocer y descubrir regularidades y relaciones en formas y cuerpos geométricos.
- Revisar sistemáticamente los resultados de las medidas realizadas, aceptándolas o rechazándolas según se adecuen o no a los valores esperados.
- Expresar siempre los valores de las magnitudes con su correspondiente unidad de medida.
- Saber elegir entre varias formas o configuraciones geométricas presentadas las que mejor se ajusten a unas condiciones.
- Utilizar sistemáticamente en la resolución de problemas estrategias propias de la investigación.
- Expresar con coherencia sus argumentaciones, conjeturas, resúmenes, conclusiones e interrogantes.

Para la *evaluación de actitudes* el profesor irá recogiendo información sobre cada alumno atendiendo a los siguientes indicadores:

- Iniciativa e interés por el trabajo.
- Aceptación del trabajo en grupo.
- Comunicación con los compañeros.
- Valoración crítica de su trabajo y del de sus compañeros.
- Tenacidad y perseverancia en el trabajo.
- Capacidad para tomar decisiones.

### ***Evaluación del proceso de enseñanza***

La evaluación del proceso de enseñanza se realizará al mismo tiempo que la del alumno:

- Al realizar las actividades se tomará nota sobre:
  - El grado de dificultad de las mismas y su adecuación al grupo de alumnos.
  - La comprensión del texto escrito utilizado.
  - El interés y motivación suscitado en los alumnos.
  - La adecuación de los recursos materiales utilizados.
- Se medirá el grado de comprensión de los conceptos y de relaciones de unos con otros; se detectarán las lagunas que hayan podido quedar en una parte concreta de la programación.
- Se medirá, además, la adecuación de la temporalización.

## Actividades

Para trabajar esta Unidad hemos presentado una propuesta muy exhaustiva de actividades que deberán ser seleccionadas y/o completadas a criterio del profesor. La estructura es la misma para todas aquellas actividades que sean del mismo tipo. De la primera, «A través del espejo. Las tres dimensiones», presentamos la propuesta definitiva de trabajo del alumno.

### Actividades de motivación

- Con 6 palillos construye una figura que tenga 4 triángulos equiláteros.
- Lectura histórica sobre los poliedros Platónicos.
- Lectura sobre «Los viajes de Gulliver»

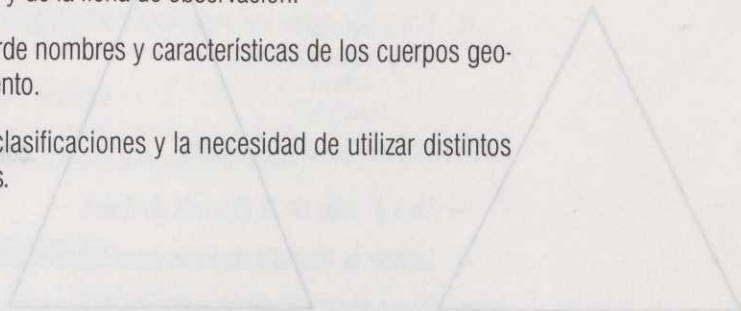
### Construcción y estudio de los poliedros

#### Actividad 1: A través del espejo. Las tres dimensiones

Cada alumno dispondrá de un libro de espejos y de la ficha de observación.

Se pretende que el alumno reconozca y recuerde nombres y características de los cuerpos geométricos más utilizados por ellos hasta este momento.

De las observaciones surgirán las primeras clasificaciones y la necesidad de utilizar distintos materiales para poder formar otro tipo de Poliedros.



#### Actividad 3: Poliedros regulares

**Material:** El mismo material que en la actividad anterior.

**Investigación:** Características, propiedades y construcción.

Se separarán de las construcciones anteriores los poliedros regulares y se clasificarán en una tabla como se muestra en la siguiente con el fin de caracterizar cada poliedro y establecer la Fórmula de Euler y observar la validez de la misma en el icosaedro.

POLIEDRO	N.º DE CARAS	N.º DE VERTICES	N.º DE ARISTAS
TETRAEDRO			
CUBO			
OCTAEDRO			
DODECAEDRO			
ICOSAEDRO			

#### Actividad 4. Extensión de la fórmula de Euler

Para desarrollar esta actividad es conveniente haber recogido en una tabla las características de todos los Poliedros obtenidos en la actividad 2, hacer el recuento como en la actividad anterior y comprobar que se cumple la Fórmula de Euler en todos los Poliedros convexos.

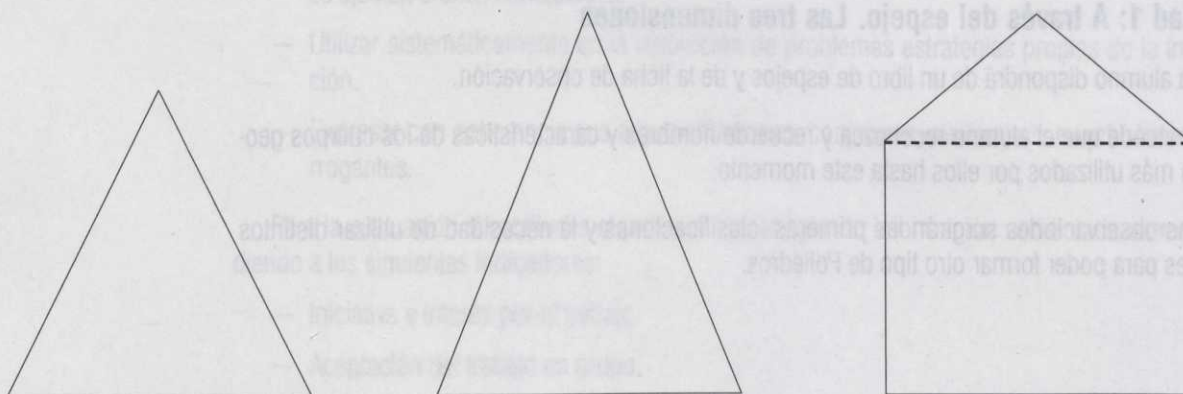
## A través del espejo. Las tres dimensiones

### Material:

Libro de espejos, cartulina, tijeras.

### Investiga:

Algunas piezas o figuras planas, debidamente colocadas en el libro de espejos, producen por reflexión cuerpos geométricos. Vamos a obtener pirámides, tetraedros y cubos con las siguientes piezas. Recórtalas y apóyalas sobre el libro de espejos de manera que se hagan visibles los cuerpos citados:



### Observaciones:

1. Cada pieza, ¿qué figura reproduce?
2. ¿Cuál es el ángulo de abertura del espejo?
3. ¿Qué nombres le darías a esas figuras?
4. ¿Cuáles son sus características?
5. ¿Conoces algún otro poliedro que no hayas obtenido con estas piezas?

### Conclusiones:



## Actividad 2: Polígonos y Poliedros

**Material:** Cada grupo de alumnos dispondrá de gran cantidad de Polígonos de material Plot o de Polydrón.

**Investigación:** Caracterización de los Poliedros. Clasificación.

Los alumnos irán construyendo Poliedros utilizando los polígonos engarzables del material elegido para la actividad. Aparecerán figuras cuyos nombres desconocen. Se verá la imposibilidad de formar un vértice si la suma de los ángulos de todos los polígonos que concurren en él es de  $360^\circ$ , y que como mínimo tienen que concurrir tres polígonos en cada vértice. Se recogerán todas las observaciones en el encerado y posteriormente se elaborará una tabla con las conclusiones. Se verá la necesidad de establecer una clasificación para poder analizar sus características más sistemáticamente.

Se establecerán criterios dicotómicos de clasificación con las siguientes pautas:

1. Sus caras son polígonos regulares (sí o no)
2. Son polígonos regulares iguales (sí o no)
3. Sus vértices son congruentes (sí o no)

obteniendo al final la siguiente clasificación:

- a) Poliedros regulares.
- b) Deltaedros, bipirámides.
- c) Poliedros semirregulares o Arquimedianos.
- d) Prismas rectos.
- e) Pirámides, prismas.

## Actividad 3: Poliedros regulares

**Material:** El mismo material que en la actividad anterior.

**Investigación:** Características, propiedades y dualidad.

Se separarán de las construcciones anteriores los poliedros regulares, y se construirá la tabla siguiente con el fin de caracterizar cada poliedro regular; ver que solamente se pueden formar cinco, establecer la Fórmula de Euler y observar la dualidad entre el cubo y octaedro, y el dodecaedro e icosaedro.

POLIEDRO	N.º DE CARAS	N.º DE VÉRTICES	N.º DE ARISTAS
TETRAEDRO			
CUBO			
OCTAEDRO			
DODECAEDRO			
ICOSAEDRO			

## Actividad 4. Extensión de la fórmula de Euler

Para desarrollar esta actividad es conveniente haber recogido en una tabla las características de todos los Poliedros obtenidos en la actividad 2, hacer el recuento como en la actividad anterior y comprobar que se cumple la Fórmula de Euler en todos los Poliedros convexos.

## Actividades de aplicación

- Construir poliedros con unas características determinadas.
- Estudiar una clasificación para la familia de los prismas según el número de lados del polígono de su base.

## Actividades de investigación

Realización en grupo:

1. Los cuerpos geométricos que vemos a nuestro alrededor.
2. El arte y la geometría: Proporción áurea.
3. Formas poliédricas en los minerales.

Realización individual:

4. Desarrollos planos de Poliedro: pentaminós.
5. Los deltaedros.
6. Conexión entre los mosaicos con polígonos regulares y la construcción de poliedros regulares y arquimedianos.

## Actividades de ampliación

- Una prueba de la fórmula de Euler.
- Utilizar la fórmula de Euler para demostrar que sólo hay 5 Poliedros Regulares.
- Los cuerpos platónicos y las esferas de Kepler.
- La fórmula de Euler para poliedros con agujeros.

## Descomposición de figuras. Volúmenes

Se pretende que los alumnos cortando y descomponiendo algunos poliedros de porexpan, vayan obteniendo una colección de figuras que les permitan visualizar relaciones entre ellas, tanto métricas como de inclusión y descomposición, para posteriormente calcular el volumen de esas figuras. En algunos casos habrá que utilizar otro tipo de material.

MATERIAL:

- Cubos de Porexpan.
- Paralelepípedos rectos de porexpan.
- Cuchillas.
- Pegamento Ceyx-porex.
- Varillas para formar poliedros.

## Actividad 1: Un cubo y mucho más

**Material:** Cada alumno dispondrá de cubos de porexpan, cuchilla y pegamento.

**Investigación:** Descomposición de un cubo.

Los alumnos, realizarán cortes en los cubos para obtener las siguientes figuras:

- Con una sección plana, dividir el cubo en dos partes exactamente iguales.
- Tres pirámides equivalentes de base cuadrada (caras del cubo), y altura la del cubo.
- Seis pirámides equivalentes de base cuadrada (caras del cubo), y altura la mitad de la del cubo.
- Dividir el cubo en un tetraedro y medio octaedro; arista del tetraedro la diagonal de una cara.
- Dividir el tetraedro en cuatro tetraedros y un octaedro, arista de los tetraedros la mitad de la del tetraedro grande.

Exponemos en un cuadro las figuras que se van obteniendo y la actividad matemática que se realizará posteriormente.

MATERIAL	FIGURAS OBTENIDAS	RELACIONES
Cubo	Tres pirámides de base cuadrada	Volumen de la pirámide =
Cubo	Seis pirámides de base cuadrada	Volumen de la pirámide =
Cubo	Tetraedro + 1/2 octaedro	Aristas Volúmenes
Tetraedro	4 tetraedros + 1 octaedro	Aristas Volúmenes

Nota: la construcción del dodecaedro y del icosaedro a partir de cubos de porexpan se escapa de los objetivos de este curso.

## Actividad 2: la familia de los prismas y pirámides

**Material:** el mismo que en la actividad anterior y paralelepípedos rectos. Éstos se pueden obtener pegando dos cubos.

**Investigación:** Procediendo de la misma manera que en la actividad anterior, utilizaremos la descomposición de estas figuras para estudiar y deducir las fórmulas de los volúmenes de cualquier paralelepípedo y pirámide tomando como unidad de volumen la del paralelepípedo recto.

- Transformación del paralelepípedo recto en uno oblicuo de igual base y altura de manera que se conserve el volumen.
- Transformación del paralelepípedo recto en dos prismas de base triangular y cada uno de estos prismas en tres pirámides equivalentes.

De estas transformaciones y de las conclusiones de la actividad anterior encontraremos las fórmulas de los volúmenes de cualquier poliedro convexo ya que cualquier poliedro convexo se puede descomponer en paralelepípedos, prismas y pirámides.

**Cuadro resumen:**

MATERIAL	FIGURAS OBTENIDAS	RELACIONES
Prisma recto de base rectangular	Prisma oblicuo de base rectangular	Altura, base y volumen
Paralelepípedo de base rectangular	2 Prismas de base triangular	Altura, base y volumen
Prisma de base triangular	3 Pirámides equivalentes	Altura, base y volumen
Paralelepípedo	6 Pirámides	Altura, base y volumen

## Actividades de aplicación

1. Volumen de un cilindro: considerándolo como un prisma cuya base es un polígono de muchos lados.
2. Tenemos una pirámide y un cubo de igual volumen. ¿Cuál de ellos tiene mayor superficie?
3. Deducir el volumen del tetraedro y del octaedro en función de sus dimensiones a partir de la descomposición del cubo.
4. Utilizar la proporcionalidad entre volúmenes de figuras iguales y la descomposición del tetraedro en 4 tetraedros y 1 octaedro para encontrar una relación entre sus volúmenes.
5. Construir un rombododecaedro colocando sobre las caras de un cubo las 6 pirámides obtenidas del cubo. Volumen del rombododecaedro.
6. En el jardín de casa queremos hacer un pozo. Llamamos al pocero y nos presenta dos alternativas.

- Hacer un pozo artesano de 1 m de diámetro interior.
- Hacer un pozo de barrena de 10 centímetros de diámetro interior.

El agua en esta zona se encuentra a los 5 metros de profundidad. Para decidirnos por uno u otro de los modelos hacemos las siguientes consideraciones:

- Necesitamos diariamente 1 metro cúbico de agua.
- El precio por metro excavado es de 48.000 ptas en el primero y 12.000 ptas en el segundo.

Investiga sobre el caudal de un pozo, haz conjeturas sobre sus posibilidades, y decídate por uno u otro.

7. Los tanques de gasolina de las gasolineras son cilíndricos y generalmente tienen 10 metros de alto. Hemos medido su diámetro, pero sin apuntar el valor, y ahora no recordamos si era de 2,25 m o 2,35 m.
  - ¿Cuál será el error cometido en el cálculo de su volumen si utilizamos el valor incorrecto?
  - ¿Qué diferencia en litros obtenemos usando uno u otro valor?
  - Si las gasolineras tienen 10 tanques de este tipo, y en el depósito de un coche caben 40 litros, ¿cuántos coches podrían llenar su depósito con la diferencia de litros que hay entre las dos medidas posibles del diámetro de cada tanque?
8. ¿Cuánto cartón se necesita para hacer una caja que contenga 1 litro de leche?

## Actividades de investigación

### LAS ABEJAS

Veamos por qué las abejas construyen panales cuya forma son celdillas de sección hexagonal regular.

Los hexágonos forman un mosaico que recubre el plano. ¿Podrían ser de sección pentagonal regular?

Las celdas las construyen las abejas con cera, por lo tanto, cuanto menos cera utilicen menos trabajarán (con la cera hacen las paredes). A continuación tienen que llenarlas de miel, por lo cual intentarán hacer las celdillas de manera que su forma sea aquella en la que más miel quepa y la que menos cera utilice.

- ¿Qué polígonos regulares podrían utilizar como sección de las celdillas?
- ¿Por qué habrán elegido los hexágonos?
- ¿Qué pasaría si superponemos prismas de base hexagonal? ¿Rellenan el espacio? ¿Se deslizarían unos sobre otros? ¿Sería conveniente cambiarles la base?
- El rombododecaedro lo habíamos construido en una actividad anterior. Busca analogías entre los panales y este poliedro.

## Actividades de ampliación

Superficie de los poliedros.

## Relaciones entre poliedros

### Actividad 1: Poliedros inscritos y circunscritos

**Material:** Varillas huecas y mecanismos de engarce y cubos de porexpan. Poliedros transparentes.

**Investigación:** Relaciones de inscripción entre los poliedros regulares. Relaciones entre sus aristas.

- Obtengamos de un cubo de porexpan el tetraedro inscrito, cortándole las esquinas por la diagonal de las caras. De esta forma obtenemos el tetraedro inscrito de manera que los vértices de ambas figuras coinciden. ¿Podrías hacer esto mismo con otros pares de poliedros? (Utiliza las varillas engarzables; puedes visualizar mejor los poliedros inscritos colocando diagonales en las caras del otro).

Del tetraedro obtenemos el octaedro cortándolo a mitad de arista.

- Al trabajar la dualidad de los poliedros observábamos la correspondencia entre caras y vértices. Utilizando esta característica y las varillas, inscribiremos el octaedro en el cubo, el cubo en el octaedro; el dodecaedro en el icosaedro y el icosaedro en el dodecaedro, haciendo coincidir los vértices de unos con los centros de las caras de otros.
- Busca la relación que hay entre las aristas de los poliedros inscritos tomando como arista unidad la del cubo y haciendo la inscripción de la siguiente forma:

octaedro  $\Rightarrow$  tetraedro  $\Rightarrow$  cubo  $\Rightarrow$  dodecaedro  $\Rightarrow$  icosaedro

	OCTAEDRO	TETRAEDRO	CUBO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
<b>ARISTA</b>	Mitad de la del tetraedro	Diagonal de una cara del cubo	$L=a$	La diagonal del pentágono es la arista del cubo	Arista del dodecaedro, distancia entre centros de los triángulos
	$L=$	$L=$		$L=$	$L=$

### Actividad 2: truncamiento de poliedros

**Material:** dispondremos de cubos, tetraedros y octaedros de porexpan y dodecaedros e icosaedros de los otros materiales.

**Investigación:** Obtención de poliedros arquimedianos por cortes en las esquinas de los poliedros regulares.

En la actividad anterior, y en la de «un cubo y mucho más» veíamos que, dándoles oportunos cortes a los poliedros, obteníamos otros poliedros con caras polígonos regulares y otras no.

Vamos a cortar las esquinas de un cubo de manera que obtengamos en todas ellas el mismo polígono regular: un triángulo.

- ¿Cómo hay que colocar el plano de corte con relación al cubo para obtener el triángulo equilátero?
- ¿Cómo quedan las demás caras del cubo? ¿Qué polígonos obtienes?
- Realización de un cuadro resumen.

Truncando todos los poliedros regulares a mitad de arista veremos que de cada poliedro y su dual obtenemos el mismo poliedro arquimadiano.

Haciendo truncamientos a otras distancias se obtienen más poliedros.

- ¿Con qué tipo de truncamiento se obtienen polígonos de igual número de lados?
- ¿Cómo varía el número de aristas y vértices según el truncamiento?

### Actividades de aplicación

1. Calcular la cantidad de piedra que se necesitó para construir la Pirámide de Keops (utilizar la relación entre los volúmenes de un cubo y una pirámide).
2. Crear formas que se ajusten a un volumen determinado.
3. Antes, los balones de fútbol tenían 12 pentágonos y 20 hexágonos, ocupaban el 86,74% de una esfera. ¿Sabrías decir de qué poliedro regular se obtiene por truncamiento? ¿Qué nombre le pondrías? ¿Cuánto miden sus ángulos en cada vértice? Ahora los hacen de otra manera: 12 pentágonos, 30 cuadrados y 20 triángulos equiláteros y ocupa el 94,32% de la esfera. Es más redondo que el otro. Haz el mismo estudio que en el anterior. Se llama el rombicosidodecaedro.
4. Construir figuras semejantes a otras utilizando Policubos.

### Actividades de investigación

A realizar en grupo:

1. Busca información sobre los poliedros regulares truncados a un tercio de arista y ponle nombres. ¿Cómo son su caras? Busca relaciones.
2. Relación entre el truncamiento de poliedros regulares y los mosaicos semirregulares.

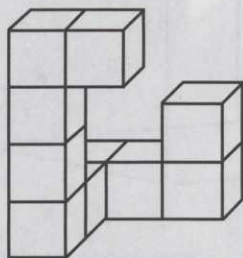
### Actividades de ampliación

1. Construcción del icosaedro con tres rectángulos áureos, aguja e hilo. ¿Por qué es un icosaedro regular?
2. Cuerpos que rellenan el espacio.

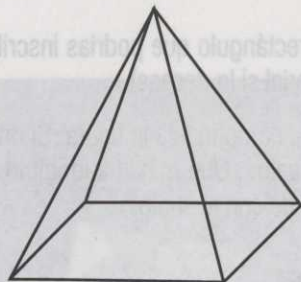
## Propuesta de actividades para realizar controles escritos

En el apartado de evaluación decíamos que las pruebas escritas se utilizarían muy poco en la evaluación de los alumnos en esta Unidad. No obstante sería necesario realizar alguna prueba escrita al menos al finalizar la Unidad. Para realizarla proponemos las siguientes preguntas:

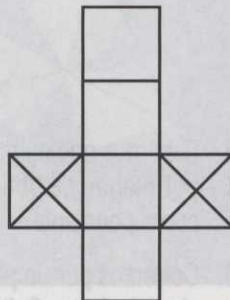
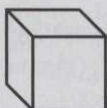
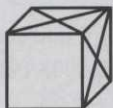
1. Aquí tienes 10 cubos pegados cara a cara. ¿Cuántos más hacen falta para unir las dos caras libres?



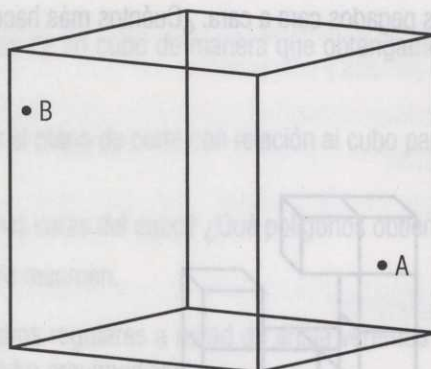
2. Tenemos una pirámide de base cuadrada y altura  $h$  como indica la figura, ¿cuántas pirámides de este tipo necesitarías para formar un paralelepípedo recto de altura  $3h$ ?



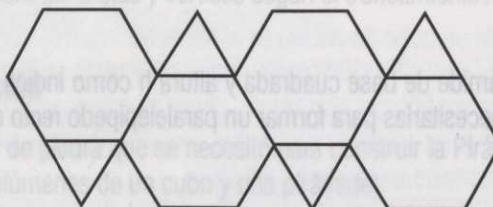
3. ¿Cuál de las siguientes cajas corresponde al desarrollo que se adjunta?



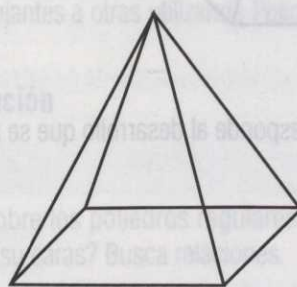
4. En el punto A de la cara lateral derecha del cubo se encuentra una araña, y en el punto B, situado en la cara lateral izquierda, una mosca que ha caído en su red. Encuentra el camino más corto que debe seguir la araña para cazar a la mosca.



5. Este desarrollo corresponde a un poliedro obtenido por truncamiento. ¿De qué poliedro se trata y qué truncamiento ha sufrido?



6. ¿Qué dimensiones tendría el mayor rectángulo que podrías inscribir en un cubo de arista 5 cm? (Puedes coger un cubo del material si lo deseas).
7. En un circo se ha instalado una carpa como indica la figura. Si un trapezista se lanza desde el punto más alto de ella, hacia el suelo. ¿Qué máxima longitud deberá tener una cuerda que ha atado a su pie para que no se dé con el suelo?



8. Sabemos que entre los pares de poliedros regulares duales ocurre que al cortar uno de ellos por planos se obtiene su dual. ¿Cómo cortarías cada uno de ellos para obtener el dual correspondiente?
9. Cortemos por un plano tres aristas que concurren en un mismo vértice de un cubo a un tercio del vértice. Quitemos esa esquina y quedémonos con el cubo truncado. ¿Qué polígonos tiene por caras el sólido obtenido?



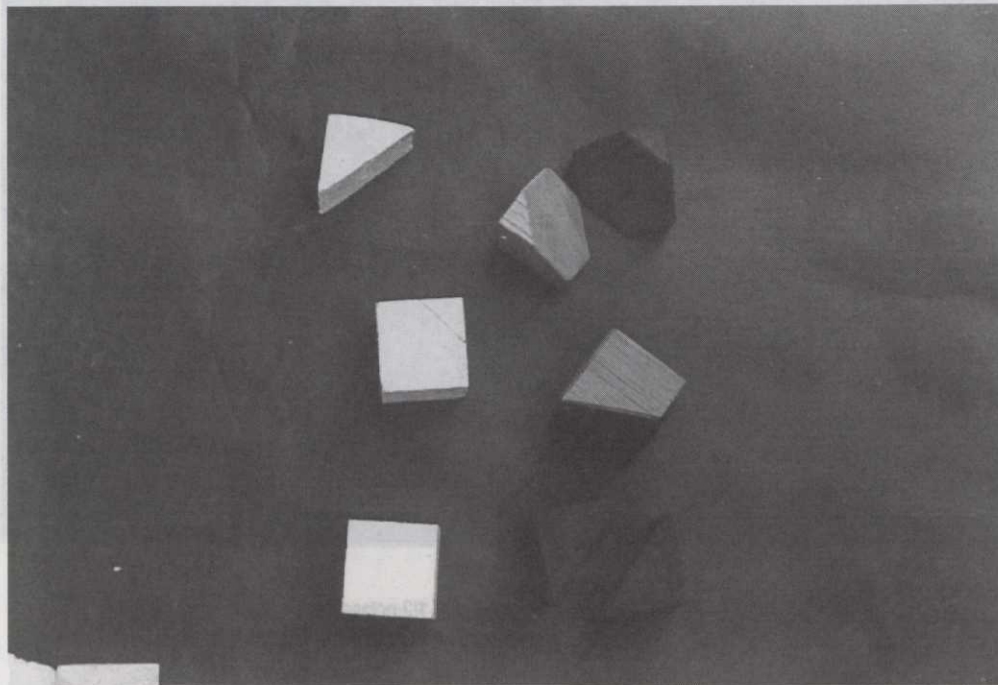


Foto 1. Descomposición de un cubo. Secciones planas

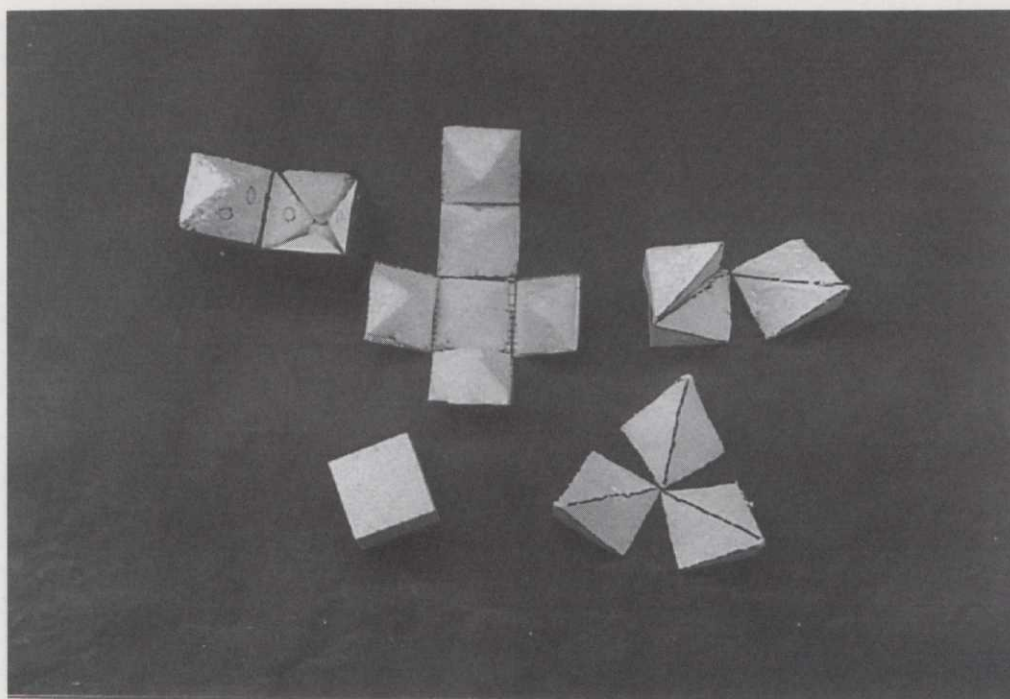


Foto 2. 1 cubo = 3 pirámides equivalentes  
1 cubo = 6 pirámides equivalentes

A. En el punto A de la cara lateral derecha del cubo se encuentra una araña, y en el punto B, situado en la cara lateral izquierda, una mosca que ha caído en su red. Encuentra el camino

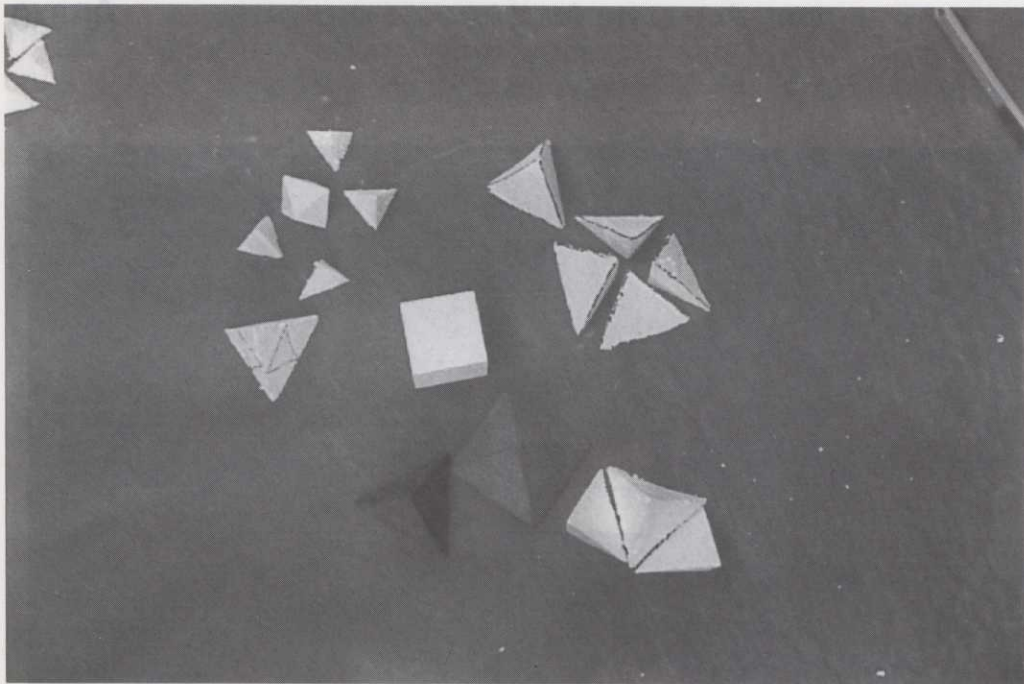


Foto 3.  $1 \text{ cubo} = 1 \text{ tetraedro} + 1/2 \text{ octaedro}$   
 $1 \text{ tetraedro} = 1 \text{ octaedro} + 4 \text{ tetraedros}$

B. ¿Qué dimensiones tendría el mayor rectángulo que podrías inscribir en un cubo de arista 5

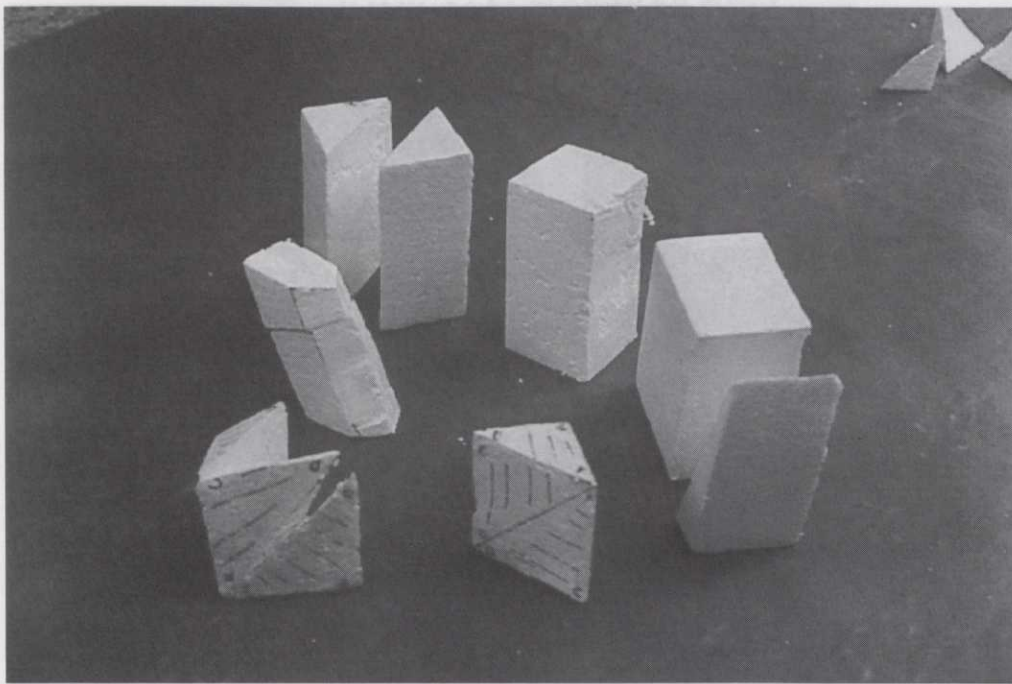


Foto 4. Descomposición de prismas. Equivalencias

## Recurso

El libro «Secundaria y de Recurso» del profesorado de matemáticas que hemos utilizado y adaptado a desarrollar

ALSINA, C.; BURGOS, C.; FERRER, J. M. *Combinatoria y geometría*. Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas cultura y aprendizaje. núm. 11. 1980.

ALSINA, C.; BURGOS, C.; FERRER, J. M. *Combinatoria y geometría*. Madrid, Síntesis. Col. Matemáticas cultura y aprendizaje. núm. 11. 1980.

AZARQUEL, GRUPO. *Correlación y regresión. Una introducción intuitiva*. Madrid, I. G. E. de la Universidad Autónoma de Madrid. Col. Monografías núm. 5. 1985.

Esta monografía presenta una propuesta de trabajo basada en la intuición de los conceptos, centrándose más en la interpretación de datos y asociaciones que en el cálculo de parámetros o el uso de fórmulas, y recurriendo convencionalmente al uso de materiales manipulativos.

Nos ha dado una idea a los alumnos superadora de las gráficas

CUNY, H. M.

Es un libro que muestra la variedad de los triángulos, cuadrados, etc.

DÍAZ GONZÁLEZ, M.

En la probabilidad de tr...

DIXSON, L.

Un libro muy ameno que recoge el resultado de grandes investigaciones en el campo del aprendizaje de las matemáticas en edades...

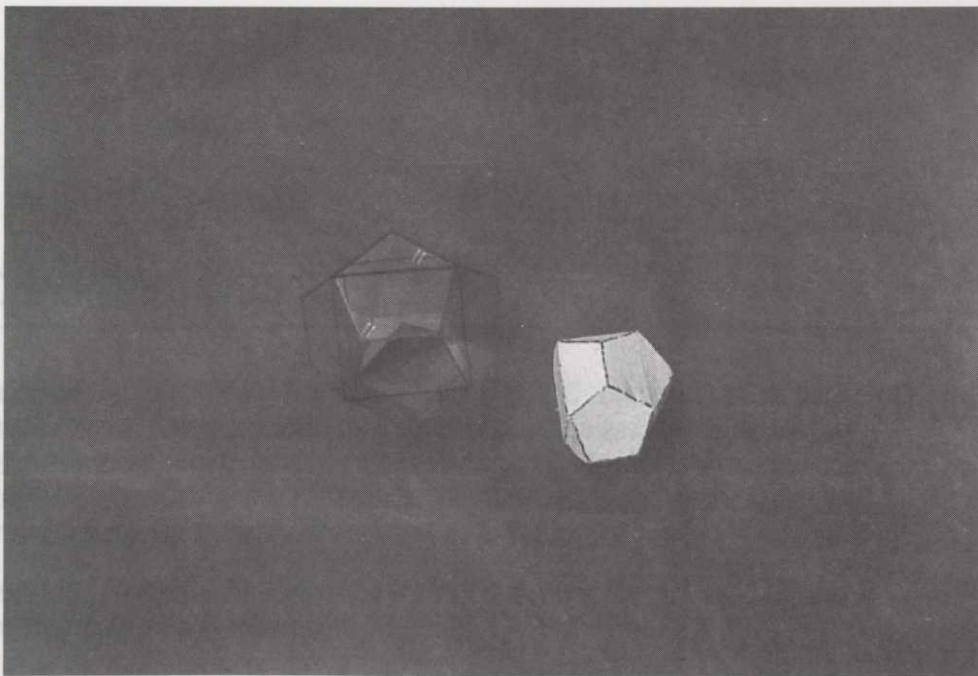


Foto 5. El cubo en el dodecaedro

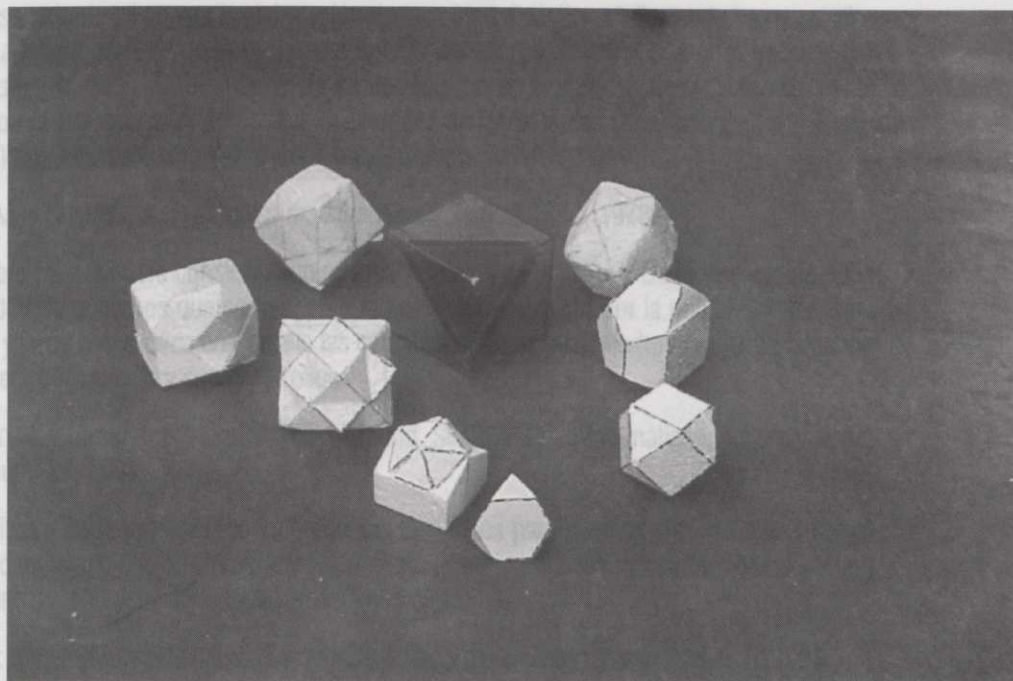


Foto 6. Truncamiento de Poliedros



## Recursos didácticos

El libro «Secundaria Obligatoria. Matemáticas», editado por el M. E. C., contiene una Guía Documental y de Recursos con una completa relación del material bibliográfico que está disponible para el profesorado de matemáticas. Ahora, vamos a destacar tan sólo aquellos libros y recursos que hemos utilizado más a la hora de elaborar el presente documento, y que pueden ayudar al profesorado a desarrollar su programación de matemáticas para 4º de E. S. O. opción A.

- ALSINA, C.; BURGÉS, C.; FORTUNY, J. M. *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid. Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 12. 1987.
- ALSINA, C.; BURGUES, C.; FORTUNY, J. M. *Construir la geometría*. Madrid. Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 11. 1988.
- AZARQUIEL, GRUPO. *Correlación y regresión. Una introducción intuitiva*. Madrid. I. C. E. de la Universidad Autónoma de Madrid. Col. Monografías núm. 5, 1985.

Esta monografía presenta una propuesta de trabajo basada en la intuición de los conceptos, centrándose más en la interpretación de datos y situaciones que en el cálculo de parámetros o el uso de fórmulas, y recurriendo convenientemente al uso de materiales manipulativos.

Nos ha servido de base para la elaboración de la unidad didáctica nº 5, donde hemos realizado una adaptación libre de la propuesta del Grupo Azarquiél, adecuada para trabajar con alumnos de 4º de E. S. O. en lugar de 2º de BUP (como supone su libro), y donde hemos sugerido un uso más extenso de las capacidades de las potentes calculadoras (científicas y gráficas) que están actualmente a nuestra disposición.

- CUNDY, H. M. y ROLLETT, A. P. *Modèles mathématiques*. Paris. CEDIC. 1978.

Es un libro muy útil para construir, uno mismo, modelos de poliedros. De la fascinación sobre la variedad de poliedros que se pueden construir, surge el gusto por la posibilidad de construirlos, ya que nos explica con detalle las características de los poliedros regulares, arquimedianos, el truncamiento y sus desarrollos.

- DIAZ GODINO, J. y otros. *Azar y probabilidad*. Madrid. Síntesis. Col. Matemáticas: cultura y aprendizaje. núm. 27. 1991.

En la primera parte presenta los fundamentos didácticos para la enseñanza del azar y la probabilidad en las etapas de Primaria y Secundaria. Y en la segunda nos propone una secuencia de trabajo, con actividades adaptadas a cada nivel.

- DICKSON, L.; BROWN, M., y GIBSON, O. *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. M. E. C. 1991.

Un libro muy ameno que recoge el resultado de grandes investigaciones en el campo del aprendizaje de las matemáticas en edades 0 a 16 años.

## Bibliografía

Materiales  
didácticos

Ha sido una referencia constante para nosotros, especialmente en la elaboración de la Unidad didáctica nº 3, «Movimientos en el plano y en el espacio».

- ENGEL, A. *Probabilidad y estadística*. Valencia. Mestral. 1988.

Los dos tomos de esta obra forman una unidad en la que podemos encontrar «todo» lo que se puede hacer en el tema de probabilidad en los niveles no universitarios. Además de ser muy didáctico en su exposición (basado en un enfoque intuitivo y muy estructurado), presenta una amplia gama de métodos de trabajo, problemas y actividades sobre probabilidad que pueden adaptarse a los niveles de 12 a 16 años.

- FIELKER, D. S. *Usando calculadoras con niños de 10 años*. Valencia. Generalitat Valenciana. 1986.

Un librito de gratificante lectura. En contra de lo que pueda sugerir su título, el autor nos presenta varios métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basados en la utilización libre de las calculadoras, que pueden ser aplicados con alumnos de cualquier edad. El libro transmite implícitamente una forma de trabajo en el aula, de enseñar matemáticas, en la que el alumno es el auténtico protagonista de su aprendizaje.

Muy recomendable.

- MATEMÁTICAS DE 5 A 16. *Materias de Curriculum 3*. Series HNT. London. Her Majesty's Stationery Office.

Propone un marco dentro del cual cada escuela debe desarrollar un programa de matemáticas apropiado a sus alumnos. El documento se centra en los fines y objetivos para la enseñanza de las matemáticas entre las edades de 5 a 16, y considera sus implicaciones para la elección de contenidos, métodos de enseñanza, y para la evaluación del progreso de los alumnos.

- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla. S. A. E. M. «Thales». 1991.

Un documento fascinante, lleno de propuestas, ideas, y ejemplos para la elaboración de un currículo de matemáticas para todas las edades (5-16 años) y adaptado a las necesidades del mundo de hoy. La parte dedicada a la evaluación es especialmente recomendable.

- NEWMAN, CLAIRE M. y otros. *Exploring Probability*. Palo Alto. Dale Seymour Publications. Quantitative Literacy Series. 1987.

Este libro forma parte del proyecto de la Asociación Americana de Estadística —Quantitative Literacy— en que se estudian los conceptos básicos de estadística y probabilidad. La metodología se basa en el trabajo con datos de la vida real, realización de experimentos y participación activa de los estudiantes.

En el presente volumen, *Exploring probability*, se estudia la probabilidad elemental utilizando tan sólo técnicas elementales de recuento y algún conocimiento de las fracciones, no se precisa por tanto conocer la combinatoria. El libro proporciona la base teórica y un grupo de actividades adecuado para proponer a los estudiantes un conocimiento práctico y elemental de la probabilidad.

- SANCHIS, C. y otros. *Hacer estadística*. Madrid. Alhambra. 1986.

Este pequeño libro contiene una visión completa de los contenidos de estadística correspondientes a esta etapa. Es muy útil como guía práctica de referencia, y además contiene multitud de ejemplos, ejercicios y actividades para el aula.

- SHELL CENTER FOR MATHS ED. *El lenguaje de las funciones y gráficas*. Madrid. Universidad del País Vasco y M. E. C. 1990.

Es una propuesta completa para trabajar el lenguaje de las funciones y gráficas en estas edades (12 a 16 años). Se basa en la resolución de problemas a partir del análisis de situaciones, y donde la información viene presentada en diferentes formatos: situaciones físicas, enunciados, gráficas, tablas, fórmulas, etc. Las propuestas de trabajo están muy detalladas, con materiales para el alumno, y una guía de actuación para el profesor. También contempla la evaluación del alumno.

Nosotros hemos utilizado este libro como referencia básica de la unidad didáctica nº 6, donde hemos completado la anterior propuesta con el estudio más detallado de la función lineal, y con actividades basadas en la utilización de las calculadoras gráficas.

Como ya hemos recordado en el epígrafe anterior, el libro «Secundaria Obligatoria. Matemáticas» contiene una extensa guía de recursos didácticos, con una pequeña explicación de su composición y utilidad. Por tanto, ahora, nos limitamos a relatar los distintos materiales didácticos cuyo uso hemos ido exponiendo particularmente en cada una de las unidades didácticas de la presente programación.

## Materiales didácticos

### *Materiales de uso general*

- Fotocopiadora
- Videos didácticos
- Noticias de actualidad
- Libros de consulta
- Calculadoras: de 4 operaciones, científicas y gráficas.
- Cartulina, tijeras y pegamento.

### *Específicos para la Geometría*

- Polydrom.
- Mosaicos y Mosaicos de Escher.
- Tramas cuadradas y triangulares.
- Espejos.
- Puzzles, Tangram.
- Clinómetro.
- Policubos.
- Cubos de porexpan y cuchillas.
- Troquelados de polígonos y gomas elásticas.
- Varillas para formar poliedros.

### *Específicos para el estudio de Gráficas*

- Papel milimetrado.

1324600

- Transparencias y retroproyector.
- Materiales diversos para construir gráficas experimentales.

### **Específicos para la Estadística**

- Material recogido en el centro (datos) para realizar estudios estadísticos.
- Gráficas e informaciones aparecidas en prensa.

### **Específicos para el Azar**

- Datos: normales, en blanco, con formas poliédricas, cargados, etc.
- Barajas de cartas.
- Cajas negras (Bolsas negras).
- Bolas de colores.
- Ruletas.
- Pirindolas.
- Fichas de colores.
- Tableros de juegos.

### **Otros recursos recomendados**

Vídeo: Potencias de 10. Editado por Pyramid y distribuido por Áncora Audiovisual, S. A.

Vídeo: Del plano al espacio. Javier Carvajal y el Grupo Cero. Subdirección general de Formación del Profesorado. M. E. C.

Vídeo: Investigaciones matemáticas 10. Editado por la BBC y distribuido por Mare Nostrum.

NEWMAN, CLAIRE M. y otros. *Exploring Probability*. Palo Alto, Dale, California: Pacific Publishing Co. 1987.

Este libro forma parte del proyecto de la Asociación Americana de Estadística — American Statistical Association — en que se estudian los conceptos básicos de la probabilidad. La metodología se basa en el trabajo con datos de la vida real. La realización de actividades participativas y la interacción de los estudiantes.

En el presente volumen, *Exploring probability* se estudia la probabilidad utilizando únicamente los recursos de recuento y algún conocimiento de las fracciones. No se precisa por tanto conocer la combinatoria. El libro proporciona la base teórica y el tipo de actividades adecuadas para proponer a los estudiantes un programa de enseñanza de la probabilidad.

SANCHIS, C. y otros. *Hacer estadística*. Madrid: Alianza, 1989.

Este pequeño libro contiene una visión completa de los contenidos de estadística correspondientes a esta etapa. Es muy útil como guía para el profesor y como libro de consulta para el alumno. Incluye ejemplos, ejercicios y actividades para el aula.



~~1004600~~





DIRECCIÓN GENERAL DE RENOVACIÓN PEDAGÓGICA

---

SUBDIRECCIÓN GENERAL  
DE PROGRAMAS EXPERIMENTALES