

**EVALUACIÓN DEL  
CONOCIMIENTO Y  
SU ADQUISICIÓN**

**Vol. III  
Matemáticas  
Compresión lectora**

Jesús Alonso Tapia

**Ministerio de Educación y Cultura**



H/ 2895-3

H/2895-3  
EVA

Jesús Alonso Tapia (Dir.)

# EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO Y SU ADQUISICIÓN

Vol. III

- MATEMATICAS
- COMPRESION LECTORA



DONATIVO

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA  
BIBLIOTECA  
1 0 FEB. 1998  
ENTRADA

R. 117.730

Universidad Autónoma de Madrid

1997

NA-14113(3)



Número: 132 III  
Colección: INVESTIGACIÓN



© MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA  
Secretaría de Estado de Educación  
Dirección General de Renovación Pedagógica  
Centro de Investigación y Documentación Educativa  
EDITA: CENTRO DE PUBLICACIONES -Secretaría General Técnica  
I.S.B.N.: 84-369-3038-X (VOLUMEN III)  
I.S.B.N.: 84-369-3035-5 (OBRA COMPLETA)  
Depósito legal: M-42.158-1997  
Imprenta; RAYCAR, S.A.  
C/ Matilde Hernández, 27 - 28019 - MADRID

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos su colaboración a los profesores y alumnos de los colegios e institutos que se mencionan a continuación, colaboración sin la cual hubiera sido imposible la realización de este trabajo.

Col. Beata María Ana de Jesús, de Madrid.

Col. Ciudad de Nara, de Toledo

Col. Nuestra Sra. de los Infantes, de Toledo.

Col. Nuestra Sra. de la Merced, de Madrid.

Col. Padre Manyanet de Alcobendas, Madrid.

Col. San Agustín, de Madrid.

Col. Santa Cristina, de Madrid.

Col. Virgen de Lourdes, de Madrid.

CP. Rubén Darío, de Madrid.

CP. S. Juan Bautista, de Madrid.

CP. Severo Ochoa, de Leganés, Madrid.

CP. Virgen del Rosario, de Valdemoro, Madrid.

IB Manuel de Falla, de Móstoles, Madrid.

IES Conde de Orgaz, de Madrid.

IES García Morato, de Madrid.

IES Julio Verne, de Leganés, Madrid.

IES Lope de Vega, de Madrid.

IES Los Castillos, de Alcorcón, Madrid.

IES María Zambrano, de Leganés, Madrid.

IES Marqués de Santillana, de Colmenar Viejo, Madrid.

IES Pedro Antonio de Nebrija, de Madrid.

IES Pedro de Tolosa de San Martín de Valdeiglesias, Madrid.

IES Ramón y Cajal de Madrid.

IFP Parque Aluche, de Madrid.

---

## ÍNDICE DE AUTORES

*M<sup>a</sup> Asunción Acera Andrés.* Directora del Dpto. de Orientación del IES Los Castillos de Alcorcón, Madrid.

*Jesús Alonso Tapia.* Profesor Titular de Psicología. Universidad Autónoma de Madrid.

*Leonardo Antolí Vaño.* Profesor de Enseñanza Secundaria, área de Matemáticas, en el IB Manuel de Falla de Móstoles, Madrid.

*Fermín Asensio Chapapría.* Profesor de Enseñanza Secundaria, área de Geografía e Historia, en el IES María Zambrano de Leganés, Madrid.

*Santos Callejo Fernández.* Profesor de Enseñanza Secundaria, área de Biología, en el IES Marqués de Santillana de Colmenar Viejo, Madrid.

*M<sup>a</sup> Teresa Cantero Garrido.* Profesora de Enseñanza Secundaria, área de Legua Castellana y Literatura, en el IES García Morato de Madrid.

*M<sup>a</sup> José Díaz-Jorge Rodríguez.* Orientadora escolar, miembro del Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Fuenlabrada, Madrid.

*Pedro Antonio Flores Boyero.* Profesor de Enseñanza Secundaria, área de Geografía e Historia en el IES Alonso Quijano de Alcalá de Henares, Madrid.

*José Francisco Guía Esteban.* Profesor de Enseñanza Secundaria, área de Religión, en el IES Pedro de Tolosa de San Martín de Valdeiglesias, Madrid.

*Pilar Hernández García.* Profesora de Formación Profesional, especialidad de Educación Infantil, en el IFP Misericordia, de Valencia.

*M<sup>a</sup> Teresa Herrero García.* Directora del Dpto. de Orientación del IES Gonzalo Torrente Ballester, de San Sebastián de los Reyes, Madrid.

*Rosa Laguna Candelas.* Profesora de Enseñanza Secundaria, área de Filosofía, en el IES García Morato, de Madrid.

*M<sup>a</sup> Celia López González.* Asesora de Tecnología y Formación Profesional en el Centro de Profesores y Recursos de Alcorcón, Madrid.

*M<sup>a</sup> Luisa López Herranz.* Directora del Dpto. de Orientación del IES Julio Verne, de Madrid.

*Sagrario Mansilla Izquierdo.* Catedrática de Enseñanza Secundaria, área de Geografía e Historia, en el IES Conde de Orgaz, de Madrid.

*Julio Olea Díaz.* Profesor Titular de Psicología. Universidad Autónoma de Madrid.

*M<sup>a</sup> del Carmen Pérez de Landazábal.* Investigadora del Instituto de Electrónica de Comunicaciones del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid.

*José María Salguero Juan y Seva.* Director del Departamento de Orientación del IES Antonio López García de Getafe, Madrid.

*M<sup>a</sup> Almudena Seguela Arregui.* Profesora de Enseñanza Secundaria, área de Lengua Francesa, en el IES Rosa Chacel de Colmenar Viejo, Madrid.

*M<sup>a</sup> del Carmen Setién Rupérez.* Profesora de Enseñanza Secundaria, área de Griego, en el IES Lope de Vega de Madrid.

*M<sup>a</sup> Luisa Torres Guerri.* Profesora de Enseñanza Secundaria. área de Lengua Castellana y Literatura, en el IES Ramón y Cajal de Madrid.

*Francisco Truchero Delgado.* Profesor de Enseñanza Secundaria, área de Lengua Castellana y Literatura, en el IES Camilo José Cela de Pozuelo de Alarcón, Madrid.

*Jose Luis Villa Arocena,* Jefe del Departamento de Orientación del IES Ignacio Ellacuria de Alcalá de Henares, Madrid.



## ÍNDICE

## VOLUMEN I

INTRODUCCIÓN .....	11
Capítulo 1. Evaluación del conocimiento: propósito, criterios, contexto y problemas.....	17
<i>Jesús Alonso Tapia</i>	
1.1. Propósito de la evaluación .....	19
1.2. Criterios de conocimiento y aprendizaje .....	21
1.3. Determinantes cognitivos del éxito y el fracaso .....	35
1.4. Contextualización de la evaluación .....	43
1.5. Evaluación y calificación: establecimiento del punto de corte.....	50
1.6. Problemas pendientes y planteamiento de la investigación .....	56
Capítulo 2. Modelos de evaluación en la Ciencias Sociales .....	61
<i>Jesús Alonso Tapia, Fermín Asensio Chaparría,</i>	
<i>José M<sup>a</sup> Salguero Juan y Seva, y José Luis Villa Arocena</i>	
2.1. Introducción .....	62
2.2. Modelo 1: Evaluación inicial de conocimientos previos.....	74
2.3. Modelo 2: Evaluación de la organización conceptual y de la precisión del razonamiento sobre problemas históricos mediante tareas abiertas .....	108
2.4. Modelo 3: Evaluación sistemática de conocimientos y capacidades en una unidad didáctica .....	154
2.5. Evaluación de conocimiento en Ciencias Sociales, Geografía e Historia en 1º y 2º de E.S.O.: .....	211
Conclusión:	
Apéndices .....	223
Ap. 2.1. Batería AP-S: Prueba de conocimientos iniciales.....	227
Ap. 2.2. ....	267
a) Prueba abierta sobre “Descubrimientos geográficos y colonización de nuevos territorios” .....	269
b) Prueba abierta sobre “La Revolución Industrial” .....	273

Ap. 2.3.	.....	279
a) Batería AP-S: Prueba cerrada sobre “Descubrimientos geográficos y colonización de nuevos territorios”	.....	281
b) Prueba cerrada sobre “La Revolución Industrial”	.....	315
c) Prueba cerrada sobre “La Revolución Francesa”	.....	325
Ap. 2.4.	Alternativas correctas a cada una de las preguntas	..... 351
Ap. 2.5.	Material utilizado para la valoración de las pruebas	..... 351
Referencias	.....	363

## VOLUMEN 2

INTRODUCCIÓN	.....	381
Capítulo 1.	Evaluación del conocimiento: propósito, criterios, contexto y problemas	..... 387
	<i>Jesús Alonso Tapia</i>	
1.1.	Propósito de la evaluación	.....389
1.2.	Criterios de conocimiento y aprendizaje	..... 391
1.3.	Determinantes cognitivos del éxito y el fracaso	..... 405
1.4.	Contextualización de la evaluación	..... 413
1.5.	Evaluación y calificación: establecimiento del punto de corte	..... 420
1.6.	Problemas pendientes y planteamiento de la investigación	.....426
Capítulo 2.	Modelos de evaluación para las ciencias de la naturaleza	..... 431
	<i>Jesús Alonso Tapia y Carmen Pérez de Landazabal</i>	
2.1.	Introducción	..... 433
2.2.	Ejemplo 1: El aire y el agua	..... 447
2.3.	Ejemplo 2: La corriente eléctrica	..... 465
2.4.	Ejemplo 3: La reproducción de los seres pluricelulares	..... 484
2.5.	Ejemplo 4: Nociones de Genética	..... 503
2.6.	Ejemplo 5: Diversidad y unidad de estructura de la materia	..... 525
2.7.	Ejemplo 6: Los cambios químicos	..... 553
2.8.	Evaluación del conocimiento en Ciencias de la naturaleza en 1º y 2º de E.S.O.:	..... 576

Conclusión:

Apéndices .....	585
Ap. 2.1. Bateria AP-N: El aire y el agua.....	587
Ap. 2.2. Bateria AP-N: L a corriente eléctrica.....	599
Ap. 2.3. Bateria AP-N: La reproducción de los seres pluricelulares .....	613
Ap. 2.4. Bateria AP-N: Nociones de Genética .....	625
Ap. 2.5. Bateria AP-N: Diversidad y unidad de estructura de la materia .....	637
Ap. 2.6. Bateria AP-N: Los cambios químicos .....	651
Ap. 2.7. Criterios de corrección.....	663
Ap. 2.8. Material utilizado para la valoración de la pruebas .....	667
Referencias .....	673

### VOLUMEN 3

INTRODUCCIÓN .....	695
Capítulo 1. Evaluación del conocimiento: propósito, criterios, contexto y problemas .....	701
<i>Jesús Alonso Tapia</i>	
1.1. Propósito de la evaluación .....	703
1.2. Criterios de conocimiento y aprendizaje .....	705
1.3. Determinantes cognitivos del éxito y el fracaso .....	719
1.4. Contextualización de la evaluación .....	727
1.5. Evaluación y calificación: establecimiento del punto de corte .....	734
1.6. Problemas pendientes y planteamiento de la investigación .....	740
Capítulo 2. Modelos de evaluación de los conocimientos matemáticos.....	745
<i>Jesús Alonso Tapia y Julio Olea Díaz</i>	
2.1. Introducción.....	747
2.2. Modelo 1: Números enteros; números negativos.....	761
2.3. Modelo 2: Proporcionalidad .....	782
2.4. Modelo 3: Numeros racionales .....	802
2.5. Modelo 4: Ecuaciones .....	821
2.6. Evaluación del conocimiento en Matemáticas en 1º y 2º de E.S.O.: .....	836

Conclusión:	
Apéndices .....	843
Ap. 2.1. Bateria AP-M: Números enteros .....	845
Ap. 2.2. Bateria AP-M: Proporcionalidad .....	863
Ap. 2.3. Bateria AP-M: Números racionales .....	877
Ap. 2.4. Bateria AP-M: Ecuaciones .....	893
Ap. 2.5. Criterios de corrección .....	909
Ap. 2.6. Material utilizado para la valoración de las pruebas .....	911
Capítulo 3. Un modelo para la evaluación colegiada de la capacidad de comprensión lectora al término de la E.S.O. ....	919
<i>J. Alonso Tapia, M.A. Acera Andrés, L. Antolí Vaño, S. Callejo Fernández, M.T. Cantero Garrido, M.J. Díaz Jorge, P. Flores Boyero, J. Guía Esteban, P. Hernández García, M. T. Herrero García, R. Laguna Candelas, M.c. López González, M.L. López Herranz, S. Mansilla Izquierdo, A Seguela Arregui, M.c. Setién Rupérez, M.L. Torres Guerri, F. Truchero Delgado.</i>	
3.1. Introducción .....	921
3.2. Desarrollo y valoración del instrumento de evaluación .....	926
3.3. Conclusión .....	945
Apéndices .....	947
Ap 3.1. Bateria CL-4: Evaluación de la comprensión lectora al término de la E.S.O. ....	949
Ap. 3.2. Alternativas correctas a cada una de las preguntas .....	983
Ap. 3.3. Baremos para la interpretación normativa de las puntuaciones .....	985
Referencias .....	987

## INTRODUCCIÓN

Todo profesor tiene una idea de qué es evaluar y de los fines para los que debe servir la evaluación. Para la mayoría implica básicamente hacer preguntas o proponer la resolución de tareas o problemas a los alumnos para determinar el grado en que han aprendido unos conocimientos o asimilado ciertas reglas y, de este modo, decidir si un alumno aprueba o no y, en este último caso, sobre qué aspectos del contenido a aprender es preciso seguir insistiendo. Toda evaluación, sin embargo, plantea a profesores y profesoras varios problemas. ¿Hasta qué punto la información obtenida constituye un indicador válido de lo que el sujeto sabe? ¿Qué significa "saber"? Supuesto que un alumno parezca no saber algo, ¿se deduce de la información obtenida qué tipo de ayudas es preciso proporcionarle para que pueda progresar? ¿Es correcto promocionar o no promocionar al sujeto en función de la información obtenida? ¿Qué características debe tener esta información para constituir un criterio de promoción válido?

El hecho de que los profesores evalúen a sus alumnos y decidan quienes pasan y quienes deben seguir trabajando la parte de la materia que parecen desconocer lleva consigo una respuesta a las cuestiones anteriores. Se trata, sin embargo, de una respuesta que muchas veces no deja satisfechos a los profesores ya que existen distintos hechos que ponen de manifiesto su inadecuación. Por un lado, el hecho de que, al poco tiempo de haber sido evaluados, muchos alumnos no recuerden gran parte de lo que parecían saber plantea el problema de hasta qué punto el haber sido capaz de recordar algo en el momento de la evaluación constituye un indicador válido de aprendizaje. En segundo lugar, el hecho de que muchos alumnos y alumnas, aun recordando principios y reglas, no sepan usar sus conocimientos cuando se encuentran en su vida cotidiana con situaciones en las que podrían serles útiles, muestra

la inadecuación de equiparar recuerdo a saber cuando lo que en el fondo se desea es que los alumnos "sean capaces de hacer algo con aquello que recuerdan". En tercer lugar, cuando se comprueba a través de las evaluaciones que los alumnos no saben algo, lo normal es decidir que sigan trabajando sobre ello. No obstante, a pesar de recibir "más de lo mismo" muchos alumnos no sólo no progresan, sino que su aversión hacia la materia o hacia las tareas en cuestión aumenta. Esto pone de manifiesto otro hecho problemático, a saber, que con frecuencia la forma en que se evalúa a los alumnos sólo permite saber si saben algo o no, pero no a qué se debe su falta de progreso en caso de que no respondan o no realicen las tareas de evaluación adecuadamente.

La incertidumbre de muchos profesores sobre la adecuación de la forma en que evalúan a sus alumnos no deriva sólo de los hechos anteriores. Dentro de nuestro actual sistema educativo, en los niveles obligatorios en que los alumnos tienen varios profesores, éstos deben evaluarles colegiadamente y decidir su promoción en base al grado en que, trabajando distintos contenidos, han desarrollado ciertas capacidades especificadas como tales en los objetivos del Diseño Curricular Base (DCB). Se trata de una situación nueva en relación con las prácticas tradicionales de evaluación en donde evaluar colegiadamente significaba en la práctica -como mucho- decidir si se aprobaba o suspendía a un alumno en función de la configuración de las notas individuales obtenidas en las distintas materias con independencia de lo que estas notas individuales significasen, hecho comprobado en un estudio reciente (Villa y Alonso-Tapia, 1996). Ante la demanda que plantea esta situación muchos profesores echan en falta orientaciones prácticas sobre cómo llevar a cabo el tipo de evaluación que se les propone.

A la luz de los hechos anteriores parece, pues, necesario desarrollar estrategias y modelos de evaluación que permitan a los profesores superar los problemas mencionados. Esto implica varias cosas. Por un lado, la información proporcionada por la evaluación debe poner de manifiesto no sólo lo que un alumno recuerda o sabe hacer mecánicamente sino el grado en que ha comprendido y asimilado unos conocimientos y en que el saber adquirido es funcional, esto es, es aplicado y utilizado espontáneamente en las situaciones adecuadas. Por otro lado, la información obtenida debe sugerir qué ayudas dar a los alumnos para que puedan progresar, para lo que es preciso que indique el origen de sus dificultades. Además, el planteamiento de la evaluación debe hacerse de modo que se evite la desmotivación que las formas tradicionales de evaluación y las decisiones que se toman en base a las mismas producen a menudo en los alumnos, para lo que es preciso que constituyan una oportunidad para aprender a partir de los propios errores y para interiori-

zar criterios que les permitan autoevaluarse. Finalmente, debe permitir la evaluación colegiada de las capacidades que constituyen los objetivos de referencia hacia los que debe orientarse la enseñanza, de acuerdo con el DCB, en los niveles educativos en que ello sea necesario. Sin embargo, con excepción de algunos trabajos incipientes (Frederiksen, Glaser, Lesgold y Shafto, 1990; Alonso-Tapia, Asensio y otros, 1993; Carpenter, Fennema y Romberg, 1993) apenas hay modelos que reúnan tales características, razón que nos ha movido a desarrollar el presente trabajo.

Dadas las características del tema que nos ocupa y el estado actual de los conocimientos sobre el mismo, ha sido preciso, en primer lugar, revisar qué supone el proceso de evaluación, qué decisiones implica y qué factores afectan a esas decisiones. Esta revisión, recogida en el primer capítulo, ha permitido esclarecer qué puede considerarse como indicador válido de conocimiento de los distintos contenidos curriculares y de la adquisición de capacidades cognitivas en el contexto de los mismos. Ha puesto de manifiesto los potenciales determinantes cognitivos del éxito y el fracaso, determinantes cuyo papel concreto es preciso determinar si se quiere proporcionar a los alumnos las ayudas adecuadas para que puedan progresar. También se han puesto de manifiesto los efectos del modo en que se contextualiza la evaluación en la consecución de los objetivos de la misma y los problemas que implica evaluar para calificar. En el contexto de los resultados de esta revisión se han constatado los problemas pendientes de solución y se han establecido los objetivos de la investigación.

El resto de los capítulos recoge los modelos y técnicas de evaluación desarrollados para ser utilizados en las distintas áreas curriculares. La estructura del segundo capítulo de cada volumen es similar, pero no idéntica. En todos ellos se comienza revisando los planteamientos más actuales sobre la enseñanza y la evaluación de la materia de que se trata. Después, en el contexto de estos planteamientos y del propósito de la evaluación, se desarrollan los distintos modelos de procedimiento para el diseño de las evaluaciones. Todos ellos incluyen la explicitación del tipo de reorganización de los esquemas conceptuales que se espera que los alumnos consigan y de las capacidades cognitivas que deben haber desarrollado trabajando con los contenidos a los que hacen referencia los distintos esquemas. Cada modelo se ilustra después con diferentes ejemplos.

A continuación se recogen los estudios empíricos realizados para comprobar la viabilidad de las técnicas desarrolladas en base a los modelos descritos. Estos estudios siguen un esquema similar. Incluyen la valoración de la adecuación de las pruebas a los objetivos perseguidos por parte de profe-

sores ajenos a la investigación, el análisis de la adecuación de las tareas y el nivel de los alumnos examinados en relación con los conocimientos y capacidades objeto de evaluación. Finalmente, se analiza mediante procedimientos matemáticos la adecuación de la estructura de las pruebas y se ilustra, en relación con las pruebas de Ciencias Sociales y Naturales, cómo establecer un punto de corte que considere la relevancia que los profesores han otorgado a las distintas tareas incluidas en las pruebas y el grado de dominio que han considerado necesario para decidir que se han conseguido los objetivos didácticos. Finalmente, se incluye una conclusión que resume los logros principales del trabajo expuesto en cada capítulo.

El último capítulo del volumen 3 tiene una estructura diferente, debido a que el trabajo realizado obedece a un propósito distinto. La normativa actual establece que los profesores de la E.S.O. deben evaluar colegiadamente el grado en que los alumnos manifiestan en las distintas áreas curriculares la adquisición de las capacidades establecidas en nuestro actual diseño curricular. La primera de estas capacidades es la de "comprender mensajes orales y escritos expresados en la propia lengua". Por este motivo, se ha desarrollado un modelo que sirve de guía para el diseño de técnicas que permitan la evaluación colegiada de tal capacidad. Dicho modelo se ha plasmado en una prueba, la CL-4, cuyas características y utilidad se han comprobado empíricamente con una muestra de 900 sujetos de BUP y E.S.O., prueba que se ofrece, además, estandarizada.

Como podrá fácilmente deducirse tras la lectura del trabajo que presentamos, pese a su extensión no constituye más que una aproximación al problema de la evaluación. Se han desarrollado muchas tareas nuevas, tareas que aunque utilizadas en formato cerrado, pueden utilizarse de forma abierta, como también se ilustra. Estas tareas tienen como una de sus características distintivas el haber sido diseñadas a partir de las aportaciones de la psicología cognitiva relativas a lo que puede considerarse como indicador válido de comprensión y de aprendizaje significativo. Así mismo, se han desarrollado modelos de procedimiento para el diseño de evaluaciones, modelos que sugieren qué conjuntos de tareas utilizar para poder concluir de modo razonable si se han reorganizado de modo adecuado los esquemas de conocimientos de los alumnos y, en caso negativo, decidir que ayudas proporcionarles. Sin embargo, la naturaleza de los contenidos sobre los que se trabaja impone restricciones específicas a la evaluación que exigen trabajar desde modelos distintos a los expuestos. Además, la evaluación se contextualiza de modos específicos que influyen en la idea que los alumnos se forman de lo que está en juego en el aprendizaje y que les lleva a establecer es-



---

trategias de trabajo y criterios de autoevaluación que, a menudo, no son los más adecuados. La investigación de la ubicación de la evaluación en contextos de aprendizaje como los que plantea la "evaluación de portafolios", descrita en el capítulo uno, es uno de los retos pendientes. Existen otros retos, como el que plantea la evaluación de las actitudes que se supone que el trabajo con los contenidos curriculares debe contribuir a desarrollar. Todo ello, no obstante, queda para futuros trabajos.



**Capítulo 1**

**EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO:  
PROPÓSITO, CRITERIOS,  
CONTEXTO Y PROBLEMAS.**

**Jesús Alonso Tapia**



---

## EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO: PROPÓSITO, CRITERIOS, CONTEXTO Y PROBLEMAS.

### INTRODUCCIÓN

Si queremos mejorar la forma en que evaluamos lo que nuestros alumnos saben y no saben en un momento dado, es necesario revisar qué es lo que supone todo el proceso de evaluación, esto es, qué decisiones implica, qué factores afectan a esas decisiones y qué efectos e implicaciones tiene evaluar de un modo u otro. Esta revisión es necesaria porque cualquier actividad evaluadora se realiza con un propósito, desde unos supuestos, en un contexto, siguiendo un proceso y utilizando unas determinadas técnicas, factores que pueden variar y que condicionan el tipo de información que se obtiene, el uso que puede hacerse de ella y, en consecuencia, el impacto que puede tener en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es preciso, por tanto, conocer qué modos puede adoptar el proceso de evaluación y cuál es el impacto de cada uno de ellos, de forma que sea posible proponer modelos especialmente adecuados a los propósitos y necesidades que los profesores tienen al evaluar a sus alumnos. Examinaremos, pues, a continuación y por separado cada uno de los factores mencionados.

#### 1.1. Propósito de la evaluación.

Evaluar el conocimiento que un alumno tiene sobre algo implica básicamente observar cómo actúa en una situación dada y comparar la información obtenida con algún criterio previamente establecido para emitir un juicio sobre la adecuación o inadecuación del conocimiento manifiesto en la información recogida. El profesor que recoge los cuadernos para corregir las multiplicaciones realizadas por sus alumnos, el que pregunta oralmente a un

alumno las clases de insectos o el que pone un examen con diferentes preguntas, valoran la respuesta del alumno decidiendo sobre su adecuación o inadecuación en base a algún criterio que ellos tienen en mente. Esa valoración, sin embargo, puede realizarse con diferentes propósitos. El que corrige el cuaderno normalmente lo hace para determinar si el alumno progresa y, en caso negativo, tratar de determinar qué tipo de ayuda proporcionarle para que pueda progresar. El que pone una prueba escrita puede hacerlo igualmente con el propósito de ayudar al alumno, pero también puede hacerlo simplemente con el fin de "avisar" globalmente al alumno de si progresa o no para que se esfuerce, con el fin de decidir si reúne las condiciones para pasar de curso, o con los tres propósitos mencionados al mismo tiempo. Finalmente, un profesor puede evaluar a un grupo de alumnos no tanto para decidir qué ayuda debe darse a cada uno de ellos en particular cuanto para determinar si debe introducir algún cambio en la forma de plantear y desarrollar la enseñanza.

Para que la evaluación que un profesor realiza le permita conseguir adecuadamente los objetivos que persigue, debe reunir ciertas condiciones que son diferentes según el propósito perseguido. Por un lado, si el propósito es indicar al alumno simplemente si progresa o no, o bien decidir si debe pasar o no de curso, basta con que la evaluación le proporcione información sobre si se han alcanzado los objetivos de aprendizaje previstos para ese momento. Obviamente, para diseñar una evaluación que proporcione este tipo de información se requiere tener claro cuáles son los objetivos que el alumno debe conseguir y qué es lo que puede constituir un indicador válido de que se han conseguido, aspectos en los que la práctica evaluadora de muchos profesores muestra sesgos importantes, como hemos podido comprobar en un estudio reciente (Villa y Alonso-Tapia, 1996). Parece, pues, necesario clarificar ambos aspectos, punto sobre el que volveremos en breve.

Por otro lado, sin embargo, si lo que se desea es determinar qué tipo de ayudas necesita para poder progresar, conocer si un alumno ha alcanzado o no los objetivos de aprendizaje no es suficiente. En este caso se necesita saber, además, la razón de que no haya adquirido los conocimientos adecuados. Averiguar esto exige diseñar la evaluación de modo que proporcione información sobre el origen de los problemas que experimenta el alumno, origen que, de acuerdo con Mayer (1987), puede estar en insuficiencias o inadecuaciones de tipo conceptual -el alumno no conoce algún concepto o idea necesario para responder adecuadamente o, incluso, tiene ideas equivocada sobre algo-, de tipo procedimental y estratégico -el alumno desconoce los pasos precisos a dar para realizar una tarea determinada-, o de tipo auto-

rregulatorio -el alumno no supervisa si el proceso seguido y el producto logrado al realizar una tarea son adecuados o, en caso de hacerlo e identificar que no comprende algo o que un problema no está bien realizado, no sabe qué hacer para resolver la dificultad que ha encontrado. Ocurre con frecuencia, sin embargo, que muchos profesores no diseñan las evaluaciones de modo que proporcionen de forma rápida y fiable información sobre el origen de los problemas que experimenta el alumno, con lo que la posibilidad de proporcionarle las ayudas adecuadas es escasa. Este hecho puede deberse, al menos en parte, a un desconocimiento de procedimientos adecuados para obtener este tipo de información, por lo que parece necesario ofrecer modelos al respecto, lo que haremos más adelante.

## **1.2. Criterios de conocimiento y aprendizaje.**

Tanto si el propósito de la evaluación es decidir si se han alcanzado los objetivos de aprendizaje como si, en caso negativo, se desea determinar qué ayudas proporcionar a los alumnos para que puedan progresar, el problema básico es determinar qué es lo que puede considerarse como criterio inequívoco de que se conoce algo. La respuesta a esta pregunta depende de qué es lo que se pretende que los alumnos conozcan. Por ello, vamos a examinar qué puede constituir un criterio en el contexto de lo que puede considerarse como objetivos de aprendizaje a distintos niveles de especificidad.

### *1.2.1. Indicadores de conocimiento de los distintos contenidos curriculares.*

#### *Hechos.*

Si el objetivo es, en primer lugar, que alumnos y alumnas conozcan una serie de hechos, lo fundamental es que sean capaces de recordarlos, ya que o se conocen o no, pero no cabe término medio. Sin embargo, todos tenemos la experiencia de saber que sabemos algo -un nombre, por ejemplo- aunque no seamos capaces de recordarlo en un momento dado y sí posteriormente, cuando algún indicio nos ha ayudado a ello. Este hecho sugiere que si el recuerdo de un hecho muestra que el sujeto lo conoce, el hecho de no recordarlo no significa necesariamente lo contrario. En consecuencia, si se desea saber si determinados hechos son conocidos, es preciso proporcionar indicios que puedan facilitar su recuerdo. En cualquier caso, el conocimiento de hechos tiene sentido sólo en la medida en que contribuye a otros aprendizajes, como la comprensión de conceptos y procedimientos y la adquisición de las

capacidades que constituyen los objetivos centrales de la educación dentro de cada etapa. Por ello, toda evaluación que se limite a determinar si el sujeto conoce o no unos determinados hechos es, de suyo, inadecuada.

### *Conceptos.*

Si, en segundo lugar, lo que importa es que el alumno llegue a comprender los numerosos conceptos con los que se encuentra a lo largo del currículo, aunque puede pedírsele que los definan o que reconozca cuál es su definición correcta dentro de un conjunto de definiciones dadas, esto no constituiría en ningún momento un criterio inequívoco y válido de comprensión. Las definiciones son "hechos" que están ahí y se pueden recordar, pero un concepto es algo más que una definición. Como ya hace tiempo señalaron Bruner, Goodnow y Austin (1954), un concepto es un regla de clasificación que "permite considerar como equivalentes cosas diferentes y, por tanto, discriminables, y responder frente a ellas en cuanto miembros de una clase, y no por lo que tienen de único" (op.cit., pág. 1). Esto no significa que los conceptos sean reglas formales que definen los atributos necesarios y suficientes para que un objeto pueda ser clasificado como tal. Excepto en unos pocos casos, como han señalado Smith y Medin (1981), la mayoría de los conceptos tienen una base probabilística o prototípica. Esto significa que las personas vamos aprendiendo poco a poco las características que definen los conceptos o bien, que tenemos a modo de "imágenes" o "ejemplos prototípicos" en nuestra mente que podemos utilizar para interpretar la realidad en función del grado en que los objetos, personas, etc. a categorizar poseen las características señaladas o se asemejan a los ejemplos que tenemos en mente.

El hecho de que los conceptos se basen, por un lado, en nuestra experiencia de la realidad y en la forma de representarnos esta experiencia -en acción, en imágenes o mediante símbolos (Bruner, Olver y Greenfield, 1966)- hace que, aunque utilicemos los mismos términos, las implicaciones que éstos tienen para cada uno de nosotros puedan ser diferentes. Por ejemplo, para un niño pequeño "estar vivo" es sinónimo de "moverse", por lo que el sol o una bicicleta pueden estar vivos, conocer, etc. (Piaget, 1926), mientras que para los mayores implica nacer, crecer, reproducirse y morir. De ahí que para evaluar el conocimiento conceptual sea conveniente examinar las distintas implicaciones que los conceptos tienen para cada sujeto observando cómo los usan y, si es posible, preguntando las razones de porqué lo hacen del modo en que lo hacen. Para poder determinar dicho uso, por otra parte, es preciso señalar que las distintas formas en que usamos los



conceptos tienen que ver con sus propiedades y funciones. (Alonso Tapia, 1983):

- a) Permiten identificar objetos, lo que supone atribuirles una serie de propiedades. Por ejemplo, determinar que lo que se acerca en la niebla es un autobús y no un tanque implica atribuir a ese objeto una serie de propiedades físicas y funcionales.
- b) La categorización de un objeto permite, además de identificarlo, anticipar acontecimientos en base a nuestro conocimiento sobre el comportamiento de esa clase de objetos. Categorizar una determinada configuración atmosférica como "tormenta en formación" permite predecir que lloverá.
- c) Los conceptos sirven, además, para dirigir nuestra conducta orientando nuestro modo de actuar frente a los objetos. Por ejemplo, conceptualizar un determinado líquido como "lejía" lleva a tomar diversas precauciones al manejarlo, ya que su contacto puede producir quemaduras.
- d) Finalmente, los conceptos se relacionan entre sí formando redes de significados que permiten entender distintas parcelas de la realidad y, en cierto modo, el conjunto de esta.

Las propiedades señaladas permiten que la comprensión de conceptos sea algo que se consigue gradualmente, en la medida en que se amplía, se modifica y se reorganiza la representación de las propiedades o atributos que llevan asociados y, en consecuencia, el uso que se puede hacer de los mismos. Por este motivo, es preferible evaluar el grado en que se comprende un concepto dado a través de tareas en las que se deba categorizar objetos, hacer predicciones o actuar frente a una situación a la que el concepto o conceptos en cuestión sean aplicables. También es posible utilizar tareas de construcción o completamiento de mapas conceptuales -representación gráfica de las relaciones entre distintos conceptos-, ya que permiten que el sujeto exteriorice el modo en que distintos conocimientos se hayan relacionados (Novak y Gowin, 1984), o incluyendo en la evaluación un conjunto de preguntas que permitan inferir la organización conceptual indirectamente.

Pese a lo que acabamos de decir, tratar de evaluar la representación que los alumnos tienen de un concepto dado pidiéndoles que resuelvan un problema puede inducirnos a conclusiones erróneas sobre la comprensión que

el alumno posee de dicho concepto. Resolver un problema de cualquier tipo implica, además de conceptualizarlo adecuadamente, conocer el procedimiento a seguir para resolverlo. Por ello, un alumno podría fracasar no por falta de comprensión del concepto sino por falta de conocimiento del procedimiento. Por ejemplo, conceptualizar un problema como "problema de áreas" es el primer paso para su solución, pero se requiere además conocer el procedimiento adecuado para el cálculo del tipo de área de que se trate. En consecuencia, si se utilizan problemas para evaluar el grado en que se comprende un procedimiento dado, es preciso evaluar por separado, además, el conocimiento que el sujeto posee de los procedimientos a aplicar.

### *Procedimientos.*

El conocimiento de procedimientos es, por otra parte, un objetivo importante dentro del planteamiento curricular, por lo que también es necesario evaluar la adquisición de los mismos por parte de los alumnos. Pero, ¿qué se puede considerar como criterio de que un alumno o alumna conocen realmente un procedimiento?

Los procedimientos son secuencias ordenadas de acciones o pasos que es preciso seguir para conseguir un objetivo. Conocer un procedimiento implica, pues, conocer la secuencia de pasos que lo integran. A veces, esta secuencia está claramente establecida, como ocurre con muchos problemas de matemáticas en los que basta con aplicar un algoritmo para alcanzar la solución. Otras veces, la secuencia no es clara. ¿Qué pasos, por ejemplo, debe seguir un alumno para realizar una redacción? No hay una solución única. Es estos casos el alumno debe "construir el procedimiento específico" utilizando otro procedimiento o estrategia de carácter más general, pero que también implica seguir unos pasos -buscar información sobre aquello de lo que se va a escribir, pensar qué puede saber de ello el destinatario y qué le puede interesar, pensar en el propósito que se persigue al escribir y tratar de concretarlo lo más posible, etc.-.

Conocer un procedimiento es también una cuestión de grado. Una persona puede describir el procedimiento a seguir para hacer un comentario de texto, pero no saber llevar sus ideas a la práctica por ser su conocimiento de cada paso más teórico que práctico. O puede saber resolver sistemas de ecuaciones, pero fracasar por aplicar los procedimientos útiles para resolver ecuaciones a situaciones en las que no son pertinentes o por hacerlo de forma desorganizada. O puede aplicarlo a la situación pertinente y hacerlo de forma organizada, pero muy despacio, por no haber automatizado la realiza-

ción de cada paso. O puede ser incapaz de corregir un error cometido en uno de los pasos por carecer de la comprensión suficiente de las razones que justifican un determinado paso, lo que le impide detectar el error. O puede aplicarlo sólo a situaciones paralelas a aquellas en las que ha recibido entrenamiento, pero ser incapaz de generalizar su aplicación a situaciones nuevas.

En consecuencia, la evaluación del grado en que los alumnos conocen los procedimientos que es preciso aprender en el contexto de cada una de las áreas curriculares debe hacerse atendiendo a las distintas facetas que definen el conocimiento de un procedimiento, esto es, preguntando qué sabe del mismo, observando si lo aplica siguiendo cada uno de sus pasos y si lo hace de forma precisa y automatizada, y examinando si es capaz de aplicarlo de forma generalizada a distintas situaciones. En concreto, Snow y Lohman (1989) señalan que para evaluar un procedimiento es preciso dar los siguientes pasos (Alonso Tapia, 1992a):

- Realizar un análisis de la tarea y determinar las acciones requeridas para su realización.- Por ejemplo, supongamos que tratamos de evaluar si el sujeto conoce el procedimiento adecuado para resolver problemas del tipo

$$x(x - 1)^2$$

Realizar adecuadamente este tipo de problemas requiere saber específicamente:

- 1- Que se trata de multiplicar una cantidad  $x$  por una diferencia al cuadrado, por lo que sólo hay que elevar al cuadrado lo que hay en el interior del paréntesis.
- 2- Que para hacer la multiplicación anterior, es mejor elevar primero la diferencia al cuadrado.
- 3- Que una diferencia al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el cuadrado del segundo, menos el doble del primero por el segundo; alternativamente, debe saber que para multiplicar una diferencia (v.gr:  $x-3$ ) por otra diferencia ( $x-6$ ) es preciso multiplicar cada miembro de la primera expresión por los dos de la segunda y luego sumar algebraicamente los resultados.
- 4- Que para multiplicar una cantidad por una diferencia, hay que multiplicar la cantidad por cada uno de los miembros de la diferencia (propiedad distributiva).

5- Que el producto de potencias de igual base es igual a otra potencia con la misma base y cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes.

- Describir las condiciones en las que debería realizarse cada acción.- Esto es necesario ya que el conocimiento de un procedimiento implica saber hacer algo cuando hay que hacerlo, esto es, en unas condiciones dadas. En el ejemplo anterior, esto significaría que el sujeto debería reconocer como condiciones adecuadas para el empleo de los conocimientos señalados expresiones como:

$$x(x-1)^2 \qquad 3x(x-2)^2 \qquad x[(x+4)-(x+2)]^2$$

y que debería reconocer como condiciones inadecuadas expresiones como:

$$x(x-1^2) \qquad 3x-2^2 \qquad x[(x+4)+(x+2)^2]$$

- Construir y presentar a los sujetos problemas en los que deban emplear tales procesos aislados o en combinación.- En relación con el ejemplo que venimos utilizando podrían servir ejercicios como:

$$a) 7 + (x-4)^2 \cdot 3x = ? \qquad b) x(x-1^2) = ? \qquad c) 2x/6(x-6)^2 = ?$$

- Determinar la precisión con que los alumnos son capaces de describir el procedimiento.- Ello permitirá contrastar la convergencia o divergencia entre lo que son capaces de decir sobre el procedimiento y el grado en que son capaces de aplicarlo. Esto puede hacerse pidiendo al sujeto que indique los pasos a seguir o, utilizando un formato de respuesta cerrada, presentándoles los pasos que supuestamente integran un procedimiento y pidiéndoles que indiquen si alguno de ellos no es correcto.
- Determinar si la ejecución es correcta o no y, en caso negativo, examinar si se dan imperfecciones o errores sistemáticos.- Este paso es clave, dado que este tipo de conocimiento se evalúa fundamentalmente con la finalidad de poder corregir al sujeto de modo efectivo, y esto se consigue más eficazmente si se conoce el origen de los errores. En los casos en que, como en el problema de matemáticas que estamos utilizando

como ejemplo, se hayan podido poner problemas similares en donde cada alternativa corresponde a un error típico, la información sobre la naturaleza y grado en que los errores se presentan de modo sistemático se obtiene por simple inspección de los resultados.

- Determinar la velocidad de realización de la tarea.- Se considera un paso clave, ya que se supone que el conocimiento de un procedimiento es tanto más efectivo cuanto más automatizada es su aplicación. Para ello puede utilizarse como índice el número de problemas realizados en un tiempo dado, etc., aunque los índices a escoger variarán según la naturaleza de la tarea.
- Examinar el grado en que la realización de los procesos evaluados se va produciendo de forma cada vez más integrada con otros procesos.- Para ello puede ayudar el examen de la progresión en la velocidad y de la fluidez y ausencia de problemas en la ejecución.
- Determinar el grado en que la destreza en cuestión se transfiere a actividades distintas.- Por ejemplo, aplicar los conocimientos adquiridos a tareas en que hay que elevar a potencias diferentes de dos o en los que hay que trabajar con fracciones.
- Examinar el grado en que las posibles deficiencias en los procesos autorregulatorios afectan a la ejecución.- Para ello, a ser posible, es preferible utilizar indicadores no verbales de los mismos (Meichenbaum y col., 1985) -por ejemplo, el tiempo en que el sujeto detiene la lectura cuando encuentra una inconsistencia o un error que demanda revisión-, dado que los procedimientos que implican algún tipo de autoinforme -pensamiento en voz alta, entrevistas posteriores a la tarea, cuestionarios, etc.- presentan algunas limitaciones, aunque no son insuperables.

Obviamente, la evaluación de los procedimientos implicados en la realización de tareas y en la solución de problemas propios de las distintas áreas requerirá partir de modelos específicos que permitan concretar los pasos anteriores. Pero las directrices señaladas por Snow y Lohman son válidas en principio para la evaluación de cualquier clase de procedimiento si bien, dependiendo del propósito específico de la evaluación, no siempre es preciso evaluar todos los aspectos indicados.

### *Actitudes.*

El trabajo dentro de cada una de las áreas del currículo tiene también como objetivo que los alumnos adquieran determinadas actitudes, objetivo que, en cuanto tal, debe ser objeto de evaluación. Ahora bien, ¿qué puede constituir un criterio de que se ha adquirido una determinada actitud? Para responder a esta cuestión hemos de tener presentes algunos hechos sobre la naturaleza, origen y forma de manifestarse las actitudes que pasamos a exponer.

Una actitud es una disposición a actuar de una determinada forma y con una cierta regularidad en relación con determinados objetos, personas, acciones, ideas, etc., debido a que éstos o las acciones a que nos referimos llevan asociados respuestas emocionales de agrado o desagrado, respuestas cuyo origen puede estar en el conocimiento que se posee sobre aquello que es objeto de la actitud.

Las actitudes se definen o identifican por el objeto o actividad en relación con el cual el sujeto experimenta las emociones positivas o negativas que influyen en su conducta. Por ejemplo, la disposición o tendencia a respetar las opiniones de los otros, aunque sean distintas -una de las actitudes cuya adquisición se pretende facilitar a partir del trabajo en grupo realizado en las clases- se define en función de la clase de acciones a las que se asocia la experiencia de agrado o desagrado -el respeto a las opiniones de los otros

. En cuanto disposición a actuar, las actitudes se concretan en las distintas manifestaciones de nuestro comportamiento: en la forma en que juzgamos y valoramos las cosas y los hechos, en lo que preferimos y elegimos, en lo que hacemos, en la persistencia e intensidad de nuestra conducta, en los recursos y esfuerzos que invertimos para conseguir algo, en nuestra forma de reaccionar ante los hechos, etc. (Triandis, 1991). Por ejemplo, la actitud de respeto a los otros puede manifestarse, entre otras formas, en que no les interrumpimos mientras están hablando; en que parafraseamos lo que han dicho al tiempo que les preguntamos si es eso lo que han querido decir; en que, cuando expresan una opinión diferente a la nuestra, en lugar de mostrar desacuerdo sin saber las razones por las que opinan de modo distinto, les preguntamos por qué dicen lo que dicen, etc., esto es, puede manifestarse en distintos aspectos de nuestra interacción con los otros. Pero también puede manifestarse esta actitud en los juicios que emitimos sobre tales formas de actuar, como cuando señalamos que las consideramos adecuadas, que preferimos que todos sean escuchados, etc.

Las actitudes pueden tener, pues, tres componentes. Primero, un componente cognitivo: valoramos algo porque conocemos lo que significa, esto es, porque tenemos razones para apreciarlo o rechazarlo (Kruglanski, 1989). Segundo, un componente afectivo: la respuesta afectivo-emocional asociada a la clase de objetos, acciones, etc. objeto de la actitud. Y, tercero, un componente comportamental: una forma de actuar en relación con aquello que es objeto de la actitud, la dedicación de tiempo y esfuerzo a un tipo de actividad, la declaración de preferencias, la declaración de juicios de valor, etc. (Eagly y Chaiken, 1993; Olson y Zanna, 1993). Decimos "pueden tener" y no "tienen" porque, de acuerdo con Olson y Zanna (1993), no siempre están presentes los tres componentes ni covarían de modo uniforme, debido a que las actitudes pueden adquirirse a partir de distintos tipos de información que no afectan de modo paralelo a los distintos modos de reaccionar de los sujetos.

Como señalan Zanna y Rempel (1988), las actitudes pueden haberse desarrollado, en primer lugar, a partir de información procedente de las emociones que intervienen en el condicionamiento de muchas conductas. En este caso podemos experimentar aversión o atractivo por algo sin saber por qué, debido probablemente a no haber sido conscientes de las experiencias que dieron lugar al aprendizaje de esa forma de reaccionar emocionalmente. Las actitudes pueden haberse desarrollado también a partir de la representación de tipo cognitivo de las características o propiedades de algo proporcionada por la información sobre las mismas. En este caso puede ocurrir que las actitudes no se manifiesten de modo regular en la conducta. Por ejemplo, podemos saber que el tabaco es malo para la salud, pero seguir fumando debido a otros factores. Finalmente, las actitudes pueden generarse a partir de la información proporcionada por nuestra propia conducta, como cuando vemos que actuar de determinado modo tiene determinadas consecuencias o, al menos, cuando atribuimos estas a un determinado modo de actuación.

Los hechos que acabamos de describir tienen implicaciones importantes a la hora de evaluar las actitudes a cuya adquisición se pretende que contribuya el trabajo académico. En las aulas se proporciona a los alumnos información sobre las razones por las que muchas cosas deben ser valoradas positiva o negativamente, conocimiento que se espera que influya en sus actitudes, lo que difícilmente puede ocurrir si no se posee. Por esta razón, si lo que se desea es conocer si los alumnos saben por qué se valora algo -no si ellos lo valoran- para, en caso negativo, poder corregir la base de conocimiento que debería servir para sustentar sus actitudes, parece necesario evaluar si poseen tales conocimientos, lo que puede hacerse del mismo modo que se evalúa cualquier otro tipo de conocimiento conceptual. No obstante,



reducir la evaluación de las actitudes a este punto es inadecuado, puesto que conocer las razones solicitadas no indica que el sujeto haya asumido ese valor. Por ejemplo, con el estudio de las ciudades, dentro del temario de Ciencias Sociales, se pretende contribuir a que los alumnos lleguen a valorar críticamente los factores que explican las desigualdades entre los servicios recibidos por localidades o zonas residenciales distintas. Sin embargo, tras estudiar el tema puede ocurrir que un alumno sostenga las dos afirmaciones siguientes, sin percibir la contradicción que implican, dependiendo del contexto, el momento y el modo en que se le pregunte:

"Es inaceptable que, en muchas ocasiones, los grupos que detentan el poder doten a unas zonas de mejores servicios que a otras: es algo que refleja falta de solidaridad".

"No creo que el estado deba invertir en obras de trasvase de aguas diciendo que es una cuestión de solidaridad el posibilitar que todas las localidades españolas tengan el agua asegurada: se deben respetar los recursos propios de cada región".

Por otra parte, en la medida en que una actitud implica una preferencia o inclinación más o menos estable hacia algo, puede obtenerse información sobre las actitudes a partir de la regularidad relativa con que los alumnos declaren preferir o rechazar determinados objetos, modos de actuación, etc. Esta forma de evaluar, siempre que se controle la tendencia a responder de modos valorados socialmente de forma positiva, constituye un indicador del grado en que el sujeto ha adquirido el componente valorativo de las actitudes, lo que puede ser útil para reexaminar la adecuación de las actividades académicas programadas para facilitar tal adquisición. Sin embargo, este componente puede no reflejar las preferencias que realmente influyen en la conducta, ya que no siempre somos conscientes de ellas. Por ejemplo, el alumno que comenta que prefiere participar en actividades competitivas antes que en debates sobre temas científicos manifiesta una actitud de rechazo hacia éstos que puede influir negativamente en la tendencia a participar en los mismos. Sin embargo, en la medida en que, aun sin ser consciente, éste alumno busque tener ascendencia y control sobre los demás y en la medida en que los debates científicos contribuyan en su caso a conseguir esta ascendencia, su comportamiento podría ser distinto del declarado.

El indicador más válido de las actitudes parece ser, pues, el hecho de que alumnos y alumnas manifiesten determinados patrones de conducta -elec-



ción, iniciación, persistencia, reiteración, intensidad, etc.- en relación con el objeto o actividad que definen la actitud. Parece ser el más válido porque reflejaría -sea el alumno consciente de ello o no- que la actitud que se ha pretendido que adquiera está presente en su conducta real. Por ejemplo, la frecuencia con la que un alumno o una alumna se plantean preguntas del tipo ¿por qué?, ¿cómo es posible? ¿cómo se explica? ¿cómo se hace? etc., en relación con un tipo de contenidos es indicador de una actitud de curiosidad, lo mismo que la frecuencia con que acude a una enciclopedia para buscar esa información. El problema con los indicadores comportamentales es que no es posible en muchos casos obtener la información necesaria, bien porque las situaciones que constituyen el contexto para la manifestación de las actitudes que interesa evaluar no se dan en la escuela, bien porque el número de alumnos no permite observarlos individualmente en grado suficiente como para garantizar una evaluación adecuada. No obstante, cabría la posibilidad de evaluar las actitudes observando la conducta de los sujetos en situaciones simuladas, si bien esta tecnología apenas ha empezado a desarrollarse.

### *1.2.2. Indicadores de adquisición de capacidades cognitivas en el contexto de los contenidos curriculares.*

En el apartado anterior hemos examinado qué es lo que puede constituir un criterio válido de aprendizaje teniendo en cuenta la naturaleza de los distintos contenidos curriculares cuyo conocimiento puede ser objeto de evaluación. Sin embargo, no se trata de que los alumnos adquieran conocimientos relativos a contenidos aislados. Los contenidos se trabajan en el contexto de un currículum elaborado en base a una serie de intenciones educativas que delimitan no sólo los contenidos que se deben conocer, sino también y principalmente, lo que el alumno debe ser capaz de hacer en relación con dichos contenidos. Hablar de lo que el alumno debe ser capaz de hacer puede hacer pensar en que lo que hay que evaluar es lo que se conoce como *objetivos de ejecución*, esto es, aquellos cambios que deben poder observarse en la conducta como resultado del proceso educativo. Sin embargo, no tiene por qué ser así. Es cierto que la evaluación de los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje sólo puede hacerse a partir de actividades y datos observables. Sin embargo, esto no significa que los objetivos deban confundirse con éstas. Lo que el alumno debe conseguir puede definirse, como han señalado Bruner y otros (1966) y Coll (1987) en términos de esquemas, *capacidades, habilidades o destrezas cognitivas* aplicables a una gran diversidad de situaciones. Como pone de manifiesto, por ejemplo, la defini-

**Cuadro 1.1. Objetivos generales de la  
Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 1989).**

A) Relacionados con la adquisición y organización de esquemas de conocimiento y su aplicación al análisis de la realidad:	
Obj. 5.	Contribuir activamente y de forma autónoma al desarrollo y a la salud corporales, valorando los beneficios que suponen los hábitos de ejercicio físico, de higiene y alimentación, así como las repercusiones negativas para la salud de determinadas prácticas sociales. <i>(Presupone sobre todo el trabajo sobre los contenidos propios de biología humana y materias relacionadas).</i>
Obj. 8.	Conocer las creencias, actitudes y valores propios del patrimonio cultural y de la tradición de nuestra sociedad, a fin de valorarlos críticamente para poder realizar opciones de valor que favorezcan el desarrollo integral. <i>(Presupone sobre todo el trabajo sobre los contenidos propios de las Ciencias Sociales).</i>
Obj. 9.	Analizar los mecanismos básicos que rigen el funcionamiento del medio físico, valorar las repercusiones que tienen sobre el mismo las actividades humanas y contribuir activamente a la defensa, conservación y mejora del mismo. <i>(Presupone sobre todo el trabajo sobre los contenidos propios de las Ciencias Naturales).</i>
Obj. 10	Interesarse por las aplicaciones del desarrollo científico y tecnológico, buscar informaciones contrastadas respecto a su incidencia sobre el medio físico y social y valorar... sus efectos sobre la calidad de vida. <i>(Presupone sobre todo el trabajo sobre los contenidos propios de las Ciencias Experimentales).</i>
Obj. 11	Apreciar, disfrutar y respetar el patrimonio natural y cultural de la comunidad en que viven ... y de otras comunidades... y velar por su conservación. <i>(Presupone sobre todo el trabajo sobre los contenidos propios de las Ciencias Naturales y Sociales).</i>
B) Relacionados con el desarrollo y utilización de capacidades generales de tipo básicamente cognitivo.	
Obj. 1.	Comprender y producir mensajes orales y escritos con corrección, propiedad, autonomía y creatividad..., utilizando el lenguaje para comunicarse con sus semejantes, atendiendo a las intenciones y contextos de comunicación más habituales... y para organizar los propios pensamientos. <i>(Esta capacidad debe trabajarse desde todas las áreas, si bien el peso específico corresponde a Lengua y Literatura).</i>

Cuadro 1.1 (Continuación).

Obj. 2.	Comprender y producir mensajes en distintos códigos verbales y no verbales. <i>(Esta capacidad debe trabajarse desde todas las áreas, si bien el peso principal por lo que a los códigos de tipo matemático se refiere corresponde a esta disciplina).</i>
Obj. 3.	Utilizar de forma autónoma y crítica las principales fuentes de información... con el fin de planificar actividades... confrontar informaciones... y adquirir nuevas informaciones. <i>(Esta capacidad debe trabajarse desde todas las áreas, ya que en todas ellas los alumnos han de realizar tareas que requieren la búsqueda y utilización de información).</i>
Obj. 4.	Elaborar y desarrollar estrategias personales de identificación y resolución de problemas en los principales campos del conocimiento mediante la utilización de unos hábitos de razonamiento objetivo, sistemático y riguroso, y aplicarlas espontáneamente a situaciones de la vida cotidiana. <i>(Esta capacidad debe trabajarse desde todas las áreas).</i>
C) Relacionados con el desarrollo y utilización de otras capacidades generales.	
Obj. 6.	Formarse una imagen equilibrada y ajustada de sí mismos, de sus características, posibilidades y limitaciones, y desarrollar un nivel aceptable de autoestima que les permita encauzar de forma equilibrada su actividad... y que contribuya a su bienestar. <i>(El desarrollo de esta capacidad se ve afectado por el conjunto de las actividades escolares).</i>
Obj. 7.	Analizar los mecanismos y valores básicos que rigen el funcionamiento de la sociedad, en especial los relativos a sus derechos y deberes como ciudadanos y trabajadores, elaborando juicios y criterios personales sobre ellos y actuar en consecuencia dentro de los diferentes grupos sociales. <i>(Esta capacidad, relacionada con la inserción social y laboral, presupone sobre todo el trabajo sobre los contenidos propios de las Ciencias Sociales).</i>
Obj. 12	Relacionarse constructivamente con otras personas, adoptando actitudes de flexibilidad, cooperación, participación interés y respeto, superando inhibiciones y prejuicios y rechazando todo tipo de discriminaciones... <i>(El desarrollo de esta capacidad se ve afectado por el conjunto de las actividades escolares, académicas y no académicas,).</i>

ción de los objetivos curriculares que los alumnos deben alcanzar al término de la Enseñanza Secundaria Obligatoria que presentamos en el Cuadro 1.1, con la enseñanza se pretende, en primer lugar, no sólo que las representaciones que los alumnos tienen de las cosas sean más precisas, sino que se rela-

cionen y organicen de acuerdo con esquemas que puedan usarse de forma adecuada y funcional. Pero, además, se pretende que los alumnos adquieran una serie de capacidades -cognitivas, de equilibrio emocional, de relación con otras personas, de toma de decisiones-, capacidades que deben manifestarse en el contexto de las distintas materias y actividades curriculares. Ahora bien, si lo que interesa es evaluar no sólo si los alumnos conocen contenidos específicos, sino si se está produciendo una reestructuración adecuada de sus esquemas conceptuales y si, en el contexto de la misma, están adquiriendo las capacidades de distintos tipos que se explicitan en el currículum, es preciso que las evaluaciones, puntuales o continuas, estén diseñadas de acuerdo con un *modelo teórico* que garantice que las inferencias sobre el grado en que los alumnos han alcanzado los objetivos señalados son plausibles, lo que es necesario para que las decisiones basadas en las mismas estén justificadas. La explicitación y validación de modelos de organización e integración del conocimiento relativos a los esquemas o modelos mentales que deben construir los sujetos y a las capacidades que deben desarrollar constituye el paso fundamental en el diseño de cualquier evaluación. Tales modelos deben referirse fundamentalmente a la forma de organización e integración tanto de los conocimientos de tipo conceptual como de los de tipo procedimental, de las condiciones en que unos y otros deben aplicarse y de las disposiciones actitudinales cuya adquisición debe haber generado (Novak y Gowin, 1984; Coll, 1987; Alonso Tapia, 1992a). Por ello, tendrán que ver obviamente con la naturaleza de la materia sobre la que versa la enseñanza.

Sin embargo, también deberán tener que ver con las capacidades, específicas y generales, que la instrucción debe tender a facilitar. Cuando se dice, por ejemplo, que al término de la Enseñanza Secundaria Obligatoria el alumno debe ser capaz de "Utilizar de forma autónoma y crítica las principales fuentes de información existentes en su entorno... con el fin de planificar sus actividades, confrontar informaciones obtenidas previamente y adquirir nuevas informaciones" (MEC, 1989, ESO I, pág. 78), para poder facilitar y evaluar su adquisición es preciso tener presente que esta capacidad integra múltiples habilidades de tipo cognitivo tales como:

- Ser capaz de "buscar" la información necesaria.
- Ser capaz de "leerla", cuando se presenta en textos, gráficos, tablas, soportes magnéticos, etc.
- Ser capaz de "contextualizarla" en función del momento, propósito y supuestos en que se produjo.
- Ser capaz de "interpretarla", deduciendo sus implicaciones.
- Valorarla desde un criterio sobre la confiabilidad de la fuente.

- Valorarla desde un criterio sobre el valor del contenido.
- Valorarla desde un criterio sobre su relevancia en función del propósito perseguido.

Esta secuencia de habilidades, cuya forma de concreción en el contexto de los distintos contenidos curriculares debe así mismo hacerse explícita, configura un modelo que debe guiar el trabajo tanto a la hora de la enseñanza como de la evaluación. Y lo mismo cabe decir del resto de las capacidades recogidas en el Cuadro 1.1. Debe partirse de modelos que especifiquen qué tipo de destrezas integran cada una de tales capacidades y qué tipos de tareas informan de la adquisición de las mismas, especificación que, en algunos trabajos recientes hemos realizado y fundamentado en relación con algunas de las capacidades cognitivas -razonamiento, solución de problemas, comprensión lectora y composición escrita-, bien sin ubicarlas en el contexto de los contenidos curriculares (Alonso Tapia, 1991), bien ubicándolas (Alonso Tapia, Asensio y otros, 1993) y con las capacidades de equilibrio emocional, de relación con otras personas, de toma de decisiones (Alonso Tapia, 1995).

### **1.3. Evaluar para ayudar: determinantes cognitivos del éxito y el fracaso.**

Cuando la evaluación se plantea no sólo para determinar si los alumnos han alcanzado los objetivos curriculares sino, además, para determinar qué ayudas necesitan en caso de fracaso, es preciso tener presente a la hora de diseñar las tareas de evaluación que deben proporcionar información sobre los posibles determinantes cognitivos del fracaso. Esto es, la evaluación no sólo debe poder decirnos si un alumno sabe o no sabe algo sino, en caso de que actúe de forma equivocada, a qué puede deberse su error.

De acuerdo con Mayer (1987), los determinantes de los errores de los alumnos pueden tener que ver con tres tipos de conocimientos, semánticos o conceptuales, procedimentales y autorregulatorios. ¿Qué implica cada uno de estos factores?

#### *1.3.1. Elaboración conceptual insuficiente.*

Cuando se plantea la evaluación de los conocimientos conceptuales de los alumnos a través de tareas de solución de problemas podemos encontrarnos con que los alumnos dan respuestas erróneas que no se deben necesariamente a que no hayan estudiado sino a que, probablemente debido al influjo de ideas ajenas al contenido estudiado, se han formado una representación

errónea que les ha llevado a cometer el error. Por ejemplo, un profesor de Ciencias Sociales puede plantear a sus alumnos las preguntas que presentamos en el Cuadro 1.2.

Cuadro 1.2. Ejemplo de pregunta planteada para evaluar la adquisición de un modelo conceptual.

<p><i>Acabas de estudiar los factores que influyeron en que se produjese la Revolución Industrial. Supón que la industrialización rápida de un país ocurra siempre de modo semejante a como ocurrió en Gran Bretaña y que hay cuatro países que presentan las condiciones que aparecen en la tabla. Teniendo esto en cuenta y considerando sólo los factores de la tabla, ¿en cuál de estos países es más probable que se produzca una industrialización rápida? ¿Por qué razón? ¿Por qué es menos probable que se produzca en el resto de los países?</i></p>					
PAÍS CARACTERÍSTICAS	A	B	C	D	E
Personas en paro	Muchas	Muchas	Muchas	Pocas	Muchas
Dinero ahorrado	Mucho	Poco	Mucho	Mucho	Mucho
Energía (Carbón, etc.)	Abundante	Abundante	Escasa	Abundante	Abundante
Inversiones preferidas	Cultura (Teatros)	Maquinaria agrícola	Maquinaria agrícola	Maquinaria textil	Maquinaria textil

Una respuesta frecuente de los sujetos a tales preguntas es que la probabilidad de una industrialización rápida es mayor en el país D porque tiene pocas personas en paro. En este caso el origen del error radica en que la idea de paro se asocia a la de "situación negativa personal y socialmente" -quizá por influjo de la experiencia cotidiana-, y no a la de "mano de obra disponible si se necesita" y, por tanto, a la de condición facilitadora de los procesos de industrialización en condiciones semejantes a las que produjeron la Revolución Industrial. Esto es, ha habido una elaboración insuficiente del concepto de paro, haciendo que sus implicaciones semánticas hayan quedado restringidas. Esta falta de elaboración semántico-conceptual es muy frecuente, estando a la base de muchos de los errores que cometen los alumnos al ser evaluados, por lo que es preciso utilizar procedimientos que permitan su identificación cuando se prevé que pueda existir.

### 1.3.2. Conocimiento insuficiente o inadecuado de los procedimientos a aplicar.

Un segundo factor que influye en los errores de los alumnos y que es preciso evaluar si se desea proporcionarles las ayudas adecuadas es el haber

adquirido ideas incorrectas sobre alguno de los pasos que integran los procedimientos que han de aprender. Por ejemplo, en la siguiente ecuación:

$$\left(X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4}\right) : 3$$

si sólo se obtiene información sobre el resultado y este es incorrecto, es imposible decir al sujeto qué debe hacer para no volver a hacerlo mal, ya que no podemos saber en qué paso se equivoca y cuál es la naturaleza de su error. Sin embargo, los alumnos cometen a menudo errores sistemáticos que se basan en una idea inadecuada, diferente en cada caso, sobre lo que conlleva el procedimiento a seguir. Los ejemplos recogidos en el Cuadro 1.3, correspondientes a dos alumnos que han realizado el mismo problema, ilustran este hecho.

Cuadro 1.3: Errores de procedimiento.

Resuelve la ecuación siguiente:	
$\left(X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4}\right) : 3$	
a)	$\begin{aligned} \left(X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4}\right) : 3 &= \left(X : \frac{1}{3}\right) - \left(X : \frac{2}{3}\right) - \left(X : \frac{4}{3}\right) = \\ &= 3X - \frac{3X}{2} - \frac{3X}{4} = \frac{12X - 6X - 3X}{4} = \frac{3X}{4} \end{aligned}$
b)	$\left(X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4}\right) : 3 = \left(\frac{4X}{4} - \frac{2X}{4} - \frac{X}{4}\right) : \frac{3}{4} = \frac{X}{4} : \frac{3}{4} = \frac{4X}{12} = \frac{X}{3}$

Los ejemplos referidos muestran la importancia de identificar a través de la evaluación si la razón de que el alumno no consiga realizar adecuadamente la tarea está en el desconocimiento de los pasos que integran los procedimientos específicos que debe aprender. Sin embargo, la naturaleza de dicho ejemplo puede hacer pensar que tal identificación sólo es viable en tareas con objetivos claros para cuya realización es posible emplear un procedi-

miento de tipo algorítmico, lo que no es cierto. También es necesario evaluar en qué medida el desconocimiento de procedimientos de tipo estratégico, menos específicos, está a la base de los problemas que experimenta el alumno, para lo que se requieren dos cosas. Primero es preciso obtener información sobre lo que el alumno hace a lo largo del proceso de realización de la tarea, de modo que sea posible conocer el procedimiento que emplea de hecho. Pero, además, es preciso contar con modelos del proceso "experto" que permitan identificar en qué pasos el sujeto no actúa como sería deseable, sin lo cual difícilmente se le podría corregir. El siguiente ejemplo tomado de un alumno que tuvo que realizar una breve redacción sobre Castilla y León para leerla luego ante los alumnos de su clase puede servir para ilustrar este punto. El alumno aludido produjo la siguiente redacción:

*Castilla y León se encuentra en la submeseta septentrional. Tiene muchos castillos y otros monumentos históricos. El Duero atraviesa todo el territorio. Tiene nueve provincias, Ávila, Burgos, León, Palencia, Salamanca, Segovia, Soria, Valladolid y Zamora. Hay bastantes zonas montañosas, grandes llanuras y valles. A los castellano-leoneses les gusta comer bien. En Ávila hay murallas y en Segovia un acueducto romano. En las montañas hay ríos y se puede ir a pescar. Son buenos los vinos y los quesos.*

Es obvio que el texto presenta cierto desorden temático, algo sobre lo que cualquier profesor llamaría la atención del alumno. También es obvio que el texto, tal y como está escrito, lo más probable es que sea de escaso interés para los compañeros cuando escuchen su lectura. Sin embargo, sin saber exactamente qué proceso ha seguido el alumno al escribir su redacción y sin contar con un modelo que permita identificar qué pasos importantes del proceso de composición no se han dado en grado y modo suficiente, es difícil poder ayudarle. Sin embargo, si se hubiera pedido al chico que indicase las preguntas que se fuera planteando y que entregase los sucesivos borradores que hubiese escrito, habría sido posible averiguar en qué medida sigue los pasos que constituyen básicamente el procedimiento seguido por el experto (Bereiter y Scardamalia, 1987; Alonso Tapia, 1991) tales como:

- Concretar y especificar el propósito de la redacción.- Esto se puede ver en el hecho de que el sujeto se plantee o no cosas como ¿qué puede despertar el interés de mis compañeros por conocer Castilla y León? ¿por conocer un sitio cualquiera? ¿qué podría despertar mi interés?, así como en cambios en los sucesivos borradores atribuibles a este tipo de preguntas.



- Tratar de generar cosas que decir, sin empezar a escribir, teniendo en mente el propósito generado, sin conformarse con la primera idea que venga a la cabeza.- Este paso requiere formularse de modo reiterado preguntas como ¿qué más podría decir sobre...? y, si es preciso, buscar información en las fuentes documentales adecuadas. El hecho de que el alumno trate de generar cosas que decir puede constatarse a veces en las anotaciones previas que los alumnos hacen a modo banco de ideas, donde incluyen lo que se les va ocurriendo.
- Seleccionar si la forma en que se va a escribir es adecuada para el propósito que se persigue.- El grado en que el alumno realiza este paso puede verse en el hecho de que exprese cosas como ¿Cómo voy a contar las cosas? ¿Como en los libros de texto? ¿Son interesantes los libros de texto? ¿De qué otro modo podría hacerlo?
- Revisar de modo recursivo si el contenido es suficiente, si la estructura del texto es coherente, si hay adecuación entre lo escrito y el tipo de meta perseguido.- Esto puede verse si se examina no sólo el producto final, sino los posibles borradores que haya escrito el sujeto y los cambios que han quedado reflejados en los mismos.

Obviamente, los modelos desde los que se evalúa el grado en que los alumnos conocen procedimientos adecuados para afrontar tareas como la descrita pueden estar más o menos elaborados. En este último caso, tal vez no sean de mucha ayuda para identificar el origen de los problemas del alumno. No obstante, es imprescindible que los profesores intenten identificar desde los modelos que posean el origen de los problemas en la aplicación de conocimientos de tipo procedimental si se quiere ayudar a los alumnos a superarlos.

### *1.3.3. Supervisión y autorregulación de los procesos implicados en la comprensión, el aprendizaje y la solución de problemas.*

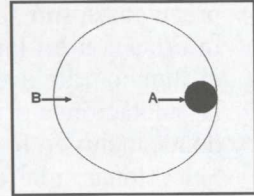
El último de los factores cognitivos señalados por Mayer como potencialmente responsables de los fracasos de los alumnos y cuyo influjo debe, por tanto, ser evaluado si se desea poder ayudarles, es el grado en que supervisan y regulan su propia actividad a la hora de afrontar la realización de tareas y solución de problemas. El influjo de este factor se manifiesta en los errores cometidos por dos alumnos al tratar de resolver el problema del Cuadro 1.4.

La evaluación del grado en que los errores de los alumnos se deben a falta de supervisión y autorregulación de la propia actividad mental puede ha-

### Cuadro 1.4: Ejemplo de errores debidos a falta de supervisión y autorregulación de los procesos cognitivos.

Problema:

*Si el radio del círculo B es cinco veces el del círculo A, ¿Qué fracción representa el área de la porción no sombreada respecto al área del círculo B?*



Caso 1:

A:  $r_B = 5r_A$ ... Hay que hallar la diferencia de áreas... No sé seguir ...

P: ¿No sabes seguir? ¿Por qué? ¿Qué es lo que te crea dificultad, lo que no entiendes?

A: No sé.

P: ¿Cómo podrías averiguar qué es lo que te crea dificultad?

A: No sé.

P: Veamos, lee el problema de nuevo.

A: Si el radio del círculo B es cinco veces el del círculo A...

P: ¿Entiendes lo que significa "ser cinco veces..."

A: Sí, que la longitud de B es la de A multiplicada por 5.

P: Sigue.

A: ¿Qué fracción representa el área...

P: ¿Sabes a qué se refiere?

A: No.

P: Ves, releendo has averiguado qué es lo que no entiendes

En este primer caso, el bloqueo del alumno se debía a no haber sabido qué hacer para identificar el origen de su dificultad -podría haber releído paso a paso, tratando de ver qué es lo que no entendía-. La ayuda que precisa en primer lugar es, pues, aprender cómo identificar el origen de la propia dificultad.

Caso 2.

A: Una fracción implica dividir una área por otra. Necesito saber las áreas:  $a_A = \pi r_A^2$ ,  $a_B = \pi r_B^2$ , pero los radios no son los mismos. Tendrá que ver con la diferencia de radios. Si un radio es cinco veces mayor, el área de B también lo será. Y si el área de B es 5/5 y el de A 1/5, el área no sombreada será 4/5 de la total.

En este segundo caso, en el error del alumno han influido dos factores. En primer lugar, el alumno ha partido de una idea parcialmente equivocada. Es cierto que la diferencia de las áreas tiene que ver con la diferencia entre los radios, pero una vez que cada radio ha sido elevado al cuadrado, lo que supone no tener en cuenta un elemento específicamente matemático. Por otra parte, no ha supervisado si el resultado obtenido era aceptable estimando visualmente si A cabía cinco veces en B o más. En este caso el problema es más general, ya que supone una falta de supervisión de la propia actividad para, en caso necesario, realizar las acciones correctoras precisas.

cerse mediante distintos procedimientos cuya fiabilidad y utilidad ha sido examinada por Meichembaum, Burland, Gruso y Cameron (1985). Es posible, por ejemplo, pedir a los alumnos una vez que han terminado una tarea -por ejemplo, una redacción-, que describan lo que han ido pensando a lo largo de la misma que les ha llevado a hacerla así, o que contesten a un cuestionario relativo a tales pensamientos. También es posible observar a un alumno mientras trabaja -por ejemplo, mientras lee en voz alta- y pedirle que exprese en voz alta los pensamientos que le pasen por la cabeza. O bien observar el modo en que ejecuta una tarea y utilizar distintos indicadores observables que puedan servir como criterio de supervisión y autorregulación de su actividad o de falta de la misma. Los dos casos recogidos en el Cuadro 1.4 constituyen un ejemplo en el que se utilizan este tipo de indicadores. Otro ejemplo, ligado en este caso a la lectura, lo constituye la observación de la corrección espontánea de los errores que se cometen al leer en voz alta pues se ha comprobado que las personas que supervisan su comprensión vuelven a releer las palabras que han leído mal si el error cometido da como resultado una palabra semánticamente inaceptable, por lo que la ausencia de relectura en este caso es un indicador de falta de supervisión y autorregulación del proceso de comprensión. Finalmente, existen procedimientos pensados para evaluar no la supervisión y regulación de la adecuación del proceso de aprendizaje en un caso puntual, sino la regularidad con que supervisa y la capacidad de regular su actuación, capacidad que se basa en el conocimiento de las estrategias que se deben aplicar en un caso dado. Un ejemplo de estos procedimientos, útil para evaluar si los alumnos supervisan su comprensión al leer y si conocen estrategias adecuadas para resolver los problemas con que se encuentran, desarrollado por nosotros mismos (Alonso Tapia, Carriedo y Mateos, 1992), se presenta en el Cuadro 1.5.

La fiabilidad y utilidad de los procedimientos descritos varía, siendo preferible utilizar aquellos que se basan en indicadores directos de supervisión o de falta de la misma a los que se basan en lo que el sujeto es capaz de contar. En cualquier caso, sea cual sea el procedimiento que se utilice, es preciso identificar previamente, a partir del análisis del proceso a seguir para realizar el tipo de tarea de que se trate, qué puede servir potencialmente como indicador de supervisión y regulación de la propia actividad. Algunos indicadores son de tipo general, esto es, significan lo mismo con independencia del tipo de tarea. Por ejemplo, no saber por qué no se comprende un texto o por qué no se sabe hacer un problema que se supone que el sujeto debería ser capaz de realizar es un indicador de que se desconocen las estrategias para

**Cuadro 1.5. Ejemplo de tareas para evaluar la supervisión  
y auto-regulación de la comprensión.  
Batería SURCO (Alonso Tapia, Carriedo y Mateos, 1992)**

<p><b>Texto.</b></p> <p>Un año fue tan abundante la cosecha de arroz que la gente creyó que no habría graneros suficientes para almacenarlo, por lo que a toda prisa se pusieron a construir nuevos trojes.</p>
<p><b>a. Prueba de detección de fallos de comprensión.</b></p> <p>Si hay algo que no comprendes al leer el texto, indícalo escribiendo la pregunta que harías a tu profesor para que te explicase lo que no entiendes.</p>
<p><b>b. Prueba de conocimiento de estrategias para regular la comprensión.</b></p> <p>Seguramente desconoces el significado de la palabra <i>trojes</i>. ¿Cuál crees que sería la mejor forma de llegar a conocer su significado?</p> <p>a) No haría nada por averiguarlo pues no es una palabra importante para comprender el texto.</p> <p>b) Buscaría el significado de esa palabra en el diccionario.</p> <p>c) Me imaginaría su significado por lo que dice el resto del texto.</p> <p>d) Seguiría leyendo para ver si más adelante dice el texto cuántos trojes construyeron.</p>
<p><b>c. Prueba que implica el uso de estrategias para regular la comprensión.</b></p> <p>¿Qué significa <i>trojes</i>?</p> <p>a) Graneros.</p> <p>b) Sacos de arroz.</p> <p>c) Casas de campo.</p> <p>d) Carros de acarreo.</p>

identificar la razón específica de la dificultad que se está experimentando. Así mismo, el hecho de que un sujeto acepte una respuesta a un problema que no guarda proporción a simple vista con los datos, como le ocurre al segundo sujeto con el problema de los círculos, es un indicador de falta de supervisión de la adecuación del proceso seguido. Desconocer qué estrategia

se debería utilizar para resolver un problema dado en una situación concreta, aspecto que se evalúa en el ejemplo del Cuadro 1.5, es un indicador de que el sujeto tendrá problemas para autorregular su actividad en esos casos. Otros indicadores, sin embargo, estarán más ligados a la naturaleza específica de las tareas a realizar -composición escrita, solución de problemas de distintas materias, etc.-, por lo que deberán ser los profesores los que determinen qué es lo que puede constituir un indicador aceptable de que los problemas de los alumnos se deben a la falta de supervisión y regulación de los procesos de comprensión, aprendizaje y solución de problemas.

## **1.4. Contextualización de la evaluación.**

### *1.4.1. Problemas y principios de actuación.*

Cuando los profesores evalúan a sus alumnos lo hacen teniendo presentes los objetivos curriculares que se pretende que alcancen los alumnos -recordar esto o aquello, saber hacer tal o cual cosa, etc. Para ver si estos objetivos se han alcanzado, los profesores proponen las tareas que consideran que constituyen indicadores apropiados. Eventualmente, estas tareas se seleccionan en el contexto de un diseño de recogida de información que permite inferir si se han producido cambios significativos en los esquemas de conocimiento y capacidades del sujeto. No obstante, la selección y propuesta de tareas se hace en base a lo que el profesor considera que sería importante haber aprendido, no en base a lo que los propios alumnos consideran que constituye un indicador de lo que han aprendido y del interés que despierta en ellos ese aprendizaje. Este hecho puede dar lugar a que los alumnos se vean abocados a hacer cosas cuya relevancia para su propio desarrollo personal no son capaces de descubrir, lo que a su vez hace que afronten la realización de los ejercicios de evaluación y, previamente, el estudio necesario para afrontarla sin la motivación adecuada, lo que puede impedir una adecuada elaboración de la información que facilite su transferencia.

En este contexto, los criterios de evaluación que utiliza el profesor y los que utilizan los propios alumnos para evaluar si han progresado de modo relevante son distintos, como lo muestra el hecho frecuente de que muchos alumnos, incluso habiendo aprobado y sacado buenas notas, digan que no han aprendido nada realmente válido. Debido a ello, el significado de los datos de la evaluación planteada por el profesor puede ser engañoso. Se puede pensar que un alumno, dados sus logros, está progresando en la dirección señalada por los objetivos educativos entre los que se incluyen: a) el adquirir

un concepto de sí mismo positivo y realista, algo que depende en parte de que experimenten que progresan y son competentes; b) el adquirir actitudes de curiosidad y valoración positiva del estudio, lo que depende en buena medida de que lo que se estudia se perciba como algo relevante para el desarrollo personal; y, c) el que sepan pensar y transferir sus conocimientos a situaciones nuevas, capacidad que requiere haber elaborado los nuevos conocimientos hasta haber tomado conciencia de su funcionalidad. Sin embargo, como no se dan las condiciones necesarias, en realidad no se está produciendo tal progreso.

Para evitar el problema señalado parece necesario conseguir que la evaluación realizada por los profesores reúna varias condiciones. La primera condición es que tenga lugar una vez que, tras exponer y comentar con los alumnos los objetivos de aprendizaje, éstos hayan comprendido su relevancia, hayan asumido la necesidad de esforzarse por trabajar en la dirección señalada y hayan interiorizado qué es lo que deben considerar como indicadores de progreso. La segunda condición es que, una vez que el alumno haya realizado las tareas que proporcionan la información sobre la que se apoya el proceso evaluador, las tareas realizadas por el alumno o alumna sean valoradas de forma que no perciba la situación de evaluación como un juicio, sino como una situación en la que se va a recibir ayuda para aprender. Ahora bien, ¿Cómo conseguir que la evaluación reúna las características señaladas?

Obviamente, para que los alumnos afronten la realización de las tareas de evaluación esperando aprender algo sobre su progreso personal en relación con aspectos que consideren relevantes, lo primero que se requiere es que el profesor haya ayudado a los alumnos, a lo largo del proceso de enseñanza, a descubrir las razones por las que estar informado de una serie de hechos, comprender una serie de conceptos, ser capaz de aplicar una serie de procedimientos y asumir una serie de actitudes es relevante para su desarrollo personal, así como los criterios que pueden poner de manifiesto la adquisición de tales conocimientos y destrezas. Sin embargo, puede ocurrir, como hemos comprobado en un estudio reciente realizado con profesores de enseñanza secundaria (Villa y Alonso Tapia, 1996), que la forma de plantear la evaluación esté diciendo al alumno que lo que cuenta es el recuerdo o la aplicación de ciertas reglas manifiestas en tareas en las que se muestrean más o menos aleatoriamente sus conocimientos. Por ello, para evitar este problema es preciso, además, que la evaluación tenga las siguientes características:

- 1) Por un lado, que el profesor o profesora seleccionen como tareas para la evaluación aquellas que, por poner en juego capacidades cuya

adquisición resulte realmente útil, puedan ser percibidas por los alumnos como relevantes para su desarrollo personal. Por ejemplo, es más fácil que un alumno perciba la relevancia de haber trabajado los contenidos de historia relativos a la Revolución Industrial si se le pide la aplicación del modelo de cambio a una situación nueva para hacer algún tipo de predicción basada en dicho modelo -algo que requiere pensar, que pone de manifiesto la utilidad de conocer el modelo y que sirve para poner de manifiesto el progreso en la adquisición de las habilidades cognitivas implicadas-, que si simplemente se le pide que recuerde lo que ocurrió.

- 2) Por otro lado, que los profesores faciliten la percepción de la relevancia de la tarea haciendo explícitas las razones de por qué se ponen las tareas que se ponen. Pedir a los alumnos que apliquen el modelo mencionado sin haber hecho explícito qué es lo que se espera que ponga de manifiesto puede resultar contraproducente, pues es una tarea más difícil que el simple recuerdo de hechos. Es evidente que hacer explícitas las razones señaladas pertenece a la contextualización de la evaluación, no al diseño de la misma. Sin embargo, en la medida en que puede afectar positivamente a la actitud con que los alumnos afrontan la realización de las tareas propuestas, en especial si éstas son congruentes con los objetivos cuya consecución se ha considerado relevante a lo largo del trabajo en clase, constituye un elemento necesario para evitar que los alumnos afronten con actitudes negativas la realización de las mismas -alguno podría pensar: "¿Para qué necesito saber esto?!"-, lo que puede dar lugar a resultados que conduzcan a una imagen distorsionada del progreso del alumno.
- 3) Además, en la medida en que la evaluación se plantea con el objetivo de proporcionar al alumno las ayudas que le permitan progresar y en que una de estas ayudas pasa por facilitarle su autoevaluación, esto es, la apreciación de los aspectos en que ha y no ha progresado y del grado en que lo ha hecho utilizando criterios de valoración asumidos personalmente y compartidos con el profesor, y dado que el progreso no es cuestión de todo o nada, es necesario que el diseño de la evaluación incluya un abanico de tareas graduadas en dificultad y que permitan detectar el progreso en distintas direcciones. Es importante que se dé esta condición porque si el nivel de las tareas es muy fácil o muy difícil, ni los profesores conocerán hasta donde han progresado sus alumnos ni tampoco ellos mismos lo sabrán, lo

que dificultará el establecimiento posterior de objetivos adecuados sobre los que trabajar. Pero, además la percepción de la dificultad de las tareas en el momento de tener que hacerlas puede dar lugar a la desmotivación y bloqueo de los alumnos, impidiéndoles pensar, lo que puede ser un factor adicional que contribuya a ocultar los progresos reales.

Por otra parte, para que el alumno perciba las situaciones de evaluación no como un juicio, sino como situaciones de las que puede recibir ayuda para aprender, son necesarias dos cosas. Por un lado, que el diseño de las tareas permita averiguar los factores que están en el origen de las dificultades lo mismo que la naturaleza de los progresos, factores que hemos descrito anteriormente. Pero además es necesario, por otro lado, que los profesores comuniquen a sus alumnos los aspectos en que han progresado y aquellos en que no lo han hecho, que les ayuden a ver tanto las razones de sus progresos como de las dificultades que han experimentado y, en este último caso, que les indique qué pueden hacer para afrontar estas dificultades. Obviamente, estas acciones del profesor no forman parte directamente del diseño de la evaluación. Sin embargo, el que los profesores den a sus alumnos de modo habitual la información señalada tras la realización de las tareas de evaluación puede contribuir a que los alumnos afronten la realización de tales tareas de modo más positivo, evitando así que los datos de la evaluación proporcionen una imagen distorsionada de sus capacidades.

#### *1.4.2. Evaluación de portafolios.*

Conseguir que la evaluación se realice en un contexto que reúna el conjunto de características señaladas parece que puede verse facilitado en la medida en que los exámenes tradicionales sean sustituidos por lo que se conoce como "Evaluación de portafolios" (Portfolio assessment)<sup>1</sup>. Este tipo de evaluación, como cualquier evaluación cuyo objetivo primario sea proporcionar al alumno las ayudas que le permitan progresar y sólo secundariamente calificarle, implica recoger información de lo que el alumno conoce y es capaz de hacer que permita identificar, en caso de falta de progreso, las razones de la misma. Por ello, como cualquier evaluación, requiere tener presente, a la hora de valorar los datos proporcionados por el alumno, qué es lo que puede constituir un criterio de que se conocen hechos, de que se com-

<sup>1</sup> Una amplia bibliografía comentada sobre recursos para realizar la evaluación a partir de portafolios se encuentra en el trabajo: "Portfolio Resources Bibliography", publicado por el Northwest Regional Educational Laboratory, -The test Center-, Portland, Oregon, a fin de 1994.



prenden conceptos, de que se dominan procedimientos y de que se están adquiriendo actitudes. Requiere así mismo conocer adecuadamente qué es lo que puede considerarse como indicador de las razones por las que no progresa, a saber, las posibles insuficiencias de elaboración conceptual, de dominio de los pasos que integran los distintos procedimientos y de conocimientos autorregulatorios.

Sin embargo, esta forma de evaluar busca implicar al alumno en el proceso de evaluación de los progresos que ha logrado en el contexto de un proyecto de desarrollo personal, proyecto negociado y aceptado periódicamente a partir de las propuestas del profesor o profesora, de forma que el alumno perciba la relevancia de la evaluación, interiorice los criterios de progreso y sea su primer evaluador (Tierney, Carter y Desai, 1991; Yancey, 1992; Graves y Sunstein, 1992; Seldin, 1993). Su principal objetivo es, pues, evitar el problema que planteábamos en el punto anterior, a saber, que se pueda pensar equivocadamente que el alumno progresa en su capacidad de aprender a aprender y de aprender a pensar, en la adquisición de una actitud de curiosidad y valoración positiva del estudio y el aprendizaje, y en la capacidad de establecer metas personales de aprendizaje que faciliten su desarrollo y la adquisición de un concepto de sí mismo positivo y realista, objetivos de fondo de toda la tarea educativa.

Para conseguir el objetivo señalado, la evaluación de portafolios, de la que existen distintas variantes, se configura en torno a una serie de características básicas que no están presentes habitualmente en las formas de evaluación habituales. Estas características tienen que ver con los siguientes aspectos de la evaluación:

- la contextualización de la evaluación;
- el proceso de recogida de información;
- el rol desempeñado por profesor y alumno en el proceso de evaluación;
- la forma de llegar a la calificación a partir del proceso de evaluación.

La *contextualización* es uno de los aspectos principales de este tipo de evaluación. Tradicionalmente, los alumnos se encuentran con un currículum hecho, traducido en contenidos, objetivos y actividades cuyo significado e implicaciones para el desarrollo personal muchas veces no comprenden. Esto hace que estudien solamente para aprobar en la mayoría de los casos. Por el contrario, el contexto en el que se plantea la evaluación de portafolios es distinto. Al comienzo de cada trimestre, los profesores exponen a los alumnos el sentido del trabajo a realizar, tratando de que descubran en qué sentido puede servir para su desarrollo personal. Por ejemplo, el profesor puede

plantear una serie de problemas de comunicación ligados a la comprensión lectora y a la expresión por escrito, de forma que los alumnos vean la relevancia que tiene adquirir ciertas destrezas implicadas en los procesos mencionados. Como la consecución de estas destrezas pasa por la lectura y la composición, profesor y alumno negocian los tipos de objetivos específicos a conseguir y los trabajos a realizar -tipos y número de lecturas, redacciones, etc.-. Además, el profesor señala que va a ir haciendo explícitos los criterios a través de los que los alumnos pueden evaluar su progreso a medida que las explicaciones y el trabajo en clase lo demanden, al tiempo que subraya a sus alumnos la importancia de que ellos mismos sean sus primeros evaluadores, puesto que deben ser los primeros interesados en su desarrollo personal.

El *proceso de recogida de información* lo realiza el propio alumno en el contexto del propio proceso de aprendizaje. Esto significa que no se requiere la realización de tareas distintas de las programadas para el aprendizaje, y que es el propio alumno, no el profesor, quien incluye en su portafolios las producciones que realiza día a día, las experiencias y reflexiones que le han sugerido las lecturas, los problemas que considera como indicadores de progreso y las razones por las que los valora del modo en que lo hace, los trabajos de investigación realizados, las reacciones y reflexiones que su realización le ha sugerido, etc. Se insiste en que no se incluyan sólo los trabajos finales, sino cualquier documento que pueda informar del proceso seguido a lo largo de una composición, de un problema o de la producción de cualquier documento.

El *rol desempeñado por profesor y alumno* también cambia. La evaluación va a ser un proceso interactivo en el que el profesor sugiere y negocia objetivos y pautas de actuación, observa la actuación "en el contexto de los objetivos del alumno", pide a éste razones y aclaraciones de por qué hace lo que hace, realiza sugerencias desde sus conocimientos de experto, sin perder de vista que el alumno tiene que decidir y actuar, y facilita la autoevaluación del propio alumno haciéndole preguntas como: ¿Dónde has encontrado dificultades?, ¿Qué has hecho para superarlas?, ¿Qué has aprendido?, ¿En qué has cambiado?, ¿Qué has hecho que te haya ayudado a aprender?, etc. El alumno, por su parte, debe expresar en qué considera que ha progresado y por qué, y en qué no ha ocurrido así y por qué. Se trata, pues, de una evaluación básicamente cualitativa, centrada en la ayuda al alumno orientada a facilitar que cada vez vaya asumiendo en mayor medida la gestión de su propio aprendizaje en el contexto de proyectos asumidos y orientados al desarrollo personal.

La evaluación, sin embargo, a menudo debe concluir en algún tipo de re-

sumen o calificación que cumpla la función no tanto de ayudar al alumno cuanto de informar a los padres y demás personas implicadas en el proceso educativo, demostrando la eficacia de lo que se hace. Cuando concluir del modo indicado es necesario, la *forma de llegar a la calificación* -que no tiene por qué ser un número, sino que puede ser un perfil cualitativo descriptivo de los progresos del alumno-, implica así mismo un proceso interactivo y peculiar. En este proceso, *el alumno*, conociendo los criterios de evaluación (cualitativos) y calificación (cuantitativos):

- Selecciona de entre sus materiales los que considera como indicadores principales de progreso, y los incluye en el portafolio de calificación, distinto del portafolio de trabajo (showcase portfolio).
- Los presenta a sus compañeros e intercambia con éstos las sugerencias pertinentes, a fin de recibir la evaluación cualitativa que puedan hacerle.
- Incluye notas autoevaluativas junto a cada uno de los materiales incluidos en el portafolio de calificación.
- Presenta el trabajo al profesor.

Por su parte, *el profesor*, desde los criterios establecidos:

- Examina si hay evidencia de mejora.
- Examina si hay evidencia de esfuerzo.
- Examina la calidad de la autoevaluación (base objetiva).
- Examina la variabilidad de proyectos incluidos.
- Examina la presentación.
- Examina las metas futuras.
- Informa al alumno de la puntuación por criterios
- Proporciona comentarios cualitativos orientados a facilitar el progreso.

Aunque la evaluación de portafolios puede facilitar la implicación del alumno en el proceso de evaluación y contribuir a que perciba la relevancia de la misma, a que interiorice los criterios de progreso y sea su primer evaluador en la medida en que se trata de un proceso planteado en el contexto de un proyecto de desarrollo personal, sin embargo, plantea algunos problemas.

En primer lugar, la evaluación de portafolios tiene sentido en el contexto de una forma de enseñar organizada en torno al trabajo por proyectos organizados en base a objetivos y criterios de progreso compartidos. Sin embargo, este contexto es prácticamente inexistente en la mayoría de nuestras aulas,

aunque podría organizarse la actividad académica de este modo, en la medida en que profesores, padres y autoridades educativas conociesen sus beneficios.

En segundo lugar, el proceso de evaluación y calificación requieren más tiempo y dedicación del profesor que lo que consumen las formas tradicionales de evaluación, aunque si hay que valorar el coste temporal en función de sus beneficios, probablemente este sea un problema menor.

En tercer lugar, aunque el objetivo de la actividad educativa es conseguir que cada alumno progrese el máximo posible para él, no que progrese más o menos que otros, en la medida en que la evaluación tiene como función también el facilitar la toma de decisiones de promoción, decisiones que encierran cierto carácter selectivo, parece necesario que puedan tomarse a partir de datos comparables. Sin embargo, el hecho de que los proyectos, objetivos y productos de cada alumno sean diferentes dificulta la comparación. No obstante, el problema de la comparabilidad no estriba tanto en que los datos en los que se basa la comparación sean los mismos, sino en que los profesores hayan interiorizado el modelo de competencias que los alumnos deben desarrollar y en que sean capaces de reconocer en los distintos productos indicadores cualitativos y cuantitativos de dichos progresos, de forma que sus decisiones sean equitativas.

Finalmente, un problema en parte relacionado con el anterior es el de la comunicación de los datos de la evaluación a otros profesores, a padres y a las autoridades implicadas ya que, si no se quieren utilizar calificaciones de tipo numérico sino descripciones cualitativas comparables, es preciso elaborar perfiles a partir de los que organizar la comunicación, perfiles cuya descripción sea entendida de modo similar por aquellos que lean el informe. Si bien este problema no es irresoluble, la elaboración de tales perfiles está en sus comienzos, como muy bien han señalado Graves y Sunstein (1992).

El conjunto de problemas descritos sugiere que, para que la evaluación de portafolios llegue a ser la forma de contextualizar la evaluación que promete ser, se requieren modelos que faciliten la solución de los mismos o que minimicen su impacto, modelos que están aún por desarrollar. Este hecho hace que la evaluación de portafolios constituya actualmente una línea prometedora de investigación, muy productiva, que merece la pena explorar.

### **1.5. Evaluación y calificación: establecimiento del punto de corte.**

Sea cual fuere el método de evaluación empleado, el análisis de la dificultad de las tareas utilizadas en la evaluación y de la naturaleza de los erro-

res cometidos por los alumnos permite saber en qué puntos debe incidir la instrucción para ayudarles. Sin embargo, los profesores necesitan también decidir si los alumnos deben aprobar o no, para lo que es preciso determinar en qué grado han sido alcanzados los objetivos educativos en relación con el tema o temas objeto de evaluación. La cuestión en este caso es determinar cómo puede utilizarse la información proporcionada por pruebas como la utilizada con tal fin.

La pauta de actuación más habitual de los profesores es conceder una determinada puntuación por cada pregunta resuelta, agregar estos datos y aprobar cuando el resultado es igual o superior al 50% de la puntuación posible. Este modo de actuar, sin embargo, encierra como poco tres problemas. En primer lugar, una misma calificación puede corresponder a grados de aprendizaje cualitativamente distintos. En consecuencia, un alumno podría aprobar habiendo obtenido sus puntos en preguntas fáciles y poco relevantes mientras que otro podría obtener sólo esa nota pese a haber conseguido un mayor desarrollo conceptual y un mayor desarrollo de sus capacidades. Por otra parte, como hemos podido observar en un estudio previo (Alonso Tapia y Corral, 1992), una calificación de aprobado no refleja necesariamente que los alumnos hayan conseguido el porcentaje de dominio de todos los tipos de conocimientos y capacidades evaluadas que los profesores consideran necesario para que el alumno pueda afrontar sin problemas aprendizajes posteriores. Finalmente, cabe la posibilidad de que la prueba no evalúe algunas de las capacidades consideradas especialmente relevantes por no contener preguntas diseñadas con tal fin.

La solución de los problemas mencionados requiere diversas medidas. En primer lugar, para evitar que las decisiones basadas en calificaciones no se realicen sólo a partir de la evaluación de algunas capacidades o al grado de adquisición de aspectos parciales del esquema conceptual que se desea que los alumnos construyan, es preciso asegurarse antes de realizar la evaluación de que el diseño utilizado considera los distintos tipos de capacidades y conceptos más relevantes cuya adquisición es necesario examinar. De no ser así, se estaría calificando a los alumnos asumiendo un grado de consecución o no consecución de los objetivos curriculares sin base suficiente. Cabría objetar que es imposible evaluar todas las capacidades que los alumnos deben adquirir. Sin embargo, en la medida en que las diferentes capacidades se trabajan en relación con los distintos bloques de contenido y no sólo con uno, su evaluación debe asegurarse mediante un diseño de evaluación que abarque el conjunto de la materia y que distribuya las tareas relativas a cada capacidad a lo largo de los distintos temas, lo que podría hacerse

en base a una planificación del tipo de la que se presenta en el Cuadro 1.6. En este se recogen algunas de las habilidades que implica el pensamiento científico y a las que hacen referencia los objetivos señalados en el DCB. Todas ellas pueden utilizarse para evaluar las adquisiciones logradas en cada tema y, en la medida en que el profesor realice algún tipo de evaluación continua a partir de las actividades desarrolladas por el alumno día a día, deberían emplearse. Sin embargo, para evitar incrementar innecesariamente el trabajo del alumno cuando se le evalúa mediante exámenes, es posible en poner en cada examen sólo las tareas correspondientes a los puntos marcados en la planificación inicial, lo que aseguraría posteriormente emitir un juicio sobre adquisición de "capacidades" objetivamente fundamentado.

Cuadro 1.6: Ejemplo de un posible patrón de distribución de la evaluación de habilidades y capacidades a lo largo de los distintos temas de una materia.

Tema:	T 1	T 2	T 3	T 4	T n
HABILIDAD					
Categorización	•	•	•	•	•
Organizar la información en tablas	•		•		•
Organizar la información en gráficos		•		•	
Leer la información de tablas		•	•	•	•
Leer la información de gráficos	•	•		•	•
Relacionar datos (p. correlacional)	•		•		•
Realizar inferencias y predicciones		•	•	•	
Detección datos en contra de supuestos.	•	•		•	
Control de variables	•		•		•
Uso de conocimientos para la comprensión	•	•	•	•	•
Uso de conocimientos para la comunicación		•		•	•
Valorar acciones para conseguir objetivos	•		•		•

En segundo lugar, dado que el aprendizaje no es cuestión de todo o nada y que la adquisición de conocimientos y capacidades sigue procesos distintos en cada alumno debido a las diferentes experiencias de aprendizaje, lo normal es que toda evaluación se realice sobre conjuntos de conocimientos y capacidades heterogéneos cuya relevancia para el aprendizaje posterior pue-

de ser muy variable. Por este motivo, a la hora de tratar de agregar los datos parece necesario, primero agregar por separado los datos correspondientes a capacidades o categorías conceptuales diferentes, y obtener de este modo un perfil de puntuaciones que muestre los puntos fuertes y débiles del alumno. El punto de corte dentro de cada categoría o punto del perfil dependería del grado de dominio que el profesor o conjunto de profesores que participen en la evaluación consideren necesario que el alumno consiga. Este perfil le permitiría establecer los objetivos en relación con los que éste debe trabajar y determinar los tipos de ayudas a proporcionar al alumno.

Posteriormente, las puntuaciones de este perfil podrían agruparse en tres puntuaciones, una para los conocimientos de tipo factual, otro que refleje la reorganización conceptual y otra que recoja la evaluación de procedimientos y capacidades, o bien podría darse una calificación única. La primera posibilidad vendría apoyada por el hecho de que la adquisición de los tres tipos de conocimientos mencionados obedece a procesos que, aunque relacionados, son distintos (Glaser y Bassok, 1989), lo que puede dar lugar a que, al menos en los sujetos que no son expertos, la relación entre las puntuaciones correspondientes a cada uno de ellos sea más bien baja. De optarse por esta posibilidad, los alumnos deberían superar el punto de corte en cada una de las tres escalas para poder aprobar. La segunda posibilidad, que sería optar por una calificación única, se justificaría sobre todo cuando se tratase de promocionar al alumno a un curso superior.

Sin embargo, tanto si se opta por la primera o por la segunda de las posibilidades mencionadas, ocurre que el conocimiento de los distintos hechos, la comprensión de las distintas categorías conceptuales y la adquisición de los diferentes procedimientos y capacidades no tiene por qué ser igualmente relevante. Por este motivo, aunque se han propuesto distintos procedimientos para establecer el punto de corte, procedimientos revisados por Sephard (1980) y Rivas y Alcantud (1987), estamos de acuerdo con estos últimos autores en la necesidad de ponderar las distintas categorías del perfil de puntuaciones en función de su relevancia para el aprendizaje posterior, algo que deberían estimar los profesores como mínimo en función de la validez que los logros en cada categoría tengan para predecir el éxito o el fracaso en niveles superiores trabajando dentro de un proyecto curricular dado, aunque también podrían hacerlo de modo más objetivo mediante un diseño longitudinal que fuese estudiando la validez predictiva de los resultados de la evaluación.

Para establecer el punto de corte, Rivas y Alcantud parten del razonamiento siguiente. Dada la heterogeneidad de conocimientos y capacidades

normalmente evaluados, dependiendo del tipo de ponderación que se hiciese de los logros en cada categoría de conocimientos o capacidades, podríamos encontrarnos con los cuatro casos siguientes:

		Pct (Punto de corte total)	
		$\geq Pc_i (1)$	$\leq Pc_i (2)$
$Pc_i$ (Punto de corte en la Categoría i)	$\geq Pc_i (1)$	P (1,1)	P (1,2)
	$\leq Pc_i (2)$	P (2,1)	P (2,2)

Los sujetos de la casilla 1,1 superarían tanto el punto de corte total como el de la categoría y los de la casilla 2,2 estarían por debajo. En ambos casos, no habría problema fuese cual fuese el criterio de ponderación utilizado. Si lo habría, sin embargo, en el caso de los sujetos de las otras dos casillas, los que no superarían el punto de corte total pese a superar el nivel necesario en una categoría dada y aquellos en los que, debido a la compensación proporcionada por las puntuaciones en las restantes categorías, superarían el punto de corte total pero no el de la categoría. En ambos casos, se podría cometer un error de decisión aunque de naturaleza distinta: aprobar al alumno cuando, en función de la relevancia parcial de esa categoría no se debiera hacerlo o suspenderle cuando se debiera aprobarle. Es preciso, pues, minimizar estos errores, lo que puede hacerse por distintos procedimientos aunque, como hemos señalado, lo que parece más sencillo para los profesores es ponderar las puntuaciones en cada categoría en función de la relevancia que estimen que tiene para el aprendizaje posterior.

Una forma de hacer operativa la ponderación referida, ya se hiciese en relación con hechos, conceptos, procedimientos o capacidades por separado, o para obtener una nota única o, incluso, si se tratase de integrar las notas procedentes de distintas materias, respondería a la ecuación

$$Pc_i = r_1 D_1 + r_2 D_2 + \dots + r_n D_n$$

donde  $Pc_i$  sería el punto de corte total,  $r_n$  sería la proporción que la relevancia de conocer o dominar una categoría representa en relación con la relevancia total de los contenidos evaluados, y  $D_n$  sería el grado de dominio a lograr en cada categoría o, planteado de otro modo, el punto de corte particular de la misma. Por ejemplo, si en una evaluación hubiese cinco categorías en rela-



ción con las cuales el profesor o conjunto de profesores hubiesen hecho una estimación de la relevancia de cada una de ellas para el aprendizaje posterior -imaginemos que ese nivel, en una escala de 0 a 3, ha sido 1, 3, 1, 2, 3-, y del nivel de éxito en las tareas que pudiera considerarse como un indicador suficiente de dominio -imaginemos que equivale a obtener las siguientes puntuaciones: 6, 7, 6, 8, 5-, el punto de corte estimado sería:

$$P_{C_i} = 0,1 \times 6 + 0,3 \times 7 + 0,1 \times 6 + 0,2 \times 8 + 0,3 \times 5 = 6,4$$

Posteriormente, la calificación de cada alumno se obtendría del mismo modo, multiplicando su nota en cada categoría por los índices de relevancia, y comparando su puntuación con el punto de corte establecido.

Otra forma de hacer operativa la ponderación señalada sería estimar directamente la relevancia en una escala de 0 a 1, y utilizar la ecuación siguiente, donde  $n$  sería el número de categorías:

$$P_{C_i} = \frac{r_1 D_1 + r_2 D_2 + \dots + r_n D_n}{n}$$

Esta ecuación, proporciona un punto de corte numéricamente diferente a la anterior, pero los resultados que se obtienen al comparar los resultados de los alumnos, una vez ponderadas sus puntuaciones, son semejantes.

Obviamente, el procedimiento propuesto conlleva la posibilidad de que un profesor dado se equivoque a la hora de estimar los niveles de dominio y relevancia necesarios. Una forma de evitar este error es partir no de la estimación realizada individualmente, sino de la realizada por varios profesores. Otra, más complicada pero más fiable, supondría la validación experimental de la adecuación de las decisiones tomadas a través de un estudio longitudinal algo que, aunque no es imposible de realizar, creemos que está en la mayoría de los casos fuera del alcance de los profesores. Por este motivo, creemos que podría bastar con que corrigieran los posibles sesgos contrastando sus métodos de evaluación con otros colegas que emitiesen su juicio sobre la relevancia de las tareas seleccionadas y sobre el grado de dominio necesario en el contexto del planteamiento curricular dentro del que se está trabajando, antes de ponderar las puntuaciones del modo descrito.

## 1.6. Problemas pendientes y planteamiento de la investigación.

### 1.6.1. Problemas pendientes.

En los apartados anteriores ha quedado de manifiesto que el planteamiento de la evaluación del conocimiento y el aprendizaje debe reunir ciertas condiciones para poder cumplir adecuadamente con sus funciones.

Ante todo es preciso partir del hecho de que todo proceso de evaluación se sitúa en el contexto de un planteamiento curricular en el que los alumnos han de aprender hechos, comprender conceptos e integrarlos en esquemas o redes que permitan una representación adecuada de distintos aspectos de la realidad, llegar a dominar procedimientos tanto de tipo general -estratégicos- como específicos, asumir determinadas actitudes fundamentadas en los conocimientos adquiridos en clase y adquirir capacidades cognitivas de tipo general, desarrolladas a través del trabajo realizado en las distintas áreas y aplicables a situaciones diversas.

La necesidad de que la evaluación deba tener en cuenta los diferentes aspectos señalados implica, en primer lugar, que no es adecuado centrar la evaluación básicamente en uno u otro de los componentes señalados con detrimento de los demás. Sin embargo, de acuerdo con los resultados de un trabajo reciente (Villa y Alonso Tapia, 1996), esto es lo que ocurre cuando se evalúa a alumnos de BUP y FP. Tras examinar más de 2000 preguntas realizadas por 40 profesores de distintas áreas a lo largo de un año se encontró que el 66% de las preguntas planteadas en el ámbito de las Ciencias Sociales, por ejemplo, se centra en el recuerdo y un 28,5% en la comprensión de conceptos, estando prácticamente ausente la evaluación del conocimiento de procedimientos y del uso de los conocimientos adquiridos. En Ciencias Naturales la situación es similar: el 47,5 de las preguntas son de recuerdo y el 48% evalúan la comprensión de conceptos, habiendo sólo un 2,3% de preguntas centradas en la aplicación de los conocimientos. En cuanto a Física y Química, un 72% de las cuestiones piden a los alumnos la solución de problemas mediante la aplicación de reglas, algo que puede hacerse mecánicamente, y lo mismo ocurre con las matemáticas, donde las cuestiones del tipo mencionado llegan al 77%. En ambos casos, el porcentaje de preguntas centradas en la comprensión oscila en torno al 10%. La situación parece más equilibrada en Lengua y Literatura, donde el 37% de las cuestiones son de recuerdo, el 30% de comprensión y el 30% de aplicación de conocimientos. Creemos que la razón de estas descompensaciones estriba fundamentalmente en el desconocimiento de modelos de tareas que permitan hacer un tipo de

evaluación distinta a la habitual en cada una de las áreas, por lo que el primer problema a resolver es diseñar estos modelos, objetivo para el que es preciso tener presentes las condiciones señaladas para la evaluación de hechos, conceptos, procedimientos y actitudes en los apartados correspondientes.

En segundo lugar, la necesidad de que la evaluación permita saber no sólo si se han adquirido conocimientos aislados de distintos tipos, sino también si el trabajo curricular ha permitido una adecuada reestructuración conceptual, hace necesario diseñar las evaluaciones de modo que, tomadas por separado y en conjunto, constituyan indicadores válidos de aquella. Esto requiere que el diseño de la evaluación se ajuste a un modelo teórico que garantice la validez de las inferencias que, a partir de los indicadores observables, se realicen sobre el cambio y la organización de las representaciones construidas por el alumno. Algo que puede ayudar a la consecución de este objetivo es partir del mapa conceptual que se espera que el alumno construya a través de la actividad instruccional, de modo que las tareas de evaluación cubran al máximo el mismo y, si esto no es posible, que se garantice que se centran en los aspectos más representativos del mismo. Sin embargo, tanto la selección de los contenidos sobre los que se centran las tareas de evaluación que hemos podido observar como la naturaleza de las mismas tareas -a menudo limitadas a detectar lo que los alumnos recuerdan-, en muchos casos no permiten inferir si se ha producido o no la reestructuración conceptual deseada. Creemos que este hecho, en los casos en que se produce, se debe no sólo al desconocimiento de tareas que permitan evaluar adecuadamente la adquisición de los distintos tipos de conocimientos, sino también a que no se afronta el diseño de las evaluaciones con una conciencia clara del tipo de reorganización conceptual que se busca. Por este motivo, consideramos que el segundo problema a resolver es la construcción de diseños de evaluación que cumplan con la condición señalada y que puedan ofrecerse a los profesores como prototipos a partir de los cuales puedan diseñar sus propias evaluaciones.

En tercer lugar, la necesidad de evaluar en qué grado los alumnos han adquirido las capacidades de tipo general a que hacen referencia, por ejemplo, los objetivos recogidos en el Cuadro 1.1., exige identificar las habilidades que conlleva la adquisición de cada una de las capacidades allí descritas y diseñar tareas que permitan su evaluación al tiempo que se evalúa los distintos tipos de conocimientos. Sin embargo, el examen de las evaluaciones recogidas para realizar el estudio anteriormente citado nos permitió comprobar que tales evaluaciones están planteadas más para evaluar conocimientos específicos de cada área que capacidades generales. Por este motivo, el tercer problema cuya solución es preciso afrontar es el de diseñar modelos que

faciliten a los profesores la comprensión de cómo pueden plantear una evaluación para que cumpla con las funciones señaladas. Este problema presenta, además, una dificultad añadida al menos a los profesores de Enseñanza Secundaria, dificultad que deriva del hecho de tener que evaluar a los alumnos colegiadamente en base al grado en que han adquirido y son capaces de utilizar las capacidades mencionadas en el contexto de los contenidos curriculares. En otro estudio reciente (Villa y Alonso Tapia, en prensa) hemos comprobado que, al menos en los centros en los que no está implantada la actual reforma educativa, lo que se hace en las juntas de evaluación es poner en común las notas y ver si procede alguna modificación, sin tener en cuenta qué capacidades están detrás de las mismas. La falta de tradición en la evaluación colegiada de capacidades que esta práctica refleja sugiere la necesidad de ofrecer a los profesores modelos que muestren como pueden coordinarse datos procedentes de la evaluación de las capacidades de los alumnos obtenidos a partir de su actuación en contextos de contenidos diversos, modelos cuya elaboración constituye un cuarto problema a resolver.

En el caso de que la evaluación se realice con el propósito de proporcionar a los alumnos las ayudas necesarias para poder progresar, a los problemas anteriores se añade el de seleccionar las técnicas y procedimientos de evaluación adecuados para determinar no sólo si un alumno es capaz o no de hacer algo, sino, en este último caso, a qué se debe. Como se ha podido comprobar en los apartados en que hemos descrito los posibles factores responsables de las dificultades experimentadas por los alumnos, obtener esta información requiere en buena medida partir de la evaluación de cómo los sujetos aplican sus conocimientos a la solución de problemas de distintos tipos y preguntar por las razones de su forma de actuar, o bien diseñar tareas que permitan inferir estas razones de la propia ejecución del sujeto. Sin embargo, ni las técnicas mayoritariamente utilizadas ni los tipos de preguntas que se realizan reúnen estas condiciones, por lo que facilitan la identificación de las razones de las dificultades de los alumnos. Dado que este hecho puede deberse a la falta de modelos de cómo se puede hacer este tipo de evaluación, el quinto problema a afrontar es el desarrollo de modelos de exploración de las razones de los problemas de los alumnos que puedan servir como prototipo para el trabajo de los profesores.

Finalmente, hemos señalado que la contextualización adecuada de la evaluación es un requisito fundamental para facilitar que los alumnos interioricen los criterios de evaluación, se autoevalúen personalmente y utilicen la información procedente de la evaluación como base para el establecimiento de nuevos objetivos personales de trabajo percibidos como relevan-

tes y cuya consecución permita el desarrollo personal. Sin embargo, aunque no hay estudios publicados sobre este punto, la información que hemos recogido preguntando a una gran cantidad de alumnos sugiere que la contextualización de la evaluación de acuerdo con las condiciones que hemos enumerado anteriormente es más la excepción que la regla. Por este motivo, el sexto tipo de problemas a afrontar es el desarrollo de modelos que muestren como contextualizar las evaluaciones para que sirvan a los propósitos señalados. Además, en el caso de que el desarrollo de estos modelos se intente hacer en el contexto de la evaluación de portafolios, es necesario resolver los problemas puntuales que plantea este tipo de evaluación y que señalábamos anteriormente, a saber: la modificación del planteamiento instruccional, la posibilidad de contar con el tiempo necesario para su realización, la comparabilidad de los resultados y el desarrollo de modelos para la comunicación de los resultados.

### *1.6.2. Planteamiento de la investigación.*

Considerando los problemas pendientes de solución que hemos enumerado en el apartado anterior, en el presente trabajo se afronta la tarea de abrir líneas de trabajo que permitan responder a algunos de ellos. Con este fin, hemos tratado de conseguir los siguientes objetivos en relación con las áreas del currículo en las que hemos trabajado, a saber, Lenguaje, Sociales, Naturales y Matemáticas:

#### a) Objetivos teóricos:

- Desarrollar modelos para la evaluación de algunas de las capacidades cognitivas que se pretende que adquieran los alumnos y que posibiliten su evaluación colegiada.
- Desarrollar modelos del tipo de reorganización de los conocimientos cognitivo-procedimentales que se espera que adquiera el sujeto, modelos que deben facilitar el diseño global del proceso de evaluación.
- Diseñar tareas que permitiesen identificar de modo adecuado la comprensión de los conceptos, dominio de los procedimientos y la adquisición de las habilidades implicadas en los modelos anteriores, así como el origen de las dificultades de los alumnos.
- Desarrollar las tareas y los modelos de evaluación señalados en el contexto del actual planteamiento curricular, de modo que puedan servir como criterio del grado de consecución de los objetivos señalados.

### b) Objetivos empíricos:

- Determinar la validez de contenido de las tareas y los modelos propuestos, presentándolas a una muestra de profesores de las materias sobre las que versen acompañadas de un cuestionario en el que deberán responder, en relación con cada tarea/elemento y con el diseño de evaluación en su conjunto, a cuestiones relacionadas con su relevancia para evaluar los objetivos curriculares y con el grado de dominio considerado necesario para poder admitir que se han alcanzados los objetivos curriculares perseguidos.
- Determinar la adecuación de los procedimientos de evaluación para los propósitos para los que se pretende que sirvan mediante los análisis estadísticos pertinentes (análisis del índice de dificultad de las tareas, de la capacidad discriminativa de las pruebas, de la homogeneidad de las tareas que, desde el modelo teórico, se suponga que midan los mismos objetivos, de la fiabilidad de los datos, etc.), tras la aplicación de las pruebas a una muestra de alumnos pertenecientes a aulas escogidas aleatoriamente de entre los colegios de Madrid (población de referencia).
- Determinar, a partir de los análisis anteriores y en la medida en que lo permita la naturaleza del modelo de evaluación utilizado, las posibles razones de los errores de los alumnos, y describir su situación en relación con los objetivos a alcanzar tras el trabajo con los contenidos evaluados.
- Validar empíricamente, en los casos en que sea posible, el modelo teórico que haya servido de base para el diseño de las pruebas.

Como podrá comprobarse, el conjunto de modelos e instrumentos que hemos diseñado y puesto a prueba constituyen tan sólo el punto de partida de un trabajo que no ha hecho más que comenzar, ya que es posible diseñar modelos distintos de los que aquí se proponen. Además, en el presente trabajo no se afronta el problema de crear modelos de actuación que sirvan para contextualizar adecuadamente la evaluación, ni se ofrecen modelos para la evaluación de las actitudes. Pero nuestro propósito no es abordar todos los problemas sino abrir vías de reflexión que permitan orientar futuros trabajos encaminados a mejorar la actividad evaluadora. En los próximos capítulos pasamos, pues, a describir los modelos desarrollados y los resultados obtenidos.

## **CAPÍTULO 2**

# **MODELOS DE EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS**

**J. Alonso Tapia y J. Olea Díaz**





## MODELOS DE EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS

### 2.1. Introducción

#### 2.1.1. Objeto de la evaluación.

La evaluación de los conocimientos y capacidades relacionados con las Matemáticas, como la de las restantes materias escolares, tiene lugar en el contexto de un planteamiento curricular que define los objetivos que los alumnos han de conseguir trabajando los contenidos propios de cada área. Por lo que a las Matemáticas se refiere, esto significa que al término de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), tras haber trabajado los bloques de contenido que se enumeran en el Cuadro 2.1, los alumnos han de haber alcanzado los objetivos que se enumeran en el Cuadro 2.2 (MEC, 1989).

Cuadro 2.1: Bloques de contenido del área de Matemáticas.  
(Educación Secundaria Obligatoria).

1. Números y operaciones: significado, estrategias y simbolización.
2. Medida, estimación y cálculo de magnitudes.
3. Representación y organización del espacio.
4. Interpretación, representación y tratamiento de la información.
5. Tratamiento del azar.

Cuadro 2.2: Área de Matemáticas:  
Resumen de los objetivos generales de la E.S.O.

1. • Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática con el fin de expresar el propio pensamiento con rigor y precisión.
2. • Identificar los elementos matemáticos presentes en la información.  
• Analizar críticamente la función que desempeñan.
3. • Identificar los usos y aplicaciones del lenguaje matemático en los distintos ámbitos de la actividad humana.

4. • Mostrar, en distintas situaciones, las actitudes propias de la actividad matemática -exploración sistemática, perseverancia en la búsqueda de soluciones, flexibilidad en el afrontamiento de los problemas, gusto por la precisión, etc.-.
5. • Pensar de forma lógica al afrontar la solución de problemas, formular y comprobar hipótesis, etc.
6. • Elaborar estrategias personales para la resolución de problemas.
7. • Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas.
8. • Utilizar los números de la forma adecuada a cada situación.
  - Utilizar los algoritmos básicos para realizar cálculos.
  - Realizar cálculos mentalmente o, si procede, utilizando la calculadora o el ordenador.
9. • Desarrollar estrategias de medida y cálculo de magnitudes.
  - Realizar estimaciones aproximadas de magnitudes, si lo requiere la situación.
10. • Identificar cuerpos, figuras y configuraciones geométricas.
  - Realizar inferencias y resolver problemas a partir de su representación adecuada.
11. • Leer gráficas.
  - Establecer relaciones entre las magnitudes que contienen.
  - Hacer inferencias de tipo predictivo en base a las relaciones detectadas.
12. • Interpretar la información relativa a estudios estadísticos.
  - Valorar su alcance atendiendo al origen, presentación y uso de los datos.
13. • Identificar fenómenos aleatorios.
  - Estimar su probabilidad de ocurrencia.
  - Establecer criterios de actuación en base a la misma.

El análisis conjunto de los contenidos y objetivos mencionados pone de manifiesto que su consecución implica la adquisición de conocimientos y capacidades de distintos tipos relacionados con las cantidades y su medida, tales como los elementos, expresiones y el lenguaje relativo a las magnitudes y los números a través de los que se expresan; los distintos procedimientos de medida, cálculo y operación sobre cantidades; los esquemas conceptuales relativos a distintos tipos de problemas y las estrategias necesarias para su solución. Conocer qué tipo de conocimientos deben adquirir

los alumnos, sin embargo, no es suficiente para orientar la forma en que los profesores deben evaluar el aprendizaje de las Matemáticas, especialmente si el propósito de la evaluación es conseguir información que permita ayudar a los alumnos a progresar, superando las dificultades que puedan experimentar. Ello se debe a que existen diferentes concepciones respecto a lo que significa saber Matemáticas, que tienen repercusiones directas sobre el planteamiento de la evaluación de los conocimientos matemáticos.

### *2.1.2. Modelo general de procedimiento para el diseño de evaluaciones en el ámbito de las Matemáticas.*

*Primer paso: Especificación del tipo de reorganización conceptual que se espera.*

Webb (1992) y Burton (1996) coinciden al señalar que los modelos o paradigmas desde los que se concibe el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación de las matemáticas son fundamentalmente dos. El primero, el más extendido entre los profesores, se basa en el supuesto de que cada elemento de las matemáticas tiene un significado fijo que los profesores han de transmitir a los alumnos. Los hechos, conceptos y procedimientos pueden dividirse en partes y enseñarse por separado, lo que posibilita también su evaluación de modo independiente. Dentro de este primer paradigma se da importancia, como paso previo a la selección de las tareas que van a servir de base para la evaluación, a la explicitación y listado de los objetivos a conseguir, objetivos que definen resultados observables fácilmente cuantificables. Así mismo, también se concede especial importancia a la observación de lo que los alumnos han de hacer para conseguir los resultados, esto es, a las acciones y operaciones observables, puesto que la información recogida posibilita el diseño de situaciones didácticas que ayuden a los alumnos a progresar. No obstante, Khoury y Behr (1982) han puesto de manifiesto que la presentación convencional de los problemas dentro de este enfoque, frecuentemente mediante conjuntos de símbolos matemáticos a partir de los que los alumnos han de operar, sólo proporciona una imagen parcial tanto de los procesos implicados en la solución de un problema como de la calidad del aprendizaje. Por otra parte, no se concede especial importancia a la evaluación de la integración conceptual conseguida por el alumno, lo que constituye un problema ya que, de acuerdo con las investigaciones más recientes, un elemento clave del aprendizaje lo constituye el modo en que los alumnos relacionan sus conocimientos.

Lo contrario ocurre con el segundo paradigma. Aunque menos extendido que el primero, ha recibido notable apoyo de la psicología cognitiva, y se apoya en supuestos diferentes de los que sustentan el paradigma anterior. El primero de estos supuestos es que lo que se aprende es distinto de lo que se enseña debido a que el alumno "activamente" trata de descubrir y dar sentido a esto último, sentido que es lo que constituye el núcleo del aprendizaje. El aprendizaje de las Matemáticas, pues, implica que el alumno *construye* una red de *esquemas o representaciones relacionadas* sobre un fenómeno o una situación, representaciones que pueden ser de tipo descriptivo o referirse a procedimientos de actuación, esquemas que pueden diferir más o menos de los que posee el matemático experto. El segundo supuesto es que el proceso de construcción mencionado tiene lugar en un *contexto sociocultural*, lo que implica que las representaciones que construyen los alumnos, aunque no están determinadas por la enseñanza, no son totalmente independientes de lo que se enseña y del modo en que se enseña, lo que hace posible que los profesores faciliten tanto la toma de conciencia de los significados mediante procedimientos didácticos que permitan percibir las incongruencias y errores en el modo de afrontar los problemas, como la reflexión sobre los supuestos desde los que se parte y sobre la adecuación o no de los procedimientos que se utilizan.

Una aportación importante dentro de este segundo paradigma ha sido el esclarecimiento del concepto de esquema, especialmente en relación con el conocimiento matemático. En un excelente análisis, Marshall (1993, a y b), refiriéndose al ámbito matemático, ha mostrado que *un esquema incluye cuatro tipos de conocimientos*. Primero, el conocimiento de los *rasgos distintivos de un fenómeno* o situación, rasgos cuya representación en la mente del sujeto puede ser de tipo concreto -ejemplos- o abstracto. Por ejemplo, en relación con el problema:

*Tenemos cinco canicas, dos negras y tres amarillas.  
¿Qué fracción del grupo de canicas es amarilla?*

la representación visual de las canicas de cada color constituye un conocimiento concreto distintivo relativo a los problemas de parte-todo, lo mismo que la representación de esta relación mediante el símbolo  $a/b$ . En segundo lugar, un esquema incluye también el conocimiento de las *condiciones que delimitan un fenómeno* o situación y, por tanto, la posibilidad de aplicar determinados procedimientos para resolver los problemas. En problemas del tipo parte-todo, como el usado en el ejemplo, este tipo de conocimiento im-

plica saber qué constituye el todo, cómo este todo puede dividirse, qué constituye una parte y que las partes nunca pueden superar al todo. No tener en cuenta estas condiciones lleva a muchos niños a responder  $3/2$  ó  $2/3$  al problema anterior, lo que obviamente es incorrecto. En tercer lugar, un esquema incluye conocimientos relativos a cómo *planificar la solución* de un problema de una categoría dada, lo que implica conocer qué estrategias pueden utilizarse y seleccionar una de ellas (Alonso Tapia, 1991, cap. 4), aunque si el problema es simple puede no ser necesaria planificación alguna. Por último, un esquema incluye los conocimientos relativos a los *algoritmos y reglas de cálculo* necesarios para ejecutar el proceso de solución.

El esclarecimiento del concepto de esquema ha sido importante tanto para la enseñanza como para la evaluación del conocimiento matemático. Para la enseñanza, porque ha proporcionado, en relación con los distintos dominios de las Matemáticas, las claves para identificar los diferentes componentes que implica la comprensión de los mismos y, en consecuencia, las razones de las dificultades que experimentan alumnos y alumnas durante el aprendizaje. Y para la evaluación, porque ha puesto de manifiesto que, si se quiere ayudar a unos y a otros a superar sus dificultades, es preciso evaluar los distintos conocimientos que forman parte de los esquemas y cuya adquisición puede estar en el origen de los problemas. Mayer (1987), por ejemplo, ilustra la necesidad de evaluar los conocimientos a que nos referimos utilizando el problema que se presenta en el Cuadro 2.3. Como puede comprobarse, su planteamiento es semejante al de Marshall, pero difiere del mismo en dos puntos. Por un lado, en que no distingue entre conocimientos relativos a los rasgos distintivos del problema y conocimientos relativos a las condiciones que delimitan la situación, conocimientos incluidos, sin embargo, al referirse a la capacidad de construir una representación integrada del problema. Y, por otro lado, en que subraya la importancia no sólo de poseer un esquema dado para poder resolver problemas, sino también de poseer conocimientos que faciliten la comprensión del lenguaje, verbal o visual, a través del que se transmite la información del problema.

Lo expuesto hasta el momento pone de manifiesto la necesidad de que el diseño de tareas y procedimientos para la evaluación del conocimiento de las matemáticas comience por un análisis del esquema de conocimientos que los alumnos han de construir. Este proceso puede parecer complejo, pues se puede saber matemáticas, pero no estar familiarizado con las dificultades cognitivas que conlleva la adquisición del conocimiento matemático. Por fortuna, son numerosas las investigaciones que han puesto de manifiesto los procesos implicados en la construcción de distintos esquemas. Por ejemplo,

Cuadro 2.3: Esquemas y procesos implicados en la solución de problemas matemáticos.  
(Mayer, 1987).

### PROBLEMA EJEMPLO

Mi abuelo quiere construir un cobertizo cuadrado en su jardín. Quiere que cada lado tenga 2 m de largo, y que la altura del cobertizo sea de 2,4 m. de alto. Para hacerlo va a utilizar ladrillos que miden 20 cm. de largo y 10 cm. de alto, cada uno de los cuales vale 24 pts. ¿Cuánto le costarán los ladrillos necesarios para construir una pared completa? (Ignora el espacio que ocupa el cemento necesario para unir los ladrillos).

#### A) COMPONENTE 1: REPRESENTACIÓN DE LAS FRASES DEL TEXTO.

1. REQUIERE conocimientos factuales y lingüísticos, como conocer que cada pared es un rectángulo, que un metro tiene 100 cm., etc.

2. IMPLICA, por ejemplo:

- *Interpretar los datos del problema mediante imágenes o reformulación verbal del texto.* Esto puede evaluarse preguntando al alumno, por ejemplo: ¿Cuál de las siguientes frases referidas al problema anterior es falsa?

- a) Cada pared es un rectángulo de 2m x 2,4m.
- b) La longitud de cada pared es de 2m.
- c) Cada ladrillo vale 20 céntimos.
- d) Cada ladrillo es un rectángulo de 20 cm x 10 cm.

- *Reformular la meta del problema.* Esto puede evaluarse preguntando al alumno, por ejemplo: ¿Qué es lo que se te pide que averigües?

- a) El área de cada una de las cuatro paredes.
- b) El área de cada uno de los ladrillos.
- c) El costo de cada ladrillo.
- d) El costo de los ladrillos de cada pared.

## Cuadro 2.3. (Continuación)

## B) COMPONENTE 2: REPRESENTACIÓN INTEGRADA DEL PROBLEMA.

1. REQUIERE conocimiento de los esquemas o estructuras correspondientes a distintos tipos de problemas como, por ejemplo: Área = Base x altura.
2. IMPLICA, por ejemplo:
  - *Reconocer el tipo de problema.* Esto puede evaluarse preguntando al alumno, por ejemplo: ¿Cuál de los siguientes problemas puede resolverse de la misma forma que el anterior?
    - a) Si con un bote de pintura de 500 pts. se pinta un tabique de 3 m de largo por 2 de alto, ¿cuánto costará pintar una fachada de 8 m de largo por 20 de alto?
    - b) Si una naranjada cuesta 50 pts y una cerveza 30, ¿cuánto costará invitar a 10 adultos a tomar cerveza y a 15 niños a tomar naranjada?
    - c) ¿Cuánto se tardará en llenar una piscina si tiene  $60 \text{ m}^3$  y recibe 3 litros de agua por minuto?
  - *Reconocer qué información es relevante para la solución y cuál no.* Esto, en problemas como: "Juan tiene 20 libros, cada uno de los cuales ha costado por término medio 500 pts. Compra otros 2, uno por 1000 pts. y otro por 580. ¿Cuánto ha pagado en total por estos dos libros? ¿Cuántos libros tiene en total?", puede evaluarse preguntando, por ejemplo:

¿Qué números son necesarios para resolver el problema?

- a) 20, 500, 2, 1000, 580.
- b) 2, 1000, 580.
- c) 500, 1000, 580.
- d) 20, 500, 1000, 580.

Cuadro 2.3. (Continuación)

- *Determinar qué información se necesita para la solución.* Esto, en problemas como: "¿En cuanto supera la altura del Everest a la del Aconcagua? puede evaluarse preguntando al alumno, por ejemplo:

¿Qué información se necesita para resolver este problema?

- La localización de los dos montes.
- La altura del monte Everest.
- La altura de ambos montes.
- La altura y la localización de ambos montes.

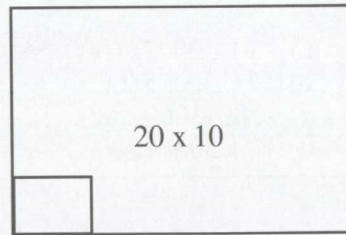
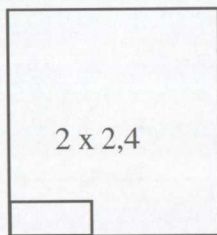
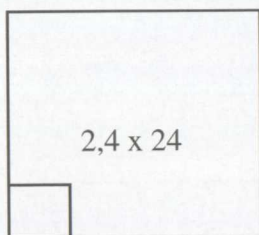
C) COMPONENTE 3: ESTRATEGIAS PARA LA PLANIFICACIÓN Y SUPERVISIÓN DEL PROCESO DE SOLUCIÓN.

1. REQUIERE conocer diferentes estrategias de solución de problemas, tales como utilizar una representación gráfica (lineal, tabular, por simulación, etc.) así como las condiciones en que puede ser útil su empleo

2. IMPLICA, por ejemplo:

- *Representarse gráficamente el problema.* Esto podría evaluarse, en relación con el problema utilizado como ejemplo en primer lugar, preguntado:

¿Cuál de las siguientes representaciones del problema es más adecuada?





## Cuadro 2.3. (Continuación)

- *Dividir el problema en submetas.* Esto podría evaluarse, en relación con el problema utilizado como ejemplo en primer lugar, preguntado:

¿Qué se necesita averiguar para resolver el problema?

- Cuántos ladrillos se necesitan.
- Cuál es la extensión total de la casa.
- Cuánto valen diez ladrillos.
- Qué peso va a soportar cada pared.

## D) COMPONENTE 4: EJECUCIÓN DEL PLAN DE SOLUCIÓN.

- REQUIERE el conocimiento de los distintos procedimientos de cálculo.
- IMPLICA, por ejemplo:

- *La realización de cálculos simples.* Por ejemplo:

La respuesta correcta a  $2 \times 2,4$  es \_\_\_\_\_

- a) 48      b) 4,4      c) 2,6      d) 4,8

- *La realización de series de cálculos.* Por ejemplo:

$((2 \times 2,4) : (.2 \times .1)) \times 24 =$  \_\_\_\_\_

- a) 5760      b) 240      c) 960      d) 4660

Carpenter y Moser (1983) han mostrado las exigencias y problemas que conlleva el afrontar problemas de adición y sustracción; Kintch (1986) ha mostrado los mapas conceptuales que hay tras el modo en que alumnos y alumnas aprenden cuando han de resolver problemas aritméticos presentados verbalmente; Fuson (1992) ha ilustrado los procesos implicados en la comprensión de los números enteros, y lo mismo han hecho Kieran (1992) con el álgebra, Behr, Harel, Post y Lesh (1992) con los números racionales y

Clements y Battista (1992) con la geometría y el razonamiento espacial, etc. Muchos de estos estudios han sido sintetizados en excelentes obras recientes, entre las que cabe destacar la de Carpenter, Fennema y Romberg (1983), dedicada a los números racionales, la editada por Grouws (1992), que recoge diversos temas, y la de English y Halford (1995), que constituye una exposición excelente del tema por su carácter didáctico. En cualquier caso, es imprescindible que los profesores conozcan los esquemas a construir y los procesos implicados en los mismos pues, en caso contrario, será difícil tanto diseñar tareas que permitan identificar las dificultades de los alumnos como interpretar el origen de las dificultades que observen. Por este motivo, el primer paso en el diseño de toda evaluación debe constituirlo, como decíamos, la explicitación de los diferentes componentes que integran los esquemas conceptuales específicos del dominio cuyo conocimiento se pretenda evaluar.

*Segundo paso: Determinación del criterio de adquisición de los conocimientos evaluados.*

Analizar los esquemas que los alumnos han de construir permite determinar qué evaluar, pero esto no es lo mismo que determinar cómo evaluarlo. Para esto último es preciso determinar en primer lugar *qué es lo que puede considerarse como criterio de que se posee el conocimiento evaluado*, esto es, qué tipo de respuestas a qué problemas y en qué condiciones permiten inferencias acertadas sobre la competencia del alumno y sobre el origen de las dificultades que experimenta. Conseguir este objetivo requiere considerar, por un lado, la demanda de las tareas propuestas y, por otro lado, la naturaleza de las respuestas. Respecto a lo primero, si alumnos y alumnas han de resolver problemas que demandan prioritariamente la aplicación de algún algoritmo -lo que es muy frecuente- sólo obtenemos información de la adquisición o no de los conocimientos necesarios para la ejecución del plan de solución de un problema, pero no del grado en que se han adquirido otros componentes, lo que puede darse erróneamente por supuesto. Del mismo modo, si se plantean a los alumnos problemas que requieren la aplicación de *todos* los conocimientos que integran un esquema, en caso de fracaso puede ocurrir que no podamos saber a qué se debe, si bien esto depende de la naturaleza de las respuestas demandadas. En consecuencia, parece necesario plantear tareas que exijan a alumnos y alumnas hacer explícitos, paso a paso, los distintos conocimientos que se desea evaluar, algo sobre lo que volveremos en breve.

Antes es preciso considerar en qué medida la naturaleza de las respuestas facilita la determinación del criterio de evaluación. Sobre este punto diversos autores han señalado que el criterio más adecuado de conocimiento lo constituyen las respuestas a problemas planteados de forma abierta en los que el alumno, más que resolverlos aplicando un algoritmo, ha de anticipar una solución y razonar su respuesta, puesto que los razonamientos con que justifica ésta constituyen indicadores especialmente útiles para conocer los tipos de representaciones -correctas o incorrectas- en las que se apoya para tratar de resolver el problema. Un ejercicio como el que se presenta en el Cuadro 2.4 ilustra este planteamiento.

Cuadro 2.4: Ejemplo de tarea para evaluar el modelo conceptual (Lange, 1992).

El siguiente esquema muestra el número de alumnos de dos clases de matemáticas que ha obtenido cada una de las notas posibles

Clase A	Nota	Clase B
/	1	
/	2	//
/	3	
//	4	
/	5	
/	6	/
/	7	////////
////////	8	///
//	9	/

¿Son suficientes estos datos para saber qué clase ha obtenido mejores resultados? ¿Qué clase piensas que es mejor? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

Para responder a la cuestión que se formula en dicho ejercicio -cuál de los dos grupos de estudiantes ha obtenido los mejores resultados- no se pide a los alumnos que hallen la media o la desviación típica, sino que consideren si la información proporcionada es suficiente para responder a la pregunta, que la respondan y que justifiquen su respuesta señalando por qué piensan

así. El análisis de las justificaciones -unos señalan que es superior la clase A porque hay más alumnos con notas de 8 para arriba, otros que B, porque hay pocos alumnos que tengan notas bajas, otros que son iguales, porque las medias parecen similares (¿es así realmente?)- muestra el tipo de información a que atienden alumnos y alumnas y, en consecuencia, el tipo de organización conceptual de sus conocimientos matemáticos o, lo que es igual, el modelo mental que les guía, modelo mental que puede compararse con el del experto para determinar en qué aspectos difiere y, en consecuencia, qué ayudas necesitan.

El procedimiento ilustrado mediante el ejemplo anterior es especialmente útil cuando se trabaja con pocos alumnos. Si los alumnos son muchos, la evaluación de las respuestas consume gran cantidad de tiempo, lo que hace que su uso sea prácticamente inviable dado que, además, los profesores han de evaluar el conocimiento de múltiples esquemas a lo largo del curso. Esta inviabilidad se acentúa si se considera que, ya que no siempre las dificultades se manifiestan de modo claro en las respuestas espontáneas de alumnos y alumnas, a veces es necesario hacerles preguntas adicionales para evaluar el origen de aquellas, lo que requiere una entrevista individual.

El hecho anterior ha llevado a buscar procedimientos alternativos. Uno de ellos, sugerido por Collis y col. (1986, p. 212), consiste en plantear no una única cuestión, sino un conjunto de cuestiones relacionadas, cada una de las cuales implica un nivel superior de comprensión de los conocimientos relativos a un dominio dado, de modo que cada respuesta indica el nivel de comprensión conseguido por el alumno o alumna, no siendo necesario que éstos justifiquen su respuesta. El ejemplo siguiente ilustra este procedimiento:

*Imagina que tienes un programa de ordenador que transforma unos números en otros siguiendo ciertas reglas. Si tú introduces un número cualquiera, el programa le suma tres veces y después añade cuatro unidades. Por ejemplo, si tu metes el 7, el programa lo transforma en 25. Sabiendo esto, responde a las cuestiones siguientes:*

Si el programa saca 25, ¿qué número se introdujo?

Si introducimos un 5, ¿qué número sacará?

Si sale 55, ¿qué número se introdujo?

Si  $x$  es el número que proporciona el programa cuando se ha introducido el número  $y$ , ¿qué fórmula nos proporcionará el valor de  $y$ , sea cual sea el valor de  $x$ ?

Dado que en tareas como la anterior sólo se requieren respuestas breves y concretas, el procedimiento es apto para evaluar múltiples alumnos. Además, si las cuestiones están bien jerarquizadas, es posible identificar el punto en que el alumno experimenta dificultades. Sin embargo, dado que no es preciso justificar la razón de la respuesta, no es posible saber con certeza la razón de las dificultades que experimenta.

Ante los inconvenientes que conlleva el uso de los procedimientos descritos cuando se ha de evaluar a numerosos alumnos, es preciso considerar la posibilidad de utilizar *preguntas de opción múltiple con valor diagnóstico*, como ha hecho Tamir (1996) en relación con la evaluación del conocimiento en el ámbito de las Ciencias Naturales y Experimentales. Puesto que las preguntas de opción múltiple presentan numerosas ventajas en términos de capacidad de cubrir una amplia gama de contenidos en poco tiempo, en términos de objetividad y de facilidad de corrección y puntuación, parece interesante intentar evitar que se utilicen sólo para evaluar el conocimiento de los algoritmos y reglas de cálculo, como hemos podido comprobar que ocurre en muchos casos (Villa y Alonso Tapia, 1996). Una forma de hacerlo es construir las utilizando como distractores errores de concepto o de procedimiento frecuentes, por ejemplo, los que suelen producirse como resultado de no poseer los distintos componentes que, de acuerdo con Marshall (1993, a y b), integran los distintos esquemas. La combinación de múltiples preguntas de este tipo tanto en relación con un mismo problema como con conjuntos de problemas diseñados para cubrir los subesquemas de un dominio conceptual dado, de forma análoga a como sugiere Mayer en relación con el problema del Cuadro 2.3, puede posibilitar el diagnóstico de las dificultades del alumno y, por tanto, el tipo de ayudas que precisa. Pero además, puede permitir obtener un perfil del grado en que los distintos componentes de cada esquema se van adquiriendo y del grado en que se integran los distintos subesquemas.

Resumiendo, una vez explicitados los diferentes componentes que integran los subesquemas y esquemas específicos del dominio cuyo conocimiento se pretende evaluar, es preciso que las tareas planteadas permitan concluir inequívocamente sobre el conocimiento de tales componentes. Para ello cabe diseñar la evaluación mediante conjuntos de tareas abiertas o cerradas -en este caso, de tipo diagnóstico-, que muestren por separado el grado de conocimiento de cada uno de ellos, o mediante problemas complejos de tipo abierto cuyo proceso de solución debe ser justificado por los alumnos, respondiendo a las cuestiones aclaratorias que puedan plantear el profesor o la profesora, de modo que quede claro el modelo mental que lleva a los pri-

meros a actuar como lo hacen. Aunque ambos procedimientos proporcionan información que normalmente constituye un criterio adecuado del tipo de conocimientos que poseen los alumnos, por su aplicabilidad para evaluar un gran número de ellos en este trabajo se ha optado por el primer tipo de procedimientos.

### *Tercer paso: Selección de tareas y diseño de la evaluación.*

Tras explicitar los esquemas conceptuales y el tipo de tareas que constituyen el criterio de aprendizaje, el último paso en el desarrollo de un procedimiento de evaluación es decidir la cantidad y tipo de estas tareas que se va a pedir a los alumnos que realicen, ya sea de forma continua o mediante pruebas puntuales, para poder determinar si la reorganización de sus conocimientos es la adecuada y el grado de eficiencia con que son capaces de utilizarlos para resolver distintos tipos de problemas.

Para tomar la decisión referida es preciso tener en cuenta dos hechos. Primero, que cada dominio de las matemáticas incluye diferentes subesquemas de problemas, de modo que ser capaz de resolver problemas de un tipo no garantiza ser capaz de resolver problemas de otro. Por ejemplo, como se expondrá posteriormente con amplitud, el dominio de los números racionales incluye cinco categorías de problemas cualitativamente distintos: parte-todo, cociente, medida, operador y razón (Marshall, 1993a), cuya complejidad es también diferente. Segundo, el objetivo de la evaluación de los conocimientos del alumno en relación con un dominio dado de las Matemáticas como el mencionado es determinar el grado en que los conocimientos sobre el mismo -la comprensión de los distintos subesquemas y el grado de integración de los conocimientos sobre éstos- es la adecuada. En consecuencia, parece necesario como mínimo para poder conseguir este objetivo, que el diseño de la evaluación incluya tareas que pongan de manifiesto la comprensión de los distintos subesquemas que integra el dominio y no sólo de algunos de ellos ya que, además, las ayudas que deben recibir los alumnos que tengan dificultades serán diferentes según el esquema implicado. Más allá de este requisito, la cantidad y tipo de tareas a realizar depende del profesor, de que realice una evaluación continua e integrada en el proceso de aprendizaje o del tiempo de que disponga para evaluar a sus alumnos mediante exámenes o controles.

Para ilustrar el procedimiento general de evaluación descrito pasos hemos desarrollado cuatro modelos específicos. Dos de estos modelos, el relativo a números enteros y el relativo a la comprensión de la proporcionalidad,

se han puesto a prueba con alumnos de 7° de EGB, y los otros dos, el relativo a los números racionales y el relativo a las ecuaciones, se han puesto a prueba con alumnos de 8° de EGB, niveles en los que se trabajan habitualmente.

## **2.2. Modelo 1: Números enteros: números negativos.**

### *2.2.1. Objetivos instruccionales y esquema de conocimientos a adquirir.*

Desde los 6 a los 11-12 años de edad, durante toda la Enseñanza Primaria, niños y niñas aprenden a operar con los números enteros positivos. Durante mucho tiempo, la enseñanza en relación con los mismos ha dado lugar a que realizasen cantidad de problemas numéricos estereotipados. Sin embargo, las dificultades experimentadas por los alumnos en algunos tipos de problemas ha dado lugar a un giro en la enseñanza, buscando que los alumnos, sobre todo, discutan en clase los posibles modos de representarse y resolver problemas correspondientes a las distintas operaciones que es posible realizar con tales números (Fuson, 1992; Greer, 1992). La razón de todo ello ha sido que el problema fundamental de alumnos y alumnas a esas edades no es tanto el aprendizaje mecánico de cómo operar con tales números, sino llegar a conectar de manera apropiada y significativa su forma de representarse las situaciones-problema con el modo de representarse los procedimientos de cálculo (English y Halford, 1995).

Aunque alumnos y alumnas conozcan los diferentes algoritmos de cálculo (característica 4 de los esquemas, de acuerdo con Marshall), les cuesta identificar y representarse los rasgos distintivos que definen los esquemas correspondientes a los diferentes tipos de problemas sobre los que es preciso operar (primera característica de un esquema, de acuerdo con Marshall). Por ejemplo, en relación con la adición y la sustracción, existen seis situaciones básicas que incluyen diversos subtipos de problemas, hasta un total de veintidós, como se muestra en el Cuadro 2.5. La capacidad de resolver esos problemas depende de que los alumnos lleguen a formarse algún tipo de representación análoga a las presentadas en el Cuadro 2.5 y a emparejar con ellas los tipos de problemas ejemplificados en el mismo. Y lo mismo cabe decir de los problemas relativos a la multiplicación y división. En consecuencia, dado que cada situación presenta dificultades específicas, la evaluación de la adquisición de los esquemas correspondientes hace necesario comprobar si los alumnos son capaces de resolver los problemas correspondientes a cada una de ellas, y no sólo a unas pocas.

Al término del período señalado y tras una experiencia notable en operar

con números enteros positivos, alumnos y alumnas han de enfrentarse con situaciones que no es posible cuantificar mediante dichos números y para las que se utilizan los *números enteros negativos*. Al parecer, estos números son más difíciles de entender que los números enteros positivos porque, al contrario de lo que ocurre con éstos, no se relacionan directamente con la experiencia diaria de los alumnos. No obstante, de acuerdo con el trabajo de Peled, Mukhopadhyay y Resnick (1988), los alumnos tienen nociones intuitivas preinstruccionales sobre estos números. Por ejemplo, antes de llegar a construir un esquema o modelo mental en el que los números negativos y positivos están ordenados en una única línea continua, construyen lo que los autores mencionados han denominado el "modelo de línea dividida". Este modelo consiste en que los alumnos ordenan los números positivos y negativos en dos líneas independientes, aplicando ideas previas acerca de los números -la idea de orden y la idea de decremento creciente- que sí están ancladas en su experiencia. Sólo posteriormente llegan a construir el modelo más elaborado, como se muestra a continuación.

Modelo primitivo		Modelo final
Más pequeño	Más grande	Más grande
-3 -2 -1	0 +1 +2 +3	-3 -2 -1 0 +1 +2 +3

De acuerdo con Schwartz, Kohn y Resnick (1992), los números negativos son una extensión de los números enteros positivos y de las operaciones que se realizan sobre los mismos. Sin embargo, la comprensión de lo que significan y de cómo operar con ellos implica, además de construir el modelo mental anteriormente referido:

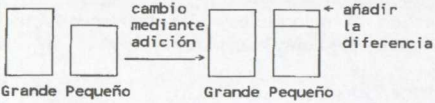
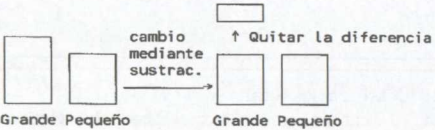
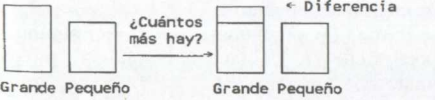
- Ser capaz de entender que el signo "+" o "-" añade a la cantidad expresada por el número la *dirección* en la que opera la magnitud. Por ejemplo, es preciso entender que "(- 3)" implica descenso, retroceso, etc., de tres unidades.
- Ser capaz de entender que las operaciones que se pueden hacer con los números positivos, se pueden hacer también con los números negativos. Por ejemplo, que la operación "+" se puede aplicar a cantidades negativas -por ejemplo, suma de descensos consecutivos de temperatura- como en la expresión:  $(-7) + (-5) = (-12)$ .



Cuadro 2.5: Situaciones del mundo real que implican sumar o restar (Fuson, 1992).

Situaciones que implican adición.	
<p><b>Cambio (mediante adición)</b></p> <p style="text-align: center;">Cambio + <input type="text"/></p> <p><input type="text"/> → <input type="text"/></p> <p style="display: flex; justify-content: space-between;"><span>Comienzo</span><span>Final</span></p>	<p>Tipo 1: Identificar el final. Juan tiene 6 chapas y Ana le da 5 chapas más. ¿Cuántas chapas tiene Juan ahora?</p> <p>Tipo 2: Identificar el cambio. Eva tiene 4 recortables. ¿Cuántos recortables más tiene que conseguir para tener 9?</p> <p>Tipo 3: Identificar el comienzo. Lucas acaba de ganar 3 canicas. Ahora tiene 9. ¿Cuántas tenía al comienzo?</p>
<p><b>Combinación (física)</b></p> <p><input type="text"/> <input type="text"/> → <input type="text"/></p> <p style="display: flex; justify-content: space-around;"><span>Parte 1</span><span>Parte 2</span><span>Total</span></p>	<p>Tipo 4: Identificar el total. Luis tiene 7 caramelos de naranja y 4 de limón. Los pone todos en una bolsa. ¿Cuántos caramelos hay en la bolsa?</p> <p>Tipo 5: Identificar una parte. Si juntan sus cromos, Paco y Pepe tienen 17 en total. Paco tiene 5 cromos. ¿Cuántos tiene Pepe?</p>
<p><b>Combinación (conceptual)</b></p> <p><input type="text"/> <input type="text"/> → <input type="text"/></p> <p style="display: flex; justify-content: space-around;"><span>Parte 1</span><span>Parte 2</span><span>Total</span></p>	<p>Tipo 6: Identificar el total. Hay 8 cabras y 7 ovejas en el rebaño. ¿Cuántos animales tiene el rebaño?</p> <p>Tipo 7: Identificar una parte. Juana tiene 14 perros. 5 son galgos y el resto dálmatas. ¿Cuántos dálmatas tiene?</p>
Situaciones que implican sustracción.	
<p><b>Cambio (mediante sustracción)</b></p> <p style="text-align: center;">Cambio - <input type="text"/></p> <p><input type="text"/> → <input type="text"/></p> <p style="display: flex; justify-content: space-between;"><span>Comienzo</span><span>Final</span></p>	<p>Tipo 8: Identificar el final. Juan tiene 9 chapas. Da a Ana 5. ¿Cuántas chapas tiene Juan ahora?</p> <p>Tipo 9: Identificar el cambio. Eva tiene 11 bombones. Se come algunos. Ahora tiene 7. ¿Cuántos bombones se ha comido?</p> <p>Tipo 10: Identificar el comienzo. Lucas acaba de ganar 3 canicas. Ahora tiene 9. ¿Cuántas tenía al comienzo?</p>

Cuadro 2.5: Situaciones del mundo real que implican sumar o restar (Fuson, 1992).

<p style="text-align: center;"><b>Igualación (mediante adición)</b></p> 	<p>Tipo 11: La diferencia se desconoce. Daniel tiene 7 canicas y Pedro 4. ¿Cuántas canicas más necesita Pedro para tener las mismas que Daniel?</p> <p>Tipo 12: El enunciado da pistas sobre la solución. Hay 8 ovejas negras en el rebaño. Llegan dos ovejas negras más. Ahora hay el mismo número de ovejas negras que blancas. ¿Cuántas ovejas blancas hay?</p> <p>Tipo 13: La frase proporciona pistas, pero el proceso de solución es inverso. Juan tiene 15 cromos. Si Luis gana 5, tendrá los mismos que Juan. ¿Cuántos tiene Luis?</p>
<p style="text-align: center;"><b>Igualación (mediante sustracción)</b></p> 	<p>Tipo 14: La diferencia se desconoce. Daniel tiene 9 canicas y Pedro 4. ¿Cuántas canicas tiene que perder Pedro para tener las mismas que Daniel?</p> <p>Tipo 15: El enunciado da pistas sobre la solución. Había 10 tazas sobre la mesa y quité 3 para que hubiera el mismo número de tazas y platos. ¿Cuántos platos había en la mesa?</p> <p>Tipo 16: La frase proporciona pistas, pero el proceso de solución es inverso. Hay algunas chicas en la sala de baile. 4 se sientan para que cada chico pueda tener una pareja. Quedan 7 chicos bailando. ¿Cuántas chicas hay bailando?</p>
<p style="text-align: center;"><b>Comparación (más)</b></p> 	<p>Tipo 17: La diferencia se desconoce. Daniel tiene 9 canicas y Pedro 4. ¿Cuántas canicas más tiene Daniel que Pedro?</p> <p>Tipo 18: El enunciado da pistas sobre la solución. Eva tiene 8 pájaros y Ana tiene 3 más que Eva. ¿Cuántos pájaros tiene Ana?</p> <p>Tipo 19: La frase proporciona pistas, pero el proceso de solución es inverso. Lola tiene 8 muñecas. Tiene 3 más que Isabel. ¿Cuántas muñecas tiene Isabel?</p>

Cuadro 2.5: Situaciones del mundo real que implican sumar o restar (Fuson, 1992).

Comparación (menos)	
	<p>Tipo 20: La diferencia se desconoce. Daniel tiene 9 canicas y Pedro 4. ¿Cuántas canicas menos tiene Pedro que Daniel?</p> <p>Tipo 21: El enunciado da pistas sobre la solución. El lechero trajo 13 botellas de leche el lunes y 4 menos el martes. ¿Cuántas botellas trajo el martes?</p> <p>Tipo 22: La frase proporciona pistas, pero el proceso de solución es inverso. Lucas tiene 10 cromos. Tiene 6 cromos menos que Lucas. ¿Cuántos cromos tiene Lucas?</p>

- Ser capaz de entender cómo es posible operar simultáneamente con números positivos y negativos, lo que implica, por ejemplo, comprender el significado de operaciones del tipo "-" como en:  $1.000 - -200 = 1.200$ .
- Ser capaz de entender las relaciones de orden entre los números negativos y entre éstos y los positivos. Por ejemplo, ser capaz de entender que  $-2 < -1 < 0 < 1 < 2$ .
- Ser capaz de emparejar los números negativos y las distintas operaciones sobre los mismos con las situaciones naturales a las que son aplicables.

De las consideraciones anteriores se deduce que entre los rasgos distintivos del esquema conceptual de los números negativos se encuentran las características siguientes, características que es preciso evaluar a fin de poder proporcionar a los alumnos las ayudas necesarias:

- La identificación de la dirección de las variaciones -en situaciones reales- sobre las que hay que operar.
- El emparejamiento de las direcciones anteriores con números positivos o negativos.

- El establecimiento de las relaciones de orden entre las magnitudes, lo que se ve facilitado por la traducción de las mismas a imágenes gráficas.
- La representación matemática de las operaciones implicadas en las diferentes comparaciones y transformaciones en las que intervienen números negativos.
- El emparejamiento de las representaciones naturales en que intervienen magnitudes negativas o de sus descripciones verbales con sus representaciones gráficas y el de ambas con sus representaciones matemáticas.

Además, la competencia en la resolución de problemas en los que intervienen números negativos depende de la automatización con que los alumnos realizan las operaciones con números positivos y negativos, operaciones que implican cambios de signos (por ejemplo, que "-" equivale a "+", etc.), cuya naturaleza deben comprender. En consecuencia, también será preciso evaluar esta competencia.

### *2.2.2. Tareas y criterios de evaluación.*

En consecuencia, teniendo presentes las características mencionadas, a fin de poder evaluar los diferentes componentes del esquema mencionado hemos diseñado diferentes tipos de tareas siguiendo en muchos casos el modelo sugerido por Mayer, ilustrado el Cuadro 2.3, de modo que fuese posible identificar el grado de relación entre la adquisición de los diferentes componentes del esquema o, en palabras de Marshall (1993-b), el grado de conectividad del mismo. La prueba completa se incluye en el Apéndice 2.1. No obstante, mostramos a continuación las principales categorías de tareas diseñadas para evaluar a los alumnos y ayudarles a superar sus dificultades.

#### *Identificación de valores positivos y negativos y comprensión de las relaciones de orden.*

Puesto que es importante que los alumnos sean capaces de identificar las situaciones naturales que pueden representarse mediante números negativos, los profesores deben evaluar este componente del esquema cognitivo. Una tarea útil con este propósito es pedir a los alumnos que categoricen diferentes situaciones, señalando cuáles pueden expresarse mediante números negativos. Por ejemplo:

¿Cuál de las siguientes situaciones puede expresarse con un número negativo?

- a) Recibir 1.000 pts. de un familiar.
- b) Prestar 1.500 pts. a un compañero.
- c) Cobrar 2.000 pts. por un trabajo.

Por otra parte, un segundo componente del esquema conceptual a construir tiene que ver con la comprensión de las relaciones de orden. Esto puede hacerse de dos modos. El primero, el más habitual, es pedir a los alumnos que ordenen una serie de números positivos y negativos del menor al mayor. Sin embargo, ordenar los números no es lo mismo que percibir el orden de situaciones naturales correspondientes. Esta capacidad es algo que podría evaluarse, por ejemplo, mediante cuestiones como la siguiente:

Al finalizar el año, una empresa ha tenido unos beneficios de dos millones y medio de pesetas. Este resultado se puede expresar con el número + **2.500.000**. Señala cuál de las afirmaciones siguientes representa mejor la situación opuesta:

- a) La empresa ha obtenido una ganancia de 5,2 millones de pesetas.
- b) La empresa no ha obtenido ni ganancias ni pérdidas a fin de año.
- c) El saldo final de la empresa ha sido de -2,5 millones de pesetas.

Como ocurre con los números enteros positivos, durante el proceso de enseñanza se plantean a los alumnos problemas expresados en palabras en los que la clave para identificar si se habla de números positivos o negativos implica comprender el significado de las palabras utilizadas, significado que a veces refleja situaciones distintas a aquellas en las que tendemos a pensar espontáneamente. Dado que esta competencia es diferente de las anteriores, es preciso evaluarla por separado, lo que puede hacerse mediante tareas como la siguiente:

¿Qué significa la frase subrayada en el problema?

*Imagina que, a las 12 de la noche, la temperatura de tu ciudad es de cero grados. En un observatorio se anota cada dos horas la diferencia de temperatura en relación con la lectura inmediatamente anterior. Las anotaciones, contando la de las 12, han sido: 0, -9, -7, 2, 4.*

- a) Significa que cada vez se anotan los grados que marca el termómetro, sobre o bajo cero.
- b) Significa que, a los grados de la última lectura, se suma el ascenso o descenso observado.
- c) Significa que se restan los grados que baja la temperatura de los grados de la última lectura.

*Estimación de la magnitud de las diferencias entre valores positivos y negativos.*

Un segundo tipo de conocimientos que han de adquirir los alumnos son los que les permiten representarse la distancia entre los límites establecidos por la variación de una magnitud. Entre una lectura de la temperatura traducible en valores positivos y otra traducible en valores negativos hay una diferencia que puede estimarse de modo intuitivo antes de aprender a formular el problema en términos matemáticos. Ser capaz de dicha estimación y de hacer comparaciones entre estimaciones semejantes es un conocimiento que facilita la traducción matemática de los problemas, por lo que conviene que sea evaluado independientemente. Esto es algo que puede hacerse mediante tareas como la que se presenta en el Cuadro 2.6.

Obviamente, aunque la pregunta anterior está planteada en forma cerrada, puede plantearse el mismo problema en forma abierta pidiendo a los alumnos que contesten a preguntas como las siguientes, e indicarles que justifiquen sus respuestas si lo consideran necesario:

- ¿Cuántos grados ha variado la temperatura desde las seis a las doce en cada ciudad?
- ¿Cuál ha sido la ciudad con mayor variación de temperatura?
- ¿Y la ciudad con menor variación?
- ¿Qué ciudad a aumentado X grados de una vez a otra?
- ¿En qué ciudades ha aumentado la temperatura y en cuáles no lo ha hecho?

Cuadro 2.6: Ejemplo de tarea para evaluar la estimación de magnitudes a partir de números enteros positivos y negativos.

Un meteorólogo está estudiando las temperaturas de distintas ciudades europeas el día 3 de enero, temperaturas que se recogen en la tabla siguiente. A partir de los datos que contiene, contesta a la pregunta que se plantea.		
CIUDADES	TEMPERATURA MÍNIMA 6 de la mañana	TEMPERATURA MÁXIMA 12 del mediodía
Berlín	- 5	3
Moscú	-15	- 5
Londres	- 2	12
París	- 4	- 1
Madrid	3	13
Roma	4	10

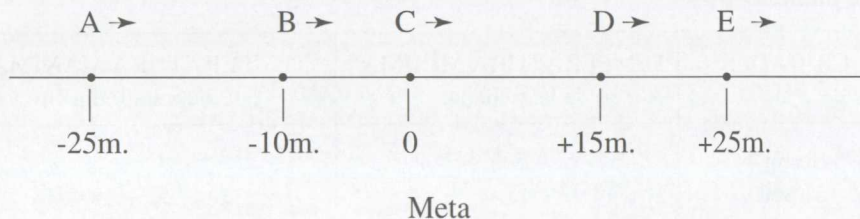
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones, si fuesen hechas por el meteorólogo, serían correctas?

- En Moscú ha aumentado la temperatura los mismos grados que en Madrid.
- La temperatura mínima de Moscú ha sido mayor que la mínima de Londres.
- En Londres la temperatura ha aumentado diez grados de una vez a otra.
- En Berlín la temperatura ha descendido ocho grados de una vez a otra.
- De 6 a 12 en Roma la temperatura ha subido más grados que en Moscú.
- París ha sido la ciudad con menor variación de temperatura en el día.

Un tipo de situaciones análogas a las anteriores son aquellas en las que el problema se presenta en forma gráfica. En estos casos, el alumno debe poseer un modelo mental adecuado que le permita interpretar correctamente la información para evitar equivocarse en la estimación de las magnitudes. En consecuencia, es preciso evaluar esta capacidad de modo independiente, lo que puede hacerse mediante tareas como la que se ilustra en el Cuadro 2.7.

Cuadro 2.7: Ejemplo de tarea para evaluar la estimación de magnitudes a partir de datos presentados gráficamente.

El esquema siguiente representa una carrera ciclista en sus momentos finales, con los participantes A, B, C, D y E. Examina los datos del esquema y señala cuál de las siguientes afirmaciones es errónea.



- a) B se encuentra a -25 metros del punto en donde está D.
- b) La distancia que separa al ciclista A de B es de 25m.
- c) D se encuentra 40 metros delante del lugar donde está A.

*Tareas para evaluar la capacidad de pasar de un tipo de representación mental del problema a otra.*

En la medida en que, como ha señalado Fuson (1992), la capacidad de resolver problemas con números enteros implica ser capaz de traducir una representación verbal a una de tipo figural y en que, como han señalado Schwartz y col. (1992), cuando se trata de números negativos es preciso además ser capaz de emparejar esta representación con la formulación matemática correspondiente, es preciso evaluar el grado en que el alumno es capaz de establecer las equivalencias señaladas. Esto es algo que puede conseguirse mediante tareas como las que presentamos en el Cuadro 2.8.

Obviamente, todas las preguntas anteriores pueden plantearse de forma abierta, indicando al sujeto que realice las transformaciones correspondientes, lo que posibilita la identificación exacta del punto en el que el alumno o la alumna experimenta dificultades, y darle después las ayudas precisas.



Cuadro 2.8. Ejemplo de tareas para evaluar la capacidad de transformar y emparejar representaciones de distintos tipos.

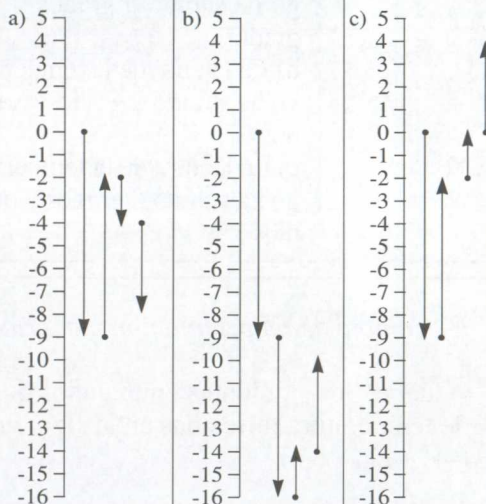
A) Cambio de representación verbal a representación numérica.

Imagina que, a las 12 del día, la temperatura de tu ciudad es de diez grados. En un observatorio se anota cada dos horas la **diferencia de temperatura en relación con la lectura inmediatamente anterior**. Las anotaciones, contando la de las 12, han sido: 10, +2, -9, -7, +4. ¿Cuál es el modo correcto de representar numéricamente el problema para saber cuál ha sido la temperatura en la última lectura?

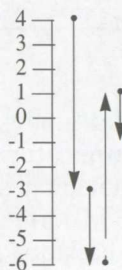
- a)  $10 + (2) - (-9) - (-7) + (4)$   
 b)  $10 + (2) - (-9) + (-7) + (4)$   
 c)  $10 + (2) + (-9) + (-7) + (4)$

B) Cambio de representación verbal a gráfica.

Imagina que, a las 12 de la noche, la temperatura de tu ciudad es de cero grados. En un observatorio se anota cada dos horas la diferencia de temperatura en relación con la lectura inmediatamente anterior. Las anotaciones, contando la de las 12, han sido: 0, -9, -7, 2, 4. ¿Cuál de las gráficas siguientes refleja correctamente los cambios de temperatura que han ocurrido?



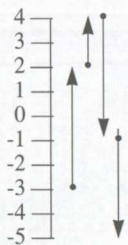
C) Cambio de representación gráfica a representación numérica.



El gráfico de la izquierda representa las diferencias de temperatura de una lectura a otra registradas en cinco ocasiones a lo largo de un día. ¿Cuál es el modo correcto de representar numéricamente las variaciones que se han ido sucediendo?

- a)  $(4) + (-3) + (-6) - (1) + (-1)$   
 b)  $(4) + (-7) + (-3) + (7) + (-2)$   
 c)  $(4) - (-7) - (-3) + (7) - (-2)$

D) Cambio de representación gráfica a representación verbal.



¿Cuál de los siguientes enunciados describe correctamente las variaciones de temperatura reflejadas en la siguiente gráfica?

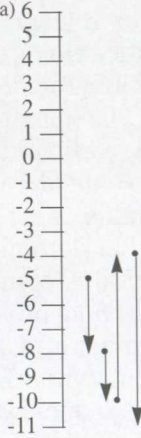
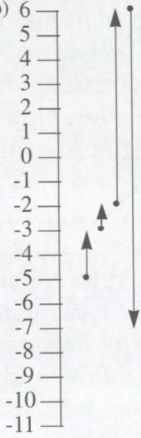
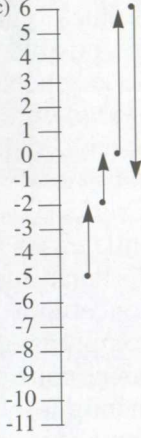
- a) La lectura de la temperatura ha sido primero de -3 grados; luego ha subido 5 grados y otros 4 más, y luego ha bajado -1 y -5 grados.  
 b) La lectura de la temperatura ha sido primero de -3 grados; luego ha subido 2 grados y otros 4 más, y luego ha bajado 5 y 4 grados.  
 c) La lectura de la temperatura ha sido primero de -3 grados; luego ha subido 5 grados y otros 2 más, y luego ha bajado 5 y 4 grados.

E) Cambio de representación numérica a verbal.

¿Cuál de los siguientes enunciados describe correctamente las variaciones de temperatura reflejadas en la siguiente expresión numérica?

$$(-4) + (1) + (-6)$$

- a) La temperatura ha pasado de -4 grados a -3 grados y luego ha bajado a -9 grados.  
 b) La temperatura ha pasado de -4 grados a 1 grado y luego ha bajado a -6 grados.  
 c) La temperatura ha pasado de -4 grados a -3 grados y luego ha bajado a -6 grados.

<p>F) Cambio de representación numérica a gráfica.</p> <p>La expresión siguiente representa las diferencias de temperatura de una lectura a otra registradas a lo largo de 10 horas en un día, a partir de la primera lectura en que ha sido de <math>-5</math> grados.</p> <p><math>(-5) + (-3) + (-2) + (6) + (-7)</math></p> <p>¿Cuál es el modo correcto de representar gráficamente el problema?</p>	<p>a)</p> 	<p>b)</p> 	<p>c)</p> 
---	---	---	--

### 2.2.3. Contraste del modelo.

#### 2.2.3.1. Muestra.

A fin de comprobar las características de la prueba desarrollada se examinaron 229 alumnos de 7º de EGB, niños y niñas, procedentes de tres colegios, dos de Madrid y uno de Alcobendas, todos centros concertados. Los siete profesores que impartían clase a los grupos de alumnos examinados valoraron, a su vez, la relevancia de las tareas propuestas y el grado de dominio de las mismas que era deseable que consiguiesen los alumnos para poder decir que habían alcanzado el criterio de aprendizaje. El protocolo utilizado para solicitar esta valoración se encuentra en el Apéndice 2.6.

#### 2.2.3.2. Validez social del contenido del modelo.

La Tabla 2.1 recoge los datos correspondientes a la valoración de la relevancia de las tareas de la prueba -en una escala de 0 a 3- y de ésta en su conjunto -en una escala de 1 a 7- realizada por los siete profesores en cuyas clases se aplicó, y los datos correspondientes al grado de dominio que consideran que los alumnos deben alcanzar en relación con los contenidos y capacidades evaluados.

Como puede comprobarse, los profesores han otorgado a la prueba en promedio una puntuación en relevancia -6,4- que equivale al 91% del máximo posible -7-. Esto significa una valoración muy positiva de la relevancia de la prueba considerada globalmente. No obstante, hay una gran heterogeneidad en la valoración de las tareas por separado. La segunda parte de la prueba, en la que se evalúa la eficiencia en la operación con distintas combinaciones de signos, ha sido considerada unánimemente como de máxima relevancia. Este resultado era de esperar, dada la importancia que se concede en la enseñanza tradicional al dominio de las reglas de operación. El segundo lugar, han sido considerados como muy relevantes los elementos 3 y 4, concebidos para evaluar el concepto de "valor absoluto" de un número y la comprensión del orden de magnitud de los números negativos y positivos. Siguen, considerados también como muy relevantes, pero con una media algo menor, los elementos 1, 2 y 5, que evalúan la capacidad de identificar en una situación real cuándo corresponde a un fenómeno un valor positivo o negativo, o el orden de magnitud de tales valores. El resto de los elementos se ha considerado como relevante, si bien la formulación matemática de un problema expresado verbalmente se ha considerado entre poco relevante y relevante cuando interviene la multiplicación o la división. Estos resultados parecen lógicos, dado que ni en los libros de texto ni en las clases suelen aparecer problemas de este tipo.

Los resultados relativos al dominio requerido son semejantes. Consideran en promedio que los alumnos deben resolver el 75.7% de las tareas para poder afirmar que dominan la prueba, pero las distintas tareas no reciben la misma valoración. Los profesores exigen un dominio de la prueba de signos del 91%; un dominio del 87.5% de las tareas que implican comprensión de conceptos; el 76% del resto de las tareas, con excepción de las que implican multiplicar o dividir, y el 57.5% de éstas tareas.

Tabla 2.1: Prueba: *Números enteros*. Relevancia y dominio medios.

Elemento	RELEVANCIA		DOMINIO	
	Media	Desv. Típica	Media	Desv. Típica
1	2.28	.75	88.00	9.35
2	2.42	.53	86.50	7.84
3	2.57	.53	88.33	5.16
4	2.57	.53	87.33	10.61
5	2.42	.78	87.33	10.61
6	2.00	1.00	71.66	22.28
7	1.85	.37	80.83	8.01
8	1.85	.37	80.83	8.01
9	2.00	.57	80.50	8.33
10	1.71	.48	75.83	14.28
11	1.85	.37	81.50	14.47
12	2.00	0.00	82.50	7.58
13	1.85	.37	83.16	13.42
14	1.85	.37	80.00	12.64
15	1.85	.37	77.50	10.84
16	1.85	.37	80.83	9.17
17	2.00	0.00	81.66	9.83
18	1.71	.48	73.33	16.33
19	2.00	0.00	80.00	10.48
20	1.71	.48	75.83	11.14
21	1.71	.48	75.00	10.48
22	1.85	.37	74.16	12.00
23	1.71	.48	74.16	12.00
24	1.85	.37	72.50	14.05
25	1.71	.48	68.33	21.37
26	1.85	.37	68.33	21.37
27	1.85	.69	68.33	24.01
28	1.71	.48	65.00	21.67
29	1.40	.89	70.00	0.00
30	1.57	.78	62.50	28.59
31	1.57	.78	61.66	28.04
32	1.42	.97	53.33	27.32
33	1.42	.97	53.33	27.32
34	1.42	.97	53.33	27.32
35	1.42	.97	53.33	27.32
36	1.42	.97	53.33	27.32
37	1.85	.69	63.33	22.28
38	1.85	.69	63.33	22.28
40	1.57	.78	57.50	27.52
PRUEBAS:				
A)SIGNOS	7.00	0.00	91.14	6.49
B)ENTEROS	6.42	.78	75.71	7.86

### 2.2.3.3. Porcentaje de sujetos que escogen cada alternativa e índice de dificultad (ID).

Desde un punto de vista teórico, la prueba sobre el tema "Números enteros" es apta para evaluar si los alumnos han adquirido los componentes del esquema de conocimientos que permiten afrontar de modo eficaz los problemas que deben resolverse mediante el empleo de números negativos, lo que constituye el núcleo de los objetivos del DCB en relación con este tema. Además, los profesores han valorado positivamente la relevancia de sus elementos si bien, como era de esperar, su valoración obedece más a la práctica tradicional de la enseñanza de este tema, esto es, se acentúa el dominio de los algoritmos más que la representación de los problemas. En consecuencia, parece relevante conocer cuál es el estado actual de los conocimientos de los alumnos al respecto. Para ello, teniendo en cuenta que se trata de una prueba objetiva, hemos estudiado, en primer lugar, el porcentaje de alumnos que escoge las distintas alternativas a cada pregunta, así como el índice de dificultad de éstas y, en segundo lugar, las puntuaciones medias obtenidas por los alumnos en cada una de las categorías establecidas para evaluar los distintos objetivos de aprendizaje, resultados que se recogen en las Tablas 2.2 a 2.5.

Examinando, en primer lugar, los datos correspondientes a la prueba de signos, puede comprobarse que resulta bastante fácil. 18 elementos tienen un índice de dificultad que oscila entre el 33.3% y el 66.6% (Med.= 53.56) y 48 un índice superior a 66.7% (Med.= 92.9). Los elementos con mayor dificultad reflejan, sin embargo, la existencia de errores regulares en los alumnos. Han resultado particularmente difíciles las combinaciones de los tipos siguientes:

- |                  |   |
|------------------|---|
| ( 5) - (-4) = 1  | Todos los elementos con esta combinación (2, 19, 24, 29, 42 y 47) han sido mal contestados por un porcentaje de alumnos que oscila entre el 50 y el 61%.  |
| (-2) - ( 1) = -1 | Es una de las combinaciones que más difíciles. Todos los elementos en que aparece (9, 54, 60) son fallados por más del 60% de los sujetos. No obstante, cuando el segundo valor es mayor (elementos 4, 33 y 50) la solución resulta más fácil (aciertan entre el 70 y el 80% de los alumnos). |

$$(-6) - (-3) = -9$$

El índice de fracaso está entre el 40 y el 45% en todos los elementos de esta combinación (16, 21, 39, 44).

$$(4) - (5) = 1$$

Los fallos en esta combinación oscilan en torno al 40%, pero sólo si el segundo número es mayor en valor absoluto.

En general, pues, la dificultad mayor parece estar en entender el cambio de valor que implica el doble signo menos " $-(-N)$ ", y en entender que " $(-N) - (N) = (-N) + (-N)$ ".

En cuanto a los resultados del resto de la prueba, siete elementos tienen un ID inferior al 33,3% (Med.= 21.5); otros dieciocho lo tienen entre 33.4 y 66.6 (Med.= 50.1), y los trece restantes lo tienen superior al 66.7% (Med.= 76.4). La prueba, pues, en conjunto resulta adecuada, pues presenta una dificultad intermedia (53.8%). No obstante, hay una serie de elementos cuya dificultad es particularmente elevada, lo que hace necesario averiguar a qué se debe analizando las alternativas escogidas, con el fin de decidir qué tipo de ayudas proporcionar a los alumnos. Estos elementos son los siguientes:

- 16, 22, 23, 24, 31, 32, 33 y 34.- En todos estos elementos se pide a los alumnos que traduzcan la formulación verbal de un problema a su expresión matemática, utilizando números positivos y negativos según proceda, o viceversa. Este emparejamiento resulta particularmente complicado, lo que refleja probablemente que se trabaja poco en clase, como cabe presumir igualmente a partir de la relevancia que los profesores otorgan a estos elementos y del grado de dominio de los mismos que exigen a sus alumnos.

- 6.- Implica comprender el significado de las expresiones verbales relevantes para representarse adecuadamente el problema.

- 29 y 30.- La dificultad de estos elementos estriba en que el sujeto tiene que interpretar el efecto de operar con números enteros positivos y negativos en una situación real, anticipado el carácter positivo o negativo del resultado.

A la luz de los resultados anteriores cabe señalar que los alumnos parecen tener bastante bien automatizados los elementos del esquema de conocimientos que tienen que ver con la ejecución de los problemas una vez formulados matematicamente aunque, como hemos puesto de manifiesto, se dan con frecuencia errores sistemáticos ligados al uso doble del signo menos y a la necesidad de operar con expresiones del tipo  $-(N)$  una vez cambiado el signo. También parecen bastante capaces de representarse gráficamente los problemas -verbales o numéricos- y de resolverlos si ya están formulados. El problema principal, sin embargo, radica en la dificultad para traducir situaciones reales a su formulación matemática utilizando números enteros positivos y negativos, paso en el que está implicado el primero de los componentes de los esquemas de conocimiento señalados por Marshall (1993-b).

Tabla 2.2. Números enteros: Índice de dificultad (ID), elementos 1 a 38.  
(% de aciertos)

Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ID	85.9	92.7	82.2	75.9	71.3	36.3	46.3	60.4	80.9
Preg.	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ID	55.4	53.6	73.1	47.2	76.3	60.4	39.5	66.3	48.6
Preg.	19	20	21	22	23	24	25	26	27
ID	60.4	69.0	76.8	19.0	27.2	11.3	66.3	75.0	67.7
Preg.	28	29	30	31	32	33	34	35	36
ID	65.4	34.7	31.0	36.0	13.6	23.7	25.1	41.0	42.0
Preg.	37	38							
ID	42.4	66.6							

Tabla 2.3. Números enteros: Índice de dificultad (ID) de la prueba de signos.  
(% de aciertos)

Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ID	95.9	44.3	72.3	80.0	90.0	98.1	93.2	90.0	36.1	86.8	95.4
Preg.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ID	98.6	65.6	90.0	93.2	60.6	90.9	95.9	44.3	80.9	58.3	88.6
Preg.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
ID	92.3	39.8	57.0	85.0	91.4	90.9	43.8	77.8	91.8	85.9	78.2
Preg.	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
ID	94.5	99.5	59.2	88.6	93.2	56.5	93.2	95.0	42.0	87.7	57.4
Preg.	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
ID	88.2	92.7	48.8	90.9	69.2	71.0	93.2	98.1	91.4	34.8	82.8
Preg.	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
ID	96.8	94.5	86.4	91.4	38.4	87.3	98.1	96.3	57.4	92.3	61.5



Tabla 2.4: A) *Números enteros*: Frecuencia con que ha sido escogida cada alternativa

Elemento	Alternativas (Partes 1ª, 3ª, 4ª y 5ª)								
	a	b	c	0 <sup>2</sup>	Elemento	a	b	c	0
1	14	14	189	3	20	9	59	152	0
2	3	204	12	1	21	169	21	28	2
3	181	16	23	0	22	42	12	165	1
4	167	26	26	1	23	151	7	60	2
5	37	24	157	2	24	74	25	114	7
6	57	80	75	8	25	146	44	29	1
7	102	48	67	3	26	17	37	165	1
8	56	28	133	3	27	149	30	36	5
9	14	178	26	2	28	39	144	33	4
10	40	122	48	10	29	76	94	49	0
11	19	118	65	18	30	56	95	68	0
12	39	20	161	0	31	79	18	121	1
13	86	104	28	2	32	157	30	32	0
14	13	38	168	1	33	55	111	52	1
15	133	54	18	15	34	68	55	94	2
16	87	115	16	2	35	90	24	100	5
17	146	67	6	1	36	42	92	74	11
18	77	27	107	9	37	93	73	42	11
19	9	133	77	1	38	46	17	146	10

1 Nueve sujetos no realizaron las partes primera, tercera y cuarta de la prueba -elementos 1 al 28- y diez no realizaron la parte cuarta -elementos 29 al 38-.

2 0 = Número de sujetos que no han contestado al elemento.

Tabla 2.4: B) *Prueba de Signos*: Frecuencia con que se ha escogido la alternativa correcta.

Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	212	98	160	177	199	217	206	199	80	192	211
Preg.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	118	145	199	206	134	201	212	98	179	129	196
Preg.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
	204	88	126	188	202	201	97	172	203	190	173
Preg.	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
	209	220	131	196	206	125	206	210	93	194	127
Preg.	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
	195	205	108	201	153	157	206	217	202	77	183
Preg.	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
	214	209	191	202	85	193	217	213	127	204	136

#### 2.2.3.4. Establecimiento de categorías, validez del modelo y calificación.

Dado que la prueba se ha diseñado en base a un modelo específico del esquema de conocimientos cuya construcción debía facilitar el trabajo con números enteros a alumnos y alumnas, ha sido posible derivar escalas de puntuación para cada uno de los componentes básicos del modelo, determinar su fiabilidad y evaluar el grado en que cada uno de los componentes evaluados contribuye a la capacidad de resolver problemas reales manejables mediante el empleo de números enteros positivos y negativos.

La Tabla 2.5 recoge las medias y desviaciones típicas en las distintas categorías de puntuación, así como la fiabilidad de cada escala. Como puede comprobarse, los alumnos obtienen mejores puntuaciones en las escalas de "comprensión de conceptos básicos" y "conocimiento de las reglas de operación con signos", lo que era de esperar, pues son los elementos que tradicionalmente se trabajan más en las clases. La capacidad de representarse los problemas de distintos modos, pasando de una representación verbal a numérica o gráfica y viceversa es menor, lo que cabía esperar dado que los elementos en los que los sujetos han presentado más problema estaban en la subcategoría de transformaciones que incluía en paso de verbal a numérico y viceversa.

Tabla 2.5: Prueba: *Números enteros*.  
Categorías que integran el perfil de puntuaciones:  
Composición, puntuaciones medias y fiabilidad.

Categorías	Elementos	N	Med.	Sx
a) Comprensión de conceptos básicos (CCB) Fiabilidad: $\alpha = .33$	1 a 5.	220	8.16	1.96
b) Capacidad de representarse los problemas de distintos modos (verbal, gráfico, matemático) (RPR) Fiabilidad: $\alpha = .68$	11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 35	216	6.91	2.93
c) Automatización del las operaciones con números positivos y negativos. (SIG) Fiabilidad: $\alpha = .91$	Segunda parte: 1 a 66.	221	7.90	1.36
d) Eficiencia final en la solución de problemas (EFSP) Fiabilidad: $\alpha = .69$	7, 8, 9, 10, 17, 18, 19, 25, 26, 27, 28, 36, 37, 38	216	6.00	2.10
PRUEBA COMPLETA Fiabilidad: $\alpha = .80$	1 a 38 (1 <sup>a</sup> , 3 <sup>a</sup> a 5 <sup>a</sup> parte)	216	5.37	1.55

Nota: Las medias corresponden a puntuaciones obtenidas sobre una escala de 10 puntos.

En cuanto a la fiabilidad de la prueba, no cabía esperar que fuese alta debido a la heterogeneidad de los conocimientos evaluados. No obstante, como puede comprobarse en la tabla citada, con excepción de la subescala de "comprensión de conceptos básicos", cuya fiabilidad es baja probablemente por su corta longitud, el resto de las subescalas y la prueba total tienen una fiabilidad de buena a muy buena, lo que constituye un dato más a favor de la calidad de la prueba.

Cabe preguntarse, sin embargo, en qué medida los logros de los alumnos dependen de las distintas variables evaluadas. Para comprobar esta dependencia, y con ello la validez del modelo teórico del esquema conceptual en que se ha basado nuestra prueba, hemos realizado un análisis de regresión, utilizando como predictores las puntuaciones en las escalas de "comprensión de conceptos básicos", "representación" y "signos", y como variable de-

pendiente, la puntuación en la escala de "eficiencia en la solución de problemas". Los resultados aparecen recogidos en la Tabla 2.6. El análisis muestra que los datos son conformes a lo que cabía esperar de acuerdo con el modelo. Los tres predictores tienen un peso significativo ( $p < 0.0000$ ), explicando en conjunto el 41% de la varianza. En consecuencia, dados estos resultados, así como el hecho de que los alumnos parecen experimentar dificultades especialmente en la formulación matemática de los problemas presentes en situaciones reales, parece necesario que los profesores no sólo enseñen a identificar situaciones a las que se pueden aplicar valores negativos, o a operar combinando valores de distinto signo -punto en el que, pese a todo, se dan persistentemente los errores sistemáticos descritos-. Es preciso facilitar las experiencias necesarias para que los alumnos puedan desarrollar las capacidades de representación que hemos podido identificar como componentes centrales del esquema de conocimientos que se halla a la base del trabajo con números enteros negativos y positivos.

Tabla 2.6: *Números enteros*. Modelo conceptual.  
Análisis de regresión. Método directo.

R múltiple: 0.64		$R^2 = 0.418$		P = 0.0000	
Variable	Coefficiente	Error típico	Coefficiente estandarizado	T	P (2 col.)
Constante	-2.50				
Signos	0.75	0.12	0.35	6.30	0.00
Conceptos Básicos	0.66	0.16	0.22	3.98	0.00
Representación	0.32	0.05	0.32	5.55	0.00

### 2.3. Modelo 2: Proporcionalidad.

#### 2.3.1. *Objetivos instruccionales y esquema de conocimientos a adquirir.*

La comprensión de las relaciones proporcionales entre variables y la solución de los distintos tipos de problemas que requieren razonar sobre proporciones constituye uno de los apartados del bloque de contenidos "Números y operaciones" del actual diseño curricular de las Matemáticas al que se

concede particular atención durante los primeros cursos de la Enseñanza Secundaria (MEC, 1989).

El análisis de los apartados correspondientes a "Proporcionalidad" dentro de los libros de texto pone de manifiesto que están concebidos para conseguir tres objetivos fundamentales. Primero, la comprensión de los conceptos "constante de proporcionalidad", concepto que expresa la relación cuantitativa entre dos variables, y "proporción", concepto que hace referencia a la relación entre las constantes de proporcionalidad. En segundo lugar, puesto que las relaciones entre variables se expresan en forma de fracciones y de relaciones entre éstas, se busca que los alumnos comprendan las relaciones de orden y equivalencia entre fracciones, las relaciones entre los distintos elementos de una proporción y los algoritmos que permiten resolver los problemas de proporcionalidad. Finalmente, en tercer lugar, los libros de texto conceden especial importancia a que los alumnos aprendan a aplicar los principios del razonamiento proporcional, traducidos en términos de "regla de tres simple, directa o inversa" y de "regla de tres compuesta" a la solución de problemas cotidianos de distintos tipos -cálculo de magnitudes en general (kilos, precios, longitudes, áreas, etc.), de tantos por ciento o por mil, tiempo, velocidad, repartos proporcionales, interés, segmentos, etc.

Dada la importancia que se concede a los distintos objetivos señalados, parece necesario que los profesores evalúen no sólo el grado en que los alumnos son competentes o no a la hora de resolver problemas de proporcionalidad sino, sobre todo, qué factores crean dificultades a sus alumnos, de modo que sea posible facilitarles las ayudas oportunas. Conseguir este objetivo exige saber qué evaluar, algo que depende de los supuestos sobre las variables que pueden estar determinando la capacidad de resolver los problemas de proporcionalidad. Es importante, en consecuencia, partir de los supuestos adecuados, supuestos cuya identificación han hecho posible distintas líneas de investigación.

En primer lugar, en la solución de problemas de proporcionalidad los alumnos deben razonar sobre relaciones que previamente deben identificar en una situación cotidiana. Por este motivo se han ideado distintas situaciones que han permitido identificar las dificultades que implica la naturaleza de las distintas tareas y variables con las que han de trabajar. Entre estas tareas se encuentran "razonar sobre la magnitud relativa de distintos pares de fracciones" (Karplus y Peterson, 1970), "razonar sobre el sabor de una mezcla" (Noelting, 1980 a y b), "predecir el lado de descenso de la balanza" (Inhelder y Piaget, 1955), "determinar cuál de dos vasos está más lleno o si están igual de llenos" (Bruner y Kenney, 1966) y "determinar el peso relativo

de dos conjuntos de bloques, C y D, conocida la relación de peso entre otros dos conjuntos, A y B, y la relación entre el número de bloques que integran cada uno de los cuatro conjuntos, debido a que son presentados visualmente" (Harel, Behr, Post y Lesh, 1992). La revisión de los estudios realizados con las mismas realizada por estos últimos autores ha puesto de manifiesto que la capacidad de los alumnos de representarse correctamente los problemas y, en consecuencia, de resolverlos, depende de distintos tipos de variables tales como, por ejemplo:

- El hecho de que se requiera o no la realización de un cálculo numérico específico para resolver el problema.
- El tipo de cantidades implicadas en el problema. El número de kms. o la cantidad de tiempo son cantidades relativas a la "extensión", mientras que la velocidad o el grado en que una mezcla sabe a algo son cantidades relativas a la "intensidad" de una variable.
- El hecho de que las variables tengan un valor numérico asignado como, por ejemplo, "la mezcla X contiene dos vasos de agua", o que, por el contrario, el sujeto sólo conozca la relación entre las mismas como, por ejemplo, "las dos mezclas contienen la misma cantidad de agua".
- El hecho de que el sujeto tenga que fijarse, para responder, en la invarianza de las razones, como en los problemas de mezclas, o en los productos, como en la tarea de la balanza.

El hecho de que las distintas tareas varíen en función de las características mencionadas, sugiere que, a la hora de evaluar la competencia de los alumnos con el propósito de facilitarles las ayudas precisas, es necesario observar el tipo de tareas en las que experimentan mayor dificultad a la hora de identificar los elementos relevantes a considerar para resolver el problema, así como los factores que determinan los errores más comunes cometidos durante su realización.

En segundo lugar, cuando los elementos de un problema se han traducido a fracciones o cuando el problema se plantea directamente a partir de las mismas, es preciso que los alumnos comprendan adecuadamente las relaciones de orden y equivalencia. Establecer estas propiedades con los números naturales no presenta problemas, pero no ocurre igual cuando hay que trabajar con fracciones, por lo que parece necesario que los profesores evalúen esta capacidad y, en la medida de lo posible las razones tanto de las dificultades que puedan experimentar como de la competencia con que resuelven los problemas. En relación con este punto, Smith (1995) ha

puesto de manifiesto que, con independencia de que los alumnos sepan aplicar las reglas de transformación que se les enseñan en clase y que permiten la resolución correcta de los problemas de proporciones, para resolver muchos problemas los alumnos realmente competentes en su manejo utilizan diferentes estrategias de su invención. Por ejemplo, cuando se pregunta a un alumno cuál de las fracciones  $9/12$  y  $7/13$  es mayor, una respuesta típica es "La primera, por que la segunda está mas cerca de  $1/2$ ". Esta estrategia, no enseñada en clase, implica trabajar con un punto de referencia para alcanzar rápidamente la solución. Son numerosas las estrategias espontáneas utilizadas por los alumnos cuyo desarrollo los profesores podrían favorecer y deberían evaluar.

En tercer lugar, el esquema de conocimientos que los alumnos han de poner en juego para resolver los problemas de proporcionalidad, como cualquier otro tipo de problemas, de acuerdo con Mayer (1987) y Marshall (1993-b), incluye otro tipo de capacidades que se adquieren en parte de modo independiente a las anteriores. Nos referimos a la capacidad de identificar una situación problemática como problema de proporcionalidad, a la de identificar el objetivo de los problemas y a comprender los elementos relevantes para su solución, a la de planificar el proceso de solución y traducir los distintos pasos a expresiones matemáticas y a la de realizar correctamente los cálculos. Con frecuencia sólo se evalúa en las clases si los alumnos alcanzan la solución de los distintos tipos de problemas, no en cuál de los aspectos implicados fallan ni si, en caso de resolver los problemas correctamente, comprenden la razón de los procedimientos que implican. Por este motivo, la evaluación debería diseñarse de modo que proporcionase información específica sobre estos componentes.

La comprensión de las relaciones proporcionales y la solución eficiente de los problemas en que se hallan implicadas depende, pues, de los distintos componentes mencionados: a) la representación de las relaciones entre las variables que, en situaciones reales, definen un problema que debe resolverse razonando sobre proporciones; b) la comprensión de las relaciones de orden y equivalencia entre fracciones, y c) las capacidades generales implicadas en la solución de problemas, capacidades que tienen que ver con la comprensión de la información, la representación del problema, la planificación del proceso de solución y los conocimientos algorítmicos que posibilitan la realización de distintos tipos de cálculos.

### 2.3.2. *Tareas y criterios de evaluación.*

Teniendo presente que la consecución de los objetivos de aprendizaje perseguidos con el trabajo sobre proporciones depende de la adquisición eficiente de las habilidades referidas en el apartado anterior, habilidades que integran el esquema de conocimientos que deben construir los alumnos, hemos diseñado diferentes tareas para la evaluación de los mismos cuando tales tareas no existían, o hemos incluido ejemplos de tareas inspirados en los modelos diseñados por otros autores cuando ya existían, de modo que el conjunto de ellas permitiese obtener información de los puntos en que los alumnos requieren ayudas específicas. La prueba completa se incluye en el Apéndice 2.2. No obstante, mostramos a continuación las principales categorías de tareas diseñadas, justificando su inclusión para evaluar a los alumnos y ayudarles a superar sus dificultades.

#### *Tareas para evaluar la capacidad de razonamiento.*

Como hemos señalado, los investigadores han utilizado diferentes tareas para evaluar los factores que influyen en el razonamientos sobre proporciones, así como su evolución con la edad. Estos trabajos han puesto de manifiesto que la capacidad de razonar sobre proporciones no es una cuestión de todo o nada. La información que define la situación sobre la que es preciso razonar en situaciones reales -aquellas en que el alumno no se enfrenta directamente con fracciones- varía en función de ciertos parámetros, algunos de los cuales han sido descritos en el apartado anterior. En consecuencia, a fin de determinar en qué situaciones los alumnos experimentan especiales dificultades, hemos creído conveniente incluir en nuestro modelo de evaluación algunos de los tipos de tareas utilizados por los investigadores. En concreto, hemos incluido varios elementos semejantes a los habitualmente presentados en las tareas de mezclas y la tarea de la balanza. Las figuras 2.1 y 2.2 muestran ejemplos de estos elementos. Puede comprobarse que en ellos se pide una justificación al alumno de las respuestas escogidas, justificación que puede dar una idea al profesor de los elementos específicos incluidos por los alumnos en la representación de la situación a partir de la cual razonan. No obstante, las respuestas a estas cuestiones no han sido analizadas en nuestro estudio, dado que el objetivo inmediato, tras mostrar cómo se pueden evaluar los componentes del esquema conceptual que nos ocupa, es ver el tipo de información que proporcionan las tareas que pueden analizarse fácilmente cuando se trabaja con un gran número de alumnos.



Figura 2.1: *Proporcionalidad*: Evaluación de la capacidad de razonamiento proporcional.

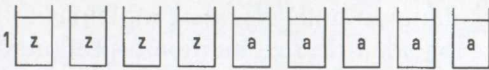
En cada uno de los ejemplos siguientes se te presentan dos grupos de vasos. En cada grupo, algunos de los vasos contienen zumo (z) y otros contienen agua (a). Si mezclamos el zumo y el agua de los vasos del grupo uno en un recipiente y hacemos lo mismo con los del grupo dos en otro, ¿cuál de las mezclas sabrá más a zumo, la correspondiente al grupo uno o la correspondiente al grupo dos?

Sabrán más a zumo:

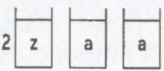
a) La mezcla del grupo 1.  
b) La mezcla del grupo 2.  
c) Las dos sabrán igual.

¿Por qué razón?

1



2



\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Figura 2.2: *Proporcionalidad*: Evaluación de la capacidad de razonamiento proporcional.

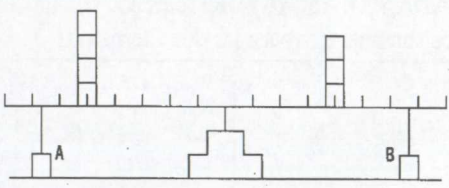
A continuación se te presenta una balanza cuyos brazos, que están apoyados en dos soportes, sostienen varias pesas iguales. Observa la balanza y escoge la respuesta que describe lo que crees que ocurrirá cuando se retiren los soportes.

a) Descenderá el brazo A.  
b) Descenderá el brazo B.  
c) Permanecerá en equilibrio.

¿Por qué piensas que ocurrirá así?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



*Tareas para evaluar específicamente la comprensión de los principios de orden y equivalencia de fracciones.*

Los problemas incluidos en las tareas anteriores requieren una estimación de la magnitud relativa de los términos que intervienen en la comparación, estimación que no siempre conlleva la traducción a una expresión de tipo fraccionario, como han mostrado Harel y col. (1992). Sin embargo, esta traducción puede facilitar la solución si los alumnos comprenden adecuadamente los principios de orden y equivalencia de las fracciones. Por este motivo, hemos incluido una serie de problemas utilizados habitualmente para evaluar la capacidad de razonamiento proporcional pero que no requieren traducir situación alguna, ya que requieren directamente comparar fracciones que pueden diferir en los numeradores, en los denominadores o en ambos, y en la magnitud relativa de sus componentes, variables que se ha visto que influyen en las estrategias que ponen en juego los alumnos a la hora de resolver problemas. El Cuadro 2.9 recoge algunas de estas tareas. Como puede comprobarse, en este caso no hemos planteado preguntas sobre las razones en las que los alumnos basan sus respuestas. No obstante, dada la naturaleza de los problemas es fácil identificar el origen de los fracasos - comparar sólo numeradores o denominadores, etc.-, aunque los alumnos emplean a veces estrategias que no se manifiestan salvo que se les pregunte específicamente por qué actúan como lo hacen (Smith, 1995)

Cuadro 2.9: *Proporcionalidad*. Ejemplo de tareas para evaluar la comprensión del orden y equivalencia de distintas fracciones.

A continuación se te presentan distintos pares de fracciones. Señala QUÉ FRACCIÓN DE CADA PAR ES MAYOR, rodeando con un círculo la alternativa que consideres correcta. Si las dos son iguales, rodea las dos alternativas.			
A: $\frac{3}{5}$ B: $\frac{3}{7}$	A: $\frac{1}{2}$ B: $\frac{2}{4}$	A: $\frac{3}{9}$ B: $\frac{2}{6}$	A: $\frac{2}{6}$ B: $\frac{3}{8}$

*Tareas para evaluar la capacidad de identificar las situaciones-problema que requieren razonamiento proporcional.*

La capacidad de identificar cuándo una situación pertenece a una categoría de problemas dados es una de las notas que contribuyen a definir la cualidad de experto en un área dada. Esta cualidad depende del primero de los componentes de los esquemas de conocimiento descritos por Marshall (1993-b), el conocimiento de los rasgos distintivos de un fenómeno o situación. Para evaluar este tipo de conocimiento se han diseñado tareas de clasificación de problemas como la incluida en el cuadro 2.10. Como hemos señalado en otros casos, esta tarea puede plantearse de forma abierta, pidiendo al sujeto además que indique las razones de su respuesta, lo que puede ayudar a identificar el origen de sus dificultades.

*Cuadro 2.10: Proporcionalidad. Ejemplo de tarea de clasificación de problemas.*

Indica cuál de los siguientes problemas NO puede resolverse mediante una regla de tres:

- a) Si una máquina produce 234 tornillos a la hora, ¿cuántos tornillos producirá en 12 horas?
- b) Si el litro de gasolina súper vale 98 pts, ¿cuántos litros se podrán echar con 2000 pts?
- c) Si un niño pesa 12 kilos a la edad de dos años, ¿cuánto pesará al cumplir los 8 años?

*Tareas para evaluar la capacidad de identificar el objetivo del problema.*

La identificación del tipo de información que es preciso buscar porque su posesión permite resolver el problema de modo inmediato constituye una de los escollos con que frecuentemente tropiezan los alumnos al tratar de resolver un problema. Depende, en buena medida, de la representación que el sujeto se hace de la situación y del tipo de problema que esta representación evoca, por lo que la eficiencia con que se resuelven las tareas anteriormente descritas puede influir en la identificación del objetivo del problema. Sin embargo, a menudo los sujetos fallan en este paso, lo que dificulta la planificación posterior del proceso de solución. No obstante, bastaría que durante el proceso de enseñanza los profesores pidiesen de modo sistemático a los alumnos que identificasen el objetivo del problema y que reflexionasen sobre sus respuestas, para que las dificultades en este punto desapareciesen en

gran medida. En cualquier caso, parece necesario poder identificar los alumnos que dicen que no saben hacer un problema porque realmente no saben qué es lo que tienen que buscar. Por ello, para evaluar esta capacidad se han diseñado tareas como la que se recoge en el Cuadro 2.11.

Cuadro 2.11: *Proporcionalidad*. Ejemplo de tarea para evaluar la capacidad de identificar el objetivo del problema.

Lee el problema siguiente y responde a la pregunta que se plantea sobre el mismo.

*En una planta envasadora de aceite hay 20 surtidores que tardan 10 horas en llenar garrafas con una capacidad, entre todas, de 20.000 litros. ¿Cuánto tiempo se necesitaría para llenar garrafas con una capacidad de 100.000 litros si la envasadora dispusiese de 40 surtidores?*

¿Qué dato, si lo tuvieses, te llevaría inmediatamente -haciendo una sola operación- a resolver el problema?

- Conocer cuánto se tardaría en llenar el primer grupo de garrafas si sólo funcionase un surtidor
- Conocer los surtidores que harían falta para llenar el primer grupo de garrafas en una hora.
- Conocer los litros de aceite que salen en total por cuarenta surtidores en una hora.

*Tareas para evaluar los datos relevantes para resolver el problema.*

No todos los datos que se proporcionan en un problema o que acompañan a la situación en que se plantea son útiles para resolverlo. Algunos no lo son, por lo que su presencia contribuye a crear una dificultad añadida. Por ello, como ha puesto de manifiesto Mayer (1987), es preciso que los alumnos sepan identificar la información relevante, algo que depende del modo en que se representan el problema. La identificación de los datos relevantes es particularmente importante en problemas de proporcionalidad como el que se presenta en el Cuadro 2.12. Para resolver tales problemas, los alumnos deben prestar atención al hecho de que el precio del producto no es fijo, sino que varía en función de que se compre en lotes de determinada magni-

tud. En consecuencia, la información relevante -la que el sujeto debe utilizar para resolver el problema- es la que muestra el coste del lote de productos adecuado a las unidades que se van a comprar.

*Tareas para evaluar la comprensión del tipo de relaciones proporcionales que intervienen en el problema.*

La comprensión de qué relaciones proporcionales son directas y cuáles inversas es un paso básico para la realización de los problemas que nos ocupan, por lo que es conveniente su evaluación. Para ello, basta con preguntar directamente a los alumnos por el tipo de relación, directa o inversa, entre dos variables dadas. No obstante, al diseñar esta pregunta con el formato de opción múltiple, se ha planteado también una tercera alternativa, la de que la relación entre variables específicas pueda depender según el tipo de problema. La razón de esto es que no sólo es importante que alumnos puedan resolver correctamente un problema dado, sino que comprendan la razón de por qué es adecuado actuar como lo hacen.

Cuadro 2.12: *Proporcionalidad*. Ejemplo de tarea para evaluar la capacidad de identificar los datos relevantes para resolver un problema

Imagínate que tus padres desean conocer el precio de las naranjas en 3 supermercados diferentes. Para ello, te piden que preguntes en cada uno cuánto costaría comprar 1, 2 y 5 kilos de naranjas. Las respuestas de cada uno de los supermercados fueron:			
Kilos	Supermercado A	Supermercado B	Supermercado C
1	50 pts.	45 pts.	60 pts.
2	95 pts.	90 pts.	110 pts.
5	205 pts.	225 pts.	230 pts.
Imagínate, además, que una persona entra al supermercado A para comprar todas las naranjas que pueda con las 950 pts que lleva. Eso significa que:			
a) Como 2 kilos le cuestan 95 pts, podrá comprar como máximo 20 kilos de naranjas.			
b) Como cada kilo le cuesta 50 pts, podrá comprar como mucho $950 / 50 = 19$ kilos.			
c) Como $950 / 205 = 4,63$ , podrá comprar más de 20 kilos de naranjas.			

*Tareas para evaluar la capacidad de planificar adecuadamente el proceso de solución.*

Tanto Marshall como Mayer han señalado que esta capacidad es uno de los factores principales que intervienen en la solución de problemas cuando estos son complejos, esto es, cuando es preciso utilizar una estrategia de solución que requiere la realización de varios pasos. La capacidad de planificación es algo que se evalúa mejor cuando se proponen a los alumnos problemas abiertos que ha de desarrollar de principio a fin, dado que la lectura de los mismos permite a los profesores, en caso de errores de los alumnos, identificar el punto en que fallan y darles las ayudas precisas. Sin embargo, la planificación del proceso de solución siguiendo un procedimiento específico aprendido en clase no significa que los alumnos comprendan realmente las razones que hacen que un proceso de solución sea adecuado. Por este motivo, y dado que lo que se pretende con la enseñanza es que los alumnos comprendan -reorganicen sus esquemas de conocimiento de modo adecuado- y no sólo que aprendan la aplicación mecánica de procedimientos estándar, hemos diseñado tareas en que los alumnos deben valorar el procedimiento seguido por un sujeto de su edad, aceptando o no las razones aducidas para justificar su corrección o incorrección. Un ejemplo de este tipo de tareas puede verse en el Cuadro 2.13. Cuando este tipo de tareas se presenta de forma abierta y se pide a los alumnos que justifiquen la adecuación o no del procedimiento observado, como ha hecho Smith (1995), sus respuestas permiten identificar los puntos en que la representación que el alumno se hace de la adecuación del proceso de solución es incorrecta, lo que permite determinar qué tipo de ayudas proporcionarle.

*Tareas para evaluar la capacidad de formular problemas matemáticamente.*

La planificación de los pasos para resolver un problema implica la formulación adecuada de las relaciones proporcionales en términos matemáticos, esto es, en fracciones de mayor o menor complejidad. Los alumnos suelen aprender determinados procedimientos que aplican de modo automático y que, si las relaciones proporcionales entre las variables han sido comprendidas adecuadamente, les permiten encontrar la solución. Sin embargo, como ocurría con el proceso de planificación, eso no significa que comprendan realmente por qué dicha formulación es correcta o no. Por este motivo, a fin de evaluar esta capacidad hemos diseñado tareas que permiten identificar si los

Cuadro 2.13: *Proporcionalidad*. Ejemplo de tarea para evaluar la comprensión de la adecuación o no de la planificación del proceso de solución.

<p>Para responder a la pregunta que se hace en el siguiente problema, un compañero ha dado los pasos que se indican. Léelos y escoge la alternativa que recoge la valoración adecuada de su forma de trabajar.</p>
<p>Problema</p>
<p><i>En una planta envasadora de aceite hay 20 surtidores que tardan 10 horas en llenar garrafas con una capacidad, entre todas, de 20.000 litros. ¿Cuánto tiempo se necesitaría para llenar garrafas con una capacidad de 100.000 litros si la envasadora dispusiese de 40 surtidores?</i></p>
<p>Pasos dados:</p> <p>(1) Tiempo = <math>100000 / \text{litros vertidos por } 40 \text{ surtidores en una hora.}</math></p> <p>(2) Litros vertidos por 40 surtidores en una hora = <math>40 \times \text{litros vertidos por surtidor-hora.}</math></p> <p>(3) Litros vertidos por un surtidor en una h. = <math>\text{litros vertidos por surtidor en } 10 \text{ h.} / 10 \text{ horas.}</math></p> <p>(4) Litros vertidos por surtidor en 10 h. = <math>20000 / 20 = 2000</math></p> <p>(5 a 7) Implica sustituir el resultado de (4) en (3), el de (3) en (2) y el de (2) en (1).</p>
<p>a) El proceso seguido es incorrecto: no ha planteado adecuadamente las relaciones proporcionales</p> <p>b) El proceso es correcto: los valores desconocidos se han hallado y sustituido adecuadamente</p> <p>c) El proceso es inadecuado: no ha tenido en cuenta la relación inversa horas-<math>n^{\circ}</math> de surtidores</p>

alumnos actúan mecánicamente o si, por el contrario, comprenden cuando una formulación dada es correcta o no lo es.

Un ejemplo de las tareas señaladas, ejemplo que corresponde al problema de proporcionalidad compuesta del Cuadro 2.13, se presenta en el Cuadro 2.14. Como puede comprobarse, la formulación matemática correcta responde al proceso ilustrado en el cuadro anterior, mientras que las formulaciones incorrectas son semejantes en su forma de organización de los datos a los procedimientos ejemplificados en los libros de texto y en las clases. Obviamente, estas tareas también pueden presentarse de forma abierta, pidiendo a los alumnos que justifiquen sus respuestas, si se desea tener evidencia directa de las razones de sus errores.

Cuadro 2.14: *Proporcionalidad*. Ejemplo de tarea para evaluar la capacidad de formular problemas matemáticamente.

El planteamiento correcto para resolver la pregunta que se plantea en el problema inicial sería:		
a)	b)	c)
$X = \frac{100000}{\left(\frac{20000}{\frac{20}{10}}\right) \times 40}$	$\frac{10}{X} = \frac{100000}{20000} \times \frac{40}{20}$	$\frac{X}{10} = \frac{100000}{20000} \times \frac{40}{20}$

### 2.3.3. *Contraste del modelo.*

#### 2.3.3.1. Muestra.

A fin de comprobar las características de la prueba desarrollada se examinaron 157 alumnos de 7º de EGB, niños y niñas, procedentes de dos colegios, uno de Madrid y otro de Alcobendas, ambos centros concertados. Los siete profesores que impartían clase a los grupos de alumnos examinados valoraron, a su vez, la relevancia de las tareas propuestas y el grado de dominio de las mismas que era deseable que consiguiesen los alumnos para poder decir que habían alcanzado el criterio de aprendizaje. El protocolo utilizado para solicitar esta valoración se encuentra en el Apéndice 2.6.

#### 2.3.3.2. Validez social del contenido del modelo.

La Tabla 2.7 recoge los datos correspondientes a la valoración de la relevancia de las tareas de la prueba y de ésta en su conjunto realizada por los siete profesores en cuyas clases se aplicó, así como el grado de dominio que consideran que los alumnos deben alcanzar en relación con los contenidos y capacidades evaluados.

Como puede comprobarse, los profesores han otorgado a la prueba en promedio una puntuación en relevancia -6,28- que equivale al 89,7% del máximo posible -7-. Esto significa una valoración muy positiva de la relevancia



de la prueba considerada globalmente. Así mismo, hay una gran homogeneidad en la valoración de las tareas por separado. Tan sólo hay once elementos en los que la valoración media no supera el nivel de "importante". En general, los elementos considerados menos relevantes son aquellos que tienen que ver con el conocimiento del proceso de razonamiento a seguir para resolver problemas de proporcionalidad compuesta (20, 27 y 33) y con la formulación matemática de los mismos (28 y 34), los más difíciles de la prueba, y con la mera ejecución de cálculos (13 y 14). A éstos elementos hay que añadir algún elemento aislado de los conjuntos de elementos diseñados para evaluar otros conocimientos.

En cuanto al dominio de las categorías de tareas que los profesores consideran necesario, la situación es paralela a la de la relevancia. Los profesores, en promedio, consideran que los alumnos deben resolver correctamente el 77,14% de la prueba para que pueda considerarse dominada, porcentaje que sube al 85.3% si se quitan los elementos considerados menos relevantes.

En conjunto, los datos anteriores ponen de manifiesto la gran adecuación de la prueba desde el punto de vista de los profesores. El que esto ocurra es particularmente importante en este caso, dado que dos quintos de los elementos evalúan cualitativamente el razonamiento proporcional, lo que no suele ser habitual en las tareas utilizadas por los profesores para evaluar los conocimientos en este ámbito. Un hecho significativo, sin embargo, es la menor valoración de los elementos que evalúan la planificación y desarrollo del proceso de solución en el caso de problemas de proporcionalidad compuesta. Es posible que el hecho de que este tipo de tareas no se planteen habitualmente en clase unido al hecho de que se trata de problemas bastante complejos, haya influido en la valoración realizada por los profesores.

### 2.3.3.3. Porcentaje de sujetos que escoge cada alternativa e índice de dificultad.

Desde un punto de vista teórico, la prueba sobre el tema "Proporcionalidad" es apta para evaluar si los alumnos han adquirido los componentes del esquema de conocimientos que permiten afrontar de modo eficaz los problemas de proporcionalidad simple y compuesta, lo que constituye el núcleo de los objetivos del DCB en relación con este tema. Además, los profesores han valorado muy positivamente la relevancia de sus elementos. En consecuencia, parece relevante conocer cuál es el estado actual de los conocimientos de los alumnos al respecto. Para ello, teniendo en cuenta que se trata de una prueba objetiva, hemos estudiado, en primer lugar, el porcentaje de alumnos que escoge las distintas alternativas a cada pregunta, así como el índice de

Tabla 2.7: Prueba: *Proporcionalidad*. Relevancia y dominio medios.

Elemento	RELEVANCIA		DOMINIO	
	Media	Desv. Típica	Media	Desv. Típica
1	2.28	.48	87.50	11.72
2	2.14	.37	85.83	12.00
3	2.14	.37	85.00	10.95
4	2.14	.37	84.16	10.20
5	2.14	.37	80.00	13.78
6	2.14	.69	80.00	16.73
7	2.14	.69	78.33	16.02
8	2.00	.57	77.50	16.04
9	2.00	.57	77.50	16.04
10	2.28	.75	81.66	17.22
11	2.14	.69	80.83	16.85
12	2.14	.69	80.00	20.97
13	2.00	.57	71.66	17.22
14	1.85	.69	71.66	17.22
15	2.42	.78	90.83	6.64
16	2.57	.53	87.50	8.80
17	2.57	.53	86.66	8.75
18	2.42	.53	88.33	9.30
19	2.14	.37	78.33	7.52
20	1.85	.69	75.83	12.00
21	2.28	.48	84.16	9.17
22	2.00	.81	89.16	8.01
23	1.85	.37	79.16	4.91
24	2.71	.48	90.00	5.47
25	2.71	.48	90.00	5.47
26	2.14	.37	76.66	11.69
27	1.71	.48	67.50	16.04
28	1.85	.37	67.50	16.04
29	2.14	.37	74.16	9.17
30	2.71	.48	85.83	9.17
31	2.71	.48	87.50	6.12
32	2.28	.48	82.50	8.80
33	1.71	.48	69.16	16.85
34	2.00	.57	72.50	13.32
35	2.71	.48	94.16	4.91
36	2.71	.48	92.50	7.58
37	2.71	.48	90.83	9.17
38	2.57	.53	90.83	9.17
39	2.50	.54	89.00	8.94
40	2.50	.54	89.00	8.94
41	2.50	.54	89.00	8.94
42	2.50	.54	86.00	10.84
Total-Prop.	6.28	.75	77.14	7.55

dificultad de éstas y, en segundo lugar, las puntuaciones medias obtenidas por los alumnos en cada una de las categorías establecidas para evaluar los distintos objetivos de aprendizaje, resultados que se recogen en las Tablas 2.8, 2.9 y 2.10.

El examen de los índices de dificultad muestra que seis elementos tienen un ID inferior al 33,3% (Med.= 16.8); otros doce lo tienen entre 33.4 y 66.6 (Med.= 53.7), y los veinticuatro restantes lo tienen superior al 66.7% (Med.= 79.1). La prueba, pues, en conjunto es de dificultad media, con un índice medio de 64.0. No obstante, hay una serie de elementos cuya dificultad es particularmente elevada, lo que hace necesario averiguar a qué se debe analizando las alternativas escogidas, con el fin de decidir que tipo de ayudas proporcionar a los alumnos. Estos elementos son los siguientes:

- 20, 27, 28, 33 y 34.- Estos elementos tienen que ver con la capacidad de reconocer si la planificación del proceso de solución y la formulación matemática de problemas de proporcionalidad compuesta son adecuados cuando, aun siendo correctos, no tienen la misma forma externa que los procedimientos algorítmicos habitualmente enseñados en las clases. En el elemento 20, el 50% de los alumnos no han contestado a la pregunta. En el 27 los alumnos no perciben en el planteamiento la relación inversa que interviene en el problema. En el 33 no hay una razón clara que explique las opciones escogidas. Finalmente, las opciones escogidas en el 28 y el 34 reflejan que, más que razonar o no sobre la adecuación de la traducción matemática del problema, escogen formulaciones semejantes a los algoritmos propuestos en los textos vistos en clase.
- 5.- Se trata de uno de los elementos más difíciles de la prueba de mezclas utilizada habitualmente para evaluar la capacidad de razonamiento proporcional, dado que las dos razones a comparar están muy próximas. Los alumnos han establecido la relación entre las dos razones, pero sin hacer un cálculo preciso, lo que les ha llevado a error.
- 11.- La alternativa más escogida en esta pregunta refleja la estrategia habitual de partir del valor de la unidad para calcular el valor de un número dado de ellas. Sin embargo, no se tiene en cuenta que, en este caso, el valor de la unidad es inversamente proporcional al tamaño de los bloques de unidades compradas, tamaño que hay que tener en cuenta al hacer el cálculo.

Tabla 2.8. *Proporcionalidad: Índice de dificultad (ID)*  
(% de aciertos)

Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ID	92.9	95.5	88.5	65.6	15.2	75.7	65.6	76.4	81.5	85.3	22.2
Preg.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ID	71.9	71.9	47.1	84.0	50.9	83.4	97.4	70.7	17.1	80.6	49.0
Preg.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
ID	56.1	72.9	76.1	59.3	17.1	17.4	61.0	70.9	78.0	71.6	36.7
Preg.	34	35	36	37	38	39	40	41	42		
ID	12.0	78.0	87.7	70.9	68.3	64.5	64.5	54.1	70.3		

#### 2.3.3.4. Establecimiento de categorías, validez del modelo y calificación.

##### *Categorías y calificación.*

Dado que la prueba se ha diseñado en base a un modelo específico del esquema de conocimientos que el trabajo sobre problemas de proporcionalidad debía facilitar construir a alumnos y alumnas, ha sido posible establecer categorías de puntuación para cada uno de los componentes básicos del modelo. Las medias y desviaciones típicas de los sujetos en cada categoría aparecen recogidas en la Tabla 2.10. Como puede comprobarse, la única categoría en la que la puntuación baja de cinco es la que evalúa la comprensión del proceso a seguir en problemas de proporcionalidad compuesta. Dada la novedad del planteamiento de las preguntas, no es extraño que esto ocurra.

##### *Fiabilidad y validez de la prueba.*

La tabla mencionada recoge también los índices de fiabilidad correspondientes a la prueba total y a las categorías con un número suficientemente amplio de elementos. Como puede comprobarse, la escala correspondiente a la categoría "identificación del tipo de relación proporcional" resulta escasamente fiable. Esto no invalida las preguntas planteadas. Significa tan sólo que los elementos son psicológicamente heterogéneos, esto es, influye más en la respuesta a los mismos la heterogeneidad de su contenido temático que

Tabla 2.9: *Proporcionalidad*: Frecuencia con que ha sido escogida cada alternativa.

Elemento	Alternativas								
	a	b	c	0 <sup>2</sup>	Elemento	a	b	c	0
1	1	146	8	2	22	6	72	76	1
2	1	150	5	1	23	34	33	87	1
3	139	9	7	2	24	31	113	7	4
4	103	15	38	1	25	118	26	6	5
5	113	24	20	0	26	92	42	21	0
6	9	119	28	1	27	36	27	88	4
7	39	14	103	1	28	27	44	79	5
8	25	120	10	2	29	20	95	39	1
9	128	9	19	1	30	36	110	9	0
10	9	134	14	0	31	121	17	17	0
11	41	80	35	1	32	129	41	82	3
12	16	26	113	2	33	33	63	57	2
13	14	29	113	1	34	55	19	77	4
14	18	61	74	4	35	30	121	0	4
15	1	19	132	5	36	136	0	0	19
16	53	80	22	2	37	41	210	0	4
17	21	131	5	0	38	106	42	0	7
18	3	1	153	0	39	19	28	100	8
19	26	19	11	1	40	30	18	100	7
20	39	27	18	76	41	36	29	84	6
21	9	125	18	3	42	41	109	0	5

<sup>1</sup> Dos sujetos no realizaron la segunda parte de la prueba 29 al 38.  
<sup>2</sup> 0 = elemento no contestado.

Tabla 2.10: Prueba: *Proporcionalidad*.  
 Categorias que integran el perfil de puntuaciones:  
 Composición, puntuaciones medias y fiabilidad.

Categorías	Elementos	N	Med.	Sx
a) Identificación de problemas.	15, 22	155	6.64	3.32
b) Identificación del objetivo del problema	23, 29	155	5.87	3.65
c) Comprensión de los datos relevantes para resolver el problema.	10, 11, 12	157	5.98	2.40
d) Realización de cálculos	13, 14	157	5.95	4.04
e) Identificación del tipo de relación proporcional Fiabilidad: $\alpha = .16$	16, 17, 18, 24, 25, 30, 31	155	6.89	1.68
f) Comprensión del proceso de planificación a seguir.	20, 27, 33	155	2.36	2.24
g) Representación matemática de problemas. Fiabilidad: $\alpha = .37$	19, 21, 26, 28, 32, 34	155	5.19	1.76
h) Razonamiento proporcional.				
1-Tarea de mezclas. Fiabilidad: $\alpha = .02$	1, 2, 3, 4, 5	157	7.15	1.50
2-Tarea de la balanza. Fiabilidad: $\alpha = .74$	6, 7, 8, 9	157	7.48	3.18
3-Tarea de comparar fracciones. Fiabilidad: $\alpha = .86$	35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42	155	6.98	3.16
Total: Fiabilidad: $\alpha = .80$		155	7.16	2.02
<b>PRUEBA COMPLETA</b>				
Total. Fiabilidad: $\alpha = .75$	Elementos 1 a 42	155	6.30	1.26
Depurada. Fiabilidad: $\alpha = .84$	Elementos 3, 4, 6 a 10, 12 a 19, 21 a 26, 29 a 32, 35 a 42.	155	6.80	1.84

Nota: Las puntuaciones se dan sobre una escala de 10 puntos.

el hecho de que evalúen el conocimiento de un mismo tipo de relación. Algo semejante ocurre, aunque en menor medida, con los elementos que evalúan la capacidad para traducir a términos matemáticos la planificación del problema. Es probable que la elevada dificultad de los elementos de esta escala correspondientes a problemas de proporcionalidad compuesta esté contribuyendo a este resultado. Por último, la escasa fiabilidad de las puntuaciones correspondientes a las tareas de mezclas se debe, con toda seguridad, a que la mayoría de sus elementos son extremadamente fáciles o extremadamente difíciles, lo que disminuye la variabilidad y, en consecuencia, la fiabilidad. En cuanto a la prueba en su conjunto, resulta adecuadamente fiable, fiabilidad que es incluso alta si se eliminan los elementos con índices de dificultad extremos.

El hecho de que la prueba en su conjunto tenga una fiabilidad elevada plantea la cuestión de si es legítimo agrupar los elementos en categorías del modo en que lo hemos hecho. El análisis del contenido de los elementos sugiere que sí es legítimo, dado que evalúan procesos distintos. No obstante, es posible que tales procesos, con frecuencia, vayan asociados. Con el fin de ver en qué medida es así, hemos realizado un análisis factorial cuyos resultados se recogen en la Tabla 2.11.

Puede comprobarse que las puntuaciones de los sujetos obedecen fundamentalmente a dos factores, uno en el que saturan en las categorías de "comprensión de datos relevantes para resolver los problemas" y "comprensión del proceso de planificación a seguir", categorías que incluyen la mayoría de los elementos que han resultado particularmente difíciles, y otro en el que saturan significativamente el resto de las categorías, lo que explica los índices de fiabilidad encontrados. No obstante, hay dos hechos que merece la pena destacar. Primero, que la varianza de cada categoría explicada por los dos factores extraídos en muchos casos es pequeña y, segundo, que el porcentaje de varianza de las puntuaciones correspondientes a cada categoría asociado a la variación conjunta de las puntuaciones correspondientes a las restantes categorías ( $R^2$ ) también lo es. Parece, pues, claro que la mayor parte de la varianza en cada categoría se debe a las características propias de las tareas que las definen, y no aspectos comunes con las restantes categorías. Puede concluirse, en consecuencia, que tiene sentido la agrupación de elementos que hemos realizado. Cada categoría de tareas debe, en consecuencia, recibir atención específica a la hora de la enseñanza, dado que los fracasos de los alumnos pueden deberse a unas y no a otras, siendo especialmente importante el trabajo en las categorías con calificación más baja.

Tabla 2.11: Validez de la estructura de la prueba.

Análisis factorial. Métodos: Componentes principales y Oblimín. (N=155)			
CATEGORÍAS		Saturaciones tras la rotación	
Razonamiento proporcional	RPR	0.757	0.000
Conocimiento del tipo de proporción	CTP	0.721	0.000
Capacidad de planificación matemática	CPM	0.628	-0.319
Identificación del tipo de problema	ITP	0.608	0.000
Identificación del objetivo del problema	IOP	0.506	0.000
Comprensión del proceso de planificación	CPP	0.000	0.758
Comprensión de los datos relevantes	CDR	0.000	0.583
Cálculo	CAL	0.451	0.000
Valor Propio:		2.396	1.161
CATEGORÍAS		Comunalidad	R <sup>2</sup> de cada variable con las demás
Razonamiento proporcional	RPR	0.39	0.03
Conocimiento del tipo de proporción	CTP	0.25	0.11
Capacidad de planificación matemática	CPM	0.36	0.18
Identificación del tipo de problema	ITP	0.32	0.12
Identificación del objetivo del problema	IOP	0.52	0.29
Comprensión del proceso de planificación	CPP	0.59	0.07
Comprensión de los datos relevantes	CDR	0.47	0.24
Cálculo	CAL	0.59	0.33

1: Las saturaciones inferiores a 0.250 se ha igualado a 0.000.

## 2.4. Modelo 3: Números racionales.

### 2.4.1. Objetivos instruccionales y esquema de conocimientos a adquirir.

El tema de los números racionales forma parte del bloque de contenidos "Números y operaciones" del actual diseño curricular de Matemáticas. Se trata de un tema, como el de proporcionalidad, con el que se halla estrecha-



mente relacionado, al que se concede especial atención durante los primeros cursos de la Enseñanza Secundaria (MEC, 1989)

El análisis de los apartados correspondientes a los "Números Racionales" dentro de los libros de texto pone de manifiesto que están concebidos para conseguir, fundamentalmente, dos objetivos. Primero, la comprensión del concepto de "número racional" a partir de la constatación de la existencia de subconjuntos de fracciones equivalentes disjuntos entre sí. Y, segundo, que los alumnos aprendan a operar con números racionales, lo que pasa por aprender a simplificar fracciones, a reducir fracciones a denominador común, a reconocer el signo de la fracción en función del signo de sus componentes, a expresar los números racionales en forma decimal y, sobre todo, realizar las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.

Puede comprobarse que, a diferencia de lo que ocurre con el tema de "Proporciones", en los textos, seguidos con fidelidad por los profesores, se da mucha menos importancia, por lo general, a la solución de problemas cotidianos mediante el empleo de números racionales. Este hecho constituye un problema por dos razones. En primer lugar porque, de acuerdo con los objetivos del actual diseño curricular que recogíamos en la Tabla 4.1, es fundamental que los alumnos consigan un aprendizaje de las Matemáticas significativo y funcional, algo que difícilmente se consigue, por mucho que se aprenda a operar, si no se enseña a los alumnos a identificar las situaciones a las que son aplicables los conocimientos que van adquiriendo y a interpretar en términos matemáticos los problemas que tales situaciones plantean.

El hecho señalado plantea un problema, además, por una segunda razón. Numerosos trabajos, entre los que cabe destacar los de Behr, Harel, Post y Lesh (1992), los recogidos por Carpenter, Fennema y Romberg (1993), y el reciente trabajo de Smith (1995) sobre adquisición de los conocimientos sobre números racionales han puesto de manifiesto la dificultad de su aplicación correcta a la solución de problemas en situaciones naturales debido, por un lado, a que existen al menos cinco categorías de tales situaciones con rasgos distintivos que no deben confundirse y que es preciso tener en cuenta al plantear en términos matemáticos la solución de los problemas que definen. Y, por otro lado, a que los alumnos no siempre comprenden adecuadamente las relaciones de orden y equivalencia entre fracciones, algo que ya hemos visto en relación con el tema de proporcionalidad.

Las cinco categorías de situaciones que requieren trabajar con números racionales son diferentes, de acuerdo con Marshall (1993-a), porque implican esquemas de conocimientos con rasgos distintivos diferentes. La primera de estas situaciones, examinada en detalle inicialmente por Kieren (1976),

es la que requiere el uso del *esquema "parte-todo"*. Se trata de una situación en la que algo -ya se trate de una cantidad continua o de un conjunto de elementos discretos- debe repartirse en partes de igual tamaño. Un ejemplo típico de este tipo de situaciones es, por ejemplo:

*Tenemos nueve monedas. Cuatro son de cobre, tres de plata y dos, de níquel. ¿Qué parte de las monedas es de cobre?*

Los rasgos distintivos de este tipo de situación suelen representarse en forma visual, bien mediante áreas partidas o bien mediante expresiones fraccionarias, como  $a/b$ , que, aunque de naturaleza simbólica, también es visual porque aparece en un patrón visual,  $\#/\#$ , diferente de otros patrones que encuentran los alumnos. Es importante, además, que los alumnos sepan que  $a$  es la parte y  $b$  el todo.

Además de los rasgos distintivos señalados, para la solución correcta de los problemas que plantean estas situaciones, algo que crea dificultad a los alumnos, es preciso determinar la naturaleza del todo y de lo que constituye una parte, como en el ejemplo siguiente;

*En un montón de objetos hay seis lápices, dos rojos y cuatro verdes; ocho canicas, tres azules, dos rojas y una verde, y cuatro fichas de parchís, dos verdes, una azul y una roja, y preguntamos ¿qué parte de los juguetes es roja?*

La segunda de las situaciones aludidas es la *situación "cociente"*, situación que se representa simbólicamente mediante la fracción  $a/b$ . Un ejemplo típico de esta situación es:

*¿Cómo repartirías cuatro pizzas entre tres amigos?*

En esta situación, a diferencia de lo que ocurre en la situación "parte-todo", los elementos  $a$  y  $b$  representan distintos tipos de cosas, de modo que  $a$  es un todo que debe partirse en tantas partes como indica  $b$ , partes que, además, deben ser iguales. El hecho de tener que representarse cómo pueden ser esas partes, especialmente si el todo a repartir está formado de elementos heterogéneos, crea dificultades específicas a la hora de resolver los problemas, dificultades que los alumnos necesitan aprender a superar.

La tercera situación, denominada *situación de "medida"*, se caracteriza porque la fracción  $1/b$  se usa de modo repetido para determinar una distancia. Normalmente se representa mediante un línea numerada, y se espera que los alumnos determinen la distancia de un punto a otro utilizando como unidad  $1/b$ . En esta situación es fundamental que los alumnos entiendan que  $1/b$  es la unidad de medida y que es preciso utilizarla repetidamente para determinar la distancia.

La cuarta situación, la *situación de "razón"*, implica la comparación de

dos cantidades. A diferencia de las anteriores, no implica la partición de objetos o distancias. Un ejemplo típico es:

*Juana, siguiendo una receta pone 1 kilo de azúcar por cada 2 kilos de membrillos. ¿Cuánto azúcar debería poner si añade 4 kilos de membrillos?*

Uno de los rasgos de esta situación es que incluye pares de números ordenados, como  $1/2$  en el ejemplo anterior. Además implica una proporción: un cambio en una de las cantidades implica un cambio predecible en la otra. Así mismo, se trata de situaciones perceptibles como constantes y equivalentes, esto es, el sujeto debe darse cuenta que  $1/2$  y  $2/4$  son equivalentes. Por otra parte, las razones se representan con frecuencia mediante gráficos, lo que exige que el sujeto conozca cómo traducir la situación a este tipo de representación, y que esté familiarizado con la representación visual de las proporciones mediante el simbolismo  $\#/\# = \#/\#$ . Finalmente, el hecho de que en una misma situación varíen los elementos que se comparan, crea dificultades añadidas. En el ejemplo anterior, la relación entre los kilos de azúcar y de membrillo es  $1/2$ , pero la relación entre el azúcar y la mezcla total -lo que implica pasar al esquema parte-todo- es  $1/3$ .

La última situación es la situación del "operador". Se trata de una situación en la que es preciso operar sobre un valor dado para conseguir un segundo valor. Un ejemplo típico de este tipo de situaciones es:

*¿Cómo transformar una circunferencia de modo que sea tres cuartas partes de la original?*

En esta situación la fracción  $a/b$ , que debe considerarse como una entidad más que como un par ordenado de números, actúa como una "máquina de transformar", "ampliando" o "reduciendo" el valor original. La noción de "amplificador"- "reductor" del operador constituye un rasgo distintivo de esta situación que los alumnos deben comprender.

La comprensión por parte de los alumnos de las situaciones reales que es preciso resolver mediante el recurso a los números racionales requiere que sean capaces de reconocer los rasgos distintivos de las mismas y las condiciones que restringen su aplicación. Por este motivo, la evaluación de los conocimientos relativos a los números racionales requiere utilizar problemas y tareas que, tomados en conjunto, permitan poner de manifiesto los aspectos de los distintos esquemas en los que los alumnos presentan dificultades específicas, de modo que sea posible ayudarles.

Por otra parte, la resolución eficiente de los problemas por parte de los alumnos no depende sólo de que identifiquen los rasgos distintivos de los mismos que acabamos de describir. Como ya hemos señalado en relación

con los temas anteriores, de acuerdo con Mayer (1987) y Marshall (1993-b), incluye, como la resolución de cualquier otro tipo de problemas, otro tipo de capacidades que se adquieren en parte de modo independiente a las anteriores. Nos referimos a la capacidad de identificar el objetivo de un problema, a comprender los elementos relevantes para su solución, a la de traducir los distintos pasos a expresiones matemáticas, planificando el proceso de solución, y a la de realizar correctamente los cálculos. Por este motivo, la evaluación debería diseñarse de modo que proporcionase información específica sobre estos componentes.

La comprensión, pues, de las situaciones que deben resolverse mediante números racionales y la solución eficiente de los problemas en que éstos se hallan implicados depende, pues, de los distintos componentes mencionados: a) el conocimiento de las rasgos definitorios de cada situación y de las condiciones que restringen el ámbito del problema; b) la comprensión de las relaciones de orden y equivalencia entre fracciones, aspecto ya señalado en relación con el tema de proporcionalidad; y c) las capacidades generales implicadas en la solución de problemas, capacidades que tienen que ver con la comprensión de la información, la representación del problema, la planificación del proceso de solución y los conocimientos algorítmicos que posibilitan la realización de distintos tipos de cálculos.

#### *2.4.2. Tareas y criterios de evaluación.*

Teniendo presente que la consecución de los objetivos de aprendizaje perseguidos con el trabajo sobre números racionales depende de la adquisición eficiente de las habilidades referidas en el apartado anterior, habilidades que integran el esquema de conocimientos que deben construir los alumnos, hemos diseñado diferentes tareas para la evaluación de los mismos, de modo que el conjunto de ellas permitiese obtener información de los puntos en que los alumnos requieren ayudas específicas. Aunque la prueba completa se incluye en el Apéndice 2.2, mostramos a continuación las principales categorías de tareas diseñadas, justificando su inclusión para evaluar a los alumnos y ayudarles a superar sus dificultades.

##### *Tareas para evaluar la representación de las relaciones básicas del problema.*

Para poder evaluar el conocimiento de los rasgos característicos de cada uno de los cinco tipos de situaciones anteriormente descritas hemos planteado varios problemas, de modo que cada categoría estuviese representada al

menos por uno de ellos y, en relación con cada problema hemos planteado cuestiones específicas orientadas directamente a la identificación de la representación que los alumnos se hacían del mismo. El planteamiento de las tareas en formato de opción múltiple se ha hecho utilizando como distractores los tipos de respuestas erróneas que, de acuerdo con la literatura sobre el tema, suelen dar frecuentemente y de modo espontáneo los alumnos que carecen del esquema de conocimientos adecuados. A continuación, en los Cuadros 2.15 a 2.19 se incluye un ejemplo de problema de cada categoría y de las cuestiones referidas.

Cuadro 2.15: Esquema “*parte-todo*.”

Ejemplo de tarea para evaluar la representación de las relaciones básicas.

Lee el problema siguiente y contesta a las pregunta que se plantea después.

Un juego de lotería consiste en comprar, a 25 pts., cada una de las casillas situadas en un panel. Tres amigos, Pedro (P), Juana (J) y Manuel (M), compran el panel de la siguiente forma:

P	P	J	J	M	M	M	M
J	J	J	J	M	M	M	M

¿Cómo puede expresarse la cantidad de boletos que ha comprado Juana?

- $6/8$ , ya que de cada 8 boletos ha comprado 6.
- $16/6$ , ya que de cada 16 boletos ha comprado 6.
- $3/8$ , ya que de cada 8 boletos ha comprado 3.

## Cuadro 2.16: Esquema del "operador".

Ejemplo de tarea para evaluar la representación de las relaciones básicas.

Lee el problema siguiente y contesta a la pregunta que se plantea después sobre el mismo.

Una receta para hacer bizcocho consta de 4 ingredientes: leche, azúcar, harina y levadura. La madre de Javier tiene un vaso medidor para medir las cantidades de los ingredientes que tiene que mezclar. En sus anotaciones aparece como bizcocho perfecto el que se consigue mezclando en el molde que tiene las siguientes cantidades del vaso medidor para cada ingrediente:

$$\text{leche} = 2 \frac{2}{3} \quad \text{azúcar} = 1 \frac{2}{5} \quad \text{harina} = \frac{3}{4} \quad \text{levadura} = \frac{1}{6}$$

La madre sólo tiene  $\frac{1}{8}$  de vaso de levadura, por lo que debe reducir la cantidad de harina para poder hacer un bizcocho proporcional al de receta. ¿En qué medida debe hacerlo?

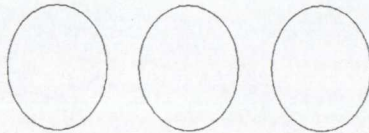
La cantidad de azúcar que hay que mezclar según la receta es equivalente a:

a)  $\frac{3}{5}$       b)  $\frac{7}{10}$       c)  $\frac{7}{5}$

## Cuadro 2.17: Esquema del cociente.

Ejemplo de tarea para evaluar la representación de las relaciones básicas.

El cocinero de un restaurante tiene que repartir tres pizzas entre cuatro amigos. ¿Cómo puede hacerlo para que cada amigo reciba una ración igual? Márcalo.



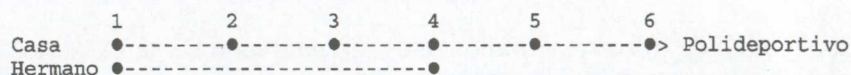
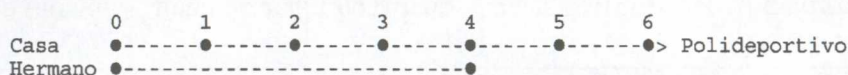
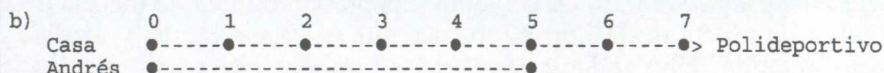
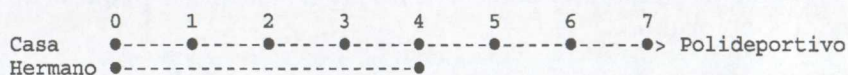
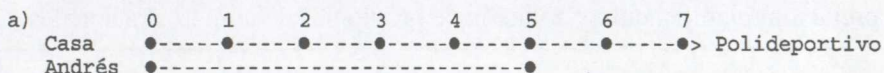
Cuadro 2.18: Esquema de la "medida".

Ejemplo de tarea para evaluar la representación de las relaciones básicas.

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

Andrés, que ha salido de su casa para ir al polideportivo, ha recorrido cinco séptimas partes del trayecto. En el mismo momento, su hermano -que había salido antes- ha recorrido cuatro sextas partes del mismo trayecto. ¿Cuál de los dos está más cerca del polideportivo?

¿Cuál de las siguientes formas de representar gráficamente el problema es correcta?



Cuadro 2.19: Esquema de "razón".

Ejemplo de tarea para evaluar la representación de las relaciones básicas.

El ingeniero encargado de construir una carretera ha comprado 2000 toneladas de arena y 500 de asfalto. ¿Cuál de las siguientes cantidades refleja mejor la razón entre el asfalto y la arena?

- a) 2000 - 500, ya que es la diferencia entre las cantidades que ha comprado.  
 b) 2500 / 2000, ya que del total de toneladas compradas, 2000 son de arena.  
 c) 1 / 4, ya que por cada tonelada de asfalto se han comprado 4 de arena.

Además de las tareas ilustradas en los cuadros referidos, se han diseñado tareas para evaluar otros conocimientos que intervienen en el proceso de solución, tales como identificación del objetivo del problema, identificación de la información necesaria para resolverlo, comprensión de la información verbal que plantea las relaciones a identificar, planteamiento matemático de los problemas e interpretación del significado de los resultados. Dado que muchas de estas tareas han sido diseñadas para evaluar problemas altamente específicos, sólo vamos a ilustrar y comentar algunas de ellas. Las principales se recogen en el Cuadro 2.20.

Cuadro 2.20: Tareas para evaluar distintos componentes de los esquemas de interpretación, planificación y solución de problemas de números racionales.

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

Si tengo tres sacos y cuarto de cemento y la preparación de la mezcla de una carga completa de la hormigonera requiere poner cuatro y medio, ¿en qué medida debo reducir los otros componentes -arena, piedras, agua- para poder usar tres sacos y cuarto en lugar de cuatro y medio de cemento?

*Pregunta para evaluar la identificación del objetivo del problema.*

¿Qué es lo que me pide el problema que averigüe?

- La cantidad de los otros componentes -arena, piedras y agua- que cabe en la hormigonera.
- La proporción en que los otros componentes deben disminuir para poder hacer la mezcla.
- La cantidad de los otros componentes que debo poner en la hormigonera con el cemento.

*Pregunta para evaluar la capacidad de identificar la información necesaria para resolver el problema.*

¿Cuál de las siguientes informaciones es necesario conseguir para resolver el problema?



Cuadro 2.20: Continuación

- a) Qué cantidad representa el cemento que se usa normalmente respecto al que tengo.
- b) La diferencia entre el cemento que tengo y el cemento que se usa normalmente.
- c) Qué parte del cemento que se usa normalmente es la que tengo en este momento.

*Pregunta para evaluar la capacidad de representarse adecuadamente el planteamiento del problema en términos matemáticos.*

¿Cuál de las siguientes formas de plantear matemáticamente el primer paso para resolver el problema es la adecuada:

$$a) 4 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{4}$$

$$b) 4 \frac{1}{2} : 3 \frac{1}{4}$$

$$c) 3 \frac{1}{4} : 4 \frac{1}{2}$$

*Pregunta para evaluar la capacidad de interpretar adecuadamente el significado de los resultados de una operación dada.*

Vamos a llamar A a la cantidad de asfalto que se utiliza para construir 250 Km. y T (tierra) a la cantidad de arena que se utiliza para construir esos mismos 250 km. El resultado de la operación  $A/250 + T/250$  nos indicará:

- a) La cantidad de toneladas de ambos materiales juntos que se utilizan al construir 1 Km.
- b) La cantidad de toneladas de ambos materiales juntos que se utilizan al construir los 250 km.
- c) La cantidad que se utiliza de cada material cuando éstos se reparten por igual en los 250 km

Obviamente, todas las preguntas anteriores pueden plantearse en forma abierta, pidiendo a los sujetos que justifiquen sus respuestas. En este caso, con el objeto de comprobar el grado de comprensión que hay tras las mismas, es posible, como sugiere Smith (1995) presentarles las respuestas que se han incluido como distractores diciéndoles que son respuestas dadas por

sus compañeros, y pedirles que valoren su adecuación o no y que justifiquen sus afirmaciones.

### 2.4.3. *Contraste del modelo.*

#### 2.4.3.1. Muestra.

A fin de comprobar las características de la prueba desarrollada se examinaron 312 alumnos de 8º de EGB, niños y niñas, procedentes de cinco colegios, cuatro de Madrid, de los cuales una era público y tres concertados, y otro de Alcobendas, también concertado. Los siete profesores que impartían clase a los grupos de alumnos examinados valoraron, a su vez, la relevancia de las tareas propuestas y el grado de dominio de las mismas que era deseable que consiguiesen los alumnos para poder decir que habían alcanzado el criterio de aprendizaje. El protocolo utilizado para solicitar esta valoración se encuentra en el Apéndice 2.6.

#### 2.4.3.2. Validez social del contenido del modelo.

La Tabla 2.12 recoge los datos correspondientes a la valoración de la relevancia de las tareas de la prueba y de ésta en su conjunto realizada por los siete profesores en cuyas clases se aplicó, así como el grado de dominio que consideran que los alumnos deben alcanzar en relación con los contenidos y capacidades evaluados.

Como puede comprobarse, los profesores han otorgado a la prueba en promedio una puntuación en relevancia -6,42- que equivale al 91,7% del máximo posible -7-. Esto significa una valoración muy positiva de la relevancia de la prueba considerada globalmente. Así mismo, hay una gran homogeneidad en la valoración de las tareas por separado. Tan sólo hay once elementos en los que la valoración media no alcanza el nivel de "importante", aunque está muy próxima en todos ellos. En general, los elementos considerados menos relevantes son aquellos que tienen que ver con saber transformar un número mixto en un número fraccionario (elem. 14 y 22), identificar la información necesaria para resolver un problema (elem. 12), plantear matemáticamente un problema y operar (elem. 20, 34, 44), interpretar el significado de un resultado (28 y 29). A éstos elementos hay que añadir algún elemento aislado de los conjuntos de elementos diseñados para evaluar otros conocimientos.

En cuanto al dominio de las categorías de tareas que los profesores consideran necesario, la situación es paralela a la de la relevancia. Los profesos-

Tabla 2.12: Prueba: Números racionales. Relevancia y dominio medios.

Elemento	RELEVANCIA		DOMINIO	
	Media	Desv. Típica	Media	Desv. Típica
1	2.85	.37	89.16	10.20
2	2.85	.37	87.50	14.05
3	2.57	.78	87.50	14.05
4	2.71	.48	90.83	9.17
5	2.50	.54	88.33	10.32
6	2.50	.54	88.33	10.32
7	2.33	.81	83.33	21.83
8	2.33	.81	83.33	21.83
9	2.00	.63	74.16	22.00
10	2.50	.54	85.83	9.17
11	2.14	.69	76.66	20.65
12	1.85	.69	66.66	25.82
13	2.00	.57	65.00	20.73
14	1.85	1.06	74.16	23.32
15	2.14	.69	84.16	12.81
16	2.14	.69	87.50	8.80
17	2.28	.48	86.66	5.16
18	2.14	.69	88.33	4.08
19	2.00	.57	82.50	17.24
20	2.00	.57	77.50	15.41
21	1.85	.37	67.50	14.74
22	1.85	1.06	80.00	15.81
23	2.28	.48	84.16	9.17
24	2.14	.37	71.66	21.37
25	2.00	.57	80.83	8.01
26	2.00	.57	72.50	12.55
27	1.85	.69	65.83	21.54
28	1.71	.48	66.66	21.60
29	1.71	.48	66.66	21.60
30	2.00	.81	80.00	25.88
31	2.57	.53	88.33	4.08
32	2.57	.53	89.16	4.91
33	2.00	.57	82.50	4.18
34	1.85	.37	83.33	4.08
35	1.71	.48	85.00	6.32
36	2.28	.48	85.83	4.91
37	2.14	.37	82.50	8.80
38	2.14	.37	85.00	7.74
39	2.00	.57	81.66	7.52
40	2.00	.57	84.16	4.91
41	2.14	.37	86.66	4.08
42	2.00	0.00	77.50	8.80
43	2.00	0.00	76.66	8.16
44	1.85	.37	87.50	8.80
45	1.71	.48	77.50	4.18
Total-N.Raz.	6.42	.78	80.00	8.16



res, en promedio, consideran que los alumnos deben resolver correctamente el 80% de la prueba para que pueda considerarse dominada. En conjunto, los datos anteriores ponen de manifiesto la gran adecuación de la prueba desde el punto de vista de los profesores.

#### 2.4.3.3. Porcentaje de sujetos que escoge cada alternativa e índice de dificultad.

Desde un punto de vista teórico, la prueba sobre el tema "Números racionales" es apta para evaluar si los alumnos han adquirido los componentes del esquema de conocimientos que permiten afrontar de modo eficaz las cinco categorías de problemas de que requieren el uso de números racionales, lo que constituye uno de los objetivos del DCB en relación con este tema. Además, los profesores han valorado muy positivamente la relevancia de sus elementos. En consecuencia, parece conveniente conocer cuál es el estado actual de los conocimientos de los alumnos al respecto. Para ello, teniendo en cuenta que se trata de una prueba objetiva, hemos estudiado, en primer lugar, el porcentaje de alumnos que escoge las distintas alternativas a cada pregunta, así como el índice de dificultad de éstas y, en segundo lugar, las puntuaciones medias obtenidas por los alumnos en cada una de las categorías establecidas para evaluar los distintos objetivos de aprendizaje, resultados que se recogen en las Tablas 2.13, 2.14 y 2.15.

Tabla 2.13. Números racionales. Índice de dificultad (ID) (% de aciertos)

Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ID	60.4	55.5	50.9	69.2	48.6	52.6	42.8	53.0	29.0
Preg.	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ID	10.7	82.6	16.9	27.4	64.0	47.2	27.2	75.0	80.9
Preg.	19	20	21	22	23	24	25	26	27
ID	83.6	25.5	22.6	42.6	49.8	24.2	35.4	21.3	56.3
Preg.	28	29	30	31	32	33	34	35	36
ID	24.5	31.1	59.6	94.9	49.4	29.5	66.3	69.3	61.2
Preg.	37	38	39	40	41	42	43	44	45
ID	48.2	48.9	38.7	27.2	46.9	27.2	34.3	62.9	48.9

El examen de los índices de dificultad muestra que catorce elementos tienen un ID inferior al 33,3% (Med.= 24.6); otros veinticuatro lo tienen entre 33.4 y 66.6 (Med.= 50.1), y los siete restantes lo tienen superior al 66.7% (Med.= 79.3). La prueba, pues, en conjunto resulta adecuada para los alumnos de este nivel, con un índice de dificultad medio de 50.1. No obstante, hay una serie de elementos cuya dificultad es particularmente elevada, lo que hace necesario averiguar a qué se debe analizando las alternativas escogidas, con el fin de decidir qué tipo de ayudas proporcionar a los alumnos. Estos elementos son los siguientes:

- 13, 21 y 24.- En todos estos elementos se pide a los alumnos que indiquen qué planteamiento de un problema, o de un paso del mismo, en términos matemáticos, acompañado de la correspondiente ejecución, es correcto. Las alternativas escogidas con más frecuencia ponen de manifiesto las siguientes dificultades en los alumnos: a) Elementos 13 y 21: Considerar que para ajustar un problema del tipo "operador", lo que hay que hallar es una diferencia en vez de una razón; b) Elemento 24: Expresar en forma de número mixto lo que debería ser un producto de razones.
- 9, 10, 25, 26, 39 y 40.- La nota común a estos elementos es que requieren la comprensión de expresiones como "relación o razón entre X e Y". La representación inadecuada de lo que significan estas expresiones lleva a planteamientos erróneos de los problemas. Las alternativas escogidas con más frecuencia muestran que los alumnos no interpretan la expresión como  $X/Y$ , sino que, dejándose llevar por el conjunto de información proporcionada por el problema, la interpretan como:

$$(X + Y)/(X + Y + Z), \quad (X - Y), \quad X/(X + Y),$$

o no utilizan las variables relevantes, como ocurre en el elemento 40, donde se les pide la razón entre ganancia por coche lavado y responden escogiendo la razón entre el total de coches lavados mencionados en el problema.

- 12, 16, 20 y 33.- En estos elementos se pide a los alumnos que indiquen qué información es necesario conseguir para resolver un problema. Las alternativas escogidas con más frecuencia reflejan que el error más frecuente en los alumnos es creer que se necesita hallar una diferencia en vez de una razón.
- 28, 29, 42 y 43.- Todos los elementos de este grupo demandan de los alumnos la interpretación de la información cuantitativa que resulta de realizar una operación del tipo  $A/250 + B/250$ , correspondiente, por ejemplo, al problema siguiente:

Tabla 2.14: *Números racionales*: Frecuencia con que ha sido escogida cada alternativa.

Elemento	Alternativas								
	a	b	c	0 <sup>2</sup>	Elemento	a	b	c	0
1	30	185	90	1	24	74	119	107	5
2	170	57	75	4	25	71	108	121	5
3	104	42	156	4	26	65	64	167	9
4	48	44	212	2	27	60	68	172	5
5	149	41	114	2	28	75	158	68	4
6	21	122	161	2	29	95	117	86	7
7	49	101	131	25	30	46	70	182	7
8	77	164	50	15	31	Correctos = 280			15
9	161	47	89	9	32	117	28	146	4
10	228	33	36	9	33	89	112	86	7
11	253	13	40	0	34	195	60	27	12
12	78	175	52	1	35	204	53	32	5
13	70	84	149	3	36	54	180	52	8
14	48	55	196	7	37	96	46	142	10
15	76	82	144	3	38	46	144	30	74
16	83	109	104	9	39	129	41	114	10
17	18	229	56	2	40	16	168	80	30
18	18	32	247	8	41	26	138	23	7
19	16	255	34	0	42	166	38	80	10
20	107	118	78	2	43	128	101	53	12
21	146	87	69	3	44	55	185	34	20
22	130	45	125	5	45	53	144	82	15
23	76	71	152	6					

1 Seis sujetos no realizaron la segunda parte de la prueba (elementos 1 a 14); siete no realizaron la segunda parte (elementos 15 al 30) y 18 no realizaron la tercera parte (elementos 31 a 45).

2 0 = elemento no contestado.

*Vamos a llamar A a la cantidad de asfalto que se utiliza para construir 250 Km. y T (tierra) a la cantidad de arena que se utiliza para construir esos mismos 250 km. ¿Qué nos indicará el resultado de la operación  $A/250 + T/250$ ?*

La respuesta más frecuente en casos como este es "La cantidad de toneladas de ambos materiales juntos que se utilizan al construir los 250 km.", y no "al construir un Km."

#### 2.4.3.4. Establecimiento de categorías, validez del modelo y calificación.

##### *Categorías y calificación.*

Dado que la prueba se ha diseñado en base a un modelo específico del esquema de conocimientos que alumnos y alumnas debían construir trabajando con las distintas categorías de problemas de números racionales, ha sido posible establecer categorías de puntuación para cada uno de los componentes básicos del modelo. Las medias y desviaciones típicas de los sujetos en cada categoría aparecen recogidas en la Tabla 2.15.

Como puede comprobarse, y como podía deducirse a partir del examen de los tipos de tareas con índices de dificultad bajos -las más difíciles-, son varias las categorías en que la media de las puntuaciones obtenidas es muy baja.

En primer lugar, alumnos y alumnas parecen tener dificultades especialmente para *identificar qué información necesitan para resolver un problema tal y como se les plantea*. Las respuestas que dan a menudo no son disparatadas, pero no tienen en cuenta el contexto definido por el planteamiento. Por ejemplo, supuesto que el enunciado de un problema diga que dos personas han salido de un punto A hacia un punto B y una ha recorrido  $3/8$  del trayecto y otra  $4/9$ , no es preciso saber los metros recorridos por cada una. Aunque si se supiera, el problema quedaría resuelto, teniendo presentes los datos proporcionados no es posible saberlo. Basta con saber qué parte recorrida es mayor, lo que implica establecer la diferencia entre las fracciones que representan la parte recorrida por una y otra persona. Parece, pues, que las ideas previas de los alumnos -correctas-, impiden valorar adecuadamente la utilidad de la información en términos de "partes recorridas" proporcionada por los problemas. En consecuencia, sería útil que los profesores trabajaran en clase problemas que permitieran mostrar el efecto negativo que tiene el dejarse llevar por las ideas previas mencionadas.

Tabla 2.15: Prueba: Números racionales.  
Categorías que integran el perfil de puntuaciones:  
Composición, puntuaciones medias y fiabilidad.

Categorías	Elementos	N	Med.	Sx
a) Identificación del objetivo del problema	11, 19	304	8.32	2.98
b) Identificación de la información necesaria para resolver el problema Fiabilidad: $\alpha = .37$	12, 16, 20, 23, 33, 37	293	3.54	2.22
c) Representación de las relaciones básicas del problema mediante números racionales				
1. Representación del esquema <i>cociente</i>	31	293	9.49	2.20
2. Representación del esquema <i>parte-todo</i>	1, 2, 3, 5, 6, 32, 45.	293	5.22	2.82
3. Representación del esquema <i>operador</i>	14, 15, 22, 36	293	5.38	2.77
4. Representación del esquema <i>medida</i>	17, 35	294	7.26	3.46
5. Representación del esquema <i>razón</i>	9, 10, 25, 26, 27, 39, 40, 41.	293	3.34	2.12
Total: Fiabilidad: $\alpha = .64$		293	4.95	1.57
d) Planteamiento matemático de problemas y operaciones.				
1. Cociente versus diferencia.	13, 21, 24			
2. Expresión mediante ecuaciones.	38			
3. Identificación de operaciones correctas e incorrectas.	7, 8, 18, 30, 34, 44			
Total: Fiabilidad: $\alpha = .39$		293	4.89	1.81
e) Interpretación del significado de los resultados Fiabilidad: $\alpha = .61$	28, 29, 42, 43	294	2.93	3.13
PRUEBA COMPLETA Fiabilidad: $\alpha = .72$	Elementos 1 a 45	293	4.72	1.25

Nota: Las puntuaciones se dan sobre una escala de 10 puntos.

En segundo lugar, la mayoría de los alumnos y alumnas tienen dificultades para representarse los problemas que tienen como rasgo distintivo el pertenecer a la categoría de los *problemas de razón*. Parece que la dificultad estriba, por una parte, en entender el lenguaje con que se expresan, dado que a preguntas como la siguiente:

"Supón que en un problema te preguntan cuál de varias expresiones dadas refleja mejor la relación -o la razón- entre los boletos comprados por dos amigos. ¿A qué se refiere en el problema la palabra relación -o razón-?"



suelen contestar diciendo "A los boletos comprados entre ambos respecto del total de boletos comprados por todos los amigos" o "A los boletos comprados por uno respecto a los comprados por ambos", en lugar de responder "A los boletos comprados por uno respecto a los boletos comprados por el otro".

En tercer lugar, tampoco supera el nivel de cinco la media de la categoría que recoge las tareas relativas a la capacidad de plantear matemáticamente los problemas y de operar para solucionarlos. A este resultado contribuye especialmente el problema, ya comentado, de que consideran que para ajustar un problema del tipo "operador", lo que hay que hallar es una diferencia en vez de una razón.

Finalmente, la categoría en la que la media es más baja es la correspondiente a la interpretación del resultado de realizar una operación del tipo  $A/250 + B/250$ . Este problema ya ha sido comentado al valorar los índices de dificultad, y refleja que los alumnos no son conscientes del significado de la fracción.

#### *Fiabilidad y validez de la prueba.*

La Tabla 2.15 recoge también los indicadores de fiabilidad correspondientes a la prueba total y a las categorías con un número suficientemente amplio de elementos. Como puede comprobarse, tales índices son bajos o medios en todas las categorías de la prueba, y aceptable en el caso de la prueba total. Esto no significa que la prueba sea inadecuada. Tan sólo refleja que los conocimientos evaluados son heterogéneos, esto es, dependen no tanto de una "aptitud" cuanto de la comprensión y dominio de conceptos y procedimientos distintos, algo que confirma tanto los planteamientos generales de Marshall y Mayer relativos a la independencia relativa del aprendizaje de los distintos componentes de los esquemas de conocimientos matemáticos como los planteamientos específicos recogidos en el trabajo coordinado por Carpenter, Fennema y Romberg (1943). Precisamente por esto, al poner de manifiesto la heterogeneidad de los conocimientos implicados y proporcionar un perfil de los puntos fuertes y débiles de los alumnos, plantear una evaluación como lo hemos hecho con esta prueba tiene un valor diagnóstico y posibilita decidir qué ayudas específicas proporcionar.

Pese a la heterogeneidad de los elementos, la fiabilidad de la prueba, moderadamente alta, plantea la cuestión de si es legítima la separación de categorías que hemos realizado. Además, dado que hemos establecido subcategorías en relación con los procesos de representación de las relaciones

básicas de los problemas, la misma cuestión se plantea en relación con esta categoría. Para responder a estas cuestiones, hemos realizado dos análisis factoriales que se recogen en las Tablas 2.16 y 2.17.

Tabla 2.16: *Números racionales*: Validez de la estructura de la prueba.

Análisis factorial. Métodos: Componentes principales y Oblimín. (N=293)		
CATEGORÍAS	Saturaciones tras la rotación	
Identificación del objetivo del problema	0.476	0.000
Identificación de la información necesaria	0.642	0.000
Representación de relaciones básicas	0.763	0.000
Planteamiento matemático de problemas y operaciones	0.714	0.000
Interpretación del significado de los resultados	0.000	0.902
Valor propio:	1.732	1.064
CATEGORÍAS	Comunalidad	R <sup>2</sup> de cada variable con las demás
Identificación del objetivo del problema	0.307	0.050
Identificación de la información necesaria	0.475	0.125
Representación de relaciones básicas	0.649	0.257
Planteamiento matemático de problemas y operaciones	0.542	0.202
Interpretación del significado de los resultados	0.812	0.022

1: Las saturaciones inferiores a 0.250 se ha igualado a 0.000.

Tabla 2.17: Validez de la estructura de la categoría "Representación de relaciones básicas mediante números racionales".

Análisis factorial. Métodos: Componentes principales y Oblimín. (N=293)		
Variables	Saturaciones tras la rotación	
Esquema "Cociente"	0.70	-0.35
Esquema "Parte-todo"	0.69	0.00
Esquema "Operador"	0.63	0.42
Esquema "Medida"	0.00	0.86
Esquema "Razón"	0.00	0.28
Valor propio:	1.40	1.13
Variables	Comunalidad	R <sup>2</sup> de cada variable con las demás
Esquema "Cociente"	0.73	0.04
Esquema "Parte-todo"	0.63	0.14
Esquema "Operador"	0.50	0.09
Esquema "Medida"	0.08	0.00
Esquema "Razón"	0.57	0.05

1: Las saturaciones inferiores a 0.250 se ha igualado a 0.000.

El examen, en primer lugar, del análisis correspondiente a las categorías utilizadas en la prueba pone de manifiesto primero que sólo las cuatro primeras categorías saturan en un mismo factor. Este resultado, por un lado, explica la fiabilidad de la prueba, aunque probablemente dicha fiabilidad sería mayor si se excluyesen los elementos de la última categoría. Por otro lado, justifica la separación de esta categoría de las restantes. Pero, además, la escasa varianza que las puntuaciones de cada categoría tienen en común con las restantes, hecho manifiesto en el valor de  $R^2$ , sugiere que gran parte de su varianza depende más de características propias que de lo que tienen en común con las restantes, lo que justifica que se mantengan como categorías independientes en el perfil.

De modo análogo, los resultados del análisis correspondiente a las subcategorías de la variable "Representación de relaciones básicas" ponen de manifiesto que existe una relación muy pequeña entre las distintas categorías, suficiente no obstante para explicar la fiabilidad encontrada y para justificar que las puntuaciones de cada subcategoría puedan agruparse en una categoría de representación global. Por otra parte, los datos correspondientes a  $R^2$ , ponen de manifiesto que cada subcategoría es prácticamente independiente de las demás, lo que es coherente con los planteamientos teóricos de que partíamos al comienzo de este apartado, planteamientos que señalan que las situaciones problema a resolver mediante el empleo de números racionales pertenecen a las cinco categorías evaluadas.

## **2.5. Modelo 4: Ecuaciones.**

### *2.5.1. Objetivos instruccionales y esquema de conocimientos a adquirir.*

Como los temas abordados al desarrollar los modelos anteriores, el tema de las ecuaciones forma parte del bloque de contenidos "Números y operaciones" del actual diseño curricular de matemáticas (MEC, 1989). En la práctica se trata de un tema que se venía desarrollando a lo largo de los dos últimos cursos de la EGB, actualmente en fase de transformación en el Primer Ciclo de la Enseñanza Secundaria, donde es probable que continúe tratándose.

El análisis de los apartados correspondientes a "Ecuaciones" dentro de los libros de texto más utilizados permite comprobar que están diseñados para facilitar la consecución por parte de los alumnos de tres objetivos generales. En primer lugar, la comprensión del concepto de ecuación, de los conceptos que definen sus elementos -incógnitas, coeficientes, miembros de la

igualdad, variables, grado de la ecuación, etc.- y del concepto de sistema de ecuaciones. En segundo lugar, el aprendizaje de una serie de procedimientos de operación con ecuaciones simples, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado que permitan resolver con facilidad y seguridad los problemas correspondientes. Y, finalmente, la aplicación de los conocimientos anteriores a la solución de algunos tipos de problemas tales como los que tienen que ver con funciones, etc.

A diferencia con lo que ocurre con otros dominios de las matemáticas, el trabajo con ecuaciones resulta para muchos alumnos un dominio complejo y que presenta bastantes dificultades. En un trabajo reciente, English y Halford (1995) han resumido lo que, a la luz de diversos estudios, parecen ser las causas principales de las dificultades de los alumnos con el álgebra, en general, dificultades que concretan e ilustran cuando se han de resolver problemas de ecuaciones. Creemos que es importante resumir aquí tales dificultades, dado que la evaluación de los conocimientos debería realizarse de modo que fuese posible identificar en qué medida se hallan presentes en los alumnos para decidir las ayudas que se les deben proporcionar.

La primera fuente de dificultad es la sintaxis del álgebra. En las expresiones algebraicas, como las que forman las ecuaciones, junto a los números y a veces en lugar de ellos, aparecen letras, las formas de notación son distintas, es preciso simplificar términos, transformar expresiones, etc.. Estas características hacen que los profesores, apoyándose en los libros de texto, concedan especial importancia al dominio de las reglas o procedimientos para operar.

Sin embargo, las dificultades fundamentales que experimentan alumnos y alumnas se deben a que con frecuencia carecen de la comprensión necesaria de las propiedades estructurales de las relaciones y operaciones matemáticas, incomprensión que hace que les resulte difícil distinguir qué operaciones están permitidas y cuales no. Por ejemplo, si en relación con la expresión  $4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1)$  un alumno no entiende que la resta es la operación dominante, o que  $4x^2$  debe interpretarse como  $4(x^2)$  y no como  $(4x)^2$ , cometerá errores que afectarán a la solución de los problemas. Lo mismo ocurre, por ejemplo, con la concatenación de las expresiones. Los alumnos necesitan entender que, a diferencia de lo que ocurre en aritmética donde, por ejemplo '73' significa '70 + 3', aquí '7y' implica '7 por y'.

Una tercera fuente de dificultades tiene que ver con un paso del proceso de solución de problemas previo a llegar a operar con expresiones algebraicas. Se trata de la necesidad de interpretar la situación problema, traduciéndola correctamente a formulaciones de tipo matemático (Kieran, 1992). Un

ejemplo, semejante a otro utilizado por Nathan, Kintch y Young (1992) puede servir para ilustrar lo que queremos decir. Imaginemos el siguiente problema:

*Un coche sale de Madrid hacia Barcelona a 90 km. por hora. Una hora más tarde, otro coche sale en de Madrid en la misma dirección a 110 km. por hora. ¿Cuánto tardará el segundo en alcanzar al primero?*

Para resolver este problema el alumno necesita, en primer lugar, comprender su estructura cuantitativa, esto es, las entidades y relaciones matemáticas que presenta o implica el texto: 90 y 110 kms., que son cantidades extensas, la diferencia de una hora, que constituye una cantidad extensa, y una relación multiplicativa constante -de tipo intenso, por tanto- entre los kms. y las horas, relación que puede expresarse como  $d = 90 \times t$ . Es probable que los alumnos conozcan esta relación, conocimiento que, sin embargo, no es suficiente para resolver el problema. Para ello es necesario que el alumno infiera aspectos del problema no explícitos en el enunciado, tales como "cuando el segundo coche alcance al primero, los dos habrán recorrido el mismo espacio", y que integre este dato con otros dos, el esquema que relaciona la distancia con la velocidad y el tiempo, y la diferencia de una hora. Sólo entonces podrá formular el problema en los términos adecuados,  $110 \times t = 90(t + 1)$ . La carencia, pues, de un esquema conceptual adecuado que permita identificar con rapidez el tipo de problema y establecer el modelo mental preciso del mismo es uno de los principales determinantes de las dificultades que experimentan los alumnos al enfrentarse con los problemas que nos ocupan. De hecho, se ha comprobado que los alumnos suelen afrontar la resolución de los problemas que se les presentan formulados verbalmente traduciendo "frase por frase" en variables y ecuaciones (Chaiklin, 1989), lo que con frecuencia les lleva a cometer errores, pues los problemas no siempre se formulan de forma regular y consistente.

El último de los factores que influye de modo notable en las dificultades que experimentan los alumnos al afrontar la solución de problemas algebraicos tiene que ver con la carencia de conocimientos estratégicos adecuados (Wenger, 1987). Entre estos conocimientos se ha comprobado que tienen especial importancia la capacidad para identificar claramente la meta del problema y para reconocer cuándo la misma se ha conseguido, y la capacidad para determinar los rasgos de una expresión algebraica que son claves para resolver el problema, tales como la posibilidad de hacer determinadas sustituciones o simplificaciones.

De nuevo vemos cómo los estudios sobre temas matemáticos específicos ponen de manifiesto el papel de los diferentes componentes de los esquemas conceptuales que Mayer (1987) y Marshall (1993) señalaban. Los alumnos deben ser capaces de identificar los rasgos distintivos de la situación problema, creando un modelo mental adecuado del mismo; de determinar el objetivo a conseguir y la información que resulta relevante; de traducir matemáticamente la información; de planificar los pasos de la solución, aplicando las estrategias adecuadas y los conocimientos específicos sobre los procedimientos matemáticos utilizables y, finalmente, de realizar adecuadamente los cálculos. Por este motivo, la evaluación, como en los casos anteriores, debe diseñarse de modo que proporcione información específica sobre los distintos conocimientos mencionados.

### *2.5.2. Tareas y criterios de evaluación.*

Para evaluar los diferentes componentes del esquema de conocimientos construido por los alumnos en relación con las ecuaciones hemos diseñado diferentes tareas, de modo que el conjunto de las mismas permitiese obtener información de los puntos en que los alumnos requieren ayudas específicas. La prueba completa se incluye en el Apéndice 2.2. No obstante, mostramos a continuación las principales categorías de tareas diseñadas, justificando su inclusión para evaluar a los alumnos y ayudarles a superar sus dificultades. El planteamiento de las tareas se ha hecho, como en los casos anteriores, en formato de opción múltiple, para lo que se han utilizado como distractores los tipos de respuestas erróneas que, de acuerdo con la literatura sobre el tema, suelen dar frecuentemente y de modo espontáneo los alumnos que carecen del esquema de conocimientos adecuados.

#### *Tareas para evaluar el modelo mental del problema.*

Para determinar en qué medida alumnos y alumnas poseen los modelos mentales adecuados para la solución de los problemas de un ámbito dado se pueden utilizar distintos tipos de tareas. Una de ellas es presentarles varios problemas y pedirles que indiquen si pertenecen a una categoría dada de problemas. La adecuación del modelo del problema también puede ponerse de manifiesto, cuando procede, en la capacidad para representarse gráficamente la situación. Una tercera vía es la traducción de los elementos del problema a expresiones matemáticas, momento en el que interviene también la comprensión de los elementos sintácticos del mismo. Finalmente, la adecua-

ción del modelo mental puede evaluarse a partir de la expresión, en un planteamiento matemático integrado, del conjunto de relaciones implicadas en la solución del problema. En consecuencia, y teniendo presentes las características de los problemas planteados, hemos diseñado tareas que ilustran cada una de las posibilidades mencionadas, como puede verse en los Cuadros 2.21 a 2.24.

Cuadro 2.21. Evaluación de modelos mentales mediante la identificación de tipos de problemas.

Señala si para resolver el siguiente problema hace falta plantear una ecuación simple, un sistema de ecuaciones o una ecuación de segundo grado.

Una empresa está reduciendo el número de oficiales de carpintería porque el sueldo diario de un oficial es 1000 pts. mayor que el de los aprendices que trabajan con él. Con el producto de lo que ganan al día el oficial y un aprendiz se podría pagar durante diez años a este último, lo que explica el interés de la empresa en reducir los oficiales. ¿Cuánto gana uno y otro cada día?

- a) Ecuación simple.
- b) Sistema de ecuaciones.
- c) Ecuación de segundo grado.

Cuadro 2.22. Evaluación de modelos mentales mediante la traducción de los elementos del problema a expresiones matemáticas.

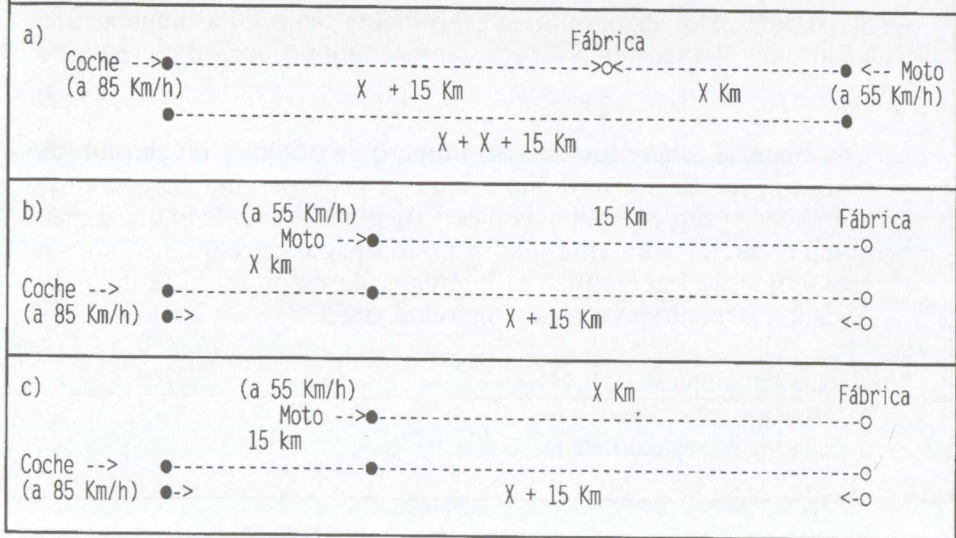
Indica cuál de los tres enunciados siguientes corresponde a la ecuación:  $X^2 - 196 = 0$ .

- a) Calcula el valor de un número X sabiendo que la raíz cuadrada del mismo es 196.
- b) Calcula la longitud X de cada lado de un cuadrado sabiendo que su área es  $196 \text{ m}^2$ .
- c) Sabiendo que el doble de la edad de una persona menos 196 años es cero, calcula su edad.

Cuadro 2.23. Evaluación de modelos mentales mediante la traducción de los elementos del problema a expresiones matemáticas.

En un libro de texto aparece el siguiente problema. Señala cuál de las siguientes representaciones del problema es **ciertamente incorrecta**:

Dos trabajadores salen de sus casas a las 8 de la mañana para ir a la fábrica en la que ambos trabajan. Uno va en coche a una velocidad media de 85 Km/h y el otro va en moto a una velocidad media de 55 Km/h, pero la casa del motorista está 15 Km más cerca. Los dos llegan juntos a la fábrica. ¿A qué distancia vive cada uno de la fábrica?



Cuadro 2.24. Evaluación de modelos mentales mediante la formulación de un planteamiento integrado del mismo.

«(En relación con el problema del Cuadro 2.23) Señala cuál de las siguientes ecuaciones constituye un adecuado planteamiento del problema:

<p>a)</p> $\frac{X + 15}{85} = \frac{X}{55}$	<p>b)</p> $(X + 15) \times 85 = X \times 55$	<p>c)</p> $\frac{X - 15}{85} = \frac{X}{55}$
--	--	--



*Tareas para evaluar la capacidad de identificar los datos necesarios para resolver el problema*

Como ya hemos señalado, la capacidad para identificar qué datos son relevantes y cuales no para resolver el problema forma parte de los conocimientos estratégicos que es preciso evaluar. Una tarea ideada con este fin se presenta en el Cuadro 2.25.

Cuadro 2.25. Ejemplo de tarea para evaluar la capacidad de identificar los datos necesarios para resolver el problema.

(En relación con el problema del Cuadro 2.23) Para resolver el problema NO es necesario saber, aunque nos lo digan:

- a) La velocidad media a la que circulan los dos vehículos (85 y 55 Km.h.).
- b) La hora a la que salen de sus casas ambos trabajadores (8 de la mañana).
- c) La diferencia entre la distancias de sus casas a la fábrica (15 Km).

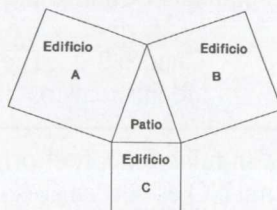
*Tareas para evaluar la adecuación de los procedimientos de operación.*

Se incluyen en esta categoría las tareas que se centran en la evaluación de la eficiencia con que, a partir de unos determinados conocimientos sobre la "sintaxis" de los procedimientos de operación, actúan los alumnos. Las tareas se ha diseñado para que permitan detectar errores frecuentes basados en ideas incorrectas sobre dicha sintaxis. Un ejemplo se presenta en el Cuadro 2.26.

Cuadro 2.26. Ejemplo de tarea para evaluar la adecuación de los procedimientos de operación.

Un arquitecto dispone de un solar para construir tres edificios de viviendas con un patio interior común, de acuerdo con el plano que ilustra el dibujo siguiente:

En el plano puedes ver que el arquitecto proyecta tres edificios cuadrados, dos de los cuales son iguales (el A y el B) y otro, más pequeño (el C). Los tres edificios ocupan una superficie de  $712 \text{ m}^2$ , siendo cada lado del edificio C  $10 \text{ m}$ . más corto que cada lado de los edificios A y B. Interesa conocer exactamente, cuantos  $\text{m}^2$  ocupa cada uno de los tres edificios.



Supón que la ecuación adecuada para resolver el problema fuera  $2X^2 + (X - 10)^2 = 712$ . Señala cuál de las siguientes formas de resolverla es la correcta.

a)

$$2X^2 + (X - 10)^2 = 712; \quad 2X^2 + X^2 + 100 - 20X = 712;$$

$$3X^2 - 20X - 612 = 0; \quad X = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 + 12 \times 612}}{6}$$

b)

$$2X^2 + (X - 10)^2 = 712; \quad 2X^2 + X^2 - 100 = 712;$$

$$3X^2 - 812 = 0; \quad X = \frac{\pm \sqrt{4 \times 3 \times 812}}{6}$$

c)

$$2X^2 + (X - 10)^2 = 712; \quad 2X^2 + X^2 + 100 - 20X = 712;$$

$$3X^2 - 20X - 612 = 0; \quad X = \frac{+20 \pm \sqrt{20^2 + 12 \times 612}}{6}$$

### 2.5.3. *Contraste del modelo.*

#### 2.5.3.1. Muestra.

A fin de comprobar las características de la prueba desarrollada se examinaron 312 alumnos de 8º de EGB, niños y niñas, procedentes de cinco colegios, tres de Madrid, de los cuales uno era público y dos concertados, otro de Alcobendas, también concertado, y uno de Toledo, público. Los seis profesores que impartían clase a los grupos de alumnos examinados valoraron, a su vez, la relevancia de las tareas propuestas y el grado de dominio de las mismas que era deseable que consiguiesen los alumnos para poder establecer que habían alcanzado el criterio de aprendizaje. El protocolo utilizado para solicitar esta valoración se encuentra en el Apéndice 2.6.

#### 2.5.3.2. Validez social del contenido del modelo.

La Tabla 2.18 recoge los datos correspondientes a la valoración de la relevancia de las tareas de la prueba y de ésta en su conjunto realizada por seis de los siete profesores en cuyas clases se aplicó, así como el grado de dominio que consideraban que los alumnos debían alcanzar en relación con los contenidos y capacidades evaluados.

Como puede comprobarse, los profesores han otorgado a la prueba en promedio una puntuación en relevancia -6,66- que equivale al 95,1% del máximo posible -7-. Esto significa una valoración extremadamente positiva de la relevancia de la prueba considerada globalmente. Así mismo, hay una gran homogeneidad en la valoración de las tareas por separado. Tan sólo hay doce elementos en los que la valoración media no alcanza el nivel de "importante", aunque está muy próxima en todos ellos. En general, los elementos considerados menos relevantes son aquellos en que los alumnos deben reconocer cuántas incógnitas es preciso averiguar para resolver un problema (elem. 10 y 11), qué tipo de información es necesaria o no para resolver un problema (elem. 25 y 26), identificar los resultados correctos de un problema (16) o reconocer si el problema supone resolver una ecuación simple, un sistema de ecuaciones o una ecuación de segundo grado (elem. 31 a 36). En relación con este último tipo de tareas, dado que la identificación de categorías de problemas no suele entrenarse de modo explícito en las clases, no es extraña la valoración dada por los profesores. Sin embargo, tal identificación requiere detectar los rasgos de la situación que por su distintividad activan la puesta en marcha de los procedimientos

Tabla 2.18: Prueba: *Ecuaciones*. Relevancia y dominio medios.

Elemento	RELEVANCIA		DOMINIO	
	Media	Desv. Típica	Media	Desv. Típica
1	2.00	.63	75.80	17.83
2	2.00	.63	75.80	17.83
3	2.00	.63	81.80	10.54
4	2.00	.63	81.80	10.54
5	2.00	.63	81.80	10.54
6	2.00	.63	83.00	8.36
7	2.00	.63	82.00	9.08
8	2.00	.00	80.00	6.12
9	2.33	.51	79.00	5.47
10	1.83	.40	79.00	7.41
11	1.83	.40	83.00	8.36
12	2.16	.40	88.00	5.70
13	2.00	.00	85.00	7.07
14	2.00	.63	83.00	6.70
15	2.16	.40	82.00	7.58
16	1.83	.40	81.00	7.41
17	2.00	.00	81.00	7.41
18	1.83	.40	82.00	8.36
19	2.16	.40	79.00	7.41
20	2.16	.40	77.00	6.70
21	2.16	.40	79.00	7.41
22	2.16	.40	90.80	7.12
23	2.16	.40	89.80	6.72
24	2.16	.40	87.80	8.01
25	1.83	.40	82.00	4.47
26	1.83	.40	84.00	8.21
27	2.16	.40	82.00	8.36
28	2.00	.00	81.00	7.41
29	2.33	.51	89.00	5.47
30	2.33	.51	82.00	8.36
31	1.83	.40	77.00	17.17
32	1.83	.40	77.00	17.17
33	1.83	.40	77.00	17.17
34	1.83	.40	77.00	17.17
35	1.83	.40	76.00	16.35
36	1.66	.51	69.00	18.84
37	2.00	.00	77.00	15.65
38	2.00	.00	75.00	14.14
39	2.16	.40	78.00	16.43
40	2.33	.51	78.00	16.43
41	2.33	.51	77.00	15.65
42	2.00	.00	76.00	15.16
Total-Ecuaciones	6.66	.81	76.66	10.32

adecuados de solución, razón por la que este tipo de tareas deberían realizarse con frecuencia.

En cuanto al dominio de las categorías de tareas que los profesores consideran necesario, la situación es paralela a la de la relevancia. Los profesores, en promedio, consideran que los alumnos deben resolver correctamente el 76.66% de la prueba para que pueda considerarse dominada. En conjunto, los datos anteriores ponen de manifiesto la gran adecuación de la prueba desde el punto de vista de los profesores.

### 2.5.3.3. Porcentaje de sujetos que escoge cada alternativa e índice de dificultad (ID).

Desde un punto de vista teórico, la prueba sobre el tema "Ecuaciones" es apta para evaluar si los alumnos han adquirido los componentes del esquema de conocimientos que permite afrontar de modo eficaz la solución de ecuaciones simples, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado. Además, los profesores han valorado muy positivamente la relevancia de sus elementos. En consecuencia, parece relevante conocer cuál es el estado actual de los conocimientos de los alumnos al respecto. Para ello, teniendo en cuenta que se trata de una prueba objetiva, hemos estudiado, en primer lugar, el porcentaje de alumnos que escoge las distintas alternativas a cada pregunta, así como el índice de dificultad de éstas y, en segundo lugar, las puntuaciones medias obtenidas por los alumnos en cada una de las categorías establecidas para evaluar los distintos objetivos de aprendizaje, resultados que se recogen en las Tablas 2.19, 2.20 y 2.21.

El examen de los índices de dificultad muestra que seis elementos tienen un ID inferior al 33,3% (Med.= 25.9); otros veinticuatro lo tienen entre 33.4 y 66.6 (Med.= 50.3), y los once restantes lo tienen superior al 66.7% (Med.= 74.6). La prueba, pues, en conjunto resulta adecuada para los alumnos de este nivel, con un índice de dificultad medio de 53.2. Unos pocos elementos, no obstante, han resultado algo difíciles, lo que hace necesario averiguar a qué se debe analizando las alternativas escogidas, con el fin de decidir que tipo de ayudas proporcionar a los alumnos. Estos elementos son los siguientes:

- 20 y 28.- Se trata de elementos de respuesta abierta en que el sujeto, en lugar de escoger la respuesta, debe calcular un resultado. Dado que elementos precedentes, relacionados con el planteamiento del problema, han resultado ser más fáciles, es posible que estos resultados se deban a falta de motivación de los alumnos para realizar los cálculos precisos.

- 21.- Se trata de detectar qué modo de resolver un sistema de ecuaciones es incorrecto. Las alternativas incluyen la solución por sustitución, por igualación y por diferencia de igualdades, pero en dos de los casos hay errores -no cambiar de signos o no multiplicar por un valor todos los miembros de dentro de un paréntesis al quitar éste. Las dos alternativas erróneas son las más escogidas, siendo el método de igualación -el correcto en este caso-, el menos escogido.
- 32.- En esta pregunta los alumnos deben decidir qué tipo de problema representa una situación dada en que se conoce el producto de dos números consecutivos y se pide hallarlos. Los alumnos consideran en su mayoría que es un problema de ecuación simple, cuando debe solucionarse mediante una ecuación de segundo grado.
- 40.- En esta pregunta los alumnos deben escoger el planteamiento matemático correcto de una problema que debe resolverse mediante una ecuación de segundo grado. El problema admite dos posibles planteamientos recogidos en las alternativas de respuesta, pero uno de ellos contiene un error que el 38% de los alumnos no detecta.

Tabla 2.19. *Ecuaciones*: Índice de dificultad (ID).  
(% de aciertos)

Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ID	42.1	59.0	53.2	53.5	42.6	34.9	42.1	71.9	74.2	62.1	59.0
Preg.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ID	72.2	88.2	65.0	62.1	73.9	26.6	69.6	55.0	21.0	30.8	70.2
Preg.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
ID	53.9	-	42.9	83.4	52.5	23.0	69.6	51.9	74.4	22.8	40.0
Preg.	34	35	36	37	38	39	40	41	42		
ID	73.5	44.2	42.5	36.6	38.3	61.4	31.8	60.0	55.4		

Tabla 2.20: Ecuaciones: Frecuencia con que ha sido escogida cada alternativa.

Elemento	Alternativas								
	a	b	c	0 <sup>2</sup>	Elemento	a	b	c	0
1	147	54	3	8	22	250	15	68	23
2	104	206	30	9	23	72	192	86	6
3	186	106	48	9	24	Anulado			
4	84	61	187	17	25	153	126	65	12
5	105	149	85	10	26	28	297	26	5
6	122	47	176	4	27	187	102	48	19
7	170	28	147	4	28	Correctos:		82	138
8	251	9	74	15	29	88	248	16	9
9	Correctos:		259	38	30	34	185	130	7
10	35	90	217	7	31	62	265	19	10
11	95	207	31	16	32	214	57	81	3
12	252	16	79	2	33	68	139	142	6
13	21	308	19	1	34	261	52	39	3
14	39	227	70	13	35	66	120	157	12
15	45	217	75	12	36	151	64	132	8
16	39	258	43	9	37	123	30	97	5
17	95	193	62	6	38	54	159	136	6
18	68	248	36	4	39	65	67	218	5
19	113	42	196	5	40	113	80	137	25
20	Correctos:		75	101	41	43	89	213	10
21	110	95	147	4	42	70	197	65	23

1 22 sujetos no realizaron la primera parte de la prueba (elementos 1 a 16), 15 no realizaron la segunda parte (elementos 17 al 31) y 16 no realizaron la tercera parte, que incluye el resto de los elementos.

2 0 = elemento no contestado.

### 2.5.3.4. Establecimiento de categorías, validez del modelo y calificación.

#### *Categorías y calificación.*

Dado que la prueba se ha diseñado en base a un modelo específico del esquema de conocimientos que los alumnos deben construir trabajando con los distintos tipos de ecuaciones, ha sido posible establecer categorías de puntuación para cada uno de los componentes básicos del modelo.

Así mismo, dado que el trabajo con ecuaciones se realiza en tres niveles distintos -ecuaciones simples, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado, se han obtenido las puntuaciones de los alumnos para cada uno de estos niveles. Las medias y desviaciones típicas se recogen en la Tabla 2.21.

Un dato que merece la pena destacar en relación con las calificaciones, considerando el grado de dominio medio que los profesores consideraban necesario para poder concluir que la prueba se había superado, es que la media de las puntuaciones obtenidas está dos puntos por debajo de dicho nivel. Esto es, aunque la prueba ha resultado de dificultad media, y aunque sean pocos los elementos que reflejan errores sistemáticos de los alumnos que merezca la pena destacar, no puede decirse que los alumnos hayan conseguido un aprendizaje suficiente, de acuerdo con el criterio mencionado. También merece la pena destacar que las dificultades de los alumnos en relación con los distintos elementos evaluados son semejantes, algo que no es frecuente.

#### *Fiabilidad y validez de la prueba.*

La Tabla 2.21 recoge también los indicadores de fiabilidad correspondientes a la prueba total y a las categorías con un número suficientemente amplio de elementos. Como puede comprobarse, tales índices son bajos o medios en todas las categorías de la prueba, incluido el índice de la prueba total. Como ya hemos señalado en otras ocasiones, esto no significa que la prueba sea inadecuada. Tan sólo refleja que los conocimientos evaluados son bastante heterogéneos, esto es, dependen de la comprensión y dominio de conceptos y procedimientos distintos, algo que confirma tanto los planteamientos generales de Marshall y Mayer relativos a la independencia relativa del aprendizaje de los distintos componentes de los esquemas de conocimientos matemáticos como los planteamientos específicos recogidos por English y Halford (1995).



Tabla 2.21: Prueba: Ecuaciones.  
Categorías que integran el perfil de puntuaciones:  
Composición, puntuaciones medias y fiabilidad.

Categorías	Elementos	N	Med.	Sx
a) Identificación del tipo de problema Fiabilidad: $\alpha = .20$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 17, 18, 31, 32, 33, 34, 35, 36.	342	4.94	1.33
b) Identificación del objetivo del problema	22, 25, 26, 38, 39	351	5.93	2.02
c) Traducción matemática de los elementos del problema	12, 13, 23, 29, 37	342	6.46	2.25
d) Planificación integrada del problema	8, 15, 19, 27, 40	342	5.50	2.49
e) Corrección en el desarrollo del problema	14, 21, 30, 41	342	5.21	2.61
f) Corrección de los resultados	9, 16, 20, 28	345	4.81	2.46
Niveles				
1) Ecuaciones de primer grado Fiabilidad: $\alpha = .50$	1 a 16	349	5.98	1.67
2) Sistema de ecuaciones Fiabilidad: $\alpha = .41$	17 a 30	356	5.00	1.61
3) Ecuaciones de segundo grado Fiabilidad: $\alpha = .51$	31 a 42	355	4.62	1.91
<b>PRUEBA COMPLETA</b> Fiabilidad: $\alpha = .63$	Elementos 1 a 23, 25 a 42	342	5.30	1.21

Nota: Las puntuaciones se dan sobre una escala de 10 puntos.

Pese a la heterogeneidad de los elementos, el moderado grado de fiabilidad de la prueba plantea la cuestión de si es legítima la separación de categorías que hemos realizado. Para responder a esta cuestión, hemos analizado factorialmente las correlaciones entre las puntuaciones correspondientes a las distintas categorías, análisis que se recoge en la Tabla 2.22. Como puede comprobarse, todas las variables saturan en un único factor que explica el 37% de la varianza, lo que justifica el índice de fiabilidad encontrado. No

obstante, la correlación múltiple de cada variable con todas las restantes es pequeña, lo que sugiere que gran parte de la variabilidad de los resultados se debe a características propias de cada tipo de tareas, características que deben recibir atención específica por parte de los profesores.

Tabla 2.22. Validez estructural del sistema de categorías.  
Análisis Factorial. Método de Componentes Principales y Rotación Oblimín.

Variables	Saturaciones tras la rotación	Comunalidad	R <sup>2</sup> de cada variable con el resto
Identificación de problemas	0.391	0.152	0.067
Identificación de la información necesaria	0.462	0.213	0.080
Traducción a expresiones matemáticas	0.647	0.418	0.191
Formulación integrada del problema	0.719	0.516	0.271
Conocimiento del modo correcto de operar	0.702	0.492	0.260
Corrección de los resultados	0.680	0.461	0.260
Valor propio:	2.256		

## 2.6. Evaluación de los conocimientos matemáticos en 1º y 2º de la E.S.O.: Conclusión.

Al comienzo de este capítulo planteábamos la cuestión de cómo diseñar y desarrollar el proceso de evaluación en el Área de Matemáticas para que la información proporcionada tuviese valor diagnóstico, esto es, para que permitiese saber no sólo si los alumnos saben o no, sino además, cuál es el origen de sus fracasos, de modo que fuese posible facilitarles las ayudas adecuadas para que pudieran progresar. Decíamos a continuación que, a fin de conseguir éste propósito, era preciso definir previamente el tipo de información que es preciso recoger y los métodos adecuados para ello, objetivos que hemos abordado a lo largo de las páginas anteriores. Es preciso, ahora, hacer un balance de lo conseguido.

En primer lugar, se han revisado los enfoques o paradigmas desde los que se plantea la enseñanza de las Matemáticas y, sobre todo, los estudios que ponen de manifiesto los factores determinantes del éxito o el fracaso de alumnos y alumnas en la consecución de los objetivos perseguidos. La información examinada ha servido para poner de manifiesto que el aprendizaje de

las Matemáticas, como el de otras materias, implica *un proceso activo de construcción y reorganización de representaciones sobre las cantidades y su medida, representaciones* que tienen que ver con los conceptos relativos a las magnitudes, con los procedimientos relativos a la medida, cálculo y operación sobre cantidades y, sobre todo, *con los esquemas conceptuales* relativos a los distintos tipos de problemas y *con las estrategias* necesarias para su solución. El hecho de que al aprender Matemáticas tenga lugar un proceso de reorganización de esquemas de conocimiento y de que ésta reorganización pueda ser adecuada o no, requiere que sea necesario hacer explícitos los esquemas que es preciso que los sujetos construyan, como primer paso para diseñar la evaluación, paso que hemos ilustrado en relación con cada uno de los cuatro modelos de evaluación expuestos.

Por otra parte, la revisión de los estudios relativos al proceso de construcción de los distintos esquemas conceptuales realizada al abordar el objetivo mencionado en relación con cada uno de los modelos de evaluación diseñados, ha puesto de manifiesto que determinar el esquema de conocimientos a adquirir es algo más que señalar los objetivos de aprendizaje a conseguir en base a la organización interna de la disciplina. Al afrontar la solución de problemas en situaciones reales, alumnos y alumnas experimentan dificultades cuando han de establecer una correspondencia ('mapping') entre los rasgos distintivos de la situación relevantes para la solución del problema y los conocimientos relativos al mundo de los números. También experimentan dificultades derivadas de una falta de comprensión suficiente de la simbología particular de la aritmética y el álgebra y del desconocimiento de las razones que justifican los procedimientos de operación, dificultades que afectan no ya a la representación inicial de los problemas, cuanto a la representación matemática de las operaciones implicadas en su solución y al desarrollo de las mismas. En consecuencia, hacer explícito el esquema de conocimientos a adquirir implica considerar los tipos de representaciones que deben construir relativos a los procesos mencionados. Por este motivo, al tratar de definir el tipo de reorganización conceptual que debían construir los alumnos en relación con cada uno de los modelos de evaluación desarrollados, hemos subrayado el origen de las dificultades que aquellos experimentan y, en relación con las mismas, los cambios en la representación de los problemas que es preciso ayudarles a conseguir, ilustrando de este modo cómo proceder de acuerdo con el principio de actuación señalado.

Pero la evaluación implica no sólo definir qué evaluar, sino también decidir cómo hacerlo de modo que sea posible obtener información válida sobre la comprensión y las capacidades de razonamiento y solución de proble-

mas y sobre los orígenes de los problemas de los alumnos. Conseguir esto implica determinar qué es lo que puede considerarse como criterio de que se posee el conocimiento evaluado. Sobre este punto hemos visto que una de las estrategias más adecuadas es plantear problemas en forma abierta en los que el alumno, más que resolverlos aplicando un algoritmo, ha de anticipar una vía de solución o la solución misma y razonar su respuesta. La razón de ello, señalábamos, es que éstos razonamientos, especialmente si el profesor puede plantear en base a los mismos cuestiones que permitan aclararlos, constituyen indicadores válidos de los tipos de representaciones, correctas o incorrectas, en que el alumno se apoya para resolver un problema. Sin embargo, añadíamos, este procedimiento no es adecuado cuando se ha de evaluar a muchos alumnos, especialmente si la evaluación ha de hacerse frecuentemente.

Debido a los inconvenientes que planteaban tanto el procedimiento anterior como otros descritos a lo largo del capítulo, hemos optado por utilizar preguntas de opción múltiple con valor diagnóstico que evitasen los problemas que habitualmente plantea este tipo de cuestiones. Para conseguir este objetivo, aquellas se han construido utilizando como distractores errores de concepto o de procedimiento que, de acuerdo con los expertos en cada uno de los temas en relación con los que hemos desarrollado los distintos modelos de evaluación, se producen frecuentemente por no haber adquirido los alumnos los distintos componentes que integran los esquemas conceptuales. Como resultado de esta forma de afrontar el problema, una de las principales aportaciones de este trabajo han sido los numerosos ejemplos de tareas y problemas diseñados para evaluar de forma diagnóstica la comprensión de los rasgos distintivos de los distintos tipos de problemas y los conocimientos que intervienen en el proceso de solución de los mismos, conocimientos cuya adquisición constituye el objetivo del trabajo curricular con alumnos y alumnas de 12 a 15 años (7º y 8º de EGB, 1º y 2º de ESO). En el Cuadro 2.27 se enumeran algunos de los ejemplos de los distintos tipos de tareas diseñadas, con indicación de la prueba a que pertenecen, de modo que puedan compararse y que su diseño pueda servir para construir otras tareas semejantes.

Para diseñar una evaluación, el modelo de procedimiento descrito, además de especificar el tipo de organización conceptual que los alumnos deben conseguir en relación con un dominio dado de las Matemáticas y de determinar qué es lo que puede considerarse como criterio válido de conocimiento, señala que es preciso decidir qué número y tipo de tareas puede cubrir con la extensión adecuada los objetivos a evaluar, ya sea utilizándolas de forma

continua o mediante pruebas puntuales. En relación con este punto, hemos puesto de manifiesto que es preciso que el conjunto de tareas seleccionadas cubran como mínimo los distintos subesquemas de problemas que incluye cada uno de los dominios de las Matemáticas y no sólo algunos de ellos, dado que las ayudas que deberán recibir los alumnos variarán eventualmente en función del esquema implicado.

Cuadro 4.27. Enumeración de ejemplos de las categorías de tareas utilizadas.

a) Comprensión de conceptos básicos en los que se basa la representación de un problema.

- Prueba de Números enteros: preguntas 1 a 5.

b) Identificación del tipo de problema

- Prueba de Proporcionalidad: preguntas 15, 22
- Prueba de Ecuaciones: preguntas 1 a 7, 10, 11, 17, 18, 31 a 36.

c) Identificación del objetivo del problema

- Prueba de Proporcionalidad: preguntas 23, 29.
- Prueba de Números Racionales: preguntas 11, 19.

d) Identificación de la información necesaria para resolver el problema

- Prueba de Proporcionalidad: preguntas 10 a 12.
- Prueba de Números Racionales: preguntas 12, 16, 20, 23, 33, 37.
- Prueba de Ecuaciones: preguntas 22, 25, 26, 28, 39.

e) Representación de las relaciones básicas que constituyen los rasgos distintivos del problema

- Prueba de Proporcionalidad: preguntas 1 a 9, 16, 17, 18, 24, 25, 30, 31, 35 a 42.
- Prueba de Números Racionales:
  1. Representación del esquema *cociente*: 31
  2. Representación del esquema *parte-todo*: 1 a 6, 32 a 45.

3. Representación del esquema *operador*: 14, 15, 22, 36
4. Representación del esquema *medida*: 17, 35
5. Representación del esquema *razón*: 9, 10, 25, 26, 27, 39, 40, 41

f) Capacidad de utilizar distintos modos de representación de un problema.

- Prueba de Números Enteros: preguntas 11 a 16, 20 a 24, 31 a 35.

g) Planteamiento matemático de pasos de un problema

- Prueba de Proporcionalidad: preguntas 19, 21, 26, 28, 32, 34
- Prueba de Números Racionales: preguntas 13, 21, 24, 34, 38.
- Prueba de Ecuaciones: preguntas 12, 13, 23, 29, 37

h) Planificación matemática integrada de un problema.

- Prueba de Ecuaciones: preguntas 8, 15, 19, 27, 40.

i) Cálculo y automatización de las operaciones

- Prueba de Números Enteros: preguntas 1 a 66 (2ª parte).
- Prueba de Proporcionalidad: preguntas 13, 14.
- Prueba de Números Racionales: preguntas 7, 8, 18, 30, 34, 44.
- Prueba de Ecuaciones: preguntas 14, 21, 30, 41.

j) Interpretación de resultados:

- Prueba de Números Racionales: preguntas 28, 29, 42, 43.

Más allá de las consideraciones teóricas es preciso, sin embargo, mostrar empíricamente hasta que punto el modelo propuesto es válido para ayudar a los profesores en su actividad evaluadora. Un primer paso en este sentido lo constituye la valoración de las pruebas construidas realizada por un grupo de profesores del área. A pesar de lo reducido de la muestra -seis o siete profesores, dependiendo de la prueba evaluada- la evaluación realizada ha proporcionado información importante por diversos motivos. Por un lado, el conte-

nido de las pruebas, globalmente consideradas, ha sido valorado en general como muy relevante. Por otro lado, el hecho de que las tareas consideradas como menos relevantes hayan sido las de clasificación de problemas o las relativas a la conciencia de la adecuación del proceso de solución y de su formulación matemática integrada cuando uno y otra se plantean de forma novedosa -distinta a la habitualmente utilizada en clase-, sugiere que probablemente los profesores no tienen conciencia de que estas tareas son especialmente relevantes para poner de manifiesto aspectos importantes de la organización de los esquemas de conocimiento. No obstante, la atribución de una relevancia menor a las tareas señaladas también puede deberse a que no forman parte de las actividades habituales en las clases.

El segundo paso para mostrar la viabilidad de nuestro planteamiento ha sido la evaluación con cada una de las pruebas de una media de 250 sujetos, evaluación cuyos resultados han puesto de manifiesto algunos hechos importantes:

- En primer lugar, que la media de los alumnos en la mayoría de las pruebas está por debajo de los niveles que constituyen el criterio mínimo de aprendizaje. Esto es, cuando se les evalúa con pruebas que por sus características evalúan la comprensión y las capacidades que se desea que desarrollen, y no sólo la capacidad de aplicar mecánicamente los procedimientos aprendidos, la media de los alumnos, aunque supere el "cinco" usado tradicionalmente como punto de corte, no aprueba si se considera el nivel medio de dominio exigido por los profesores.
- En segundo lugar, si se considera como criterio el nivel de dominio medio exigido por los profesores en relación con cada categoría de tareas, el análisis del perfil de puntuaciones ha puesto de manifiesto que los problemas no se deben sólo a las tareas que evalúan las capacidades que los profesores consideran menos relevantes, sino también a las tareas a las que los profesores otorgan mayor relevancia y que, en consecuencia, cabe suponer que se trabajan más en clase, si bien esto no ocurre en todos los casos.
- En tercer lugar, el análisis de los errores cometidos por los alumnos ha puesto de manifiesto que, en general, coinciden con los señalados por los estudios previos realizados sobre la comprensión y solución de problemas pertenecientes a las categorías señaladas.

En conjunto, los hechos anteriores sugieren la necesidad bien de modificar los planteamientos instruccionales en la medida en que sean responsables de los resultados encontrados, modificación sin la cual parece difícil una mejora de los niveles alcanzados por los alumnos, bien de replantear el

tipo de objetivos a conseguir con el trabajo curricular dentro de estos niveles. No obstante, aunque las medias hayan sido bajas, muchos alumnos y alumnas han resuelto adecuadamente la mayor parte de las tareas, lo que sugiere que no constituyen una meta imposible para estas edades, razón que nos lleva a inclinarnos por la primera posibilidad, algo para lo que los planteamientos didácticos recogidos en el libro de English y Halford (1995) pueden ser de especial utilidad.



## APÉNDICE 2: MATEMÁTICAS.

### A) PRUEBAS UTILIZADAS

2.1: Números enteros.

2.2: Proporcionalidad.

2.3: Números racionales.

2.4: Ecuaciones.

### B) CRITERIOS DE CORRECCIÓN.

2.5: Criterios de corrección.

### MATERIAL UTILIZADO PARA LA VALORACIÓN DE LAS PRUEBAS.

2.6: Instrucciones y ejemplos.



**BATERÍA AP-M****(Aprendizaje de las Matemáticas)**

© Alonso-Tapia, J. y Olea Díaz, J.

**NÚMEROS ENTEROS****(1° DE E.S.O.)**

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

A continuación encontrarás varias preguntas seguidas de diferentes alternativas de respuesta. Lee con detenimiento cada pregunta y señala la alternativa que contenga la respuesta correcta. Por ejemplo, si te encuentras con una pregunta como:

Señala la solución correcta de la siguiente operación:

$$4(7 - 5) = ?$$

- a) Veintitrés.
- b) Seis.
- c) Ocho.

deberías rodear con un círculo la alternativa c.

**TRABAJA CON ATENCIÓN****PUEDES EMPEZAR**



## NÚMEROS ENTEROS

## PRIMERA PARTE

1. Señala en cuál de los siguientes casos el cero no sirve para separar los valores positivos y negativos de una escala.

- a) Estar a una temperatura de cero grados.
- b) Estar a cero metros sobre el nivel del mar.
- c) Tener cero número de hijos en la familia.

2. ¿Cuál de las siguientes situaciones puede expresarse con un número negativo?

- a) Recibir 1.000 pts. de un familiar.
- b) Prestar 1.500 pts. a un compañero.
- c) Cobrar 2.000 pts. por un trabajo.

3. El valor absoluto de un número "x" es:

- a) El mismo número "x" sin signo alguno.
- b) El que sumado a "x" da 0 como resultado.
- c) El número "x" con el signo cambiado.

4. Señala cuál de las siguientes afirmaciones está equivocada:

- a) El cero es más pequeño que cualquier número que sea negativo.
- b) De dos números negativos, es menor el de mayor valor absoluto.
- c) De dos números positivos, es mayor el de mayor valor absoluto.

5. Al finalizar el año, una empresa ha tenido unos beneficios de dos millones y medio de pesetas. Este resultado se puede expresar con el número + **2.500.000**. Señala cuál de las afirmaciones siguientes representa mejor el opuesto de este número.

- a) La empresa ha obtenido una ganancia de 5,2 millones de pesetas.
- b) La empresa no ha obtenido ni ganancias ni pérdidas a fin de año.
- c) El saldo final de la empresa ha sido de -2,5 millones de pesetas.

6. En el recuadro siguiente aparece el enunciado de un problema. ¿Qué frase significa lo mismo que la frase subrayada?

Imagina que, a las 12 de la noche, la temperatura de tu ciudad es de cero grados. En un observatorio se anota cada dos horas la diferencia de temperatura en relación con la lectura inmediatamente anterior. Las anotaciones, contando la de las 12, han sido: 0, -9, -7, 2, 4.

- a) Significa que cada vez se anotan los grados que marca el termómetro, sobre o bajo cero.
- b) Significa que, a los grados de la última lectura, se suma el ascenso o descenso observado.
- c) Significa que se restan los grados que baja la temperatura de los grados de la última lectura.

\* Un meteorólogo está estudiando las temperaturas de distintas ciudades europeas el día 3 de enero que se recogen en la tabla siguiente. A partir de los datos que contiene, contesta a las preguntas.

Un meteorólogo está estudiando las temperaturas de distintas ciudades europeas el día 3 de enero que se recogen en la tabla siguiente. A partir de los datos que contiene, contesta a las preguntas.

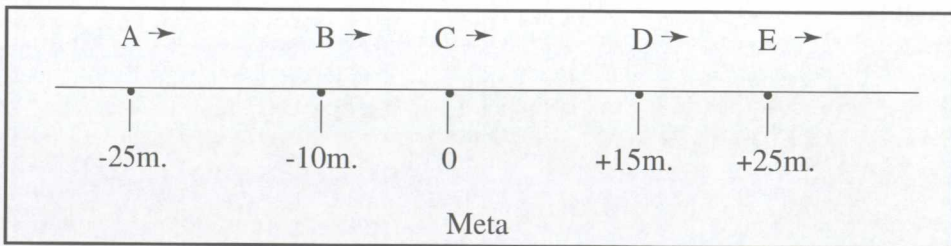
CIUDADES	TEMPERATURA MÍNIMA 6 de la mañana	TEMPERATURA MÁXIMA 12 del mediodía
Berlín	- 5	3
Moscú	-15	- 5
Londres	- 2	12
París	- 4	- 1
Madrid	3	13
Roma	4	10

7. El meteorólogo tendría razón si hiciese una de las siguientes afirmaciones. ¿Cuál?

- a) En Moscú ha aumentado la temperatura los mismos grados que en Madrid.

- b) La temperatura mínima de Moscú ha sido mayor que la mínima de Londres.
- c) En Londres la temperatura ha aumentado diez grados de una vez a otra.
8. El meteorólogo también tendría razón si hiciese una de las siguientes afirmaciones. ¿Cuál?
- a) En Berlín la temperatura ha descendido ocho grados de una vez a otra.
- b) De 6 a 12 en Roma la temperatura ha subido más grados que en Moscú.
- c) París ha sido la ciudad con menor variación de temperatura en el día.
9. El meteorólogo tendría igualmente razón si hiciese una de las siguientes afirmaciones. ¿Cuál?
- a) Si a las 12 Moscú hubiese tenido 5 grados menos, su temperatura habría sido como la de Berlín.
- b) Londres ha sido la ciudad en donde la variación de temperatura a lo largo del día ha sido mayor.
- c) Si a las 12 Roma hubiese tenido 5 grados menos, su temperatura habría sido como la de Moscú.

\* El esquema siguiente representa una carrera ciclista en sus momentos finales, con los participantes A, B, C, D y E.



10. Examina los datos del esquema y señala cuál de las siguientes afirmaciones es **errónea**.
- a) B se encuentra a -25 metros del punto en donde está D.
- b) La distancia que separa al ciclista A de B es de 25m.
- c) D se encuentra 40 metros delante del lugar donde está A.

## NÚMEROS ENTEROS

## SEGUNDA PARTE

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

Señala los resultados de las siguientes operaciones son correctos (c) o incorrectos (i).

1.	$(2) + (-2) = 0$	c i	34.	$(-4) \times (-9) = 36$	c i
2.	$(5) - (-4) = 1$	c i	35.	$(4) + (5) = 9$	c i
3.	$(-7) + (-8) = 15$	c i	36.	$(3) - (5) = 2$	c i
4.	$(-1) - (5) = -4$	c i	37.	$(-9) : (-3) = 3$	c i
5.	$(-7) \times (-2) = -14$	c i	38.	$(-7) + (5) = -2$	c i
6.	$(3) + (2) = 5$	c i	39.	$(-7) - (-3) = -10$	c i
7.	$(4) - (3) = 1$	c i	40.	$(16) \times (-2) = -32$	c i
8.	$(12) : (-4) = 3$	c i	41.	$(3) + (-7) = 10$	c i
9.	$(-2) - (1) = -1$	c i	42.	$(6) - (-8) = -2$	c i
10.	$(-7) + (-5) = -2$	c i	43.	$(-3) : (1) = 3$	c i
11.	$(-5) \times (4) = -20$	c i	44.	$(-3) - (-9) = -12$	c i
12.	$(3) + (5) = 8$	c i	45.	$(-5) + (7) = 2$	c i
13.	$(4) - (5) = 1$	c i	46.	$(3) + (-3) = 0$	c i
14.	$(-6) : (2) = -3$	c i	47.	$(6) - (-4) = 2$	c i
15.	$(-6) + (5) = -1$	c i	48.	$(30) : (-5) = -6$	c i
16.	$(-6) - (-3) = -9$	c i	49.	$(-8) + (-8) = 16$	c i
17.	$(8) \times (-6) = 48$	c i	50.	$(-2) - (5) = -3$	c i
18.	$(2) + (-7) = 9$	c i	51.	$(-9) \times (11) = -99$	c i
19.	$(5) - (-8) = -3$	c i	52.	$(6) + (2) = 8$	c i
20.	$(-4) : (-2) = -2$	c i	53.	$(5) - (3) = 2$	c i
21.	$(-2) - (-9) = -11$	c i	54.	$(-3) - (1) = -2$	c i
22.	$(-6) + (7) = 1$	c i	55.	$(-8) + (-5) = -3$	c i
23.	$(4) + (-8) = 12$	c i	56.	$(4) + (3) = 7$	c i
24.	$(7) - (-8) = -1$	c i	57.	$(-9) \times (6) = -54$	c i
25.	$(-6) - (-9) = -15$	c i	58.	$(42) : (-6) = 7$	c i
26.	$(-8) : (-2) = -4$	c i	59.	$(8) - (2) = 6$	c i
27.	$(-1) + (7) = 6$	c i	60.	$(-8) - (3) = -5$	c i
28.	$(2) + (-3) = -1$	c i	61.	$(-9) + (-2) = -7$	c i
29.	$(8) - (-3) = 5$	c i	62.	$(3) + (7) = 10$	c i
30.	$(-4) + (-3) = 7$	c i	63.	$(11) \times (-7) = -77$	c i
31.	$(-6) \times (-6) = 36$	c i	64.	$(2) - (6) = 4$	c i
32.	$(-8) : (8) = -1$	c i	65.	$(-8) + (4) = -4$	c i
33.	$(-3) - (9) = -6$	c i	66.	$(-8) - (-5) = -13$	c i



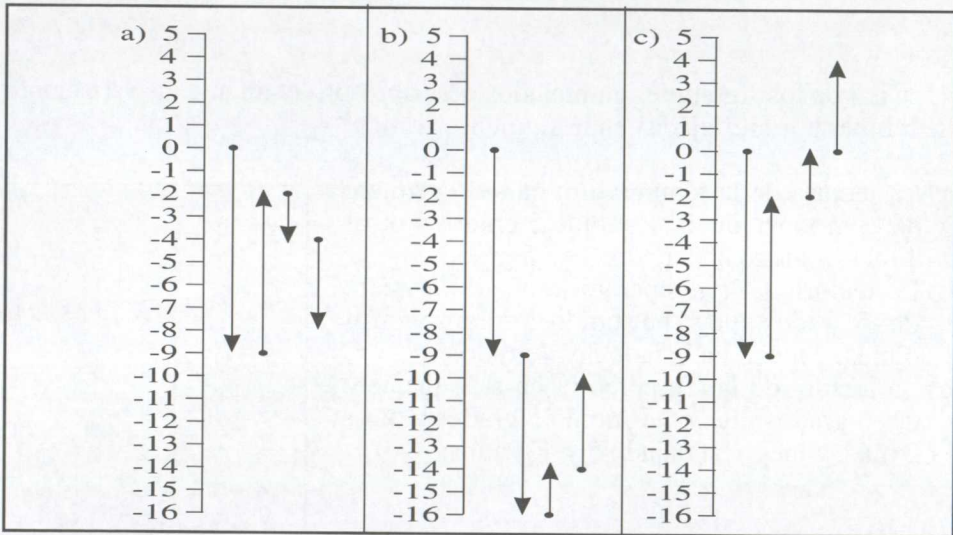
# NÚMEROS ENTEROS

# TERCERA PARTE

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

1. Imagina que, a las 12 de la noche, la temperatura de tu ciudad es de cero grados. En un observatorio se anota cada dos horas la **diferencia de temperatura en relación con la lectura inmediatamente anterior**. Las anotaciones, contando la de las 12, han sido: 0, -9, -7, 2, 4. ¿Cuál de las gráficas siguientes refleja correctamente los cambios de temperatura que han tenido lugar?

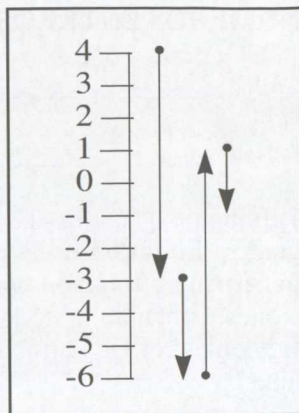


2. Imagina que, a las 12 del día, la temperatura de tu ciudad es de diez grados. En un observatorio se anota cada dos horas la **diferencia de temperatura en relación con la lectura inmediatamente anterior**. Las anotaciones, contando la de las 12, han sido: 10, +2, -9, -7, +4. ¿Cuál es el modo correcto de representar numéricamente el problema para saber cuál ha sido la temperatura en la última lectura?

- a)  $10 + (2) - (-9) - (-7) + (4)$   
 b)  $10 + (2) - (-9) + (-7) + (4)$   
 c)  $10 + (2) + (-9) + (-7) + (4)$

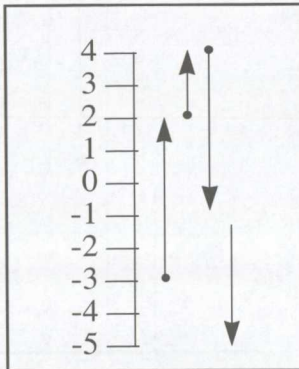
3. El gráfico de la derecha representa las diferencias de temperatura de una lectura a otra registradas en cinco ocasiones a lo largo de un día. ¿Cuál es el modo correcto de representar numéricamente las variaciones que se han ido sucediendo?

- a)  $(4) + (-3) + (-6) - (1) + (-1)$
- b)  $(4) + (-7) + (-3) + (7) + (-2)$
- c)  $(4) - (-7) - (-3) + (7) - (-2)$



4. ¿Cuál de los siguientes enunciados describe correctamente las variaciones de temperatura reflejadas en la siguiente gráfica?

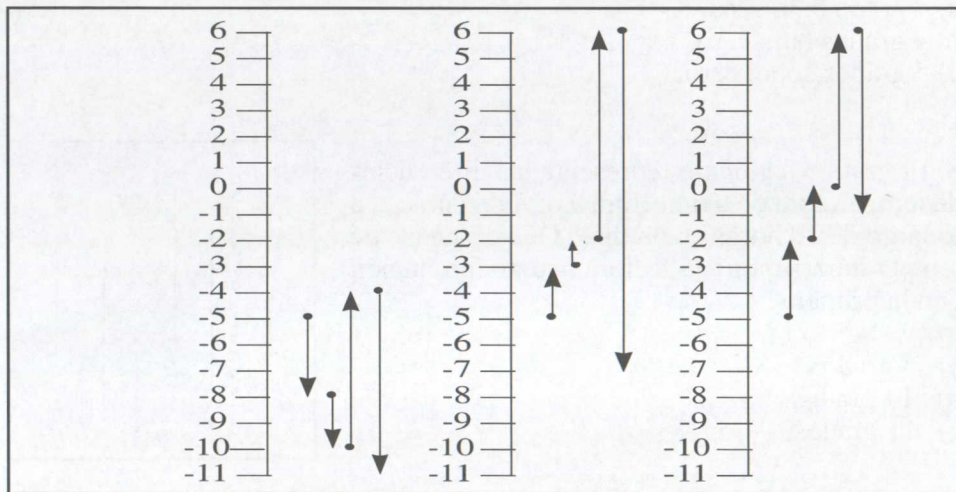
- a) La lectura de la temperatura ha sido primero de -3 grados; luego ha subido 5 grados y otros 4 más, y luego ha bajado -1 y -5 grados.
- b) La lectura de la temperatura ha sido primero de -3 grados; luego ha subido 2 grados y otros 4 más, y luego ha bajado 5 y 4 grados.
- c) La lectura de la temperatura ha sido primero de -3 grados; luego ha subido 5 grados y otros 2 más, y luego ha bajado 5 y 4 grados.



5. La expresión siguiente representa las diferencias de temperatura de una lectura a otra registradas a lo largo de 10 horas en un día, a partir de la primera lectura en que ha sido de  $-5$  grados:

$$(-5) + (-3) + (-2) + (6) + (-7)$$

¿Cuál es el modo correcto de representar gráficamente el problema?



6. ¿Cuál de los siguientes enunciados describe correctamente las variaciones de temperatura reflejadas en la siguiente expresión numérica?

$$(-4) + (1) + (-6)$$

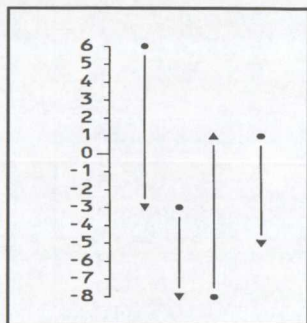
- La temperatura ha pasado de  $-4$  grados a  $-3$  grados y luego ha bajado a  $-9$  grados.
- La temperatura ha pasado de  $-4$  grados a  $1$  grado y luego ha bajado a  $-6$  grados.
- La temperatura ha pasado de  $-4$  grados a  $-3$  grados y luego ha bajado a  $-6$  grados.

7. Imagina que, a las 9 de la noche, la temperatura de tu ciudad es de 8 grados. En un observatorio se anota cada dos horas **la diferencia de temperatura en relación con la lectura inmediatamente anterior**. Las anotaciones, contando la de las 9, han sido: 8, -4, -3, 2, -4. ¿Cuál es la temperatura en el momento de la última lectura?

- a) 1 grado bajo cero.
- b) 4 grados bajo cero.
- c) 5 grados sobre cero.

8. El gráfico siguiente representa las diferencias de temperatura de una lectura a otra registradas a lo largo de 10 horas en un día. ¿Qué descenso de temperatura supone la lectura actual en relación con la primera?

- a) 5 grados.
- b) 14 grados.
- c) 11 grados.



9. La expresión siguiente representa las diferencias de temperatura de una lectura a otra registradas a lo largo de 10 horas en un día, a partir de la primera lectura en que ha sido de -7 grados. ¿Cuál es la temperatura en el momento de la última lectura?

$$(-7) + (-3) + (5) + (9) + (-2)$$

- a) 8 grados sobre cero.
- b) 2 grados sobre cero.
- c) 2 grados bajo cero.

# NÚMEROS ENTEROS

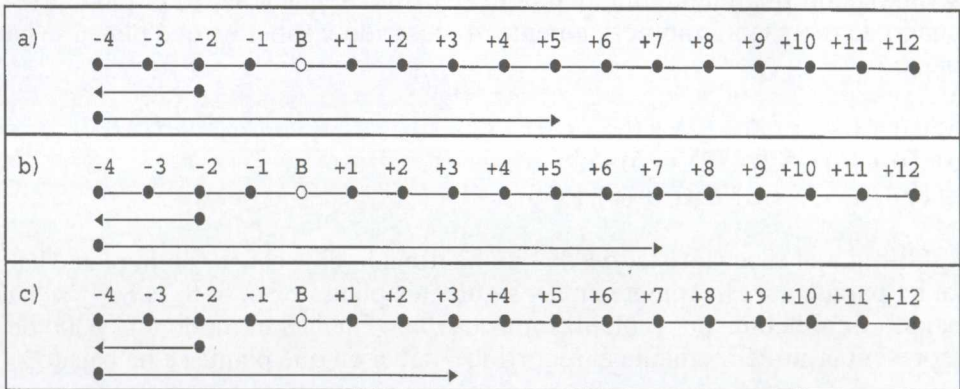
# CUARTA PARTE

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

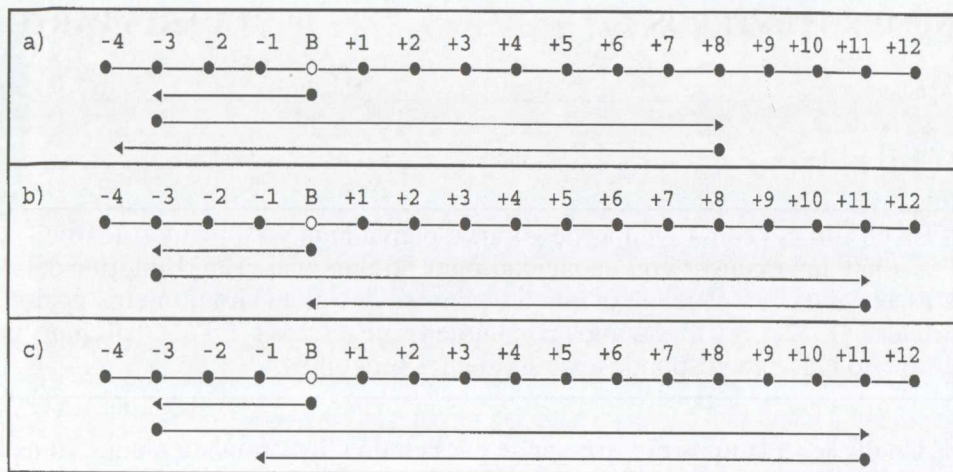
Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

En un edificio con 4 plantas de garajes, planta baja y 12 plantas de oficinas hay un ascensor con capacidad para 36 personas. En el interior del ascensor hay un panel en el que los pisos se designan con números positivos (+1, +2, ...) y los sótanos con números negativos (-1, -2, ...). Teniendo esto presente, responde a las siguientes preguntas.

1. Un día se va la luz y el ascensor se para en una determinada planta. El ascensorista, que había subido en el sótano dos, recuerda que en el sótano cuatro subió una señora que le dijo que iba doce plantas más arriba y que, al irse la luz, sólo habían subido siete plantas. ¿Cuál de los gráficos siguientes refleja el trayecto que ha seguido el ascensor desde que lo tomó el ascensorista?



2. Otro día se vuelve a ir la luz. El ascensorista había subido en la planta baja. En el sótano tres subió un señor que le dijo que iba once plantas más arriba. Le dejó y, al irse la luz, se encontraba doce plantas más abajo. ¿Cuál de los gráficos siguientes refleja el trayecto que ha seguido el ascensor desde que lo tomó el ascensorista?



3. El ascensorista, desde que ha tomado el ascensor en la planta baja, ha parado sucesivamente en las siguientes plantas: sótano 4 (S4), S2, B, 6, S3, y se ha bajado finalmente una planta más arriba. Señala cuál es el modo adecuado de representar numéricamente el recorrido y saber en qué planta se ha bajado.

- a)  $(0) + (-4) + (2) + (2) + (6) + (-9) + (1)$   
 b)  $(0) + (-4) - (2) - (2) + (6) - (3) - (2)$   
 c)  $(0) + (-4) + (-2) + (0) + (6) + (-3) + (1)$

4. Otro día el ascensorista, desde que ha tomado el ascensor en la planta baja, ha parado sucesivamente en las siguientes plantas: S4, 5, 8, 3, S2, y se ha bajado finalmente cuatro plantas más arriba. ¿Cuál es el modo adecuado de representar numéricamente el recorrido y saber en qué planta se ha bajado?

- a)  $(0) + (-4) + (5) + (8) + (3) + (-2) - (4)$   
 b)  $(0) - (-4) + (9) + (3) - (+3) - (-2) - (4)$   
 c)  $(0) + (-4) + (9) + (3) + (-5) + (-5) + (4)$

5. Un día el ascensorista hace tres veces el mismo recorrido: baja desde el piso doce hasta la calle, desde ahí hasta el sótano tres, y desde ahí sube otra vez al piso doce. La forma adecuada de representar numéricamente el problema para saber el número de plantas que ha recorrido es:

- a)  $3(12) + 3(-3) + 3(12)$
- b)  $3(12 + 3 + 15)$
- c)  $3(12 - 3 + 15)$

6. El ascensorista, desde que toma el ascensor en el sótano uno, ha realizado los siguientes movimientos entre parada y parada: Bajar tres plantas, subir dos, bajar una, subir cinco, subir tres y bajar ocho. ¿En qué piso se encuentra al parar tras este último movimiento?

- a) En el sótano tres.
- b) En el sótano dos.
- c) En la planta baja.

7. El ascensorista, desde que toma el ascensor en el sótano tres, ha realizado los siguientes movimientos entre parada y parada: Bajar una planta, subir diez, bajar seis, subir cuatro, bajar siete y subir una. ¿En qué piso se encuentra al parar tras este último movimiento?

- a) En la planta dos.
- b) En la planta uno.
- c) En el sótano dos.

8. Un día el ascensorista hace cinco veces el mismo recorrido: baja desde el piso diez hasta la calle, desde ahí hasta el sótano dos, y desde ahí sube otra vez al piso diez. ¿Cuál es el número de plantas que ha recorrido en total?

- a) 120 plantas.
- b) 100 plantas.
- c) 90 plantas.

9. Otro día, primero el ascensorista hace 3 veces el mismo recorrido: sube desde el sótano tres al piso cinco, baja a la planta baja y vuelve al sótano tres. Luego sale a la calle y cuando vuelve a entrar, por la planta baja, repite 4 veces el siguiente recorrido: baja al sótano tres, sube a la planta ocho y vuelve a bajar a la planta baja. ¿Cuál es el número de plantas que ha recorrido en total?

- a) 78 plantas.
- b) 136 plantas.
- c) 115 plantas.



## NÚMEROS ENTEROS

## QUINTA PARTE

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

Dos niños tienen un videojuego en el que dos bólidos compiten en una carrera de obstáculos. Cada niño tiene una palanca y dos botones con los que mueven los bólidos. Con la palanca mueven los bólidos hacia adelante (lo que se expresa con números positivos) o hacia atrás (lo que se expresa con números negativos). Con los botones multiplican la velocidad por un número positivo (botón 1) o negativo (botón 2). Además, si los bólidos se tocan, la velocidad del que va delante se multiplica por dos, y la del que va detrás, se multiplica por menos dos. Se gana cuando la ventaja es de más de 100 km/h. Teniendo presente estos datos, responde a las preguntas siguientes.

1. La nave de Juan retrocede a 10km/h. Si multiplica su velocidad por +10, ¿qué ocurrirá?

- a) Irá hacia atrás, pues el resultado de la multiplicación es un número negativo.
- b) Irá hacia adelante, pues el resultado de la multiplicación es un número positivo.
- c) Se quedará parado, pues al multiplicar la velocidad negativa se compensa con la positiva.

2. Para evitar un obstáculo, Juan retrocede a 40 km/h mientras Eva avanza a 80 km/h. ¿Qué tendrá que hacer para igualar su velocidad con la de Eva?

- a) Multiplicar su velocidad por tres, para compensar el retroceso.
- b) Multiplicar su velocidad por un número entero positivo (dos).
- c) Multiplicar su velocidad por un número entero negativo (-2).

3. Juan va a 40 km/h. Para alcanzar a Eva multiplica su velocidad por tres. Pero surge un obstáculo y reduce a un tercio su velocidad y, a continuación, a la mitad. ¿Cuál de las siguientes expresiones refleja correctamente las operaciones realizadas?

a)  $40 \times 3 \times (1:3) \times (1:2)$

b)  $40 \times 3 - 3 - 2$

c)  $40 \times 3 - (1:3) - (1:2)$

4. Eva va a 60 km/h. Para que Juan no le dé alcance, aumenta su velocidad por diez. Pero se mete en un callejón sin salida, por lo que ha de retroceder, lo que hace manteniendo la misma velocidad. ¿Cuál de las siguientes expresiones refleja correctamente las operaciones realizadas?

a)  $(60 \times 10) - (60 \times 10)$

b)  $(60 \times 10) \times (-1)$

c)  $(60 \times 10) \times (-60 \times 10)$

5. Juan, que va a 60 Km/h es quien se mete ahora en un callejón sin salida. Retrocede aumentando su velocidad por dos hasta salir del callejón. En ese momento vuelve a avanzar manteniendo su velocidad. ¿Cuál de las siguientes expresiones refleja correctamente las operaciones realizadas?

a)  $60 \times (-60 \times 2) \times 1$

b)  $60 - (60 \times 2) + (60 \times 2)$

c)  $60 \times (-2) \times (-1)$

6. Eva, que va a 50 km/h, intenta adelantar a Juan que va a 40 km/h. Le golpea, con lo que retrocede al doble de la velocidad a la que iba. Intenta adelantarle de nuevo sin variar la velocidad, pero modificando la dirección. ¿Cuál de las siguientes expresiones refleja correctamente las operaciones realizadas por Eva?

a)  $50 - (2 \times 50) \times (-1)$

b)  $50 \times (-2) \times (-1)$

c)  $50 - (2 \times 50) + (50 \times 2)$

7. Juan va a 100 km/h. Para intentar ganar, multiplica su velocidad por dos. Surge un obstáculo y, para no tener que retroceder, reduce a un cuarto su velocidad. Pero se mete en un callejón sin salida y ha de retroceder, lo que hace triplicando su velocidad. ¿Cuál de las siguientes expresiones refleja correctamente las operaciones realizadas?

- a)  $100 \times 2 \times (1:4) \times (-3)$
- b)  $(100 \times 2 - 4) \times 3$
- c)  $[(100 \times 2) : 4] \times 3$

8. Supón que la expresión siguiente refleje las operaciones realizadas durante el juego:

$$8 \times \{-5 \times (4 + 2) - [12 - (5 - 1)]\} = ? \quad \text{¿Cuál es la solución correcta?}$$

- a) - 384, porque al quitar paréntesis sale:  $8 \times (-30 - 12 - 5 - 1) = 8 \times (-48) = -384$
- b) - 304, porque al quitar paréntesis sale:  $8 \times (-30 - 12 + 4) = 8 \times (-38) = -304$
- c) - 208, porque al quitar paréntesis sale:  $8 \times (-20 + 2 - 12 + 4) = 8 \times (-26) = -208$

9. Supón que la expresión siguiente refleje las operaciones realizadas durante el juego:

$$72 - \{(3 + 20) \times [10 - (4 - 1) - (3 - 2)]\} \quad \text{¿Cuál es la solución correcta?}$$

- a) - 66, porque al quitar paréntesis sale:  $72 - \{23 \times [10 - 3 - 1]\} = 72 - 138 = -66$
- b) 72, porque al quitar paréntesis sale:  $72 - \{23 \times [10 - 4 - 1 - 3 - 2]\} = 72 - 0 = 72$
- c) -154, porque al quitar paréntesis sale:  $72 - \{23 \times 10 - 3 - 1\} = 72 - 226 = -154$

10. La nave de Eva va hacia adelante a 50 km/h. y toca a la de Juan, que va a 60 km/h. Puesto que si los bólidos se tocan, la velocidad del que va delante se multiplica por dos, y la del que va detrás, se multiplica por menos dos, ¿qué ocurrirá?

- a) Eva avanzará a 100 km/h.
- b) Eva avanzará a 48 km/h.
- c) Eva retrocederá a 100 km/h.



**BATERÍA AP-M**  
**(Aprendizaje de las Matemáticas)**

© Alonso-Tapia, J. y Olea Díaz, J.

**PROPORCIONALIDAD**

**(1º DE E.S.O.)**

**PRIMERA PARTE.**

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

A continuación encontrarás varias preguntas seguidas de diferentes alternativas de respuesta. Lee con detenimiento cada pregunta y señala la alternativa que contenga la respuesta correcta. Por ejemplo, si te encuentras con una pregunta como:

Señala la solución correcta de la siguiente operación:

$$\frac{3}{6} \text{ respecto a } \frac{2}{5} \text{ es:}$$

a) Mayor b) Menor c) Igual

deberías rodear con un círculo la alternativa a.

**TRABAJA CON ATENCIÓN**

**PUEDES EMPEZAR**



## PROBLEMA 1

En cada uno de los ejemplos siguientes se te presentan dos grupos de vasos. En cada grupo, algunos de los vasos contienen zumo (z) y otros contienen agua (a). Si mezclamos el zumo y el agua de los vasos del grupo uno en un recipiente y hacemos lo mismo con los del grupo dos en otro, ¿cuál de las mezclas sabrá más a zumo, la correspondiente al grupo uno o la correspondiente al grupo dos?

<p>1. Sabrá más a zumo:</p> <p>a) La mezcla del grupo 1. b) La mezcla del grupo 2. c) Las dos sabrán igual.</p> <p>¿Por qué razón?</p>	<p>1 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>a</td></tr></table></p> <p>2 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>a</td></tr></table></p> <hr/> <hr/>	z	z	z	z	a	z	z	z	z	z	a							
z	z	z	z	a															
z	z	z	z	z	a														
<p>2. Sabrá más a zumo:</p> <p>a) La mezcla del grupo 1. b) La mezcla del grupo 2. c) Las dos sabrán igual.</p> <p>¿Por qué razón?</p>	<p>1 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></p> <p>2 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></p> <hr/> <hr/>	z	z	z	a	a	a	a	z	z	z	a	a						
z	z	z	a	a	a	a													
z	z	z	a	a															
<p>3. Sabrá más a zumo:</p> <p>a) La mezcla del grupo 1. b) La mezcla del grupo 2. c) Las dos sabrán igual.</p> <p>¿Por qué razón?</p>	<p>1 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></p> <p>2 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>z</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></p> <hr/> <hr/>	z	a	a	z	z	a	a	a	a	a								
z	a	a																	
z	z	a	a	a	a	a													
<p>4. Sabrá más a zumo:</p> <p>a) La mezcla del grupo 1. b) La mezcla del grupo 2. c) Las dos sabrán igual.</p> <p>¿Por qué razón?</p>	<p>1 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></p> <p>2 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></p> <hr/> <hr/>	z	z	z	z	a	a	a	a	a	z	a	a						
z	z	z	z	a	a	a	a	a											
z	a	a																	
<p>5. Sabrá más a zumo:</p> <p>a) La mezcla del grupo 1. b) La mezcla del grupo 2. c) Las dos sabrán igual.</p> <p>¿Por qué razón?</p>	<p>1 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></p> <p>2 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>z</td><td>a</td><td>a</td></tr></table></p> <hr/> <hr/>	z	z	z	z	z	z	z	z	a	a	a	z	z	z	z	z	a	a
z	z	z	z	z	z	z	z	a	a	a									
z	z	z	z	z	a	a													

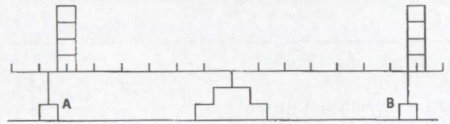
## PROBLEMA 2

6. A continuación se te presenta una balanza cuyos brazos, que están apoyados en dos soportes, sostienen varias pesas iguales. Observa la balanza y escoge la respuesta que describe lo que crees que ocurrirá cuando se retiren los soportes.

- a) Descenderá el brazo A.  
b) Descenderá el brazo B.  
c) Permanecerá en equilibrio.

¿Por qué piensas que ocurrirá así?

\_\_\_\_\_

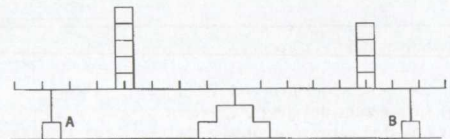


7. A continuación se te presenta una balanza cuyos brazos, que están apoyados en dos soportes, sostienen varias pesas iguales. Observa la balanza y escoge la respuesta que describe lo que crees que ocurrirá cuando se retiren los soportes.

- a) Descenderá el brazo A.  
b) Descenderá el brazo B.  
c) Permanecerá en equilibrio.

¿Por qué piensas que ocurrirá así?

\_\_\_\_\_

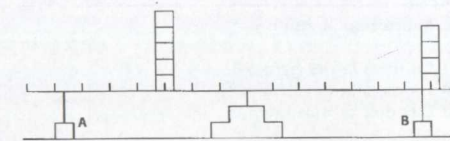


8. A continuación se te presenta una balanza cuyos brazos, que están apoyados en dos soportes, sostienen varias pesas iguales. Observa la balanza y escoge la respuesta que describe lo que crees que ocurrirá cuando se retiren los soportes.

- a) Descenderá el brazo A.  
b) Descenderá el brazo B.  
c) Permanecerá en equilibrio.

¿Por qué piensas que ocurrirá así?

\_\_\_\_\_





9. A continuación se te presenta una balanza cuyos brazos, que están apoyados en dos soportes, sostienen varias pesas iguales. Observa la balanza y escoge la respuesta que describe lo que crees que ocurrirá cuando se retiren los soportes.

<p>a) Descenderá el brazo A.          b) Descenderá el brazo B.          c) Permanecerá en equilibrio.</p> <p>¿Por qué piensas que ocurrirá así?</p> <hr/>	
--	--

### PROBLEMA 3

Imagínate que tus padres desean conocer el precio de las naranjas en 3 supermercados diferentes. Para ello, te piden que preguntes en cada uno cuánto costaría comprar 1, 2 y 5 kilos de naranjas. Las respuestas de cada uno de los supermercados fueron:

Kilos	Supermercado A	Supermercado B	Supermercado C
1	50 pts.	45 pts.	60 pts.
2	95 pts.	90 pts.	110 pts.
5	205 pts.	225 pts.	230 pts.

10. Sólo uno de los supermercados NO hace descuento al comprar más de un kilo de naranjas. ¿Cuál?

- El supermercado A, ya que sólo cuando compras 5 kilos resulta el más económico.
- El supermercado B, ya que cada kilo vale 45 pts., se compren los kilos que se compren.
- El supermercado C, ya que es el que más caro resulta en los tres casos (comprando 1, 2 ó 5 Kg.).

11. Imagínate que una persona entra al supermercado A para comprar todas las naranjas que pueda con las 950 pts que lleva. Eso significa que:

- a) Como 2 kilos le cuestan 95 pts, podrá comprar como máximo 20 kilos de naranjas.
- b) Como cada kilo le cuesta 50 pts, podrá comprar como mucho  $950 / 50 = 19$  kilos.
- c) Como  $950 / 205 = 4,63$ , podrá comprar más de 20 kilos de naranjas.

12. Imagínate que una persona entra al supermercado B a comprar 15 kilos de naranjas. Indica cuál de las siguientes operaciones NO da como resultado el dinero total a pagar por los 15 kilos de naranjas:

a)  $45 \times 15$

b)  $225 \times 3$

c)  $15 \times 90$

13. Una persona entra en el supermercado B y gasta en naranjas una cantidad X de pts. ¿Cuántos kilos de naranjas podemos afirmar que compró si sabemos que:

$$\frac{X}{225} = \frac{25}{5} ?$$

- a) Compró  $25 : 5 = 5$  kilos de naranjas.
- b) Compró 25 kilos de naranjas en total.
- c) Compró  $5 \times 225 = 1125$  kg. de naranjas.

14. La cantidad de dinero que gastó la persona a que se refiere la pregunta anterior es:

- a)  $5 \times 45 = 225$  pts.
- b)  $25 \times 45 = 1125$  pts.
- c)  $1125 \times 45 = 50625$  pts.

#### PROBLEMA 4

15. Indica cuál de los siguientes problemas NO puede resolverse mediante una regla de tres:

- a) Si una máquina produce 234 tornillos a la hora, ¿cuántos tornillos producirá en 12 horas?

- b) Si el litro de gasolina súper vale 98 pts, ¿cuántos litros se podrán echar con 2000 pts?
- c) Si un niño pesa 12 kilos a la edad de dos años, ¿cuánto pesará al cumplir los 8 años?

### PROBLEMA 5

16. Señala cuál de los siguientes enunciados indica una relación inversa entre dos magnitudes:

- a) La velocidad media que lleva un coche y los kilómetros que recorre tras ocho horas de viaje.
- b) La cantidad de agua que vierte una manguera y el tiempo que se tarda en regar con ella un parque.
- c) La cantidad de horas que se trabaja y el sueldo que se cobra una vez finalizado el trabajo.

### PROBLEMA 6

El responsable de alimentación de una prisión sabe que, con los alimentos que tienen ahora, pueden dar de comer durante 80 días a los 200 presos que tienen internos. Inesperadamente, la dirección de la prisión avisa que tienen que acoger esta misma tarde a 150 nuevos presos. Teniendo presente esta información, responde a las preguntas siguientes.

17. La relación entre los días que se puede dar de comer y el número de presos es:

- a) Directa.                      b) Inversa.                      c) Directa o inversa.

18. Con la misma cantidad de alimentos, tras acoger a los nuevos presos se les podrá dar de comer:

- a) Más de 80 días.              b) 80 días exactos.              c) Menos de 80 días.

19. Indica cuál de las siguientes operaciones da como resultado la cantidad de días que se podrá alimentar a todos los presos (los antiguos más los nuevos):

- a)  $(200 \times 80)/150$       b)  $(150 \times 80)/200$       c)  $(200 \times 80)/350$

### PROBLEMA 7

20. Tras leer el problema que sigue un alumno ha dado los pasos que se indican para su solución. ¿Es adecuado? Escoge la alternativa correcta.

<p>Tres hermanos deciden asumir una deuda (D) de su padre, pero en relación inversa a los nietos que le han dado, 2, 3 y 6. El segundo hijo ha de pagar 90.000 pts. ¿Cuánto han de pagar los otros dos? ¿Cuál era la deuda del padre?</p>			
<p>Paso 1:</p> <p>X = Deuda asumida por el hijo A que ha dado 2 nietos.</p> $X = \frac{90000}{2} \times 3$	<p>Paso 2:</p> <p>Y = Deuda asumida por el hijo B que ha dado 3 nietos.</p> $Y = \frac{90000}{3} \times 3$	<p>Paso 3:</p> <p>Z = Deuda asumida por el hijo C que ha dado 6 nietos.</p> $Z = \frac{90000}{6} \times 3$	<p>Paso 4:</p> $D = X + Y + Z.$

- a) El planteamiento es incorrecto por que no ha calculado en un primer paso el inverso de los nietos.
- b) Es adecuado: cada uno paga en razón directa a los hijos de B y en razón inversa a los suyos.
- c) Planteamiento inadecuado por no haber calculado la deuda total antes que lo que asume cada uno.

**PROPORCIONALIDAD.****SEGUNDA PARTE**

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

**PROBLEMA 8**

21. Un ciclista recorre 100 km. en 5 h. Si su velocidad media es constante, ¿cuánto tarda en recorrer 237 km? Señala la alternativa que recoge el planteamiento matemático correcto:

a)

$$\frac{X}{5} = \frac{100}{237}$$

b)

$$\frac{237}{100} = \frac{X}{5}$$

c)

$$X = \frac{100}{5} \times 237$$

**PROBLEMA 9**

22. Indica para cuál de los siguientes problemas NO tiene sentido aplicar una regla de tres compuesta:

- a) Si 6 grifos tardan 12 horas en llenar una piscina de 5 metros cúbicos, ¿cuánto tardarían 18 grifos abiertos de modo similar en llenar una piscina de 20 metros cúbicos?
- b) Un coche, a una velocidad media de 40 km/h, tarda 25 minutos en recorrer una distancia. ¿Cuánto tardará en recorrer el doble de distancia si va a una velocidad media de 30 km/h?
- c) En un cuartel se necesitan 300.000 pts. cada 7 días para pagar los gastos de lavandería de los 250 soldados. ¿Cuánto dinero se necesitará a la semana para pagar los gastos de 100 soldados?.

## PROBLEMA 10.

En una planta envasadora de aceite hay 20 surtidores que tardan 10 horas en llenar garrafas con una capacidad, entre todas, de 20.000 litros. ¿Cuánto tiempo se necesitaría para llenar garrafas con una capacidad de 100.000 litros si la envasadora dispusiese de 40 surtidores?

23. ¿Qué dato, si lo tuvieses, te llevaría inmediatamente -haciendo una sola operación- a resolver el problema?

- a) Conocer cuánto se tardaría en llenar el primer grupo de garrafas si sólo funcionase un surtidor.
- b) Conocer los surtidores que harían falta para llenar el primer grupo de garrafas en una hora.
- c) Conocer los litros de aceite que salen en total por cuarenta surtidores en una hora.

24. La relación entre número de surtidores y tiempo en llenar un recipiente dado es:

- a) Directamente proporcional.
- b) Inversamente proporcional.
- c) Puede variar según el problema.

25. La relación entre capacidad del recipiente y tiempo necesario para que se llene es:

- a) Directamente proporcional.
- b) Inversamente proporcional.
- c) Puede variar según el problema.

26. Con 40 surtidores funcionando de modo similar para llenar el primer grupo de garrafas, el planteamiento correcto del problema sería:

a)	b)	c)
$\frac{X}{10} = \frac{40}{20}$	$\frac{10}{20} = \frac{X}{40}$	$\frac{X}{10} = \frac{20}{40}$

27. Para responder a la pregunta que se hace en el enunciado del problema un alumno ha dado los siguientes pasos. Léelos y escoge la alternativa que recoge la valoración adecuada de su forma de trabajar:

Pasos dados:

- (1) Tiempo = 100000 / litros vertidos por 40 surtidores en una hora.
- (2) Litros vertidos por 40 surtidores en una hora = 40 x litros vertidos por surtidor-hora.
- (3) Litros vertidos por un surtidor en una h. = litros vertidos por surtidor en 10 h. / 10 horas.
- (4) Litros vertidos por surtidor en 10 h. = 20000 / 20 = 2000
- (5 a 7) Implica sustituir el resultado de (4) en (3), el de (3) en (2) y el de (2) en (1).

- a) El proceso seguido es incorrecto: no ha planteado adecuadamente las relaciones proporcionales.
- b) El proceso es correcto porque los valores desconocidos se han hallado y sustituido adecuadamente.
- c) El proceso es inadecuado porque no ha tenido en cuenta la relación inversa horas-nº de surtidores.

28. El planteamiento correcto para resolver la pregunta que se plantea en el problema inicial sería:

a)	b)	c)
$X = \frac{100000}{\left(\frac{20000}{20}\right) \times 40}$	$\frac{10}{X} = \frac{100000}{20000} \times \frac{40}{20}$	$\frac{X}{10} = \frac{100000}{20000} \times \frac{40}{20}$

## PROBLEMA 11.

Juan quiere hacer el Camino de Santiago. Desde su ciudad, por la ruta escogida, debe recorrer 504 km. Como espera caminar durante 8 horas diarias, ha calculado que tardará 21 días. Sin embargo, Pedro, que va a ir con él, le dice que no deberían caminar más de 6 horas al día y que, dando un pequeño rodeo, que les supondría andar 528 km., verían un lugar muy interesante. ¿Cuántos días tardarán en hacer el recorrido si se acepta la idea de Pedro?

29. ¿Qué dato, si lo tuvieses, te llevaría inmediatamente -haciendo una sola operación- a resolver el problema?

- a) Conocer el número de kilómetros por día recorridos cuando se camina 8 horas diarias.
- b) Conocer el número de kilómetros por día recorridos cuando se camina 6 horas diarias.
- c) Conocer el número de kilómetros por hora recorridos cuando camina 8 horas diarias.

30. La relación entre horas caminadas al día y tiempo (días) en recorrer una distancia dada es:

- a) Directamente proporcional.
- b) Inversamente proporcional.
- c) Puede variar según el problema.

31. La relación entre la distancia y tiempo necesitado para recorrerla es:

- a) Directamente proporcional.
- b) Inversamente proporcional.
- c) Puede variar según el problema.

32. Si quisiéramos saber el tiempo que se tardaría en recorrer los 528 km. caminando 8 horas diarias, la forma de plantear correctamente el problema sería:



a)	b)	c)
$\frac{504}{21} = \frac{528}{X}$	$\frac{504}{528} = \frac{X}{21}$	$\frac{21}{X} = \frac{504}{528}$

33. Para responder a la pregunta que se hace en el enunciado del problema un alumno ha dado los siguientes pasos. Léelos y escoge la alternativa que recoge la valoración adecuada de su forma de trabajar:

Pasos dados:

- (1) Tiempo (en días) = 528 / km. caminados por día andando 8 horas.
- (2) km. caminados por día andando 8 horas = 8 x km. caminados por hora.
- (3) Km. caminados por hora = Km. caminados por día / 6.
- (4) Km. caminados por día = 504 / 21 = 24.
- (5 a 7) Implica sustituir el resultado de (4) en (3), el de (3) en (2) y el de (2) en (1).

- a) El proceso es inadecuado porque no ha tenido en cuenta la relación días-horas caminadas al día.
- b) El proceso es correcto porque los valores desconocidos se han hallado y sustituido adecuadamente.
- c) El proceso seguido es incorrecto: no ha planteado adecuadamente las relaciones entre variables.

34. El planteamiento correcto para resolver la pregunta que se plantea en el problema inicial sería:

a)	b)	c)
$\frac{X}{21} = \frac{504}{528} \times \frac{6}{8}$	$X = \frac{528}{\left(\frac{504}{21}\right) \times 6}$	$\frac{X}{21} = \frac{528}{504} \times \frac{8}{6}$

A continuación se te presentan distintos pares de fracciones. Señala QUÉ FRACCIÓN DE CADA PAR ES MAYOR, rodeando con un círculo la alternativa que consideres correcta. Si las dos son iguales, rodea las dos alternativas.

35.

$$A: \frac{1}{4} \quad B: \frac{2}{4}$$

36.

$$A: \frac{3}{5} \quad B: \frac{3}{7}$$

37.

$$A: \frac{1}{3} \quad B: \frac{1}{2}$$

38.

$$A: \frac{2}{4} \quad B: \frac{3}{7}$$

39.

$$A: \frac{1}{2} \quad B: \frac{2}{4}$$

40.

$$A: \frac{2}{6} \quad B: \frac{1}{3}$$

41.

$$A: \frac{3}{9} \quad B: \frac{2}{6}$$

42.

$$A: \frac{2}{6} \quad B: \frac{3}{8}$$

**.BATERÍA AP-M****(Aprendizaje de las Matemáticas)**

© Alonso-Tapia, J., Olea Díaz, J.

**NÚMEROS RACIONALES****(1° DE E.S.O.)****PRIMERA PARTE.**

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

A continuación encontrarás varias preguntas seguidas de diferentes alternativas de respuesta. Lee con detenimiento cada pregunta y señala la alternativa que contenga la respuesta correcta. Por ejemplo, si te encuentras con una pregunta como:

Señala la solución correcta de la siguiente operación:

$$\frac{3}{6} - \frac{2}{5}$$

- a)  $\frac{1}{10}$     b) 1    c)  $\frac{1}{30}$

deberías rodear con un círculo la alternativa a.

**TRABAJA CON ATENCIÓN****PUEDES EMPEZAR**



## PROBLEMA 1.

Un niño tiene 3 canicas amarillas pequeñas, 2 amarillas grandes, 4 rojas pequeñas, 2 azules pequeñas, 4 azules grandes; tiene, además, 1 dado grande y 5 pequeños.

1. ¿Qué fracción de las canicas pequeñas es amarilla?

a)  $\frac{9}{3}$       b)  $\frac{3}{9}$       c)  $\frac{3}{5}$

2. ¿Qué fracción de las canicas es azul?

a)  $\frac{2}{5}$       b)  $\frac{15}{6}$       c)  $\frac{6}{21}$

3. ¿Qué fracción de los juguetes es grande?

a)  $\frac{21}{7}$       b)  $\frac{1}{5}$       c)  $\frac{1}{3}$

4. ¿Cuál de las fracciones siguientes es la menor?

a)  $\frac{2}{5}$       b)  $\frac{3}{9}$       c)  $\frac{6}{21}$

## PROBLEMA 2.

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

Un juego de lotería consiste en comprar, a 25 pts., cada una de las casillas situadas en un panel. Tres amigos, Pedro (P), Juana (J) y Manuel (M), compran el panel de la siguiente forma:

P	P	J	J	M	M	M	M
J	J	J	J	M	M	M	M

¿Qué parte de los boletos ha comprado cada uno?

5. La cantidad de boletos que ha comprado Pedro se puede expresar como:

- a)  $1/8$ , ya que de cada 8 boletos ha comprado 1.
- b)  $2/8$ , ya que de cada 8 boletos ha comprado 2.
- c)  $16/2$ , ya que de cada 16 boletos ha comprado 2.

6. La cantidad de boletos que ha comprado Juana se puede expresar como:

- a)  $6/8$ , ya que de cada 8 boletos ha comprado 6.
- b)  $16/6$ , ya que de cada 16 boletos ha comprado 6.
- c)  $3/8$ , ya que de cada 8 boletos ha comprado 3.

7. ¿Cuál de los siguientes procedimientos es el adecuado para saber qué parte del total representan los boletos que **NO** ha comprado Juana.

$$a) \frac{2}{8} + \frac{8}{8} = \frac{10}{8}; \quad b) \frac{2}{16} + \frac{8}{16} = \frac{10}{32}; \quad c) \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$$

8. ¿Cuál de los siguientes procedimientos es el adecuado para saber qué parte del total representan los boletos que **NO** ha comprado Pedro.

$$a) \frac{6}{16} + \frac{8}{16} = \frac{14}{32}; \quad b) \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}; \quad c) \frac{6}{8} + \frac{8}{8} = \frac{14}{8}$$

9. Supón que en el problema te preguntan "¿Cuál de las siguientes cantidades refleja mejor la relación entre los boletos comprados por Pedro y Juana?". En la pregunta anterior la palabra relación se refiere a la cantidad que representan:

- a) Los boletos comprados entre Pedro y Juana respecto del total de boletos.
- b) Los boletos comprados por Pedro respecto a los comprados por ambos.
- c) Los boletos comprados por Pedro respecto a los comprados por Juana.

10. ¿Cuál de las siguientes cantidades refleja mejor la relación entre los boletos comprados por Pedro y Juana?

$$a) \frac{8}{16} \quad b) \frac{1}{3} \quad c) \frac{2}{8}$$

### PROBLEMA 3

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

Una receta para hacer bizcocho consta de 4 ingredientes: leche, azúcar, harina y levadura. La madre de Javier tiene un vaso medidor para medir las cantidades de los ingredientes que tiene que mezclar. En sus anotaciones aparece como bizcocho perfecto el que se consigue mezclando en el molde que tiene las siguientes cantidades del vaso medidor para cada ingrediente:

$$\text{leche} = 2 \frac{2}{3} \quad \text{azúcar} = 1 \frac{2}{5} \quad \text{harina} = \frac{3}{4} \quad \text{levadura} = \frac{1}{6}$$

La madre sólo tiene  $\frac{1}{8}$  de vaso de levadura, por lo que debe reducir la cantidad de harina para poder hacer un bizcocho proporcional al de receta. ¿En qué medida debe hacerlo?

11. ¿Qué es lo que me pide el problema que averigüe?

- La proporción en que la leche, el azúcar y la harina deben disminuir para poder hacer el bizcocho.
- La cantidad de los otros componentes -leche, azúcar y harina- que caben en el molde de hornear.
- La cantidad de los otros componentes que se deben poner en el bizcocho junto con la levadura.

12. ¿Cuál de las siguientes informaciones es necesario conseguir para resolver el problema?

- Qué cantidad representa la levadura que se usa normalmente respecto a la que tiene.
- La diferencia entre la levadura que tiene y la levadura que se usa normalmente.
- Qué parte de la levadura que se usa normalmente es la que tiene en este momento.

13. ¿Cuál de las siguientes formas de plantear matemáticamente el problema es la adecuada?

a)  $(\frac{1}{6} : \frac{1}{8}) \times \frac{3}{4}$       b)  $(\frac{1}{8} : \frac{1}{6}) \times \frac{3}{4}$       c)  $(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}) \times \frac{3}{4}$

14. La cantidad de azúcar que hay que mezclar según la receta es equivalente a:

a)  $\frac{3}{5}$       b)  $\frac{7}{10}$       c)  $\frac{7}{5}$

---

## NÚMEROS RACIONALES

## SEGUNDA PARTE

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

### PROBLEMA 4

15. ¿Cuál de los siguientes problemas requiere usar la expresión  $8/5$ ?

- Juan tiene cinco cuartos de pizza y quiere dar la misma cantidad a cada uno de sus ocho amigos. ¿Qué fracción de pizza debe dar a cada uno?
- Dos hermanos han salido al tiempo para ir al colegio. Pedro ha recorrido la quinta parte del camino y su hermano la octava parte. ¿Quién está más cerca?
- Un cocinero pone, cada cinco litros de leche, ocho cucharadas de azúcar. Como sólo tiene tres litros, ¿cuántas cucharadas de azúcar debe poner?

### PROBLEMA 5.

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

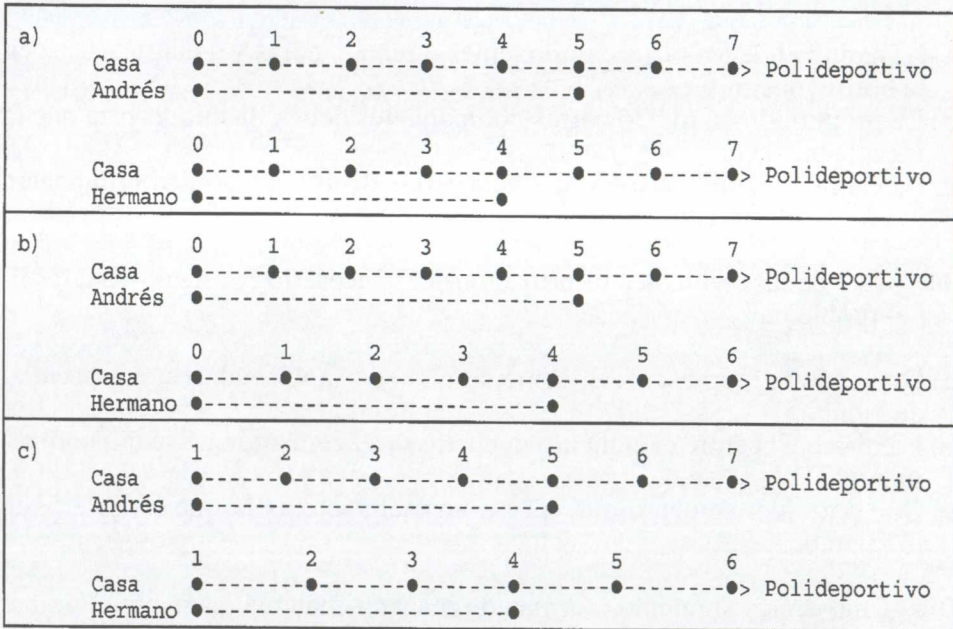


Andrés, que ha salido de su casa para ir al polideportivo, ha recorrido cinco séptimas partes del trayecto. En el mismo momento, su hermano - que había salido antes- ha recorrido cuatro sextas partes del mismo trayecto. ¿Cuál de los dos está más cerca del polideportivo?

16. ¿Cuál de las éstas informaciones es necesario conseguir para responder a la pregunta? —

- La diferencia entre los trayectos recorridos.
- Los metros que separan la casa del polideportivo.
- Los metros de trayecto recorridos por cada hermano.

17. ¿Cuál de las siguientes formas de representar gráficamente el problema es correcta?



18. ¿Cuál de las siguientes formas de plantear matemáticamente el problema es **INCORRECTA**?

a)  $\frac{5}{7} - \frac{4}{6}$

b)  $\frac{4}{6} - \frac{5}{7}$

c)  $\frac{5}{7} - \frac{4}{7}$

### PROBLEMA 6

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

Si tengo tres sacos y cuarto de cemento y la preparación de la mezcla de una carga completa de la hormigonera requiere poner cuatro y medio, ¿en qué medida debo reducir los otros componentes -arena, piedras, agua- para poder usar tres sacos y cuarto en lugar de cuatro y medio de cemento?

19. ¿Qué es lo que me pide el problema que averigüe?

- a) La cantidad de los otros componentes -arena, piedras y agua- que cabe en la hormigonera.
- b) La proporción en que los otros componentes deben disminuir para que la mezcla pueda hacerse.
- c) La cantidad de los otros componentes que debo poner en la hormigonera junto con el cemento.

20. ¿Cuál de las siguientes informaciones es necesario conseguir para resolver el problema?

- a) Qué cantidad representa el cemento que se usa normalmente respecto al que tengo.
- b) La diferencia entre el cemento que tengo y el cemento que se usa normalmente.
- c) Qué parte del cemento que se usa normalmente es la que tengo en este momento.

21. ¿Cuál de las siguientes formas de plantear matemáticamente el primer paso para resolver el problema es la adecuada:

a)  $4 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{4}$

b)  $4 \frac{1}{2} : 3 \frac{1}{4}$

c)  $3 \frac{1}{4} : 4 \frac{1}{2}$

22. La cantidad de cemento disponible para mezclar según el problema es equivalente a:

a)  $\frac{13}{4}$       b)  $\frac{4}{4}$       c)  $\frac{3}{4}$

### PROBLEMA 7

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

Para cubrir 3 km. de carretera se necesitan 540 toneladas de material: tres quintos de arena y el resto de asfalto. ¿Cuántas toneladas de asfalto serán necesarias para cubrir 14 Km.?

23. ¿Cuál de las siguientes informaciones es necesario conseguir para resolver el problema?

- a) El número total de toneladas del conjunto de materiales que se emplearán en los 14 km.
- b) Cuántas toneladas de las empleadas en los 14 km. representan los cuatro quintos de arena.
- c) Cuántas toneladas de material se utilizan en cada uno de los Km de carretera construidos.

24. ¿Cuál de las siguientes formas de plantear matemáticamente el problema es la adecuada para resolverlo:

a)  $\frac{540}{3} \times \frac{2}{5} \times 14$       b)  $(540 \frac{2}{5} : 3) \times 14$       c)  $(540 - \frac{3}{5} 540) \times 14$

25. Supón que en el problema te preguntan: "¿Cuál es la razón entre la arena y el asfalto necesarios para cubrir los 14 km. de carretera?". En esta pregunta la palabra razón se refiere:

- a) A la parte que representa la arena respecto al total de asfalto y arena.
- b) A la parte que representa la arena respecto a la cantidad de asfalto.
- c) A la diferencia entre la arena y el asfalto que es necesario utilizar.

26. ¿Cuál es la razón entre el asfalto y la arena necesarios para cubrir los 14 km. de carretera?

a)  $\frac{2}{3}$       b)  $\frac{1}{5}$       c)  $\frac{2}{5}$

27. El ingeniero encargado de construir la carretera ha comprado 2000 toneladas de arena y 500 de asfalto. ¿Cuál de las siguientes cantidades refleja mejor la razón entre el asfalto y la arena?

- a) 2000 - 500, ya que es la diferencia entre las cantidades que ha comprado.
- b) 2500 / 2000, ya que del total de toneladas compradas, 2000 son de arena.
- c) 1 / 4, ya que por cada tonelada de asfalto se han comprado 4 de arena.

28. Vamos a llamar A a la cantidad de asfalto que se utiliza para construir 250 Km. y T (tierra) a la cantidad de arena que se utiliza para construir esos mismos 250 km. El resultado de la operación  $A/250 + T/250$  nos indicará:

- a) La cantidad de toneladas de ambos materiales juntos que se utilizan en la construcción de 1 Km.
- b) La cantidad de toneladas de ambos materiales juntos que se utilizan al construir los 250 km.
- c) La cantidad que se utiliza de cada material cuando éstos se reparten por igual entre los 250 km.

29. Suponiendo de nuevo que A es la cantidad de asfalto que se utiliza para construir 250 Km. y T es la cantidad de arena que se utiliza para construir esos mismos 250 km., la operación  $T/250 - A/250$  nos indicará:

- a) La diferencia de toneladas entre uno y otro material en cada Km. construido.
- b) La diferencia de toneladas entre uno y otro material en los 250 km. construidos.
- c) Ninguna de las dos alternativas anteriores es cierta.

30. Indica cuál de las siguientes operaciones es **INCORRECTA**:

a)  $\frac{A}{250} \times \frac{T}{250} = \frac{(A \times T)}{(250 \times 250)}$     b)  $\frac{A}{250} - \frac{T}{250} = \frac{(A - T)}{250}$     c)  $\frac{A}{250} + \frac{T}{250} = \frac{(A + T)}{500}$

**NÚMEROS RACIONALES****TERCERA PARTE**

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

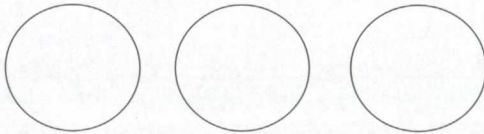
Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

**PROBLEMA 8.**

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

El cocinero de un restaurante tiene que repartir tres pizzas entre cuatro amigos. ¿Cómo puede hacerlo para que cada amigo reciba una ración igual?

31. Marca cómo deberían cortarse las pizzas para que cada amigo reciba la misma cantidad de pizza.



32. ¿Qué número refleja correctamente la cantidad de pizza que se come cada uno de los amigos?

- a)  $\frac{3}{4}$ , ya que son tres las pizzas a repartir entre los cuatro amigos.
- b)  $\frac{4}{3}$ , ya que hay que extraer cuatro raciones de las tres pizzas.
- c)  $\frac{3}{12}$ , ya que si las dividimos en doce pedazos, cada uno come tres.

## PROBLEMA 9.

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

Para medir la longitud de un campo de fútbol con sus pasos, dos jugadores parten al mismo tiempo de extremos opuestos. Con cada paso el primer jugador recorre 8 milésimas partes del campo, mientras el segundo recorre una centésima parte. Después de diez pasos, ¿cuál de los dos está más cerca del extremo opuesto a aquél del que ha salido?

33. ¿Cuál de las siguientes informaciones es necesario conseguir para resolver el problema?

- a) Los metros de longitud que tiene el campo en total.
- b) Los metros del trayecto total recorridos por cada uno.
- c) La diferencia entre la distancia recorrida por cada uno.

34. ¿Cuál de las siguientes formas de plantear matemáticamente el problema es **INCORRECTA**?

$$a) \frac{8}{1000} - \frac{1}{1000} \quad b) \frac{1}{100} - \frac{8}{1000} \quad c) \frac{8}{1000} - \frac{1}{100}$$

35. En algún momento del recorrido, los dos jugadores se encontrarán. ¿Cuál de los siguientes esquema gráficos representa mejor lo que ocurrirá en realidad?

- a) Longitud: ●-----●  
 Jugador 1 ●----->x<-----● Jugador 2
- a) Longitud: ●-----●  
 Jugador 1 ●----->x<-----● Jugador 2
- a) Longitud: ●-----●  
 Jugador 1 ●----->x<-----● Jugador 2

## PROBLEMA 10.

36. ¿Cuál de los siguientes problemas requiere usar la expresión  $2/5$  al plantear la forma de solucionarlo?

- a) Dos ciclistas han salido al mismo tiempo. A ha recorrido la mitad del camino y B la quinta parte. ¿Cuál de los dos está más cerca de la meta?
- b) Un albañil pone cinco paladas de cemento por cada dos de arena. Tiene cemento para siete paladas. ¿Cuántas paladas de arena debe poner?
- c) Ana tiene dos octavos de pastel y quiere que cada uno de sus cinco amigos tengan una parte igual. ¿Qué fracción de tarta debe dar a cada uno?

## PROBLEMA 11

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

Juan y Pedro trabajan lavando coches en dos talleres distintos. A Juan le pagan 2.000 pts cada 25 coches que lava. A Pedro le pagan 1.500 pts cada 15 coches que lava. ¿Cuál de los dos cobra más por cada coche lavado?

37. Para saber cuál de los dos cobra más por cada coche que lava se podría:

- a) Calcular el total de dinero que ganan ambos para un mismo número de coches lavados.
- b) Calcular los coches que debe lavar cada uno para ganar una cantidad de dinero dada igual.
- c) Se pueden utilizar indistintamente tanto el procedimiento a) como el procedimiento b).

38. Si queremos saber cuánto le pagarían a Pedro cuando lava 30 coches, la planificación correcta del procedimiento para resolver el problema es:

$$a) \frac{1500}{15} = \frac{25}{X} \quad b) \frac{1500}{X} = \frac{2000}{25} \quad c) \frac{1500}{15} = \frac{25}{X}$$

39. Supón que en el problema te preguntan: "¿Cuál es la razón entre lo que gana Pedro y lo que gana Juan al lavar 500 coches?" En esta pregunta la palabra razón se refiere:

- a) A la diferencia entre el dinero ganado por Pedro y el dinero ganado por Juan.
- b) A la parte que representa lo ganado por uno respecto a lo ganado por los dos.
- c) A la parte que representa lo ganado por uno respecto a lo ganado por el otro.

40. ¿Cuál es la razón entre lo que ganan uno y otro por cada coche que lavan?

a)  $\frac{1}{1}$       b)  $\frac{25}{15}$       c)  $\frac{10}{8}$

41. En un mes concreto, Pedro gana 60.000 pts mientras que Juan gana 40.000. ¿Cuál de las siguientes cantidades refleja mejor la razón entre lo que gana uno y otro?.

- a) 100.000/60.000, ya que del total Pedro gana 60.000 pts.
- b) 6/4, ya que por cada 6 pts que gana Pedro, Juan gana 4 pts.
- c) 60.000 - 40.000, ya que es la diferencia entre lo que ganan.

42. Vamos a llamar J a la cantidad de pesetas que gana Juan cuando lava 135 coches, y vamos a llamar P a la cantidad que gana Pedro cuando lava el mismo número de coches. La operación  $J/135 + P/135$  nos indicará:

- a) El total de dinero que ganarán entre ambos al lavar cada uno 135 coches.
- b) Lo que cada uno ganaría por coche si se repartieran por igual lo ganado.
- c) La cantidad de dinero que ganan entre ambos cuando cada uno lava un coche.

43. Sabiendo que J es la cantidad de pesetas que gana Juan cuando lava 135 coches, y que P es la cantidad que gana Pedro cuando lava el mismo número de coches, podemos decir que el resultado de la operación  $J/135 - P/135$  nos indicará:



- a) La diferencia de dinero entre uno y otro cuando ambos lavan 135 coches.  
 b) La diferencia de dinero entre uno y otro empleado en cada coche que lavan.  
 c) Ninguna de las dos anteriores alternativas es cierta.

44. Indica cuál de las siguientes operaciones es **INCORRECTA**:

$$a) \frac{J}{135} - \frac{P}{135} = \frac{(J - P)}{135} \quad b) \frac{J}{135} + \frac{P}{135} = \frac{(J + P)}{270} \quad c) \frac{J}{135} \times \frac{P}{135} = \frac{(J \times P)}{(135 \times 135)}$$

## PROBLEMA 12

Lee el problema siguiente y contesta a las preguntas que se plantean después sobre el mismo.

El camarero de un restaurante quiere guardar un mantel que tiene forma cuadrada, por lo que hace cinco pliegues consecutivos. En cada uno de los pliegues el camarero une los extremos más alejados. ¿Cuál será, tras el quinto pliegue, el área del mantel doblado?

45. A continuación se dan diferentes respuestas y sus justificaciones. Elige la correcta.
- a)  $1/5$  del total, ya que se han realizado en total 5 pliegues del mantel extendido.  
 b)  $1/32$  del total, ya que tras cada pliegue la superficie es  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ... de la original.  
 c)  $1/10$  del total, ya que en cada uno de los 5 pliegues del mantel la superficie se reduce  $1/2$



**BATERÍA AP-M**  
**(Aprendizaje de las Matemáticas)**

© Alonso-Tapia, J. y Olea Díaz, J.

**ECUACIONES**  
**(2° DE E.S.O.)**

**PRIMERA PARTE**

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

A continuación encontrarás varias preguntas seguidas de diferentes alternativas de respuesta. Lee con detenimiento cada pregunta y señala la alternativa que contenga la respuesta correcta. Por ejemplo, si te encuentras con una pregunta como:

Señala la solución correcta de la siguiente ecuación:

$$3X = 15$$

- a) Doce.
- b) Cinco.
- c) Dieciocho.

deberías rodear con un círculo la alternativa b.

**TRABAJA CON ATENCIÓN**

**PUEDES EMPEZAR**



**ECUACIONES****PRIMERA PARTE****PROBLEMA 1**

1. Señala cuál de los siguientes problemas NO es propiamente un problema de ecuaciones:

- a) Félix ha gastado cinco sextos de su paga mensual; Mariano, siete novenos y Francisco, seis octavos. ¿Quién ha ahorrado más?
- b) Pedro compra uvas a 100 pts. el kg., naranjas a 40 y patatas a 20. ¿A cuánto debe vender el kilo de cada tipo de fruta para obtener un beneficio del 20%?
- c) Ninguno de los dos problemas anteriores es propiamente un problema de ecuaciones.

2. Señala cuál de los siguientes problemas SÍ es propiamente un problema de ecuaciones:

- a) Luis ha recorrido tres quintos del camino de su casa al colegio y Jesús, su vecino de al lado, dos tercios. ¿Cuál de los dos está más cerca?
- b) Si en la tienda descuentan el 5% por cada 1000 pts. de compra, ¿cuánto descontarán a Ana si los artículos que ha comprado valen 3647 pts?
- c) Según una receta, para hacer un pastel se necesitan  $\frac{3}{4}$  de harina y para hacer otro,  $\frac{12}{17}$ . ¿Para cuál de los dos pasteles hace falta más harina?

3. Señala cuál de los siguientes problemas SÍ es propiamente un problema de ecuaciones:

- a) Los dos lados de un campo rectangular sembrado de cebada miden, respectivamente, 400 y 300 m. ¿Cuánto mide la diagonal de dicho campo?
- b) Por comprar un coche de 2.000.000 de pts. se paga por impuestos un 28% en España y 560.000 pts. en Alemania. ¿Dónde se paga menos impuestos?
- c) Elsa ha tomado dos tercios de la dosis de una vacuna; Delia, tres quintos, y Luisa, cuatro séptimos. ¿Cuál de las tres ha tomado más?

4. Señala cuál de los siguientes problemas NO es propiamente un problema de ecuaciones:

- a) Juan tiene 3000 pts. Las pone en el banco a un interés del 10% anual. ¿Cuánto habrá ganado después de un año?
- b) Lucas quiere compartir dos tartas con sus 5 amigos. ¿Qué parte de tarta debe recibir cada uno para que todos reciban lo mismo?
- c) Ramón es más bajo que Pedro; Andrés es más bajo que Santiago; Santiago es más alto que Pedro. ¿Quién es el más alto?

5. Señala cuál de los siguientes problemas SÍ es propiamente un problema de ecuaciones:

- a) El valor de X es mayor que el de Y; el valor de Y es menor que el de W y el de W es menor que el de Z. ¿Cuál de todos los valores es menor?
- b) Sara tiene que pagar al banco el 12% de interés anual por un préstamo de 2.000.000 de pts. ¿Cuánto dinero tendrá que pagar?
- c) Los dos problemas anteriores son problemas de ecuaciones.

## PROBLEMA 2

Una larga familia se reúne para celebrar un cumpleaños. A la fiesta asisten 48 personas. Hay el doble de mujeres que de hombres, y el número de niños es tres veces el de hombres. Nos interesa saber cuántas mujeres, hombres y niños asistieron a la fiesta de cumpleaños.

6. El número de incógnitas que necesitamos establecer es:

- a) Tres, ya que asisten al cumpleaños tres clases de personas: hombres, mujeres y niños.
- b) Dos, pues si sabemos los hombres y mujeres, obtenemos directamente el número de niños.
- c) Una, pues sabiendo el número de hombres, obtenemos directamente el de mujeres y niños.

7. Para resolver el problema, lo más oportuno sería establecer:

- Una ecuación de primer grado.
- Una ecuación de segundo grado.
- Un sistema de ecuaciones.

8. Cuáles de los planteamientos siguientes es el adecuado para resolver el problema:

a)	b)	c)
$X + Y + Z = 48$ $Y = 2X; Z = 3X$	$X + Y + Z = 48$ $Y = X^2; Z = X^3$	$X + Y + Z = 48$ $2Y = X; 3Z = X$

9. Indica el número de personas de cada clase que han asistido a la fiesta:

Hombres: \_\_\_\_\_ Mujeres: \_\_\_\_\_ Niños \_\_\_\_\_

### PROBLEMA 3

En un torneo de baloncesto de verano juega una selección de la NBA con una selección del resto del mundo. En la selección de la NBA sólo encestan 4 jugadores:

- **Jordan**, que ha encestado la mitad de los puntos de su equipo.
- **Johnson**, que ha encestado la mitad de los puntos restantes (es decir, exceptuando los de Jordan).
- **Bird**, que ha encestado una tercera parte de los puntos restantes (exceptuando los anotados por Jordan y Johnson).
- **Pippen**, que ha encestado los puntos restantes (exceptuando los conseguidos por sus 3 compañeros), que sabemos que son 20 puntos.
- ¿Cuántos puntos ha marcado en total la selección de la NBA?
- ¿Cuántos puntos ha marcado cada jugador?

10. Para saber la *puntuación total del equipo* de la NBA hay que resolver:

- Cuatro incógnitas, una por cada uno de los jugadores del equipo de la NBA.
- Tres incógnitas, pues el enunciado nos dice los puntos marcados por Pippen.
- Una sola incógnita, pues los tantos marcados por cada uno son parte del total.

11. Para saber el número de puntos marcado por cada jugador además del número de puntos marcados por el equipo de la NBA, necesitarías:

- Establecer un sistema de ecuaciones.
- Establecer una ecuación de primer grado.
- Establecer una ecuación de segundo grado.

12. Siendo X el número total de puntos que consigue el equipo de la NBA, los puntos conseguidos por Jordan pueden establecerse como:

a)  $X : \frac{X}{2}$                       b)  $X : \frac{1}{2}$                       c) a y b son correctas

13. Los puntos conseguidos por Johnson pueden establecerse como:

a)  $X : \frac{2}{3}$                       b)  $\frac{X}{2} : 2$                       c) a y b son correctas

14. La ecuación que expresa los puntos conseguidos por Bird:  $(X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4}) : 3$  es equivalente a:

<p>a) <math>3X : 4</math> porque</p> $(X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4}) : 3 =$	$= (X : \frac{1}{3}) - (X : \frac{2}{3}) - (X : \frac{4}{3}) =$ $= 3X - \frac{3X}{2} - \frac{3X}{4} = \frac{12X - 6X - 3X}{4} = \frac{3X}{4}$
<p>b) <math>X : 12</math> porque</p> $(X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4}) : 3 =$	$= (\frac{4X}{4} - \frac{2X}{4} - \frac{X}{4}) : 3 = \frac{X}{4} : 3 = \frac{X}{12}$
<p>c) <math>X : 3</math> porque</p> $(X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4}) : 3 =$	$= (\frac{4X}{4} - \frac{2X}{4} - \frac{X}{4}) : \frac{3}{4} = \frac{X}{4} : \frac{3}{4} = \frac{4X}{12} = \frac{X}{3}$



15. La ecuación final que permite averiguar el número total de puntos del equipo de la NBA es:

a)	b)	c)
$X = \frac{X}{2} + \frac{X}{4} + \frac{3X}{4} + 20$	$X = \frac{X}{2} + \frac{X}{4} + \frac{X}{12} + 20$	$X = \frac{X}{2} + \frac{X}{4} + \frac{X}{3} + 20$

16. El número de puntos conseguidos por Jordan, Johnson y Bird, respectivamente, es:

a) 80, 40, 15

b) 60, 30, 10

c) 100, 50, 30

## ECUACIONES

## SEGUNDA PARTE

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

### PROBLEMA 4.

El cajero de un banco había terminado de hacer el recuento del dinero que había en caja, cuando un atracador se lo lleva todo. A la policía le interesa saber el número de billetes de cada tipo que se llevó. El cajero recuerda que había 2 millones de pesetas, en billetes de mil, dos mil y cinco mil pesetas. Recuerda que en total había 1180 billetes, y que había tres veces más billetes de mil que de dos mil.

17. El número de incógnitas que necesitamos establecer es de:

- a) Tres, ya que son tres los tipos de billetes que se había llevado el atracador.
- b) Dos, pues sabiendo el número de billetes de 2000, sabemos cuántos había de mil.
- c) Una, pues sabiendo el número de billetes de 1000, sabemos cuántos había de los demás.

18. Para ayudar a la policía a saber cuántos billetes se llevó el atracador de cada tipo, necesitaríamos establecer:

- Una ecuación de primer grado.
- Un sistema de ecuaciones.
- Una ecuación de segundo grado.

19. ¿Cuál de estas tres alternativas refleja mejor el planteamiento del problema para llegar a la solución que pide la policía:

- $$1000 X + 2000 Y + 5000 Z = 2000000$$

$$3X + Y + Z = 1180$$
- $$1000 X + 2000 X + 5000 X = 2000000$$
- $$1000 (3X) + 2000 X + 5000 Y = 2000000$$

$$3X + X + Y = 1180$$

20. La solución que tú darías a la policía es que el atracador se llevó:

\_\_\_\_\_ billetes de mil, \_\_\_\_\_ billetes de dos mil y \_\_\_\_\_ billetes de 5 mil.

### PROBLEMA 5

21. Supón que tienes que resolver el siguiente sistema de ecuaciones. ¿Cuál de los tres modos de proceder que se indican es INCORRECTO:

	a)	b)	c)
Sistema:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>Y = 600 - X;</math></li> <li>• <math>4X - 600 - X = 1500;</math></li> <li>• <math>3X = 2100;</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>Y = 600 - X;</math></li> <li>• <math>Y = 4X - 1500;</math></li> <li>• <math>600 - X = 4X - 1500</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(4X - Y) + (X + Y) = 1500 + 600</math></li> <li>• <math>4X - Y + X + Y = 2100</math></li> <li>• <math>5X = 2100</math></li> </ul>
$X + Y = 600$ $4X - Y = 1500$			

## PROBLEMA 6.

En un libro de texto aparece el siguiente problema. En relación con él, contesta a las preguntas que siguen.

Dos trabajadores salen de sus casas a las 8 de la mañana para ir a la fábrica en la que ambos trabajan. Uno va en coche a una velocidad media de 85 Km/h y el otro va en moto a una velocidad media de 55 Km/h, pero la casa del motorista está 15 Km más cerca. Los dos llegan juntos a la fábrica. ¿A qué distancia vive cada uno de la fábrica?

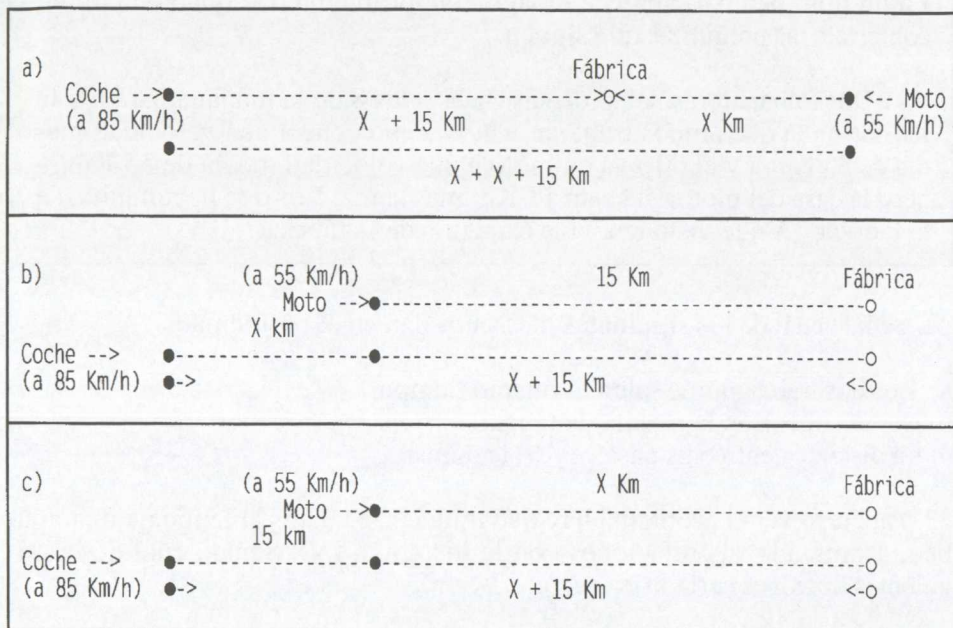
22. Señala cuál de los siguientes datos nos dan en el problema.

- a) Los dos trabajadores salen al mismo tiempo.
- b) Los dos recorren la misma distancia.
- c) La distancia entre sus casas es de 15 Kms.

23. Para resolver el problema hay que traducir los datos al lenguaje matemático, expresando sus relaciones con la incognita ( $X$ ). Señala cuál de las siguientes opciones sería la correcta:

- a) LLamar  $X$  a la distancia entre las casas de los trabajadores y  $X + 15$  a la distancia entre la casa del automovilista y la fabrica.
- b) LLamar  $X$  a la distancia entre la casa del motorista y la fábrica y  $X + 15$  a la distancia entre la casa del automovilista y la fábrica.
- c) LLamar  $X$  a la distancia entre la casa del motorista y la fábrica y  $X - 15$  a la distancia entre la casa del automovilista y la fábrica.

24. Señala cuál de las siguientes representaciones del problema es **ciertamente incorrecta**:



25. Para resolver el problema es necesario saber:

- Que la velocidad media es igual al espacio recorrido dividido por el tiempo empleado
- Que el espacio recorrido es igual a la velocidad media dividida por el tiempo empleado.
- Que el tiempo empleado es igual al espacio recorrido multiplicado por la velocidad media.

26. Por el contrario, para resolver el problema NO es necesario saber, aunque nos lo digan:

- La velocidad media a la que circulan los dos vehículos (85 y 55 Km.h.).
- La hora a la que salen de sus casas ambos trabajadores (8 de la mañana).
- La diferencia entre la distancias de sus casas a la fábrica (15 Km).

27. Señala cuál de las siguientes ecuaciones constituye un adecuado planteamiento del problema:

<p>a)</p> $\frac{X + 15}{85} = \frac{X}{55}$	<p>b)</p> $(X + 15) \times 85 = X \times 55$	<p>c)</p> $\frac{X - 15}{85} = \frac{X}{55}$
--	--	--

28. Señala la distancia a la que vive de la fábrica el propietario del coche: \_\_\_\_\_

### PROBLEMA 7

Observa la ecuación siguiente:

$$6X - 2X = 32$$

29. Señala a cuál de los enunciados siguientes corresponde a la misma.

- a) Seis veces la edad de Luis menos dos veces la edad que tiene Juan son 32 años.
- b) 6 veces la temperatura de hoy menos el doble de la misma temperatura, son 32 grados.
- c) Si compramos seis conejos y le restamos lo que valen dos pollos, nos quedan 32 pesetas.

### PROBLEMA 8

30. Supón que has de resolver la expresión que se indica. ¿Cuál de los modos de proceder es correcto?

	a)	b)	c)
<p>Expresión:</p> $\frac{X + 15}{85} = \frac{X}{55}$	$55X + 15 = 85X;$ $55X - 85X = -15;$ $-30X = -15$	$55X + 825 = 85X;$ $825 = 85X - 55X;$ $825 = 30X$	<p><i>m.c.m. de 85 y 55 = 935;</i></p> $\frac{11(X + 15)}{935} = \frac{17(X)}{935};$ $11X + 15 = 17X;$

**ECUACIONES****TERCERA PARTE**

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ Curso \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

**PROBLEMA 9**

A continuación se te presentan los enunciados de diferentes problemas. Señala, si para resolverlos hace falta plantear una ecuación simple, un sistema de ecuaciones o una ecuación de segundo grado.

31. En un garaje hay motos de 2 cilindros y coches de 6 cilindros. En total hay 80 cilindros y 54 ruedas. ¿Cuántas motos y coches hay en el garaje?

a) Ecuación simple.      b) Sistema de ecuaciones.      c) Ecuación de segundo grado.

32. En la sección de pasatiempos de un periódico te dicen que hay dos números consecutivos cuyo producto es igual a 240. ¿Cuáles son esos números?

a) Ecuación simple.      b) Sistema de ecuaciones.      c) Ecuación de segundo grado.

33. Una empresa está reduciendo el número de oficiales de carpintería porque el sueldo diario de un oficial es 1000 pts. mayor que el de los aprendices que trabajan con él. Con el producto de lo que ganan al día el oficial y un aprendiz se podría pagar durante diez años a este último, lo que explica el interés de la empresa en reducir los oficiales. ¿Cuánto gana uno y otro cada día?

a) Ecuación simple.      b) Sistema de ecuaciones.      c) Ecuación de segundo grado.

34. En una ferretería, tras vender la mitad, la quinta parte y la décima parte de una cadena, quedan 10 metros. ¿Cuál era la longitud inicial de la misma?

a) Ecuación simple.      b) Sistema de ecuaciones.      c) Ecuación de segundo grado.

35. Si la iluminación de un objeto es directamente proporcional a la intensidad del foco luminoso e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al mismo, sabiendo que la intensidad de dos focos es de 100 y 50 unida-

des, y que distan entre sí 10 m., ¿a qué distancia de cada uno debería colocarse un objeto para que recibiera la misma iluminación por los dos lados?

- a) Ecuación simple.      b) Sistema de ecuaciones.      c) Ecuación de segundo grado.

36. En el interior de un monumento funerario se ha encontrado un sarcófago prismático de base rectangular, recubierto de placas de marfil. Los lados de la base del mismo miden 1,5 y 2,5 metros respectivamente, y su altura es de 1,12 m. ¿Cuál es el número de  $m^2$  de marfil que se emplearon en recubrir los lados visibles del sarcófago?

- a) Ecuación simple.      b) Sistema de ecuaciones.      c) Ecuación de segundo grado.

#### PROBLEMA 10.

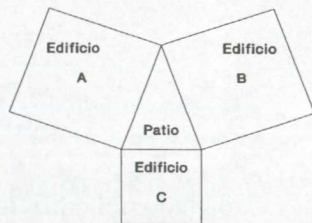
37. Indica cuál de los tres enunciados siguientes corresponde a la ecuación:  
 $X^2 - 196 = 0$ .

- a) Calcula el valor de un número X sabiendo que la raíz cuadrada del mismo es 196.  
 b) Calcula la longitud X de cada lado de un cuadrado sabiendo que su área es  $196 m^2$ .  
 c) Sabiendo que el doble de la edad de una persona menos 196 años es cero, calcula su edad.

#### PROBLEMA 11

Un arquitecto dispone de un solar para construir tres edificios de viviendas con un patio interior común, de acuerdo con el plano que ilustra el dibujo siguiente:

En el plano puedes ver que el arquitecto proyecta tres edificios cuadrados, dos de los cuales son iguales (el A y el B) y otro, más pequeño (el C). Los tres edificios ocupan una superficie de  $712 m^2$ , siendo cada lado del edificio C 10 m. más corto que cada lado de los edificios A y B. Interesa conocer exactamente, cuantos  $m^2$  ocupa cada uno de los tres edificios.



38. Para poder resolver el problema es preciso conocer uno de los siguientes datos:

- a) La proporción que representa la superficie del patio en relación con la de los tres edificios.
- b) Cuántas veces es mayor la superficie del edificio A (o, indistintamente, la del B) que la del C.
- c)Cuál es la longitud de uno de los lados del patio, siendo indistinto de cuál de ellos se trate.

39. Para resolver el problema es necesario denominar las incógnitas correctamente. Indica en cuál de los siguientes casos el modo en que se definen las incógnitas es INCORRECTO:

- a) Se denomina  $X$  al lado del edificio B y  $X-10$  al lado del edificio C.
- b) Se denomina  $X$  al lado del edificio C y  $X+10$  al lado del edificio B.
- c) Se denomina  $X$  al lado del edificio B y  $X+10$  al lado del edificio C.

40. Señala cuál de las ecuaciones siguientes supone plantear el problema adecuadamente:

a)  $X^2 + 2(X + 10)^2 = 712$     b)  $X^2 + 2(X - 10)^2 = 712$     c)  $2X^2 + (X - 10)^2 = 712$

41. Supón que la ecuación adecuada para resolver el problema fuera  $2X^2 + (X - 10)^2 = 712$ . Señala cuál de las siguientes formas de resolverla es la correcta.

a)  $2X^2 + (X - 10)^2 = 712; 2X^2 + X^2 + 100 - 20X = 712;$   
 $3X^2 - 20X - 612 = 0; X = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 + 12 \times 612}}{6}$

b)  $2X^2 + (X - 10)^2 = 712; 2X^2 + X^2 - 100 = 712;$   
 $3X^2 - 812 = 0; X = \frac{\pm \sqrt{4 \times 3 \times 812}}{6}$

c)  $2X^2 + (X - 10)^2 = 712; 2X^2 + X^2 + 100 - 20X = 712;$   
 $3X^2 - 20X - 612 = 0; X = \frac{+20 \pm \sqrt{20^2 + 12 \times 612}}{6}$

42. Cada lado del edificio B mide:

- a) 10 m.
- b) 18,00 m.
- c) 88,71 m.



Apéndices 2.5 y 2.6.

2.5: Criterios de corrección.

2.6: Material utilizado para la valoración de las pruebas.



## APÉNDICE 2.5: ALTERNATIVAS CORRECTAS

NÚMEROS ENTEROS: ALTERNATIVAS CORRECTAS							
Partes 1ª, 2ª, 4ª y 5ª							
1	C	11	B	20	C	29	A
2	B	12	C	21	A	30	C
3	A	13	B	22	A	31	A*
4	A	14	C	23	C	32	B
5	C	15	A	24	B	33	C
6	B	16	A	25	A	34	B
7	A	17	A	26	C	35	A
8	C	18	C	27	A	36	B
9	B	19	B	28	B	37	A
10	B					38	C

NÚMEROS ENTEROS: ALTERNATIVAS CORRECTAS											
PARTE 2ª											
Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	C	I	I	I	I	C	C	I	I	I	C
Preg.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	C	I	C	C	I	I	I	I	I	I	C
Preg.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	31	33
	I	I	I	I	C	C	I	I	C	C	I
Preg.	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
	C	C	I	C	C	I	C	I	I	I	I
Preg.	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
	C	C	I	C	I	I	C	C	C	I	I
Preg.	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
	C	C	I	C	I	I	C	C	I	C	I

C = indica que el sujeto debe escoger C para que su respuesta sea correcta.

I = indica que el sujeto debe escoger I para que su respuesta sea correcta.

PROPORCIONALIDAD: ALTERNATIVAS CORRECTAS										
Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B	B	A	A	B	B	C	B	A	B
Preg.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	C	C	C	C	C	B	B	C	C	B
Preg.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	B	C	C	B	A	C	B	A	B	B
Preg.	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	A	A/C	A	B	B	A	B	A	C	C
Preg.	41	42								
	C	B								

NÚMEROS RACIONALES: ALTERNATIVAS CORRECTAS										
Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B	A	C	C	A	C	C	B	C	B
Preg.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	A	C	B	C	C	A	B	C	B	C
Preg.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	C	A	C	A	B	A	C	A	A	C
Preg.	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	-	C	C	A	A	B	C	2	C	C
Preg.	41	42	43	44	45					
	B	C	B	B	B					

ECUACIONES: ALTERNATIVAS CORRECTAS										
Preg.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	A	B	A	C	B	A	C	A	8/16/24	C
Preg.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	A	A	B	B	B	B	A	B	C	780/260/140/
Preg.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	A	A	B	B	A	B	A	42.5	B	B
Preg.	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	B	C	C	A	C	A	B	C	C	A
Preg.	41	42								
	C	B								

## APÉNDICE 2.6

## APÉNDICE 2.6

## ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

## Valoración de pruebas de Matemáticas

## Protocolo

Edad: \_\_\_\_\_ Años de docencia: \_\_\_\_\_ Centro: Público \_\_ Privado \_\_ Concertado \_\_

Sexo: ( ) Hombre ( ) Mujer Provincia: \_\_\_\_\_

El objetivo de este estudio es obtener de diferentes profesores del área de Matemáticas su percepción acerca de la adecuación de varias pruebas construidas para evaluar el conocimiento de los alumnos en relación con algunos temas de su área. Para ello se pide:

I. Evaluar el grado de **RELEVANCIA** de cada pregunta para la evaluación de los objetivos a conseguir con el estudio de los temas siguientes de 7° y 8° de EGB: a) Números enteros; b) Proporcionalidad; c) Números racionales; d) Ecuaciones. Esto es, se trata de señalar si, en su opinión, la adquisición del aprendizaje al que hace referencia la pregunta es imprescindible, importante, poco importante o irrelevante en relación con la evaluación de los contenidos y capacidades a desarrollar con el estudio de dichos temas.

Para evaluar la relevancia de una pregunta, basta con marcar con una X en la casilla elegida dentro de la columna correspondiente al elemento de que se trate.

II. **Estimar el nivel de dominio** que un alumno de su centro debe alcanzar para que usted, como profesor o profesora, considere que el **grado de aprendizaje** mostrado es **suficiente** como para que ese alumno pueda proseguir su proceso de aprendizaje sin dificultad.

Se trata de situarse en el siguiente supuesto: "Si cada objetivo de aprendizaje fuese medido por cien preguntas del mismo contenido (aunque variase la presentación de las mismas), (usted) consideraría que un alumno que resolviera correctamente X (100, 80, 60, etc) preguntas de las planteadas dominaría suficiente ese objetivo como para darlo por su-

perado. Por ejemplo, si se trata de ajustar un reacción, quizás usted consideraría que un 90% de aciertos es suficiente como para poder decir que ese aprendizaje está bien dominado.

Para evaluar el grado de dominio requerido, lea cada pregunta y señale la cantidad (0 al 100) en la casilla correspondiente.

EJEMPLO:

Número de pregunta	1	2	3	4	5
IMPRESINDIBLE	X		X		
IMPORTANTE		X			
POCO IMPORTANTE				X	
IRRELEVANTE					X
% DE DOMINIO	90	85	75	95	65

III. Finalmente, le pedimos que evalúe: a) La relevancia de la prueba en su conjunto para evaluar el tema indicado, esto es, el grado de adecuación con que cubre el tema sobre el que versa; y b) el grado de dominio que consideran que un alumno debería tener del conjunto de conocimientos que cubre. Para ello debe responder de modo semejante al indicado anteriormente.



NÚMEROS ENTEROS Partes 1<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup> y 5<sup>a</sup>

Nº de pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	37	38
Imprescindible		
Importante		
Poco importante		
Irrelevante		
% de Dominio		

2ª Parte	Respóndase rodeando el número elegido con un círculo											
Relevancia	. Ninguna 1 2 3 4 5 6 7 Muchísima											
Dominio	0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100											

Prueba completa	Respóndase rodeando el número elegido con un círculo											
Relevancia	. Ninguna 1 2 3 4 5 6 7 Muchísima											
Dominio	0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100											



## PROPORCIONALIDAD

Nº de pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	37	38	39	40	41	42	43	44	45
Imprescindible									
Importante									
Poco importante									
Irrelevante									
% de Dominio									

Prueba completa	Respóndase rodeando el número elegido con un círculo											
Relevancia	. Ninguna 1 2 3 4 5 6 7 Muchísima											
Dominio	0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100											

## NÚMEROS RACIONALES

Nº de pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	37	38	39	40	41	42	43	44	45
Imprescindible									
Importante									
Poco importante									
Irrelevante									
% de Dominio									

Prueba completa	Respóndase rodeando el número elegido con un círculo											
Relevancia	. Ninguna 1 2 3 4 5 6 7 Muchísima											
Dominio	0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100											

## ECUACIONES

Nº de pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Imprescindible												
Importante												
Poco importante												
Irrelevante												
% de Dominio												

Nº de pregunta	37	38	39	40	41	42
Imprescindible						
Importante						
Poco importante						
Irrelevante						
% de Dominio						

Prueba completa	Respóndase rodeando el número elegido con un círculo										
Relevancia	. Ninguna 1 2 3 4 5 6 7 Muchísima										
Dominio	0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100										



## CAPÍTULO 3

### UN MODELO PARA LA EVALUACIÓN COLEGIADA DE LA CAPACIDAD DE COMPRENSIÓN LECTORA AL TÉRMINO DE LA E.S.O.

J. Alonso Tapia (Dir.)

con la participación de:

M.A. Acera Andrés, L. Antolí Vañó, S. Callejo Fernández, M.T. Cantero Garrido, M.J. Díaz Jorge, P. Flores Boyero, J. Guía Esteban, P. Hernández García, M.T. Herrero García, R. Laguna Candelas, M.C. López González, M.L. López Herranz, S. Mansilla Izquierdo, A. Seguela Arregui, M.C. Setién Rupérez, M.L. Torres Guerri, F. Truchero Delgado,



## UN MODELO PARA LA EVALUACIÓN COLEGIADA DE LA CAPACIDAD DE COMPRENSIÓN LECTORA AL TÉRMINO DE LA E.S.O.

### 3.1. Introducción

#### 3.1.1. *Por qué una evaluación colegiada de la comprensión lectora.*

Uno de los problemas que han de enfrentar los profesores de Enseñanza Secundaria es el de la evaluación colegiada de los alumnos en base al grado de adquisición de las distintas capacidades que definen los objetivos generales de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Realizar este tipo de evaluación exige considerar los motivos que justifican que desde las distintas áreas tenga que evaluarse una capacidad dada, lo que equivale a considerar en qué medida contribuyen a su desarrollo.

En el caso de la capacidad de comprensión lectora, capacidad cuya adquisición constituye junto con el desarrollo del resto de capacidades de comunicación verbal el primer objetivo de la E.S.O. (MEC, 1989), su evaluación colegiada se justifica si se tienen en cuenta los siguientes hechos. En primer lugar, es preciso tener en cuenta que en el lenguaje intervienen conocimientos, procesos y destrezas que van más allá del dominio del código (Dijk y Kintsch, 1983; Dijk, 1985; Belinchón, Rivière e Igoa, 1992). Por poner un ejemplo, los niños aprenden a relacionar el lenguaje con los elementos del contexto no lingüístico en que tiene lugar, lo que constituye un primer paso hacia la comprensión. Luego aprenden a usar el propio contexto lingüístico como referente a partir del que comprender los distintos aspectos del lenguaje, algo especialmente importante en el caso de la lengua escrita donde, más allá de los aspectos formales del código, diferentes aspectos de la estructura de las frases y los textos constituyen indicadores de las intenciones comunicativas (Alonso-Tapia, 1991, 1992). Este hecho subraya la importancia de facilitar al alumno la comprensión de la relación entre el lenguaje, el contexto y los propósitos comunicativos, y la adquisición de destreza en el uso del mismo a partir de los conocimientos sobre las relaciones se-

ñaladas, porque no se puede llegar a dominar el lenguaje adecuadamente al margen de los contextos en que se utiliza, ya que éstos constituyen las condiciones que permiten determinar lo apropiado de su utilización.

Una consecuencia de lo anterior es que la enseñanza del lenguaje oral y escrito debe partir, por un lado, de las producciones orales y escritas de los escolares, producciones que tienen para ellos un sentido propio, para ayudarles a mejorar la forma de usar el lenguaje, interactuando con ellos desde los modelos que muestran como actúa el experto. Y, por otro lado, debe partir de los textos sobre los que éstos han de trabajar mientras estudian o a los que acceden de modo habitual, dado que constituyen algo que también tiene un valor para el alumno con independencia del valor que se derive de la propia instrucción en el lenguaje. En uno y otro caso, el objetivo que persigue el alumno con sus producciones y el contexto de utilización de los textos a los que accede contribuye a dar sentido a los esfuerzos por mejorar la comprensión y producción del lenguaje. Es en este contexto donde tiene sentido la enseñanza explícita de la Lengua -nunca fuera de él-, y es en este contexto donde tiene sentido declarar, como se hace en el DCB, que la comprensión y la expresión del lenguaje hablado y escrito es un objetivo de etapa cuya consecución debe ser facilitada por el trabajo realizado desde las distintas áreas, ya que en ellas el alumno encuentra contextos idóneos en los que el uso del lenguaje adquiere un significado claro para el alumno, significado proporcionado tanto por las intenciones comunicativas que subyacen a los textos que debe leer como por los modelos conceptuales desde los que posibilitan el marco desde el que entender el contenido de éstos.

El hecho de que el trabajo con textos realizado desde las distintas áreas pueda y deba contribuir al desarrollo de la capacidad de comprensión lectora por las razones señaladas justifica, pues, el que se proponga que la evaluación del grado en que ha sido adquirida se realice de forma colegiada. Ahora bien, ¿desde que supuestos evaluar la adquisición de la comprensión lectora?

### *3.1.2. Modelo de evaluación.*

Como hemos señalado y expuesto con mayor profundidad en otros trabajos (Alonso Tapia, 1991, cap. 5, 1992, 1995 a y b; Alonso Tapia y Corral, 1992; Alonso Tapia y Mateos, 1985, 1987; Carriedo y Alonso Tapia, 1994; Mateos y Alonso Tapia, 1991), en consonancia con la abundante literatura sobre este tema (Belinchón, Rivière e Igoa, 1992; Carriedo, 1992; García Madruga y col., 1995; Hunt, 1978; Just y Carpenter, 1992; Perfetti, 1989;



Sánchez Miguel, 1993; Van Dijk y Kintch, 1983; Vega y otros, 1989), comprender un texto equivale a formarse una representación de lo que en él se dice, representación en la que influye tanto la naturaleza del texto como las ideas y conocimientos con que el sujeto afronta su lectura y la propia actividad que realiza al leer. En consecuencia, en la medida en que el propósito de la evaluación sea no sólo determinar el grado en que el alumno es capaz de comprender sino también, en caso de que tenga problemas, decidir qué ayudas proporcionarle, será preciso considerar no sólo qué es lo que puede considerarse como criterio de comprensión, sino partir de un modelo sobre el proceso de construcción del significado y los factores que intervienen en él, de modo que sea posible determinar el origen de sus dificultades.

Por una parte, respecto al producto final del proceso de comprensión, la representación o modelo que el sujeto se forma del contenido de lo que lee, puede ser total o parcialmente correcta, o no existir en absoluto. Puede fallar a nivel de vocabulario, de frases, de párrafos o del texto completo. Puede que un sujeto no entienda lo que el texto quiere decir -las ideas o conceptos que el autor intenta transmitir-, bien porque no entienda las proposiciones del texto, bien porque por falta de conocimientos sea incapaz de formarse un modelo o representación mental de aquello a lo que el texto se refiere; o puede que no capte los aspectos connotativos o emocionales del mismo, lo que le impide experimentar las emociones que ha querido despertar el autor en el lector (Alonso Tapia, 1995). Esto hace necesario evaluar la comprensión a los distintos niveles mencionados.

Por otra parte, en cuanto a los determinantes de que la comprensión sea inadecuada, en los diferentes estudios anteriormente citados se ha puesto de manifiesto la importancia de evaluar los siguientes factores cuya importancia varía en función del tipo de textos que el sujeto ha de leer, textos normalmente adecuados en función del nivel educativo en que se encuentra el alumno:

- El conocimiento del vocabulario general y específico de los textos a leer.
- La supervisión de la comprensión a los distintos niveles.
- Las estrategias utilizadas para corregir errores de comprensión.
- Los conocimientos y presuposiciones previos sobre el tema de lectura y, eventualmente, sobre las razones que hacen que el autor use unos recursos específicos para expresarse.
- La actividad inferencial que el sujeto realiza al leer a partir de los aspectos sintácticos y semánticos del texto:
  - ¿Mantiene la referencia textual?
  - ¿Se representa adecuadamente la temporalidad?

- ¿Se representa adecuadamente la modalidad cierta, posible o probable de los enunciados?
- ¿Se representa adecuadamente las implicaciones de las conectivas?
- ¿Se representa adecuadamente el referente temático de las distintas expresiones del texto?
- ¿Identifica el contexto del documento que está leyendo?
- La estructura que el sujeto reconoce en el texto.
- Las estrategias para identificar la información importante.

Las razones por las que es preciso evaluar los factores anteriores son fácilmente comprensibles. En cuanto al *conocimiento del vocabulario*, es uno de los determinantes básicos de la comprensión, ya que facilita la rapidez de reconocimiento del significado de las palabras y, por ello, que el alumno pueda centrar su atención en otros aspectos de la comprensión. Ahora bien, las palabras encierran conceptos y éstos se aprenden y comprenden a través del trabajo realizado en el contexto de las distintas materias curriculares. De ahí la importancia de evaluar si los problemas de comprensión que se encuentran al leer textos procedentes de éstas se deben al desconocimiento de los conceptos pertinentes.

La comprensión se ve obstaculizada también por el hecho de que, en caso de detectarse fallos en la misma -no entender el significado de un término nuevo, de uno familiar en un contexto nuevo, la relación entre proposiciones, el referente de un pronombre o expresión anafórica, etc.-, el alumno *no conozca el tipo de estrategia adecuada para remediar los fallos de comprensión* con la menor interferencia posible para el proceso lector. En el caso, por ejemplo, de no conocer el significado de una palabra nueva, lo normal suele ser que se diga al alumno que mire en el diccionario, pero no siempre es lo más adecuado, pues interfiere el proceso de lectura. Dependiendo de la importancia de la palabra para la comprensión del contenido del texto y de su ubicación en el mismo, las estrategias más adecuadas pueden ser utilizar la información que proporciona el contexto para hacerse una idea aproximada de su significado, seguir leyendo en espera de que el autor lo aclare, ignorar su significado por no ser importante para entender el texto, etc.

En cuanto a los *conocimientos y presuposiciones previos sobre el tema de lectura* y, eventualmente, sobre la *razones que hacen que el autor use unos recursos específicos* para expresarse, influyen de modo determinante en la comprensión. Los primeros, contribuyendo a la rapidez y adecuación con que el lector se forma una representación de lo que dice el texto. En cuanto al significado que tiene usar unos u otros recursos comunicativos -reiteraciones, exageraciones, etc.-, dado que se trata de recursos que facili-

tan la identificación de la intención que el autor persigue al comunicarse, su desconocimiento contribuye a que el sujeto difícilmente capte tal intención, lo que obstaculiza notablemente la comprensión especialmente en el caso de textos literarios y argumentativos. Por todo ello, teniendo en cuenta que la organización de los conocimientos temáticos es algo a lo que contribuye el trabajo realizado en las distintas áreas, parece necesario evaluar este factor con textos procedentes de cada una de ellas.

Por lo que se refiere al papel de las inferencias que el sujeto realiza durante la lectura *relativas al significado de los distintos elementos sintáctico-semánticos del texto*, se ha comprobado que los enumerados anteriormente -temporalidad, conectivas, etc.- influyen de modo notable en la comprensión. El entrenamiento de estos procesos implicados en la comprensión se aborda principalmente aunque no de modo exclusivo, desde el área de Lengua, por lo que es preciso evaluar este factor igualmente utilizando textos procedentes de diferentes áreas.

Finalmente, en cuanto a la evaluación del *grado en que el sujeto es consciente de la estructura textual* y si conoce, a partir de ella, *qué debe considerarse como lo más importante que el autor quiere comunicar y qué estrategia debe utilizar para identificar la información más importante* -en qué debe fijarse-, se sabe que son factores determinantes de la comprensión, en especial en el caso de los textos expositivos. Cuando, tras presentar al sujeto textos con distintas estructuras -generalización, contraste, problema-solución, etc.-, se le pide que indique cómo se relacionan las distintas ideas entre sí, señalando el modo en que unas se subordinan a otras, los sujetos que tienen problemas de comprensión a este nivel suelen responder de una forma típica: haciendo depender directamente todas las ideas del texto de la idea o frase que recoge el tema del mismo o, alternativamente, construyendo una representación lineal en la que cada idea se enlaza directamente con la que aparece justo antes. Además, si se pregunta a los alumnos -supuesto que estén leyendo un texto con una determinada estructura como, por ejemplo, un texto argumentativo- en qué deben fijarse para identificar la idea principal, en lugar de señalar el tipo de información pertinente de acuerdo con la estructura dada, por ejemplo, la conclusión en el caso de los textos argumentativos, señalan aspectos que no siempre son relevantes, como es el hecho de que la información se encuentre al principio o al fin del texto, que sea novedosa, etc. (Alonso Tapia, Carriedo y González, 1992). Cuando esto ocurre es preciso proceder a un entrenamiento directo que facilite la identificación de la estructura del texto y, a partir de ellas, de las diferencias en la importancia de la información contenida en el mismo, por lo que es preciso detectar previamente mediante la evaluación si se dan estos problemas.

A la luz de todo lo anterior, para poder evaluar si los alumnos manifiestan una capacidad adecuada de comprensión, el criterio debe ser el grado en que aquellos conocen y utilizan los conocimientos mencionados en relación con los distintos niveles de comprensión, y el grado en poseen los conocimientos y habilidades específicas que facilitan la construcción de una representación coherente del texto.

## **3.2. Desarrollo y valoración del instrumento de evaluación.**

### *3.2.1. Estructura de la prueba.*

La recogida de información sobre los aspectos señalados puede hacerse mediante diferentes procedimientos (Alonso Tapia, 1995 b). Sin embargo, para evaluar la efectividad de un gran número de escolares hemos preferido utilizar preguntas de opción múltiple cuyo diseño, puesto a prueba en trabajos anteriores (Alonso Tapia y Corral, 1992) posibilita identificar las razones de los errores de los alumnos.

La prueba diseñada se recoge completa en el Apéndice 3.1, junto con las alternativas que constituyen la respuesta correcta a cada una de las preguntas. Consta de 11 textos correspondientes a las áreas curriculares de Historia, Geografía, Física, Química, Biología, Geología, Lengua y Literatura. Respecto a cada uno de estos textos se han planteado 10 preguntas diferentes, 110 en total, a través de las que se hace explícito qué es lo que consideramos como indicador de competencia en relación con la comprensión del lenguaje al afrontar la lectura de un texto como momento de recepción de una comunicación, y qué es lo que consideramos que puede condicionar dicha competencia. Las preguntas planteadas en relación con cada texto han sido semejantes, de modo que las preguntas de un mismo tipo pudiesen agruparse para formar escalas que evaluaran cada uno de los diferentes aspectos implicados en la comprensión. En concreto, las preguntas pueden agruparse en las siguientes categorías:

• Criterio final de comprensión:

- IP      ¿Conoce el sujeto que es lo más importante que comunica el autor?
- IN      ¿Conoce cuál es la intención que persigue el autor al comunicarse?
- COM    Competencia a la hora de comprender la comunicación (IP + IN).

- Determinantes inmediatos:

CES ¿Conoce qué estrategias emplear para identificar lo más importante que quiere comunicar el autor?

- Organizadores textuales:

TV ¿Comprende el significado e implicaciones de los tiempos verbales?

MR ¿Comprende y conoce adecuadamente cómo y cuándo las repeticiones y el uso de pronombres y expresiones anafóricas ayudan a mantener la referencia o, por el contrario la obstaculizan?

CON ¿Comprende el significado de las distintas partículas conectoras?

- Comprensión de la relación texto-contexto

DOC ¿Es capaz de identificar el tipo de documento al que pertenece un texto?

- Conocimiento de los contenidos temáticos del texto.

CTM ¿La representación que el sujeto se hace de los conceptos e ideas del texto, supuestamente trabajados en las distintas áreas curriculares, es la adecuada?

Como puede comprobarse a partir de la lectura de los distintos tipos de preguntas, no se considera como criterio de aprendizaje el que el sujeto sea capaz de verbalizar conocimientos relativos a lo que es un pronombre, un verbo, etc. Por el contrario, se considera necesario que aplique sus conocimientos -temáticos y lingüísticos- a la comprensión de los textos como producto de una intención comunicativa que determina su contenido y su estructura. La razón de que nuestras pruebas pongan énfasis en determinar si el sujeto es capaz de aplicar lo que sabe radica, como ya señalábamos en el primer capítulo, en que el criterio de dominio de una capacidad se manifiesta en el uso que se hace de ella y no en la declaración de conocimientos que pueden recordarse sin que ello signifique que puedan ser utilizados de manera funcional.

### 3.2.2. Estudio empírico.

#### 3.2.2.1. Muestra y procedimiento.

A fin de determinar la adecuación del instrumento construido para la evaluación del grado en que los alumnos al término de 4º de ESO o de 2º de BUP comprenden los mensajes y textos escritos en la propia lengua, se pasó la prueba a 962 sujetos de procedentes de 14 centros diferentes de Madrid y su área metropolitana. De ellos 747 cursaban 2º de BUP y 215, 4º de E.S.O., siendo menor el número de estos últimos debido a que la implantación de la E.S.O. en esos momentos era voluntaria y sólo algunos centros se habían adscrito a esta nueva modalidad de enseñanza. De los 962 alumnos, 510 eran mujeres y 452 eran varones.

La prueba fue pasada a los alumnos por sus propios profesores, como parte del proceso normal de evaluación durante el mes de mayo de 1994, un mes antes de finalizar el curso. Debido a la longitud de la prueba, cada profesor pasaba en su clase sólo la parte de la misma correspondiente a su materia en su horario normal de clase, lo que hizo que duración de la evaluación variase según los horarios escogidos en los diferentes centros.

#### 3.2.2.2. Porcentaje de sujetos que escoge cada alternativa.

La primera cuestión que se plantea en relación con una prueba de preguntas de opción múltiple como la que hemos construido es qué información proporcionan los tipos de errores cometidos por los alumnos en cada pregunta sobre los factores que dificultan la comprensión, pregunta que exige considerar simultáneamente si éstos se deben al desconocimiento que los alumnos tienen del texto, a la excesiva dificultad de las preguntas o al hecho de que las preguntas estén mal construidas.

Para responder a esta cuestión se ha analizado, en primer lugar, el porcentaje de sujetos que escogió cada una de las alternativas. Los resultados del análisis de la frecuencia de elección de alternativas se encuentran recogidos en las tablas 3.1-A a 3.1-E. La lectura de las mismas muestra que hay algunas preguntas en las que la alternativa correcta no es la más elegida, o en la que las incorrectas son casi tan elegidas como la correcta. El análisis de las mismas, considerando además el comportamiento estadístico de la pregunta -su homogeneidad con lo que mide la parte temática o la escala en de la que forma parte-, análisis que expondremos en breve, sugiere lo siguiente:

En general, las preguntas de la escala MR -capacidad para mantener la referencia textual identificando correctamente los antecedentes de pronombre y anáforas- han resultado problemáticas, quizás por exigir frecuentemente la identificación previa del tema del texto. Los fallos, en consecuencia, pueden deberse a que el tema no se ha identificado bien, y no a la capacidad para mantener la referencia. Para poder seguir utilizando esta escala ha sido preciso eliminar de ésta las preguntas 5, 15 y 65, por problemas de construcción o de mal funcionamiento estadístico.

Algunas preguntas de la escala de contenidos temáticos han resultado muy difíciles y estadísticamente han funcionado mal -carecen de homogeneidad-. Se trata, sin embargo, de preguntas con un alto valor diagnóstico, ya que reflejan errores de concepto frecuentes e importantes en relación con los contenidos impartidos en la materia correspondiente, por lo que creemos que deben mantenerse. Las preguntas a que nos referimos en concreto son las siguientes:

- *Texto 1, pregunta 4: La oración " ... se constata y se habla de cansancio entre los países donantes..." indica....*- Se trata de una pregunta destinada a evaluar la comprensión que el alumno tiene de los planos temporales que es preciso considerar para ubicar un texto y entenderlo, el momento en que escribe el autor, el período en que escribe aunque no el mismo momento en que lo hace, o momentos anteriores o posteriores. Los errores de los alumnos y en particular la alternativa más escogida sugieren que no entienden la implicación temporal de la expresión "se constata y se habla", pues un 69,9% de los alumnos falla esta pregunta considerando que el autor se refiere fundamentalmente a hechos que o han ocurrido antes (47,2%) o bien a hechos que ocurren sólo en el mismo momento en que escribe (22,7%). Se trata pues de una dificultad de tipo lingüístico, ligada a las formas verbales, y no de una dificultad conceptual que estaría ligada a los aspectos temáticos propios de las áreas de contenido.

- *Texto 3, pregunta 25.*- Se trata de una pregunta en la que se pide al sujeto en cual de las frases que siguen no aparece ningún término que haga referencia al tema del texto. Exige, por tanto, para ser contestada, la identificación correcta del mismo. Como se verá, estadísticamente funciona bien. Sin embargo, el hecho señalado hace que no sea posible saber si la dificultad que presenta -el 57,1% de los alumnos contesta incorrectamente- se debe incapacidad para identificar el tema, a problemas para mantener la referencia textual o a ambos.

- *Texto 4, pregunta 40: En el texto aparece la expresión "...existían ya buen número de centros de población". ¿A qué tipo de centros se refiere?.*- Un 48,8% de los alumnos ha elegido la alternativa C, incorrecta, frente al 36% que ha elegido la alternativa A, correcta. Este hecho pone de manifiesto que los alumnos no tienen claros los conceptos de "castro celta" y "ciudad-fortaleza" a los que hacen referencia estas alternativas. Se trata, pues, de una dificultad ligada a aspectos temáticos trabajados en el área de Geografía.
- *Texto 5, pregunta 45.-* Se trata de una pregunta similar a la pregunta 25, anteriormente comentada, en que los alumnos deben señalar una frase en la que aparece un término que hace referencia a la pregunta del texto, por lo que son aplicables los mismos comentarios. El 66% de los sujetos contesta incorrectamente la pregunta.

Tabla 3.1-A: TEST CL-4 Frecuencia de elección de cada alternativa. N = 962. Primera parte: Historia										
Preg. Alt.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a	167	518	172	269	293	804	133	82	151	170
b	120	125	495	203	249	78	157	769	85	246
c	609	254	227	422	349	14	605	44	656	478
NC	1	0	3	3	6	1	2	2	5	3
NR	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65
Preg. Alt.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	93	491	290	520	242	423	81	134	283	193
b	740	192	501	67	368	352	230	686	507	100
c	63	214	104	310	276	121	582	72	100	591
NC	1	0	2	0	11	1	4	5	7	13
NR	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65

NC = No ha contestado a la pregunta. NR = No ha contestado por no haber realizado esta parte de la prueba.

- *Texto 5, pregunta 50: En el texto aparece la frase "Otras (partículas) eran devueltas en sentido contrario". Este rebote se produce después de...*- El 59% de los sujetos escoge la alternativa incorrecta B, lo que, dado el contenido de la pregunta, implica que los alumnos responden en base a una idea previa errónea sobre el las razones que pueden hacer que dos partículas se alejen. Se trata, pues, de un problema de comprensión ligado al desconocimiento de aspectos temáticos propios del área de Física, y no de un problema lingüístico.



**TABLA 3.1-B: TEST CL-4**  
**Frecuencia de elección de cada alternativa**  
**Segunda parte: Geografía**

Preg. Alt.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	273	72	122	119	349	639	14	386	303	792
b	215	818	675	42	45	65	39	280	457	35
c	438	39	133	678	525	223	875	260	167	101
NC	4	1	0	1	11	3	2	4	3	2
NR	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32
Preg. Alt.	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
a	75	42	658	71	737	34	175	32	377	339
b	844	287	173	802	80	370	716	39	84	136
c	11	601	97	55	3	525	38	858	467	454
NC	0	0	2	2	19	1	1	1	2	1
NR	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32

NC = No ha contestado a la pregunta. NR = No ha contestado por no haber realizado esta parte de la prueba.

**TABLA 3.1-C: TEST CL-4**  
**Frecuencia de elección de cada alternativa**  
**Tercera parte: Física-Química.**

Preg. Alt.	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
a	390	75	27	187	68	200	633	138	286	230
b	130	687	95	83	597	700	81	456	91	531
c	385	145	784	635	237	7	193	312	525	139
NC	2	0	1	2	5	0	0	1	5	7
NR	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55
Preg. Alt.	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
a	674	208	818	531	290	18	20	98	382	63
b	46	30	32	325	111	676	519	187	342	771
c	184	668	53	49	499	213	637	621	182	71
NC	3	1	4	2	7	0	1	1	1	2
NR	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55

NC = No ha contestado a la pregunta. NR = No ha contestado por no haber realizado esta parte de la prueba.

TABLA 3.1-D: TEST CL-4  
Frecuencia de elección de cada alternativa  
Cuarta parte: Biología-Geología

Preg. Alt.	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
a	75	23	334	47	250	767	572	171	729	218
b	83	830	46	819	76	34	315	614	125	75
c	755	61	534	48	575	112	26	125	57	617
NC	1	0	0	0	13	1	1	4	3	4
NR	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48
Preg. Alt.	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
a	331	398	32	64	303	785	30	112	102	485
b	104	60	594	805	351	101	36	768	667	373
c	478	454	286	43	247	26	846	30	144	55
NC	1	2	2	2	13	2	2	4	1	1
NR	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48

NC = No ha contestado a la pregunta. NR = No ha contestado por no haber realizado esta parte de la prueba.

- *Texto 6, pregunta 54.*- Pregunta similar a la pregunta 4 del texto 1, que pone de manifiesto la misma dificultad de tipo lingüístico, a saber, no se comprende bien el valor temporal de las expresiones impersonales en presente.
- *Texto 6, pregunta 59: ¿Quién es el que empuja cuando introducimos un sólido en un líquido?.*-El hecho de que el 37,7% de los sujetos escoja la alternativa incorrecta "el agua empuja al sólido", proporción semejante a la de los que escogen la alternativa correcta "Se empujan ambos mutuamente", el 42,6%, muestra un fenómeno conocido, la resistencia a modificar la idea previa a la instrucción que recoge la alternativa incorrecta. Se trata, pues, de una pregunta con gran valor diagnóstico, que muestra el papel de los conocimientos temáticos sobre la comprensión del texto.
- *Texto 7, pregunta 68: Cuando el autor hace la afirmación "... (el agua) sigue siendo esencial para que la vida continúe..." está pensando más probablemente...-* El 67,4% de los sujetos escoge la alternativa B "En que el agua nos ayuda a defendernos contra el calor", frente al 13,7% que escoge la alternativa correcta "En la importancia del agua por ser un buen disolvente". La razón de la incorrección radica en que al no tenerse en cuenta el contexto y contenido del conjunto del texto, no se escoge la alternativa técnicamente más correcta. Como en otros casos, las ideas previas ligadas a los contenidos trabajados en las áreas curriculares dificultan la comprensión del texto.

**TABLA 3.1-E: TEST CL-4**  
**Frecuencia de elección de cada alternativa**  
**Quinta parte: Lengua-Literatura**

Preg. Alt.	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
a	225	538	362	269	448	147	81	392	147	192
b	638	189	426	87	399	124	652	471	547	592
c	46	181	119	552	63	639	174	43	212	117
NC	1	2	3	2	0	0	3	4	4	9
NR	52	52	52	52	52	52	52	52	52	52
Preg. Alt.	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
a	167	678	134	52	81	76	23	654	811	182
b	611	35	680	407	812	74	301	123	36	116
c	131	196	95	449	16	57	584	129	61	601
NC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NR	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53
Preg. Alt.	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
a	577	628	119	572	227	99	294	827	192	185
b	52	244	343	90	496	40	326	20	191	365
c	278	34	443	244	180	767	283	59	512	350
NC	0	1	2	1	4	1	4	1	12	7
NR	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55

NC = No ha contestado a la pregunta. NR = No ha contestado por no haber realizado esta parte de la prueba.

- *Texto 7, pregunta 70: En el texto aparece la frase: "Sólo ella (la Tierra)... tiene ríos y océanos". Con el término "lluvia" el autor hace referencia...*- Las alternativas de respuesta hacen referencia a la naturaleza de las moléculas de vapor de agua -gas o líquido-, la unión de las cuales da origen a la lluvia. Los alumnos parecen desconocer este aspecto, así como el hecho de que el enfriamiento súbito de la atmósfera -alternativa C, escogida por el 67,8%- da lugar a granizo y no a lluvia. La ausencia de una comprensión suficiente refleja un problema ligado al área temática, no un problema lingüístico.
- *Texto 8, pregunta 75.-* Se trata de una pregunta similar a las preguntas 25 y 45, anteriormente comentadas, en que los alumnos deben señalar una frase en la que aparece un término que hace referencia a la pregunta del texto, por lo que son aplicables los mismos comentarios. El 66,3% de los sujetos contesta incorrectamente la pregunta.
- *Texto 9, pregunta 83: Si nos encontramos con un texto como este en el que el autor cuenta los sentimientos de una persona, la forma de saber qué es lo más importante que el autor quiere comunicar es....-* La alternativa incorrecta escogida con mayor frecuencia es la B (46,9%), siendo sólo el 39,9% de los sujetos el que escoge la alternativa correcta. Da la impresión de que al responder los alumnos se han dejado llevar por el contenido específico del texto en lugar de tratar de generalizar y escoger una respuesta válida en textos de estructura semejante pero de contenido específico distinto. No se trataría, pues, ni de un error lingüístico ni de un error ligado a desconocimiento semántico, sino de una conciencia insuficiente de los aspectos estratégicos implicados en la comprensión, tal vez transitoria y ligada al contenido concreto de este texto.
- *Texto 9, pregunta 88: En el texto aparecen palabras como "destierro, ¡ay!, suspiros, aventura, tristes, desconsoladoras".* También se cuentan algunas experiencias de una persona. Este hecho permite situar el texto en una época...- La proporción en que han sido elegidas las distintas alternativas refleja un error conceptual cuya corrección corresponde a la asignatura de Literatura: la confusión entre dos orientaciones de la Literatura, la que pretende un análisis profundo de la realidad (43%) y la que se centra en la exaltación del sentimiento (52%). No distinguir entre ambas posibilidades implica que al leer se está construyendo una representación inadecuada de la intencionalidad del autor y de las implicaciones del contenido del texto.
- *Texto 9, pregunta 89.-* Se trata de una pregunta que implica distinguir entre narrador y personaje, y comprender sus relaciones recíprocas en el texto concreto. La dificultad de la pregunta -el 76,6% de los sujetos contesta in-

correctamente- muestra que el modelo de tales relaciones que están construyendo es inadecuado. Creemos que se trata de un problema ligado al área de Literatura que debe ayudar a los alumnos a comprender los distintos tipos de relaciones narrador protagonista que pueden verse en un texto.

- *Texto 10, pregunta 94: La frase "Tendremos otros defectos, pero de todos es sabido que la cosa esa del racismo no nos afecta nada, ni una miaja" significa ...*- El hecho de que los alumnos escojan la alternativa B, incorrecta, casi en igual proporción que los que escogen la alternativa correcta - 44,8% frente a 49,4% respectivamente-, sugiere que el futuro de probabilidad es mal conocido por los primeros lo que les ha llevado a formarse una representación inadecuada de lo que quiere decir el autor. Se trata de un error de tipo lingüístico, que debe corregirse fundamentalmente mediante el trabajo realizado en el área de Lengua.
- *Texto 11, pregunta 107.*- En esta pregunta se pide al alumno que identifique el tipo de documento del que es probable que proceda el texto. El porcentaje de elección de las distintas alternativas es similar -32.5, 36.1, 31.4-, lo que refleja un desconocimiento del estilo propio de distintos tipos de documentos -libros de ética, artículos periodísticos, cartas entre amigos-. Esto dificulta la comprensión de la intencionalidad comunicativa, lo que implica que el texto no se termine de comprender en toda su profundidad. Se trata de un problema ligado a las distintas áreas -Literatura, Historia, Geografía, Ética, Religión, etc.- en las que se trabaja con textos procedentes de diferentes tipos de documentos.
- *Texto 11, pregunta 110: En el texto aparece la expresión "a guisa de carne". Esta expresión, ¿implica contraste, comparación o finalidad?*- El hecho de que la alternativa C haya sido casi tan escogida como la B que es la correcta -38,8 y 40.5 respectivamente, sugiere que los alumnos no comprenden el significado de la expresión "a guisa de". Se trata de un problema cuyo ámbito de tratamiento principal -por la frecuencia con que puede encontrarse- son las áreas de Lengua y Literatura, aunque podía haber sido corregido de haber aparecido en otras áreas.

Como puede comprobarse, los elementos señalados recogen tanto dificultades conceptuales como de tipo lingüístico, por lo que tienen un valor diagnóstico especial. Tales dificultades deberían ser objeto de trabajo específico en las áreas señaladas.

### 3.2.2.3. Índice de dificultad.

Es importante, si las puntuaciones de distintas tareas se van a agregar para dar lugar a una puntuación en relación con un tema o con una escala que evalúe una variable cognitiva particular, que correlacionen de modo adecuado con la puntuación en la escala total, esto es, hagan una aportación semejante y regular a esta puntuación, esto es, es preciso que la prueba sea homogénea. Sin embargo, esto depende en parte de la dificultad de las preguntas. De ahí que convenga considerar previamente si ésta es adecuada. En la Tabla 3.2 se recogen los índices de dificultad de las preguntas y en la 3.3, su distribución.

Como puede comprobarse en la Tabla 3.3, la prueba es más bien fácil, ya que hay muy pocas preguntas que sean respondidas por menos del 40% de los alumnos, mientras que un 23% de las preguntas son respondidas por más del 81%.

### 3.2.2.4. Homogeneidad de pruebas temáticas y de las distintas escalas.

En la tablas 3.4 y 3.5 se presentan los índices de homogeneidad de las preguntas de la prueba. En la Tabla 3.4, la homogeneidad -la correlación- en relación con la puntuación total en el subtest de contenido al que pertenece; y, en la Tabla 3.5, la homogeneidad -la correlación- en relación con la escala que evalúa la misma variable que pretende evaluar la pregunta. Dado que el valor crítico es 0.25, la mayoría de los índices son adecuados en ambos casos. En los casos en que no lo son, ello se ha debido bien a una inadecuada construcción de las preguntas (preguntas 5, 15 y 65), lo que ha hecho que sean finalmente eliminadas, bien a su extremada facilidad o dificultad. En este caso hemos optado por no eliminarlas, pues o bien sirven para dar confianza a los alumnos, o bien tienen un elevado valor diagnóstico al informar de errores sistemáticos que es necesario corregir.

### 3.2.2.5. Consistencia interna de los subtests temáticos y de las escalas de comprensión.

En la Tabla 3.6 se recogen los índices de consistencia interna correspondientes:

- a la prueba total (con 107 preguntas),
- a las distintas subescalas a través de las que se evalúan los diferentes elementos que afectan a la comprensión (11 preguntas para las escalas IP, INT, EST, TV, CON, DOC; 8 para MR, 33 para CTM, y 22 para COM),

Tabla 3.2: Índice de dificultad  
(% de aciertos)

Preguntas	Textos										
	HISTORIA		GEOGRAFIA		FÍSICA-QUÍMICA		BIOLOGÍA- GEOLOGÍA		LENGUA-LITERATURA		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	68	82	47	90	43	74	82	52	70	67	63
2	57	54	88	64	75	73	90	49	59	74	69
3	55	55	72	70	86	90	58	65	40	74	48
4	30	58	73	86	70	36	89	88	60	49	62
5	-	-	37	79	26	55	-	33	49	89	54
6	89	47	68	56	77	74	84	85	70	85	84
7	67	64	94	77	69	70	62	92	71	64	35
8	85	76	41	92	50	68	14	84	43	71	90
9	73	56	49	50	57	42	79	73	23	89	56
10	53	65	85	36	25	85	8	53	65	66	40

Tabla 3.3: Preguntas contestadas correctamente por diferentes porcentajes de sujetos.

20% o menos.	De 21% a 40%	De 41% a 60%	De 61% a 80%	Más de 81%
2 (1,8%)	11 (10,28%)	30 (28,03%)	39 (36,44%)	25 (23,36%)

Tabla 3.4: Subtestes de Contenido  
Homogeneidad de los elementos en relación con el subtest al que pertenecen.

Preguntas	Textos										
	HISTORIA		GEOGRAFÍA		FÍSICA-QUÍMICA		BIOLOGÍA- GEOLOGÍA		LENGUA-LITERATURA		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	.34	.39	.35	.43	.39	.36	.41	.34	.37	.47	.26
2	.34	.37	.30	.23	.29	.24	.39	.32	.30	.48	.21
3	.31	.22	.37	.36	.32	.31	.28	.30	.25	.44	.24
4	.26	.24	.28	.42	.28	.31	.31	.35	.33	.21	.32
5	-.01	.00	.24	.32	.16	.20	-.09	.19	.41	.16	.40
6	.31	.33	.35	.33	.31	.36	.34	.36	.33	.41	.42
7	.29	.27	.35	.32	.33	.16	.26	.36	.36	.41	.14
8	.33	.38	.28	.34	.36	.33	.00	.40	.19	.41	.28
9	.31	.34	.34	.21	.20	.32	.32	.35	.08	.49	.16
10	.31	.20	.33	.17	.17	.40	.00	.30	.29	.40	.09



Tabla 3.5: Escalas de Comprensión.  
Homogeneidad de los elementos en relación con la escala a la que pertenecen.

Pregunta y Escala a que pertenecen	Textos												
	HISTORIA			GEOGRAFÍA			FÍSICA-QUÍMICA			BIOLOGÍA- GEOLOGÍA		LENGUA-LITERATURA	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
1: IP	.47	.45	.42	.34	.41	.33	.46	.38	.42	.46	.31		
2: INT	.37	.42	.38	.28	.39	.33	.39	.32	.44	.45	.29		
3: EST	.39	.52	.51	.47	.48	.31	.29	.48	.36	.45	.37		
4: TV	.33	.37	.30	.42	.37	.42	.35	.40	.39	.35	.39		
5: MR	-.09	-.08	.43	.34	.34	.39	-.01	.39	.47	.25	.40		
6: CON	.39	.38	.35	.37	.36	.42	.50	.39	.42	.42	.49		
7: DOC	.37	.44	.25	.35	.35	.26	.30	.24	.34	.39	.28		
8: CTM	.25	.29	.22	.26	.37	.29	-.04	.28	.25	.29	.19		
9: CTM	.27	.35	.33	.18	.19	.26	.25	.27	.17	.40	.31		
10: CTM	.32	.18	.30	.12	.11	.32	-.09	.31	.33	.32	.15		

- a las puntuaciones correspondientes a las distintas áreas temáticas, y
- a distintas pruebas abreviadas de la prueba original combinando sólo los textos de algunas áreas.

Como puede comprobarse, la consistencia de la prueba total, esto es, el grado en que la capacidad de comprensión manifiesta en la puntuación final es evaluada de modo semejante por las distintas partes de la prueba, es excelente. Lo mismo ocurre cuando se utilizan como mínimo las preguntas correspondientes a dos áreas temáticas, siempre que una de ellas sea la de Lengua y Literatura. En cuanto al resto de los índices, se ve afectado por la escasa longitud de las subescalas, pero son aceptables, excepto en los casos de INT, TV y, sobre todo, MR, la escala más corta de todas. Sería interesante un mayor número de observaciones -preguntas- sobre los aspectos medidos por estas escalas para incrementar su fiabilidad.

Tabla 3.6: Consistencia interna.			
SUBTESTS DE CONTENIDO Y ESCALAS ABREVIADAS		ESCALAS DE COMPRENSIÓN	
Historia	0.46	IP (Idea principal)	0.50
Geografía	0.49	INT (Intención del autor)	0.35
Física-Química	0.45		
Biología-Geología	0.41	COM (Comunicación: IP + INT)	0.61
Lengua-Literatura	0.71		
		EST (Estrategia de identificación de IP)	0.55
Sociales (H + G)	0.64	TV (Signif. de los tiempos verbales)	0.39
Ciencias (FQ + BG)	0.56	MR (Mantenimiento de la referencia)	0.18
Historia/Lengua-Literatura	0.75	CON (Signif. de las conectivas)	0.50
Geografía/Lengua-Literatura	0.75	CTE (Conocimientos temáticos)	0.54
Física-Química/Lengua-Literatura	0.72		
Biología-Geología/Lengua-Literatura	0.73	TOT (PRUEBA TOTAL)	0.82

### 3.2.2.6. Validez del modelo teórico.

La calidad de las pruebas construidas y de las escalas que puedan derivarse a partir de las mismas depende, entre otros factores, del grado en que las características medidas se relacionan con otras variables. El grado en que se relacionasen, por ejemplo, con las calificaciones dadas por los profesores -algo que

hubiera sido deseable en este caso pero que no se ha podido hacer, nos indicaría en qué medida ambas formas de evaluar tienen algo en común o, por el contrario, miden algo distinto. Por otra parte, el análisis de las relaciones entre las puntuaciones correspondientes a las distintas escalas aporta información adicional sobre la validez -en líneas generales- del modelo teórico en que nos hemos basado para diseñar las pruebas de evaluación. No se trata de que dicho análisis nos permita concluir si dicho modelo es o no válido -sería necesaria una formulación mucho más precisa del mismo y otro tipo de metodología para averiguarlo-. Pero nos permite saber qué peso parecen tener las distintas variables evaluadas que se supone que afectan a lo que puede considerarse como criterio de comprensión a este nivel -la capacidad de identificar las ideas principales y de comprender la intención comunicativa que subyace tras el texto-, lo que tiene importantes implicaciones a la hora de decidir sobre qué aspectos debería centrarse el entrenamiento.

Al describir el modelo de partida decíamos que la capacidad para distinguir la mayor o menor importancia de la información contenida en el texto, así como la intención que el autor pretendía conseguir, dependían de los conocimientos del sujeto sobre la estructura del texto (la capacidad para representarse las relaciones entre las ideas de modo jerárquico), de la estrategia seguida para buscar la información importante dentro de esa estructura (por ejemplo, si el texto es de contraste, buscar o construir un frase que englobe de modo más general las comparaciones que se hacen en el texto, etc.) y de la capacidad para identificar los datos que permitían situar el texto en relación con el contexto comunicativo. A su vez, la comprensión del papel desempeñado por los diferentes organizadores textuales (partículas conectivas, tiempos verbales, pronombres y demás expresiones anafóricas, etc.) influirían en la identificación de la estructura textual. Finalmente, señalábamos la importancia del conocimiento de los contenidos temáticos para la comprensión. Si el modelo es adecuado, los distintos conocimientos mencionados deberían relacionarse de modo positivo y contribuir, cada uno de ellos, de modo significativo a la predicción de lo que hemos considerado como criterio último de comprensión del lenguaje.

Para comprobar si se dan las relaciones esperadas, hemos utilizado dos técnicas estadísticas, el análisis de correlaciones y el análisis de regresión.

#### *Análisis de correlaciones.*

Las correlaciones nos informan de la asociación entre las puntuaciones correspondientes a dos variables. Las correlaciones entre las distintas esca-

las se recogen en la Tabla 3.7. Como puede comprobarse, las correlaciones entre las distintas escalas y la puntuación total son altas y mayores que las existentes entre las subescalas, lo que sugiere que el peso del componente evaluado por cada subescala en la comprensión es semejante.

Tabla 3.7: Correlaciones de las distintas escalas entre sí y con el total.

	IP	INT	EST	TV	MR	CON	DOC	CTE	COM	TOT
IP	1.00									
INT	0.44	1.00								
EST	0.33	0.26	1.00							
TV	0.38	0.32	0.23	1.00						
MR	0.23	0.22	0.14	0.24	1.00					
CON	0.46	0.40	0.31	0.47	0.28	1.00				
DOC	0.29	0.23	0.19	0.28	0.14	0.30	1.00			
CTE	0.46	0.35	0.31	0.37	0.26	0.46	0.31	1.00		
COM	0.86	0.83	0.35	0.42	0.26	0.51	0.30	0.48	1.00	
TOT	0.71	0.62	0.56	0.63	0.45	0.72	0.51	0.78	0.78	1.00

### *Análisis de regresión*

Hasta aquí hemos analizado el grado de asociación entre pares de variables. Sin embargo, es frecuente que el rendimiento en una variable -en nuestro caso, en la considerada como criterio último de competencia lingüística- esté asociado al rendimiento conjunto en otras varias. Para analizar el grado en que esto ocurre, se utiliza la técnica conocida como "análisis de regresión", técnica que nos dice en qué medida el rendimiento en una variable "criterio" se halla asociado al rendimiento en un conjunto de variables "predictoras".

En este segundo tipo de análisis, los resultados dependen del tipo de variables que se utilizan como predictores. Como las variables predictoras pueden hallarse relacionadas entre sí, la utilización simultánea de dos variables muy relacionadas puede hacer parecer que el rendimiento en una de ellas no se halla asociado con el rendimiento en la variable criterio. Por ello, a fin de evitar llegar a conclusiones equivocadas, es preciso tener presente la correlación individual de cada predictor con el criterio.

En cuanto a las variables "criterio", por una parte, hemos utilizado por se-

parado las puntuaciones correspondientes a la escala que construida para evaluar la capacidad para "identificar la idea principal" (IP) y a la construida para "identificar la intención con que el autor realiza la comunicación" (INT). Por otra parte, teniendo en cuenta que existía una relación muy significativa entre las puntuaciones correspondientes a las dos escalas anteriores (.44), hemos derivado -combinándolas- una nueva puntuación que puede considerarse como indicador de la capacidad para "captar los elementos más importantes del acto comunicativo" (COM). La razón de utilizar los dos tipos de criterios es que creemos que ello permite comprender mejor el papel que las variables predictoras parecen desempeñar en relación con lo que puede considerarse como indicadores fundamentales de competencia -por lo que a la comprensión de textos escritos se refiere- en los niveles escolares a los que van dirigidas las pruebas.

Los resultados de estos análisis están recogidos en la Tabla 3.8. Como puede comprobarse, la cantidad de varianza en las puntuaciones del criterio asociada a la variación conjunta en los predictores es alta y muy significativa en el caso de COM e IP, y algo más baja pero también significativa, en el caso de INT.

Por otra parte, todos los predictores tienen un peso significativo. Este resultado es importante tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Desde un punto de vista teórico, porque apoya la adecuación del modelo que ha servido de base para construir la prueba. Y, desde un punto de vista práctico, porque sugiere la necesidad de entrenar a los alumnos en cada componente para facilitar la mejora de la comprensión, posibilitando un diagnóstico separado de las deficiencias particulares de cada alumno.

### 3.2.2.7. Diferencias entre los alumnos en función del sexo y del tipo de enseñanza.

El último análisis realizado ha tenido por objeto comprobar si había diferencias en primer lugar, entre los resultados correspondientes a chicos y chicas y, en segundo lugar, entre las correspondientes a alumnos de BUP y ESO. Los resultados, recogidos en la Tabla 3.9, muestran que no hay diferencias asociadas al sexo y que sí las hay, y altamente significativas, entre los alumnos de BUP y ESO, siendo los primeros superiores a los segundos en 8-9 puntos. Este resultado parece lógico si se tiene en cuenta que en el momento en que pasamos la prueba, la implantación de la E.S.O llevaba a admitir en este tipo de enseñanza, por ser obligatoria, a muchos alumnos que por sus rendimientos tenían dificultades para cursar el BUP.

Tabla 3.8: Validez predictiva de las escalas de la batería,  
de acuerdo con el modelo teórico.  
N = 962

Criterio: COM (Comprensión de la comunicación).				
R = 0.62		R <sup>2</sup> = 0.39		P = 0.0000
VARIABLE	PESO	PESO ESTÁNDAR.	T	P
EST	0.21	0.14	4.70	0.00
TV	0.26	0.15	4.54	0.00
MR	0.16	0.07	2.39	0.02
CON	0.42	0.25	7.05	0.00
DOC	0.17	0.08	2.80	0.01
CTE	0.20	0.22	6.73	0.00
Constante	2.118			
Criterio: IP (Identificación de la idea principal).				
R = 0.58		R <sup>2</sup> = 0.33		P = 0.0000
VARIABLE	PESO	PESO ESTÁNDAR.	T	P
EST	0.12	0.14	4.36	0.00
TV	0.15	0.14	4.00	0.00
MR	0.07	0.05	1.62	0.11
CON	0.22	0.20	5.64	0.00
DOC	0.10	0.08	2.59	0.01
CTE	0.13	0.24	6.82	0.00
Constante	-0.017			
Criterio: INT (Identificación de la intención).				
R = 0.48		R <sup>2</sup> = 0.23		P = 0.0000
VARIABLE	PESO	PESO ESTÁNDAR.	T	P
EST	0.08	0.10	3.03	0.00
TV	0.11	0.11	3.13	0.00
MR	0.09	0.07	2.15	0.03
CON	0.20	0.21	5.46	0.00
DOC	0.06	0.06	1.81	0.07
CTE	0.07	0.14	3.74	0.00
Constante	2.135			

### 3.2.2.8. Baremos.

A fin de que la prueba utilizada pueda utilizarse como criterio normativo para evaluar el grado en que cada alumno individual ha alcanzado el nivel de comprensión lectora deseable al término de la ESO, presentamos en el Apéndice 3.3 los baremos correspondientes a las puntuaciones en cada subescala y al total de la prueba respectivamente. Como muestran las puntuaciones medias recogidas en dicho apéndice, la prueba no resulta excesivamente difícil.

Tabla 3.9: Diferencias en función del sexo y del tipo de estudios medias y análisis de varianza.

	ESO	BUP
Hombres	Media: 61.59 Sx: 10.37 N = 90	Media: 71.28 Sx: 10.12 N = 263
Mujeres	Media: 63.11 Sx: 9.04 N = 115	Media: 70.78 Sx: 9.56 N = 333
Fuente de variación	F	Probabilidad
ESO-BUP	116.42	0.0000
SEXO	0.40	0.5264
INTERACCIÓN	1.48	0.2092

### 3.3. Conclusión.

A lo largo de este capítulo hemos presentado un modelo desde el que diseñar pruebas para evaluar colegiadamente la adquisición de la capacidad de comprensión lectora durante la E.S.O. y al término de la misma. La viabilidad del modelo presentado se ha puesto de manifiesto en las características de la prueba construida en base al mismo. La prueba ha resultado ser altamente adecuada, tanto por sus cualidades métricas como por la validez del modelo que la sustenta, habiendo mostrado además su utilidad tanto como instrumento diagnóstico -orientado a detectar que ayudas se deben proporcionar a los alumnos- como instrumento sobre el que se pueden apoyar los profesores para decidir la promoción de sus alumnos. Obviamente es mejorable. Pero lo importante es que ilustra cómo proceder a partir de modelos sólidamente fundamentados a la hora de desarrollar instrumentos para la evaluación colegiada de capacidades.





## APÉNDICE 3.

3.1. Prueba para la evaluación de la comprensión lectora al término del segundo ciclo de la ESO (Test CL-4).

3.2. Alternativas correctas a cada una de las preguntas.

3.3. Baremos para la interpretación normativa de las puntuaciones.



## BATERÍA CL-4

## PRIMERA PARTE: HISTORIA

© Jesús Alonso Tapia y Equipo de Profesores.

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ BUP-ESO \_\_ Fecha \_\_\_\_\_

## TEXTO 1

La crisis económica deja sentir sus efectos en la aportación que los países desarrollados destinan a la cooperación internacional, o más estrictamente a la ayuda oficial al desarrollo (AOD), tanto en su magnitud (no aumenta, más bien disminuye) como en su aplicación (cada vez más condicionada).

La gravedad y la urgencia de la situación de algunos países impulsaron, en el segundo semestre de 1993, a un grupo de personas a presionar al Gobierno para que aumente la AOD a los países del Tercer Mundo hasta el 0,7% del producto interior bruto (PIB).

El desarrollo de la huelga encontró buena resonancia en los medios de comunicación y logró movilizar a miles de ciudadanos que se fueron aglutinando en "comisiones 0,7%".

Cuando en la década de los sesenta se impone la casi total descolonización, los países que alcanzaron su independencia política exigen de sus antiguas metrópolis y de los demás países desarrollados recursos para mejorar su situación social y económica. Después de varios debates en su seno, la ONU decidió recomendar la aportación de un 1% del PIB. En 1968, la Conferencia de Naciones Unidas sobre el Comercio y el Desarrollo (UNCTAD) precisó que dicha aportación debía representar el 0,7% del PIB. Esta recomendación, aceptada por la mayoría de los países desarrollados, se realizó para evitar que se agrave la situación de los países descolonizados y que aumente la distancia entre el desarrollo económico de unos y otros.

Después de todos estos años de ayuda y cooperación, y a pesar de los avances realizados en algunos sectores (educación y sanidad, por ejemplo), la situación de los países subdesarrollados continúa siendo grave. Se constata y se habla de cansancio entre los países donantes, y de la frustración e impotencia entre los receptores. La ayuda al desarrollo es insuficiente para la eliminación de la pobreza.

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor la idea principal del texto?

- a) El objetivo de la reciente huelga de hambre fue donar 0,7% del PIB de los países desarrollados.
- b) La ayuda de los países desarrollados a los subdesarrollados ha sido siempre muy importante.
- c) La sensibilidad de muchos de los países hacia la cooperación al desarrollo es aún insuficiente.

2. La intención principal del autor de este texto es:

- a) Crear un estado de opinión favorable a que aumente la ayuda al desarrollo.
- b) Comparar la situación económica de los países pobres y los desarrollados.
- c) Informar sobre la mala situación económica de los países desarrollados.

3. En textos como este, en que el autor da razones para justificar algo, la mejor forma de saber la idea principal que quiere comunicarnos es:

- a) Fijarnos en la oración que expresa las diferencias entre las situaciones descritas.
- b) Fijarnos en la oración que resume las consecuencias de las cosas que se han dicho.
- c) Fijarnos en la primera frase del texto, que suele recoger la idea que luego se desarrolla.

4. La oración: "... se constata y se habla de cansancio entre los países donantes..." indica:

- a) Que con independencia del momento en que esté escribiendo el autor se habla de cansancio entre los países.
- b) Que en el mismo momento en el que el autor está escribiendo el texto se habla de cansancio entre los países.
- c) Que se constata y se habla de cansancio entre los países antes de que el autor lo haya puesto por escrito.

5. A través de todo el texto el autor está dando información sobre el mismo tema. Señala en cuál de los siguientes enunciados aparece una expresión que alude a dicho tema:

- a) Esta recomendación se realizó para evitar que se agrave la situación de los países...
- b) Los países... exigen de sus antiguas metrópolis recursos para mejorar su situación...
- c) La gravedad y la urgencia de la situación impulsaron a presionar al gobierno...

6. ¿Por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración del texto: "... *a fin de presionar al Gobierno para que asuma la AOD*" ?

- a) ... con la intención de presionar al Gobierno ... .
- b) ... en otras palabras, presionar al Gobierno ... .
- c) ... y sin embargo, presionar al Gobierno ... .

7. ¿En qué tipo de libro o documento podríamos encontrar este texto?

- a) En un libro de texto de Historia Contemporánea.
- b) En un libro sobre la política del Gobierno.
- c) En un periódico o revista de información general.

8. En el texto aparece la expresión "*países subdesarrollados*". ¿A qué países hace referencia?

- a) A países cuyo desarrollo económico depende principalmente de la carencia de materias primas.
- b) A países cuya característica principal es tener graves carencias económicas y sociales.
- c) A países caracterizados fundamentalmente por no tener sistemas políticos democráticos.

9. En el texto aparece el término "*descolonización*". ¿A qué hace referencia?

- a) Al proceso por el que un país anteriormente colonizado consigue el control de su economía.
- b) Al proceso por el que la metrópoli cede el control de los recursos naturales al país colonizado.

c) Al proceso por el que un país colonizado consigue su independencia política de la metrópoli.

10. En el texto aparece la expresión "*Tercer Mundo*". ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el Tercer mundo es correcta?

- a) Está formado por países cuyo crecimiento poblacional está en torno al 0,7 por ciento anual.
- b) Engloba fundamentalmente a países cuya población es de raza negra, poco desarrollados.
- c) Recibe ayudas de los organismos internacionales que hipotecan a veces su desarrollo.

#### TEXTO 2:

Las reuniones de las organizaciones internacionales ya no son como antes. Se acabó el ambiente que las caracterizaba, cuando los diplomáticos se encontraban a puertas cerradas para resolver los asuntos de este mundo lejos de las miradas indiscretas. Los veteranos de las grandes reuniones de las Naciones Unidas que acudieron a la Conferencia Mundial de Derechos Humanos, organizada del 14 al 25 de Junio de 1993 en Viena tuvieron que resignarse a alternar con nuevos participantes que no estaban acostumbrados a frecuentar, los representantes de las Organizaciones No Gubernamentales (ONG).

Militantes desaliñados y enarbolando pancartas reunidos todos los días en la explanada de "Austria Center", donde se celebraba la Conferencia, para defender los derechos de aquellos de los que nunca se habla, bonzos de atuendo azafranado que habían venido a reclamar el derecho a practicar su religión, indios de las Américas con tocados de plumas multicolores que proclamaban su existencia ante la faz de la tierra, mujeres de todos los países que exigían que se las tratara por fin como seres humanos, asociaciones de niños de la calle, de campesinos, de Kurdos y de bosnios, la humanidad en toda su riqueza y diversidad se había dado cita en la capital austriaca con motivo de la conferencia.

Más allá del folklore, esa presencia masiva de diversas ONG en el sitio mismo donde se celebraba una conferencia oficial es el inicio de una época nueva en la historia de las Naciones Unidas y de las relaciones internacionales.

11.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor la idea principal del texto?

- a) En la Conferencia de Viena (CV) de 1993 se crearon las Organizaciones No Gubernamentales.
- b) La presencia de las ONG en la CV refleja un cambio en las reuniones internacionales.
- c) Las ONG son unas organizaciones muy poderosas en las relaciones internacionales.

12.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor la intención de la autora?

- a) Informar del nuevo peso que las ONG tienen en la resolución de los problemas internacionales.
- b) Dar a conocer la gran cantidad de problemas que tienen las reuniones internacionales.
- c) Informar que en Viena se celebró una conferencia internacional con la asistencia de las ONG.

13.- En textos como este, en que el autor informa de un fenómeno novedoso, la mejor forma de saber cuál es la idea principal que quiere comunicarnos es:

- a) Fijarnos en la primera frase del texto, que suele recoger la idea que luego se desarrolla.
- b) Ver qué tienen en común las afirmaciones que se hacen sobre el fenómeno que se describe.
- c) Fijarnos en frases en las que aparecen términos como "importante, principal, destacado, etc."

14.- La oración: "*La Humanidad en toda su riqueza y diversidad se había dado cita en la capital austriaca con motivo de la conferencia*", indica:

- a) Que en el momento en que la autora escribe, esos grupos ya se habían reunido en Viena.
- b) Que en el mismo momento en que la autora escribe esos grupos se están reuniendo en Viena.
- c) Que con independencia del momento de la conferencia, diversos grupos se reunieron en Viena.

15.- A través de todo el texto la autora nos da información sobre el mismo tema. Señala en cuál de los siguientes enunciados del texto **NO** aparece ningún término que haga alusión a dicho tema:

- a) ... se acabó el ambiente que las caracterizaba, cuando los diplomáticos...
- b) ... habían venido a proclamar el derecho de practicar su religión.
- c) ... tuvieron que resignarse a alternar con nuevos participantes.

16.- ¿Por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración del texto: "*...más allá del folklore, esa presencia masiva de distintas ONG...*"?

- a) Al margen del folklore, esa presencia ...
- b) Además del folklore, esa presencia ...
- c) A pesar del folklore, esa presencia ...

17.- ¿En qué tipo de libro o documento es más probable que encontrásemos este texto?

- a) En un libro de texto de historia contemporánea.
- b) En un ensayo en defensa de las minorías oprimidas.
- c) En una sección especializada de un periódico.

18.- En el texto aparece la expresión "*ONG*". ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre las mismas es correcta?

- a) Las ONG representan algunos de los poderes fácticos de cada país.
- b) Las ONG son asociaciones independientes en pro de los derechos humanos.
- c) Las ONG son organizaciones que reflejan el auténtico folklore de un país.

19.- En el texto aparece la expresión "*Organizaciones Internacionales*". En el contexto de este texto, esta expresión hace referencia:

- a) A organizaciones como las representadas por IBM (International Business Machines).
- b) A organizaciones semejantes a la FAO (Food and Agriculture Organisation).
- c) A organizaciones como la FIFA (Federación Internacional de Fútbol Asociación).



20.- En el texto aparece la expresión "*derechos humanos*". Esta expresión hace referencia a derechos como:

- a) El derecho a percibir un subsidio de desempleo.
- b) El derecho a percibir una pensión de jubilación.
- c) El derecho a escoger el país de residencia.

---

BATERÍA CL-4

SEGUNDA PARTE: GEOGRAFÍA

© Jesús Alonso Tapia y Equipo de Profesores.

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ BUP-ESO \_\_ Fecha \_\_\_\_\_

### TEXTO 3

"Cuanto más cálido es el clima, más rápida es la descomposición de la materia orgánica; ésta no puede acumularse en el suelo formando una capa profunda como sucede en los climas más fríos. Si desaparecieran los árboles, la escasa cantidad de humus que contiene el suelo se consumiría rápidamente.

Las fuertes lluvias y el sol transforman la superficie en una costra gruesa y dura de laterita que resulta imposible de cultivar.

La selva, en Africa, está considerada frecuentemente como un elemento primitivo, y su roturación y cultivo como una acción civilizadora, paso hacia el progreso. No se reconoce la importancia del bosque hasta que es demasiado tarde por aquellos a quienes protege y alimenta.

El gran bosque húmedo intertropical es raro en Africa. Se trata de preservar el bosque claro y la sabana arbolada a fin de prevenir la degradación del suelo. Ahora bien, la ayuda y los créditos comerciales han sido casi exclusivamente concedidos para su explotación en vez de para la protección de los bosques. El resultado es una explotación comercial acelerada y la creación de plantaciones de productos que son destinados a la exportación".

21. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor la idea principal del texto?

- a) Los climas más cálidos son el factor más decisivo en la degradación del suelo.
- b) El progreso y el desarrollo exigen la desaparición de las selvas africanas autóctonas.
- c) La vegetación natural y su conservación es de vital importancia para los pueblos.

22. La intención principal del autor de este texto es :

- a) Describir distintos tipos de suelos, climas y bosques intertropicales.
- b) Desarrollar la conciencia de la necesidad de la conservación del medio.
- c) Relacionar aspectos comerciales con distintos tipos de agricultura.

23. La mejor forma de saber cuál es la idea principal en un texto como éste en el que el autor describe y da razones de unos hechos es:

- a) Fijarnos en el último párrafo del texto porque en él se extrae la conclusión.
- b) Buscar a través del hilo conductor aquello de lo que el autor nos quiere convencer.
- c) Reflexionar sobre la primera oración del texto porque introduce la idea que se comenta.

24. La frase "*si desaparecieran los árboles, la escasa cantidad de humus se consumiría rápidamente*", implica:

- a) Que, en caso de desaparecer, los árboles y el humus lo harían al mismo tiempo.
- b) Que en el momento en que se escribe el texto, los árboles están desapareciendo.
- c) Que primero desaparecen los árboles y luego se consume el humus del suelo.

25. En el texto se está desarrollando un determinado tema. Señala en cuál de los enunciados siguientes del texto, no aparece ninguna palabra que haga alusión a dicho tema:

- a) Éste no puede acumularse en el suelo formando una capa profunda, como en los climas más fríos.
- b) Si desaparecieran los árboles, la escasa cantidad de humus desaparecería rápidamente.
- c) Los créditos y las ayudas han sido casi exclusivamente concedidos para su explotación".

26. ¿Por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración del texto : "*No se reconoce la importancia hasta que es demasiado tarde*" :

- a) Suele reconocerse la importancia del bosque cuando es demasiado tarde.
- b) No en todas las ocasiones se reconoce la importancia que tiene el bosque.
- c) Si se reconoce tarde la importancia del bosque, no sirve para nada.

27. ¿En qué tipo de libro o documento podríamos encontrar este texto?

- a) En un libro o guía de divulgación turística.
- b) En un texto didáctico sobre el comercio africano.
- c) En un informe actual de carácter ecológico.

28. En el texto aparece la expresión "*bosque húmedo intertropical*". Esta expresión se refiere a:

- a) Un bosque propio de climas cálidos con precipitaciones prácticamente todos los días.
- b) La selva o bosque húmedo que se desarrolla entre los Trópicos y los Círculos Polares.
- c) Un bosque que se desarrolla en climas cálidos que poseen estación seca y estación húmeda.

29. La expresión "*el gran bosque húmedo es raro en África*", quiere decir:

- a) Que en el continente africano apenas hay bosques de coníferas.
- b) Que el bosque claro y la sabana son formaciones más frecuentes.
- c) Que no es un tipo de vegetación minoritario en este continente.

30. En el texto aparece la expresión: "... *prevenir la degradación del suelo*". Al decir esto en este contexto, lo más probable es que el autor esté pensando:

- a) En la necesidad de proteger las formaciones vegetales propias del continente.
- b) En la introducción en el continente de monocultivos de productos de exportación.
- c) En la oportunidad de cultivos de bajo consumo de agua, porque beneficia al suelo.

---

#### TEXTO 4.

Las ciudades españolas actuales, al igual que el resto de las europeas, son el resultado de una larga evolución histórica de más de dos mil años. La mayor parte de ellas están asentadas en el mismo lugar en que fueron fundadas hace muchos siglos. Innumerables vestigios de este remoto pasado se encuentran todavía bajo el suelo de nuestras ciudades y las excavaciones arqueológicas o el azar, en los trabajos de construcción, nos revelan de vez en cuando huellas del mismo. Pero lo que es más sorprendente, y mucho menos conocido, es el hecho de que las calles y el trazado de muchas de nuestras ciudades, o de parte de ellas, siguen todavía muy fielmente el trazado de épocas históricas pasadas. En ellas podemos aún recorrer las calles que hace mil o dos mil años recorrían nuestros antepasados, a pesar de que los edificios hayan cambiado y el paisaje se haya transformado profundamente.

Las formas más antiguas que podemos adivinar en el plano de nuestras ciudades pertenecen a la época romana, hace unos dos mil años. No es que no existieran ciudades anteriores. Cuando los romanos llegaron a España existían ya buen número de centros de población que constituían, por lo menos, un embrión de núcleos urbanos. Unos eran indígenas, como Bilbilis (Calatayud), Tartessos, Numancia, etc. ...

31. La afirmación que expresa mejor la idea principal del texto es que "Algunas ciudades españolas...

- a) ... están situadas en el mismo lugar en el que las fundaron los pueblos fenicios.
- b) ... están asentadas en el mismo lugar donde hubo ciudades ya hace más de 2000 años.
- c) ... están localizadas donde, en la antigüedad, había abundantes pastos para el ganado.

32. La intención principal del autor de este texto es:

- a) Informarnos sobre los lugares de España donde se construyeron algunas ciudades antiguamente.
- b) Defender la idea de que el pasado condiciona el futuro, como muestra la historia de las ciudades.
- c) Informarnos de que la mayor parte de las ciudades se asientan donde ya hubo otras antiguamente.

33. En textos como éste en que el autor afirma algo y proporciona ejemplos que ilustran su afirmación, la mejor forma de identificar la idea principal que nos quiere comunicar es:

- a) Buscar una frase que englobe el conjunto de proposiciones que se dicen sobre el tema del texto.
- b) Fijarnos en expresiones como "lo más sorprendente", porque indican lo que más interesa al autor.
- c) Atender al último párrafo, porque suele recoger la conclusión a que quiere llegar el autor.

34. En el texto aparece la frase "*En ellas podemos aún recorrer las mismas calles que hace dos mil años*". Esta frase expresa:

- a) Un hecho futuro para el autor pero presente para los lectores.
- b) Un hecho presente para el autor y presente para los lectores.
- c) Un hecho futuro para el autor y pasado para los lectores.

35. A lo largo del texto el autor nos proporciona información sobre el mismo tema. Señala en cuál de las siguientes frases no aparece ninguna palabra que se refiera a tal tema:

- a) Los trabajos de construcción nos revelan de vez en cuando huellas del mismo.
- b) En ellas podemos aún recorrer las mismas calles que hace mil o dos mil años.
- c) La mayor parte de ellas están asentadas en el mismo lugar en que fueron fundadas.

36. Señala por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración del texto: "*No es que no existieran ciudades anteriores*".

- a) Dado que no existían ciudades anteriores.
- b) Probablemente existieron ciudades anteriores.
- c) No obstante, existían ciudades anteriores.

37. ¿En qué tipo de libro o documento podríamos encontrar este texto?

- a) En un libro de viajes por España.
- b) En un libro de texto de ESO o BUP.
- c) En una novela que ocurra en España.

38. La frase del texto "*El trazado de muchas de nuestras ciudades ... sigue todavía ... el trazado de épocas históricas*" significa:

- a) Que se diseñó pidiendo información a los ayuntamientos sobre posibles restos arqueológicos.
- b) Que la mayoría de las ciudades aludidas tienen un plano en forma de red o damero.
- c) Que coincide en parte con el trazado de las calles que recorrían nuestros antepasados.

39. En el texto aparece la frase "*Las formas más antiguas que podemos adivinar en el plano de nuestras ciudades pertenecen a la época romana*". El término "*formas*" en este contexto se refiere más probablemente:

- a) A una disposición de los edificios en línea, a lo largo de una calle.
- b) A una ordenación de los edificios y viviendas en forma de estrella.
- c) A una disposición de los edificios en torno a una plaza principal.

40. En el texto aparece la expresión "*... existían ya buen número de centros de población*". ¿A qué tipos de centros se refiere?

- a) A conjuntos de viviendas del tipo de los castros celtas.
- b) A ciudades con servicios públicos como hospederías.
- c) A ciudades-fortaleza aptas para defenderse de los invasores.

BATERÍA CL-4

TERCERA PARTE: FÍSICA Y QUÍMICA

© Jesús Alonso Tapia y Equipo de Profesores.

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ BUP-ESO \_\_ Fecha \_\_\_\_\_

## TEXTO 5.

Los siete años existentes entre la presentación del modelo atómico de Thomson y el de Rutherford son exactamente aquellos que este último dedicó sistemáticamente al estudio de la radiactividad.

Con partículas alfa, bombardeó pacientemente láminas de metales y observó los efectos sobre dichas láminas. Las partículas alfa eran emitidas espontáneamente por mineral de radio o de uranio.

Era de esperar que las partículas atravesaran completamente las láminas, aunque algunas salieran desviadas un pequeño ángulo debido a que, según Thomson, la carga positiva del átomo estaba repartida por toda la esfera atómica y los electrones distribuidos por la superficie de la misma.

No obstante se comprobó que, aunque la mayoría de partículas atravesaba las láminas sin desviarse otras se desviaban mucho e incluso eran devueltas en sentido contrario.

Todo ello obligó a reflexionar sobre la estructura atómica y a perfeccionar el modelo atómico de Thomson, llegándose a las siguientes conclusiones sobre aquella:

- a) El átomo debe estar, casi todo él, vacío.
- b) Las partículas alfa que rebotan hacen ver una zona de masa con gran densidad y fuertemente positiva.
- c) En consecuencia, los electrones, con muy poca masa, girarán en órbita alrededor del núcleo, dejando entre ambos un espacio vacío.

41. La idea principal de este texto es que la solución al problema que plantea radica en que:

- a) Entre el núcleo y los electrones no hay materia.
- b) El átomo es un trozo de materia que está vacío.
- c) La materia está repartida por toda la esfera atómica.

42. La intención principal del texto es dar a conocer:

- a) Que se reflexionó durante siete años sobre el modelo de Thomson.
- b) Que se avanzó científicamente dando a conocer un nuevo modelo atómico.
- c) Que se comprobó la veracidad sobre los descubrimientos anteriores.

43. En textos como éste, en que el autor describe un problema y comenta como se llegó a la solución, la mejor forma de saber cual es la idea principal que nos quiere comunicar es:

- a) Buscar la palabra que con más frecuencia se repite a lo largo del texto.
- b) Fijarnos en la primera frase del texto porque presenta la idea a desarrollar.
- c) Tratar de sintetizar en una frase el problema junto con la solución al mismo.

44. En el texto aparece la frase "*La carga positiva del átomo estaba repartida por toda la esfera atómica*". Esta frase significa:

- a) Que antes de que Thomson lo dijese, la carga positiva estaba repartida.
- b) En el mismo momento que lo dijese, la carga positiva estaba repartida.
- c) Con independencia de cuando lo dijo, la carga positiva estaba repartida.

45. ¿En cuál de las siguientes frases aparece una expresión que hace referencia al tema del texto?

- a) Son exactamente aquellos años en que este último ...
- b) Los electrones distribuidos por la superficie de la misma ...
- c) Llegándose a las siguientes conclusiones sobre aquella...

46. ¿Por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración "*No obstante se comprobó que ...*"?

- a) Para lo cual se comprobó que ...
- b) A pesar de todo se comprobó que ...
- c) Ni siquiera se comprobó que ...



47. ¿En qué tipo de documento podríamos encontrar este texto?

- a) En un libro de texto que trate de química.
- b) En un libro de biografías de inventores.
- c) En una revista científica de actualidad.

48. La oración "*Las partículas que rebotan hacen ver una zona de masa*" significa:

- a) Que tras el rebote se ven múltiples partículas.
- b) Que debido al rebote nos imaginamos esa zona de masa.
- c) Que al rebotar dejan espacio libre para ver esa masa.

49. En el texto aparece la frase "*La carga positiva del átomo estaba repartida por toda la esfera atómica y los electrones distribuidos por la superficie de la misma*". Esto significa que:

- a) Las partículas atómicas no se agrupan en el núcleo.
- b) Las partículas alfa están en el interior del átomo.
- c) Que los electrones están separados de las cargas positivas.

50. En el texto aparece la frase "*Otras (partículas) eran devueltas en sentido contrario*". Este rebote se produce después de:

- a) Golpear una masa mayor que ellas.
- b) La repulsión entre cargas positivas.
- c) Estrellarse contra los electrones.

## TEXTO 6.

Arquímedes vivió doscientos cincuenta años antes de Cristo, había nacido en Siracusa y era hombre de gran inteligencia práctica.

Se cuenta que cierto día el Rey le llamó a Palacio ante el rumor de que el orfebre le había engañado en la realización de una corona de oro. "Antes de veinticuatro horas deseo saber si he sido engañado y en qué cantidad pero la corona es preciosa y no debes estropearla", le dijo.

Arquímedes quedó abrumado hasta tal punto que para poder reaccionar se tuvo que dar un baño de agua fría.

"Eureka", dio un salto y salió corriendo hacia Palacio al comprobar que se sentía más ligero dentro del agua que fuera de ella.

"Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido desalojado", fue su famoso principio.

Ello no sólo le permitió determinar el peso específico de la corona real. En dicho principio se basa la navegación de buques, submarinos y globos, y además lo usamos instintivamente en procesos industriales para la separación de líquidos no miscibles, como en la fabricación del aceite de oliva después de inyectarle agua hirviendo, ya que el aceite siempre quedará por encima.

51. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor la idea principal del texto?

- a) Flota quien menor peso específico tiene.
- b) Los líquidos no pueden mezclarse.
- c) Arquímedes tenía gran inteligencia.

52. La intención principal del autor al escribir este texto es:

- a) Contar la historia del descubrimiento de Arquímedes.
- b) Explicar la navegación de buques, submarinos y globos.
- c) Explicar lo que se conoce como "principio de Arquímedes".

53. En textos como éste, en que el autor describe un problema y comenta como se llegó a la solución, la mejor forma de saber cual es la idea principal que nos quiere comunicar es:

- a) Buscar una frase que sintetice la explicación que se da al hecho mencionado.
- b) Buscar la palabra de la que más cosas se dicen a lo largo de todo el texto.
- c) Fijarnos en la última frase, que recoge las aplicaciones del contenido del texto.

54. En la frase: "*Se cuenta que cierto día el Rey le llamó*", la expresión "se cuenta" indica:

- a) Una acción anterior al momento en que se escribió el texto.
- b) Una acción que se repite antes, durante y después de escribirse.
- c) Una acción que se realiza al mismo tiempo de escribir el texto.

55. ¿En cuál de las siguientes frases **NO** aparece palabra alguna que haga referencia al tema del texto?

- a) ... lo usamos instintivamente...
- b) ... ello no sólo le permitió...
- c) ... que fuera de ella...

56. ¿Por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración "*Ello no sólo le permitió determinar el peso específico*"?

- a) Ello en cambio le permitió determinar el peso específico.
- b) Ello le permitió determinar el peso específico y además ...
- c) Ello además le permitió determinar el peso específico.

57. ¿En qué tipo de documento podríamos encontrar este texto?

- a) En una revista de temas de actualidad.
- b) En un libro de historia de la ciencia.
- c) En un libro de texto sobre Física.

58. Señala cuál de las tres afirmaciones siguientes es cierta:

- a) Los líquidos con igual peso específico no son miscibles.
- b) El líquido con mayor peso específico flota sobre el otro.
- c) El líquido con menor peso específico flota sobre el otro.

59. ¿Quién es el que empuja cuando introducimos un sólido en un líquido?

- a) Se empujan ambos mutuamente.
- b) El líquido empuja al sólido.
- c) El sólido empuja al líquido.

60. Cuando el autor escribe: "*En dicho principio se basa la navegación de buques y submarinos*", está pensando con más probabilidad:

- a) En que el agua empuja hacia arriba a los barcos, excepto cuando éstos pesan demasiado.
- b) En que la flotación e inmersión de una nave en un fluido depende del peso específico.
- c) En que los globos ascienden por la diferencia de presión que se crea al calentar el gas.

BATERÍA CL-4

CUARTA PARTE: BIOLOGÍA Y GEOLOGÍA

© Jesús Alonso Tapia y Equipo de Profesores.

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ BUP-ESO \_\_ Fecha \_\_\_\_\_

## TEXTO 7.

La Tierra es un caso único entre los planetas del Sistema Solar. Sólo ella tiene una temperatura de superficie que permite la existencia del agua en sus tres formas: líquida, sólida y gaseosa; sólo ella, en lo que alcanza a nuestros conocimientos actuales, tiene lluvia, ríos y océanos. Para ser exactos deberíamos decir océano en singular, ya que lo que los geógrafos llaman tradicionalmente océano Pacífico, Atlántico, Índico, Ártico y Antártico constituyen en realidad una masa única de agua salada de la que los continentes emergen como islas.

Esa inmensa masa de agua en perpetua agitación fue la fuente de la vida y sigue siendo esencial para que ésta continúe. Al funcionar como una enorme reserva de calor el océano moldea nuestro clima, lo cual viene a suavizar las temperaturas extremas que de otro modo reinarían en el planeta originando desiertos y extensiones heladas. Es una fuente esencial de alimentos y una fuente potencialmente importante de minerales y de energía. Permite además al hombre desembarazarse eficazmente de un gran volumen de desechos y es el medio en el que se desarrolla la forma más barata del transporte. Sus riberas son el lugar favorito para el solaz de los hombres y los poetas se han inspirado desde siempre en su grandeza y su hermosura.

61. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor la idea principal del texto?
- Al funcionar como una enorme reserva de calor, el océano moldea nuestro clima.
  - El océano es una masa única de agua de la que todos los continentes emergen.
  - La Tierra es un caso único entre los planetas gracias al agua que posibilita la vida.

62. La intención que persigue el autor al escribir este texto es:

- a) Poner de manifiesto que sólo existe un océano.
- b) Mostrar la importancia del agua en el planeta.
- c) Contarnos la influencia del agua sobre el clima.

63. En un texto como éste en el que el autor describe un fenómeno dando detalles sobre el mismo, el mejor modo de averiguar qué es lo más importante que nos quiere comunicar es:

- a) Identificar la conclusión que se deduce de las cosas que el autor cuenta a lo largo del texto.
- b) Fijarnos en el término repetido con más frecuencia, porque nos dice de qué habla el autor.
- c) Buscar una idea que englobe el conjunto de afirmaciones que se hacen sobre ese fenómeno.

64. Con la oración "*Al funcionar como una enorme reserva de calor, el océano moldea nuestro clima*", el autor se refiere:

- a) A que primero funciona como una enorme reserva de calor y luego moldea nuestro clima.
- b) A que a la vez que está funcionando como una reserva de calor, está moldeando el clima.
- c) A que funciona como una reserva de calor y, además, a veces moldea el clima de la tierra.

65. A través de todo el texto el autor nos está dando información sobre lo mismo, sobre el mismo tema. Señala en cuál de los siguientes enunciados del texto **NO** aparece ninguna palabra o expresión que haga alusión a dicho tema.

- a) ... Sólo ella tiene una temperatura de superficie.
- b) ... lo cual viene a suavizar las temperaturas extremas.
- c) ... se han inspirado desde siempre en su grandeza.

66. Señala por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración del texto: "*... y es el medio en el que se desarrolla la forma más barata de transporte*":

- a) ... además, es el medio en el que se desarrolla la forma más barata de transporte.
- b) ... o es el medio en el que se desarrolla la forma más barata de transporte.
- c) ... así es el medio en el que se desarrolla la forma más barata de transporte.

67. ¿A qué tipo de libro o documento es más probable que pertenezca este texto?

- a) A un documento sobre la necesidad de preservar el medio ambiente.
- b) A un libro de texto de la asignatura de Geografía e Historia.
- c) A una introducción escrita para un libro de viajes por el mundo.

68. Cuando el autor hace la afirmación: "*...sigue siendo esencial para que la vida continúe...*", está pensando más probablemente:

- a) En que el agua facilita la eliminación de los desechos.
- b) En que el agua nos ayuda a defendernos contra el calor.
- c) En la importancia del agua por ser un buen disolvente.

69. En el texto aparece la frase: "*el océano... viene a suavizar las temperaturas extremas*". Con esta frase el autor nos quiere decir:

- a) Que es capaz de absorber y ceder gran cantidad de calor variando poco su temperatura.
- b) Que en él inciden más directamente los rayos ultravioletas que nos llegan desde el sol.
- c) Que posee una gran profundidad, por lo que los rayos solares penetran mucho en él.

70. En el texto aparece la frase: "*Sólo ella... tiene lluvia, ríos y océanos*". Con el término lluvia el autor hace referencia a:

- a) Un fenómeno que se produce por la unión de moléculas de agua en estado gaseoso.
- b) Un fenómeno que se produce por la unión de moléculas de agua en estado líquido.
- c) Un fenómeno que se produce por un enfriamiento súbito del agua de la atmósfera.

## TEXTO 8.

La erosión del suelo produce con frecuencia efectos perjudiciales para los intereses del hombre. Estos efectos perjudiciales se deben fundamentalmente a que le conviene al hombre que el suelo esté cubierto por estrato vegetal, por lo menos en las zonas habitadas. Además, porque en el suelo desarrollan la vida muchos animales beneficiosos para él.

Cuando parte del suelo no tiene o pierde características necesarias para que en él se desarrollen las plantas y los animales, deja de cumplirse una de sus funciones principales y se transforma en zona desértica. Actualmente, por desgracia, están aumentando estas zonas en las que desaparece la vida o parte de la misma por la acción incontrolada del hombre: incendios forestales, deforestación y tala de árboles, pastoreo de ganado y otras alteraciones. Todo ellos favorece la acción erosiva de los agentes geológicos, de manera que los suelos, poco a poco, se van degradando.

Hay algunos principios fundamentales que, puestos en práctica, pueden ayudar a evitar la erosión y a reducir el daño causado por la misma.

Es importante mantener la tierra cubierta con vegetales, que pueden ser de cultivo o hierbas que se dan espontáneamente. Este estrato vegetal aumenta la absorción del agua y reduce las corrientes superficiales de la misma. Además, disminuye el efecto de las gotas de agua al caer sobre el suelo, ya que los vegetales amortiguan su fuerza.

71. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor la idea principal del texto?

- a) La erosión del suelo llevada a cabo por la humanidad hace que éste se desertice, desapareciendo la vida.
- b) Las consecuencias de la erosión del suelo por los incendios y la tala de árboles son negativas para el hombre.
- c) La Tierra debe estar cubierta con vegetales para evitar la erosión, dado que ésta es perjudicial para el hombre.



72. La intención principal del autor en este texto es:

- a) Contarnos las consecuencias perjudiciales de la erosión del suelo: se hace imposible el desarrollo de la vida.
- b) Dar una información de cómo tiene lugar la erosión del suelo, a través de la deforestación y el pastoreo.
- c) Convencernos de que tomemos ciertas medidas para evitar en la medida de lo posible la erosión del suelo.

73. En un texto como éste, en el que le autor da razones para mostrar la importancia de algo, la mejor forma de saber cuál es la idea principal que quiere comunicarnos es:

- a) Fijarnos en el término que se repite con más frecuencia a lo largo del texto.
- b) Identificar la conclusión que se sigue de todo lo que nos dice el autor.
- c) Fijarnos en la primera frase porque recoge la idea que luego se desarrolla.

74. La oración "*además, disminuiría el efecto de las gotas de agua al caer sobre el suelo, ya que los vegetales amortiguan su fuerza*" en el contexto en que aparece indica:

- a) Que en un futuro va a disminuir el efecto de las gotas de agua cuando caigan sobre el suelo.
- b) Que siempre que haya cubierta vegetal disminuirá el efecto de las gotas de agua.
- c) Que primero disminuye el efecto de las gotas y luego los vegetales amortiguan su fuerza.

75. A través de todo el texto el autor nos está dando información sobre lo mismo, sobre el mismo tema. Señala en cuáles de los siguientes enunciados del texto aparece alguna palabra o expresión que haga alusión a dicho tema:

- a) ... y a reducir el daño causado por la misma.
- b) ... en el que se desarrollan las plantas y los animales.
- c) ... deja de cumplir una de sus funciones principales.

76. ¿Por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración en el texto: "*Además, disminuiría el efecto de las gotas de agua al caer sobre el suelo, ya que los vegetales amortiguan su fuerza*"?:

- a) Además, disminuiría el efecto de las gotas de agua al caer sobre el suelo, porque los vegetales amortiguan su fuerza.
- b) Además, disminuiría el efecto de las gotas de agua al caer sobre el suelo, una vez que los vegetales amortiguan su fuerza.
- c) Además disminuiría el efecto de las gotas de agua al caer sobre el suelo, y luego los vegetales amortiguan su fuerza.

77. ¿En qué tipo de libro o documento podríamos encontrar este texto?:

- a) En una guía práctica de cuidado y mantenimiento de plantas.
- b) En una normativa del ayuntamiento, sobre cuidado de parques y parcelas.
- c) En un informe sobre impacto ambiental de actividades humanas.

78. En el texto aparece la frase "*La erosión del suelo produce con frecuencia efectos perjudiciales...*" Con el término *erosión* el autor se refiere a:

- a) La desaparición de los bosques.
- b) Un desgaste de la superficie terrestre.
- c) La roturación del suelo cuando se cultiva.

79. En el texto aparece la frase "*Todo ello favorece la acción erosiva de los agentes geológicos, ...*". ¿A qué hace referencia la expresión *agentes geológicos externos*?:

- a) Al hombre, las aguas salvajes, la vegetación y los volcanes.
- b) Al agua, la atmósfera, el hielo, el viento y los seres vivos.
- c) A los movimientos sísmicos, el aire, los ríos y los glaciares.

80. En el texto aparece la frase "*En el suelo se desarrollan muchos animales, ...*". Esto se debe principalmente a que:

- a) En el suelo se encuentran muchos productores, base de las cadenas alimentarias.
- b) El suelo posee los nutrientes necesarios para que cualquier animal pueda vivir.
- c) El suelo protege a los animales de las agresiones del medio externo.

BATERÍA CL-4

QUINTA PARTE: LENGUA-LITERATURA

© Jesús Alonso Tapia y Equipo de Profesores.

Apellidos \_\_\_\_\_ Nombre \_\_\_\_\_

Colegio \_\_\_\_\_ BUP-ESO \_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

## TEXTO 9.

"En aquel momento vio a todos los vetustenses felices a su modo, entregados unos al vicio, otros a cualquier manía, pero todos satisfechos. Sólo ella estaba allí como en un destierro. "Pero, ¡ay!, era una desterrada que no tenía patria a donde volver, ni por la cual suspirar. Había vivido en Granada, en Zaragoza, en Granada otra vez, y en Valladolid; don Víctor siempre con ella; ¿qué había dejado ni a orillas del Ebro, el río del Trovador, ni a orillas del Genil y el Darro? Nada; a lo más algún conato de aventura ridícula. Se acordó del inglés que tenía un carmen junto a la Alhambra, el que se enamoró de ella y le regaló la piel de tigre cazado en la India por sus criados (...), aquel pobre míster Brooke se había casado con una gitana del Albaicín. Buen provecho; pero de todas maneras era una aventura estúpida. La piel del tigre la conservaba, por el tigre, no por el inglés."

"¿Por qué no había ido al teatro? Tal vez allí hubiera podido alejar de sí aquellas ideas tristes, desconsoladoras, que se clavaban en su cerebro como alfileres en un acerico. Sí, estaba siendo tonta. ¿Por qué no había de hacer lo que todas las demás?"

81. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor lo más importante que el autor quiere comunicar?

- a) La protagonista recuerda algunos hechos pasados de su vida.
- b) La protagonista se siente sola y perdida en el ambiente en que vive.
- c) La protagonista se arrepiente de no haber ido al teatro ese día.

82. La intención principal del autor de este texto es:

- a) Hacernos partícipes de los sentimientos actuales de la protagonista.
- b) Darnos a conocer detalladamente el ambiente que rodea a la protagonista.
- c) Justificar la actitud de la protagonista del relato que nos presenta.

83. Si nos encontramos con un texto semejante a éste, en que el autor cuenta los sentimientos de una persona, la mejor forma de saber qué es lo más importante que el autor quiere comunicar es:

- a) Fijarnos en lo que tienen en común las afirmaciones que se hacen sobre la protagonista.
- b) Fijarnos en las relaciones que se establecen entre la protagonista y otros sujetos.
- c) Fijarnos en la primera idea del texto porque suele ser la idea fundamental.

84. En la frase "*Sólo ella estaba allí como en un destierro*", la forma verbal "estaba",

- a) Traduce un pensamiento pasado para el personaje y para el narrador
- b) Traduce un pensamiento presente para el personaje y para el narrador.
- c) Traduce un pensamiento pasado para el narrador y presente para el personaje.

85. Las palabras "*ella*" y "*le*" en "*se enamoró de ella y le regaló la piel de tigre*", se refieren:

- a) Las dos a la protagonista del relato, que recuerda su pasado.
- b) "Ella" a la protagonista y "le" al inglés mencionado en el texto.
- c) "Ella" a la Alhambra, que se nombra en el texto, y "le" al inglés.

86. ¿Por cuál de los siguientes enunciados podríamos sustituir mejor la oración del texto: "*En aquel momento vio a todos los vetustenses felices a su modo, entregados unos al vicio, otros a cualquier manía, pero todos satisfechos*"?

- a) "En aquel momento se dio cuenta de que todos los vetustenses eran felices a su modo porque todos ellos estaban satisfechos".
- b) "En aquel momento se dio cuenta de que los vetustenses estaban satisfechos y de que eran felices a pesar de que unos se entregaban al vicio y otros a cualquier manía".

c) "En aquel momento vio a todos los vetustenses felices a su modo, entregados unos al vicio, otros a cualquier manía, sin embargo, todos satisfechos"

87. Lo más probable es que este texto pertenezca:

- a) Al diario íntimo de un personaje, una mujer.
- b) A un relato guiado por un narrador omnisciente.
- c) A una narración literaria autobiográfica.

88. En el texto aparecen palabras como: "*destierro, ¡ay!, suspiros, aventura, tristes, desconsoladoras*". También se cuentan algunas experiencias de una persona. Este hecho permite situar el texto en una época:

- a) En que la literatura se esfuerza por analizar la realidad de manera profunda y objetiva.
- b) En que la literatura se aleja de la realidad, recreándose en la exaltación del sentimiento.
- c) En que la literatura se orienta hacia una función fundamentalmente didáctica y educativa.

89. ¿Cuál de estas afirmaciones relativas al texto es cierta ?

- a) El narrador da la palabra al "yo" del personaje central del texto.
- b) El narrador explica objetivamente lo que observa de su personaje.
- c) El narrador y el personaje se funden en un discurso compartido

90. Por el tipo de descripción, por el estilo y los detalles que se mencionan, se puede afirmar que la historia que se narra, se sitúa probablemente :

- a) En el siglo XVI.
- b) En el siglo XIX.
- c) En el siglo XX.

## TEXTO 10.

Afortunadamente, los españoles no somos racistas. Tendremos otros defectos, pero de todos es sabido que la cosa esa del racismo no nos afecta nada, ni una miaja. Por ejemplo, un mercado público de Madrid acaba de contratar guardias privados para que impidan a la gitanería el andar pidiendo limosna entre los puestos. Tanto celo ponen esos hombres en su tarea que no se limitan a expulsar a aquellos cogidos in fraganti con la mano petitoria y la boca abierta, sino que a veces cortan por lo sano y no dejan entrar en el mercado a ninguna hembra oscura. Total, que hay días que las puertas de la lonja están abarrotadas de mujeres-color-cobre que asaltan a las mujeres-color-blanco con un modesto ruego: por favor, cómpreme un pollo, señorita, que a mí no me dejan pasar para comprarlo. Pero esto no tiene nada que ver con el racismo: la culpa es de los gitanos, que ya se sabe que son unos pesados. Tan pesados, tan obcecados y tan suyos que se empeñan en desdeñar la sociedad paya, en seguir malviviendo en chabolas y en mantener una tasa de analfabetismo del 85%, en vez de estudiar para arquitectos o de residir en chalés de lujo. Son muy brutos.

A Dios gracias, los españoles no somos racistas. Junto a mi casa hay un parque suburbial, un polvoriento espacio abierto con pinos languideciendo entre basuras. Al fondo, allá donde la cochambre se convierte en horizonte, hay un asentamiento de gitanos. De vez en cuando, un adiestrador de perros acude al parque con sus animales. Y, en ocasiones, para hallar un entretenimiento en su trabajo, el adiestrador azuza al perro contra los churumbeles, que cruzan el parque hacia su casa. Pero esto no es racismo...

91. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes expresa mejor la idea más importante que el autor ha querido transmitir?

- a) Los españoles no somos racistas, tan sólo tenemos alguna pequeña diferencia con los gitanos.
- b) Los españoles a menudo actuamos de modo racista en cosas a las que damos poca importancia.
- c) Los españoles somos racistas pero los gitanos lo son más por no querer integrarse ni estudiar.

92. La intención principal del autor en este texto es:

- a) Criticar a los españoles por su comportamiento que es, con frecuencia, racista.
- b) Llamar la atención de las autoridades para que vigilen mejor las zonas públicas.
- c) Criticar la actitud de los gitanos que se oponen a toda integración en la sociedad.

93. En textos como éste, en que el autor parece sostener cosas que se contradicen, la mejor forma de saber qué es lo más importante que el autor nos quiere comunicar consiste en:

- a) Fijarnos en la primera afirmación, donde el sentido queda bien claro.
- b) Aceptar como idea principal lo opuesto a lo que parece defenderse.
- c) Fijarnos en las ideas que se hallan resumidas en el último párrafo.

94. La frase: *"Tendremos otros defectos, pero de todos es sabido que la cosa esa del racismo no nos afecta nada, ni una miaja"* significa:

- a) Que en el futuro vamos a tener otros defectos, pero no ése.
- b) Que efectivamente tenemos otros defectos, pero no ése.
- c) Que probablemente tengamos otros defectos, pero no ése.

95. En la línea doce, dice el texto: *"por favor cómpreme un pollo, señorita, que a mí no me dejan pasar para comprarlo"*. Esas palabras están dichas por:

- a) El autor, que se implica en el texto.
- b) Por una persona de raza gitana.
- c) Por una mujer de raza blanca.

96. La frase: *"tanto celo ponen esos hombres en su tarea que no se limitan a expulsar a aquellos cogidos in fraganti"* significa:

- a) Que expulsaban, cumpliendo con su deber, a los cogidos in fraganti.
- b) Que no sólo expulsaban a los que cogían in fraganti: además ...
- c) Que tenían mucho celo y expulsaban a los que cogían robando.

97. Lo más probable es que este texto proceda:

- a) De un libro de texto sobre Ciencias Sociales.
- b) De un estudio sociológico sobre grupos sociales.
- c) De algún artículo escrito en un periódico.

98. En el texto aparecen las expresiones "*...no somos racistas*", "*...pero esto no es racismo*", "*esa cosa del racismo no nos afecta a los españoles...*" ¿Por qué utiliza el autor, en un texto como éste, el recurso llamado *reiteración*?

- a) Porque no es verdad, en opinión del autor, que los españoles no seamos racistas.
- b) Para dar más fuerza a la idea de que no somos racistas, por si alguien lo dudase.
- c) Porque quiere desmentir que cualquier cosa que se haga a los gitanos sea racismo.

99. Tras la lectura del texto, se puede afirmar que el autor utiliza como recurso estilístico principal:

- a) La ironía.
- b) La metáfora.
- c) La personificación

100. En el texto aparece la frase: "*...cómprame un pollo, señorita, que a mí no me dejan pasar para comprarlo*". La proposición introducida por el "*que*" es:

- a) Subordinada de relativo
- b) Subordinada sustantiva
- c) Subordinada causal.



## TEXTO 11:

Una de las más profundas impresiones que me deparó mi primera estancia en Nueva York fue el descubrirme haciendo profesión de antirracismo a cada momento. Nunca necesité hacerlo antes, por la sencilla razón de que jamás tuve el menor problema con seres de piel distinta a la mía. El racismo sólo era una evidencia que se me presentaba en las películas y que, por cuanto acabo de declarar, se me antojaba incomprensible. El racista era, para mí, un personaje tan lejano como el gánster, el vaquero o el astronauta. Algo que mi sociedad no se había planteado siquiera.

Nueva York me colocó ante la evidencia de una manera brutal. De repente, me encontré adoptando una serie de precauciones absurdas, y no fue menor la necesidad de demostrar una simpatía exagerada a cada negro que me salía al paso. Huelga decir que ya la sentía mucho antes de llegar a Estados Unidos, pero nunca tuve la necesidad de exhibirla a guisa de carné que me acreditara contra el peligro. Tales precauciones, tales prejuicios recién adquiridos enturbiaban mis relaciones con mis amigos de color. En una simple discusión sobre cine o teatro, no me atrevía a llevarles la contraria para que no vieses en ello una agresión que pudiera herirles. Estaba recurriendo a una serie de actitudes paternalistas, estúpidas a la par que dañinas. Sin yo pretenderlo había dejado de tratarles como a seres normales...

101. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa mejor lo más importante que el autor quiere comunicar con el texto?:

- a) La estancia en Nueva York supuso un cambio en sus manifestaciones en relación con el racismo.
- b) El racismo había sido para el autor una evidencia que se mostraba en las películas.
- c) El racismo era una situación lejana que en la sociedad del autor no se había planteado.

102. La intención principal del autor en este texto es:

- a) Comunicarnos el impacto que ha supuesto para él convivir con el racismo.
- b) Contarnos cómo ha llegado a adquirir ciertos prejuicios contra los negros.
- c) Mostrarnos que el ciudadano español no es racista y el americano sí.

103. La mejor forma para saber cuál es la idea principal en un texto como éste, en el que el autor contrasta dos experiencias, es:

- a) Fijarnos en la última frase que recoge la conclusión a la que quiere llegar el autor.
- b) Leer el texto completo y volverlo a leer, subrayando las ideas principales de cada párrafo.
- c) Buscar la idea que recoge la relación que se establece entre los hechos que se comparan.

104. En el texto aparece la frase "*Tales prejuicios recién adquiridos enturbiaban mis relaciones con mis amigos de color*". Dicho enunciado expresa:

- a) Un hecho simultáneo a su estancia en Nueva York.
- b) Un hecho previo a su estancia en Nueva York.
- c) Un hecho posterior a sus relaciones con los negros.

105. En la oración "*...pero nunca tuve la necesidad de exhibirla a guisa de carné.*", el pronombre subrayado se refiere a:

- a) Necesidad.
- b) Simpatía.
- c) Evidencia.

106. En el texto aparece la frase "*estaba recurriendo a una serie de actitudes estúpidas a la par que dañinas*". ¿Por cuál de las siguientes alternativas se puede sustituir la expresión "*a la par que*"?:

- a) Más que dañinas.
- b) O bien dañinas.
- c) Además de dañinas.

107. ¿En qué tipo de libro o documento podríamos encontrar este texto?:

- a) En un libro de Ética.
- b) En un artículo periodístico.
- c) En una carta entre amigos.

108. En este texto, en función del contexto, la palabra "*estancia*" es sinónimo de:

- a) Residencia.
- b) Mansión.
- c) Habitación.

109. ¿En cuál de los siguientes enunciados la palabra "*que*" introduce una oración de relativo?:

- a) No me atrevía a llevarles la contraria para que no viesan en ello una agresión.
- b) Huelga decir que ya lo sentía mucho antes de llegar a Estados Unidos.
- c) Fue grande la necesidad de demostrar simpatía a cada negro que me salía al paso.

110. En el texto aparece la expresión "*a guisa de carné*". Esta expresión implica:

- a) Un contraste.
- b) Una comparación.
- c) Una finalidad.



## Apéndice 3.2.

## ALTERNATIVAS CORRECTAS A CADA PREGUNTA

Pregunta Texto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	C	A	B	A		A	C	B	C	C
2	B	A	B	A		A	C	B	B	C
3	C	B	B	C	A	A	C	A	B	A
4	B	C	A	B	A	C	B	C	C	A
5	A	B	C	C	C	B	A	B	C	A
6	A	C	A	B	C	B	C	C	A	B
7	C	B	C	B		A	A	C	A	B
8	C	C	B	B	A	A	C	B	B	A
9	B	A	A	C	A	C	B	A	C	B
10	B	A	B	C	B	B	C	A	A	C
11	A	A	C	A	B	C	B	A	C	B



## APÉNDICE 3.3

## BAREMOS

A) Centiles correspondientes a las puntuaciones directas obtenidas en cada subescala.

Punt. directa	Escala							Punt. directa	Escala CTE
	IP	INT	EST	TV	MR	CON	DOC		
11	100	100	100	100		100	100	28	100
10	97	97	98	98		93	97	24	93
9	86	86	87	92		73	92	22	79
8	67	67	69	75	100	49	75	21	69
7	48	45	51	57	99	30	50	20	57
6	29	26	35	36	95	17	27	19	47
5	18	13	23	18	82	9	12	18	37
4	9	6	11	8	58	5	5	17	27
3	4	2	5	2	29	2	1	16	20
2	1	1	3	1	9	1	0	14	10
1	0	0	1	0	3	0	0	12	4
0	0	0	0	0	0	0	0	8	0
N	801	801	801	801	831	801	801	N	801
Media	7.41	7.58	7.18	7.13	4.25	8.22	7.38	Media	19.51
Sx	1.99	1.81	2.11	1.78	1.39	1.84	1.60	Sx	3.60

## B) Centiles correspondientes a la escala COM y a la Prueba Total.

Escala COM		Puntuaciones correspondientes al Total de la prueba CL-4					
Punt. directa	Centil	Punt. directa	Centil	Punt. directa	Centil	Punt. directa	Centil
22	100	93	100	73	63	59	18
19	95	87	98	72	60	58	16
18	86	85	97	71	57	57	14
17	76	84	96	70	54	56	12
16	65	83	94	69	49	55	11
15	52	82	92	68	46	54	10
14	38	81	90	67	42	53	9
13	31	80	87	66	39	52	7
12	20	79	85	65	35	51	6
11	14	78	82	64	32	49	5
10	9	77	79	63	28	48	4
9	5	76	75	62	26	45	3
5	1	75	71	61	23	42	2
		74	67	60	20	39	1
N	801			N	801		
Media	15			Media	68.76		
Sx	3,24			Sx	10.56		



**VOLUMEN 3**  
**REFERENCIAS**



## INTRODUCCIÓN

ALONSO TAPIA, J., ASENSIO, F., FERNÁNDEZ, E., LABRADA, A. y MORAL, F. (1993) Modelos y estrategias para la evaluación del conocimiento y su adquisición: Un estudio piloto. *Tarbiya*, 3, 7-48.

CARPENTER, T.P., FENNEMA, E. y ROMBERG, T.A. (Eds.) (1993) *Rational numbers: an integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

FREDERIKSEN, J.R., GLASER, R., LESGOLD, A., Y SHAFTO, M.G. (Eds.) (1990) *Diagnostic monitoring of skill and knowledge acquisition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

VILLA, J.L. y ALONSO TAPIA, J. (1996) Evaluación del conocimiento: Procedimientos utilizados por los profesores en BUP y FP. En Ministerio de Educación y Ciencia: Premios Nacionales de Investigación e Innovación Educativa 1994. Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, CIDE.

## CAPÍTULO 1

ALONSO TAPIA, J. (1983) Evaluación del pensamiento conceptual. En R. Fernández-Ballesteros (Ed.): *Psicodiagnóstico*. Vol 1. (pp. 599-631) Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

ALONSO TAPIA, J. (1991) *Motivación y aprendizaje en el aula. Cómo enseñar a pensar*. Madrid: Santillana.

ALONSO TAPIA, J. (1992 a) Evaluación del conocimiento, la inteligencia y las aptitudes. Aportaciones de la psicología cognitiva. En R. Fernández-Ballesteros: *Introducción a la evaluación psicológica*. I. (pp. 415-452) Madrid, Pirámide.

ALONSO TAPIA, J. (1995) *Orientación educativa. Teoría, evaluación e intervención*. Madrid: Síntesis.

ALONSO TAPIA, J., ASENSIO, F., FERNÁNDEZ, E., LABRADA, A. y MORAL, F. (1993) Modelos y estrategias para la evaluación del conocimiento y su adquisición: Un estudio piloto. *Tarbiya*, 3, 7-48.

ALONSO TAPIA, J., CARRIEDO, N. y MATEOS, M. (1992) Evaluación de la supervisión y regulación de la comprensión: La batería SURCO. En J. Alonso-Tapia, y Col. (1992) *Leer, comprender y pensar. Nuevas estrategias y técnicas de evaluación*. (pp. 11-58). Madrid, Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia (CIDE)

- ALONSO TAPIA, J. y CORRAL DOMÍNGUEZ, C (1992) *Un modelo de evaluación en el área de Lengua. La batería AP-L*. Consellería de Cultura, educació y Ciència, Generalitat Valenciana. (Colección: Materiales para el desarrollo curricular). Valencia.
- BEREITER, C. y SCARDAMALIA, M. (1987) *The psychology of written composition*. Hillsdale, NJ. Lawrence Erlbaum.
- BRUNER, J.S., GOODNOW, J.J. y AUSTIN, G.A. (1956) *A study of thinking*. Nueva York: Wiley.
- BRUNER, J.S., OLVER, R.R. y GREENFIELD, P.M. (1966) *Studies in cognitive growth*. Nueva York: Wiley. (Traducción castellana de A. Maldonado: *Investigaciones sobre el desarrollo cognitivo*. Madrid: Pablo del Río, 1980).
- COLL, C. (1987) *Psicología y currículum*. Barcelona, Laia.
- DOCHY, F. (1996) Assessment of domain-specific and domain-transcending prior knowledge: Entry assessment and the use of profile analysis. In M. Birembaum and F. Dochy (Eds.) *Alternatives in assessment of achievements, learning processes and prior knowledge*. Boston: Kluwer.
- EAGLY, A.H. y CHAIKEN, S. (1993) *The psychology of attitudes*. Nueva York: Harcourt Brace.
- GLASER, R., y BASSOK, M. (1989) learning theory and the study of instruction. *Annual Review of Psychology*, 40, 631-666.
- GRAVES, D.H. y SUNSTEIN, B.S. (1992) *Portfolio Portraits*. Porsmouth, NH: Heinemann.
- KRUGLANSKI A.W. (1989) *Lay epistemics and human knowledge: Cognitive and motivational bases*. Nueva York: Plenum.
- MAYER, R. (1987) *Educational Psychology: A cognitive approach*. Boston. Little, Brown and Co., 1987.
- MEICHEMBAUM, D., BURLAND, S., GRUSO, L. y CAMERON, R. (1985) Metacognitive assessment. En S.R. Yussen (Ed.) *The growth of reflection in children*. Orlando, FL: Academic Press.
- MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA (1989) *Diseño curricular base*. Madrid: MEC.
- NOVAK, J.D. y GOWIN, D.B. (1984) *Learning how to learn*. Londres: Cambridge University Press.
- OLSON, J.M. y ZANNA, M.P. (1993) Attitudes and attitude change. *Annual Review of Psychology*, 44, 117-54.
- PIAGET, J. (1926) *La représentation du monde chez l'enfant*. París: PUF.
- RIVAS, F. y ALCANTUD, F. (1989) *La evaluación criterial en la educación primaria*. Madrid: CIDE, Ministerio de Educación y Ciencia.
- SELDIN, P. (1993) *Successful use of teaching portfolios*. Bolton, MA: Anker.

- SHEPARD, L. (1980) Standard setting issues and methods. *Applied psychological Measurement*, 4 (4), 447-467.
- SMITH, E.E. y MEDIN, D.L. (1981) *Categories and concepts*. Cambridge, MS: Harvard University Press.
- SNOW, R.E. y LOHMAN, D.F. (1989) Implications of cognitive psychology for educational measurement. En R.L. Linn (Ed.) *Educational measurement*. Nueva York: McMillan.
- TIERNEY, R.J., CARTER, M.A. y DESAI, E. (1991) *Portfolio assessment in the reading-writing classroom*. Norwood, MA: Christofer Gordon.
- TRIANDIS, H.C. (1991) Attitudes and attitude change. En *Ency. Hum. Biol.* 1:485-96. San Diego, CA: Academic Press.
- VILLA, J.L. y ALONSO TAPIA, J. (1996) ¿Cómo se evalúa el aprendizaje en Enseñanzas Medias? *Revista de Ciencias de la Educación*, 168, 473-503.
- VILLA, J.L. y ALONSO TAPIA, J. (en prensa) Evaluación del conocimiento: criterios informales utilizados por los profesores. *Revista de Ciencias de la Educación*.
- YANCEY, K.B. (1992) *Portfolios in the Writing Classroom*. Urbana, Ill: National Council of Teachers of English.
- ZANNA, M.P. y REMPEL, J.K. (1988) Attitudes: a new look at an old concept. En D. Bar-Tal y A.W. Kruglanski (Eds.) *The social psychology of knowledge*. (pp. 315-334). Nueva York: Cambridge University Press.

## CAPÍTULO 2

- ALONSO TAPIA, J. (1991) *Motivación y aprendizaje en el aula. Cómo enseñar a pensar*. Madrid: Santillana.
- BEHR, M., HAREL, G., POST, T. y LESH, R. (1992) Rational number, ratio and proportion. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp.296-333). Nueva York: McMillan.
- BRUNER, J. y KENNEY, H. (1966) On relational concepts. En J. Bruner, R.R. Oliver y P.M. Greenfield (Eds.) *Studies in cognitive growth* (pp. 168-182). Nueva York: Wiley.
- BURTON, L. (1996) Assessment of Mathematics. What is the agenda? En M. Birembaum y F. Dochy (eds.) *Alternatives inb assessment of achievement, learning processes and prior knowledge*. (pp. 31-61). Boston: Kluwer.
- CARPENTER, T.P., FENNEMA, E. y ROMBERG, T.A. (Eds.) (1993) *Rational numbers: an integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- CARPENTER, T.P. y MOSER, J. (1983) The adquisition of additon and substraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *The acquisiton of mathematical concepts an processes*. Nueva York: Academic Press.

- CHAIKLIN, S. (1989) Cognitive studies of algebra problem solving and learning. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra*. (Vol. IV, pp. 93-114). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- CLEMENTS, D. y BATTISTA, M. (1992) Geometry and spatial reasoning. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp.420-464). Nueva York: McMillan.
- COLLIS, K.F., ROMBERG, T.A. y JURDAK, M.E. (1986) A technique for assessing mathematical problem solving ability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 206-221.
- ENGLISH, L. y HALFORD, G. (1995) *Mathematics education: models and processes*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- FUSON, C. (1992) Research on whole number, addition and subtraction. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp.243-275). Nueva York: McMillan.
- GREER, B. (1992) Multiplication and division as models of situations. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 276-295). Nueva York: McMillan.
- GROWS, D.A. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Nueva York: McMillan.
- HAREL, G., BEHR, M., POST, T. y LESH, R. (1992) The block task: Comparative analysis of the task with other proportion tasks and qualitative reasoning skills of seventh-grade children in solving the task. *Cognition and Instruction*, 9(1), 45-96.
- INHELDER, B. y PIAGET, J. (1955) *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. París: Presses Universitaires de France. (Reeditado en 1970).
- KARPLUS, R. y PETERSON, R.W. (1970) Intellectual development beyond elementary school. *School Science and Mathematics*, 70, 813-820.
- KHOURY, H.A. y BEHR, M. (1982) Student performance, individual differences, and modes of representation. *Journal of Research in mathematics Education*, 13, 3-5.
- KIERAN, C. (1992) The learning and teaching of school algebra. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 390-419). Nueva York: McMillan.
- KIEREN, T.E. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. en R. Lesh y D. Bradbar (Eds.) *Number and measurement: papers from a reseach workshop*. (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- KINTCH, W. (1986) Learning from text. *Cognition and instruction*, 3, 87-108.
- LANGE, J. (1992) Critical factors for real changes in mathematics learning. En G. Leder (ed.), *Assessment and learning of mathematics* (pp. 323). Howthorn, Vic.: Australian Council for Educational Research.

- MARSHALL, S.P. (1993 a) Assessment of rational number understanding: a schema based approach. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.) *Rational numbers: an integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- MARSHALL, S.P. (1993 b) Assessing schema knowledge. en N. Frederiksen, R.J. Mislevy e I.I. Bejar (Eds.) *Test theory for a new generation of tests*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- MAYER, R. (1987) *Educational psychology: A cognitive approach*. Boston: Little, Brown y Co.
- MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA (MEC) (1989) *Diseño curricular base*. Madrid: MEC.
- NATHAN, M.J., KINTCH, W. y YOUNG, E. (1992) A theory of algebra word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and Instruction*, 9(4), 329-391.
- NOELTING, G. (1980 a) The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational studies in Mathematics*, 11, 217-253.
- NOELTING, G. (1980 b) The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II: Problem structure at successive stages. Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational studies in Mathematics*, 11, 331-363.
- PELED, I., MUKHOPADHYAY, S., Y RESNICK, L.B. (1988) *Formal and informal sources of mental models for negative numbers*. Artículo presentado a la 29ª Reunión Anual de la Psychonomic Society. Chicago.
- SCHWARZ, B.B., KOHN, A.S. y RESNICK L.B. (1992) Bootstrapping mental constructions: A learning system about negative numbers. ITS 92 *Proceedings of the Second International Conference on Intelligence Tutoring Systems*. Montreal.
- SMITH, J.P. (1995) Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, 13(1), 3-50
- TAMIR, P. (1996) Science assessment. En M. Birenbaum y P. Dochy (Eds.) *Alternatives in assessment of achievements, learning processes and prior knowledge*. (93-129). Boston: Kluwer.
- VILLA, J.L. y ALONSO TAPIA, J. (1996) ¿Cómo se evalúa el aprendizaje en Enseñanzas Medias? *Revista de Ciencias de la Educación*, 168, 473-503.
- WEBB, N.L. (1992) Assessment of student's knowledge of mathematics: steps toward a theory. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp.661-683). Nueva York: McMillan.

WENGER, R.H. (1987) Cognitive science and algebra learning. En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education*. (pp. 115-135). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

### CAPÍTULO 3

ALONSO TAPIA, J. (1991) *Motivación y aprendizaje en el aula. Cómo enseñar a pensar*. Madrid: Santillana.

ALONSO TAPIA, J. (1992) *Leer, comprender y pensar. Nuevas estrategias y técnicas de evaluación*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia (CIDE).

ALONSO TAPIA, J. (1995-a) *Orientación educativa. Teoría, evaluación e intervención*. Madrid: Síntesis.

ALONSO TAPIA, J. (1995-b) La evaluación de la comprensión lectora. *Textos*, 5, 63-78.

ALONSO TAPIA, J. y CARRIEDO, N. (1991) Teaching to understand. Enhancing comprehension strategies. *Fourth European Conference for Research on Learning and Instruction*. Turku, Finlandia.

ALONSO TAPIA, J. y CARRIEDO, N. y GONZALEZ, E. (1992) Evaluación de la capacidad de comprender y resumir lo importante. La batería IDEPA. En J. Alonso-Tapia y colaboradores: *Leer, comprender y pensar. Nuevas estrategias y técnicas de evaluación*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia (CIDE).

ALONSO TAPIA, J. y CORRAL DOMÍNGUEZ, C (1992) *Un modelo de evaluación en el área de Lengua. La batería AP-L*. Consellería de Cultura, educació y Ciència, Generalitat Valenciana. (Colección: Materiales para el desarrollo curricular). Valencia.

ALONSO TAPIA, J. y MATEOS SANZ, M. (1985): Comprensión lectora: Modelos, entrenamiento y evaluación. *Infancia y Aprendizaje*, 31-32, 5-19.

ALONSO TAPIA, J. y MATEOS SANZ (1987): Entrenamiento de habilidades cognitivas: Comprensión lectora. Fundamentación teórica. En J. Alonso Tapia (Ed.): *¿Enseñar a pensar Perspectivas para la educación compensatoria*. M.E.C. CIDE. Madrid.

BELINCHON, M., RIVIERE, A. e IGOA, J.M. (1992) *Psicología del lenguaje. Investigación y teoría*. Madrid: Trotta.

CARRIEDO, N. (1992) *Enseñar a comprender*. Tesis doctoral no publicada. Madrid: Universidad Autónoma.

CARRIEDO, N. y ALONSO-TAPIA, J. (1994): *¿Cómo enseñar a comprender un texto?* Colección Cuadernos del ICE, nº 10. Madrid: Servicio de Publicaciones de la U.A.M. (289 págs.).



- DIJK, T.A. van (1985) *Handbook of discourse analysis*. (4 vols.). Londres: Academic Press.
- DIJK, T.A. van y Kintsch, W. (1983) *Strategies of discourse comprehension*. Nueva York: Academic Press.
- GARCÍA MADRUGA, J.A., MARTÍN, J.I., LUQUE, J.L. y SANTAMARÍA, C. (1995) *Comprensión y adquisición de conocimientos a partir de textos*. Madrid: Siglo XXI.
- HUNT, E.B. (1978) Mechanics of verbal ability. *Psychological Review*, 85, 109-130.
- MATEOS, M. y ALONSO-TAPIA, J. (1991): Metacognition and reading comprehension: strategies for comprehension monitoring training. En M. Carretero, M. Pope, Simons, R. y J.I. Pozo: *Learning and instruction: European research in an international context*. (pp. 273-292) Vol.3. Oxford: Pergamon Press.
- MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA (1989) *Diseño curricular base*. Madrid: MEC.
- PERFETTI, C.A. (1989) There are generalized abilities and one of them is reading. En L. Resnick (ed.) *Knowing, learning and instruction. Essays in honor of Robert Glaser*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- SANCHEZ MIGUEL, E. (1993) *Los textos expositivos. Estrategias para mejorar su comprensión*. Madrid: Santillana.
- VEGA, M., CARREIRAS, M., GUTIERREZ-CALVO, M. y ALONSO-QUECUTY, M.L. (1990) *Lectura y comprensión: una perspectiva cognitiva*. Madrid: Alianza.
- VILA, I. (1992) Reflexiones desde la psicolingüística sobre la enseñanza de la lengua. *Tarbiya*, 1-2,







---

**Ministerio de Educación y Cultura**

Secretaría General de Educación y Formación Profesional

---