Materiales Didácticos

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

BACHILLERATO

Ministerio de Educación y Ciencia

Materiales Didácticos

Humanidades y Ciencias Sociales

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Autores:
M.ª Dolores Rodríguez Soalleiro
Ángel Sánchez Catalán

Coordinación:
Javier Brihuega Nieto
del Servicio de Innovación

Ministerio de Educación y Ciencia

CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR
DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES

- *Coordinación de la edición:* Ana Francisca Aguilar Sánchez
- *Maquetación y supervisión de pruebas:* Pedro Sauras Jaime

Ministerio de Educación y Ciencia
Secretaría de Estado de Educación
Edita: Centro de Publicaciones. Secretaría General Técnica
N. I. P. O.: 176-95-108-2
I. S. B. N.: 84-369-2662-5
Depósito legal: M. 24.388-1995
Imprime: Imprenta Fareso, S. A.
Paseo de la Dirección, 5 - 28039 Madrid

Prólogo

La finalidad de estos materiales didácticos para el Bachillerato es orientar a los profesores que, a partir de octubre de 1993, impartirán las nuevas enseñanzas de Bachillerato en los centros que han anticipado su implantación. Pretenden facilitarles el desarrollo de las materias de segundo curso, algunas de las cuales continúan las de primer curso. Con estos materiales el Ministerio de Educación y Ciencia quiere facilitar a los profesores la aplicación y desarrollo del nuevo currículo en su práctica docente, proporcionándoles sugerencias de programación y unidades didácticas que les ayuden en su trabajo; unas sugerencias, desde luego, no prescriptivas, ni tampoco cerradas, sino abiertas y con posibilidades varias de ser aprovechadas y desarrolladas. El desafío que para los centros educativos y los profesores supone el haber anticipado desde el curso 1992/93 la implantación de las nuevas enseñanzas, constituyéndose con ello en pioneros de lo que será más adelante la implantación generalizada, merece no sólo un cumplido reconocimiento, sino también un apoyo por parte del Ministerio, que a través de estos materiales didácticos pretende ayudar a los profesores a afrontar ese desafío.

El Ministerio valora muy positivamente el trabajo de los autores de estos materiales, que se adaptan a un esquema general propuesto por el Servicio de Innovación, de la Subdirección General de Programas Experimentales, y han sido elaborados en estrecha conexión con los asesores de este Servicio. Por consiguiente, aunque la autoría pertenece de pleno derecho a las personas que los han preparado, el Ministerio considera que son útiles ejemplos de programación y de unidades didácticas para la correspondiente asignatura, y que su utilización por profesores, en la medida en que se ajusten al marco de los proyectos curriculares que los centros establezcan y se adecúen a las características de sus alumnos, servirá para perfeccionar estos materiales y para elaborar otros.

La presentación misma, en forma de documentos de trabajo y no de libro propiamente dicho, pone de manifiesto que se trata de materiales con cierto carácter experimental: destinados a ser contrastados en la práctica, depurados y completados. Es intención del Ministerio seguir realizando ese trabajo de contrastación y depuración a lo largo del próximo curso, y hacerlo precisamente a partir de las sugerencias y contrapropuestas que vengan de los centros que se anticipan a la reforma.

El Real Decreto 1179/1992 de 2 de octubre, por el que se establece el currículo de Bachillerato, contiene en su anexo la información referida a esta asignatura que aparece reproducida al término del presente volumen.

Índice

Introducción

Son tres los puntos que nos han guiado a la hora de elaborar este trabajo:

- Se trata de unas Matemáticas dirigidas a unos alumnos y alumnas cuyo futuro profesional estará en torno a las Ciencias Sociales.
- Se trata de una asignatura propia de modalidad, del último curso de Educación Secundaria, pero no obligatoria.
- El alumnado que curse esta asignatura puede tener unos desniveles muy apreciables en cuanto al manejo de sus conocimientos matemáticos.

Teniendo en cuenta estos tres aspectos, hemos optado por hacer una programación en la que el marco general es el análisis y toma de decisiones en situaciones extraídas de contextos reales, con una secuencia de los contenidos dirigida a este fin.

La recogida de información, el análisis de los datos y la toma de decisiones, conforma una manera de trabajo en el campo de las Ciencias Sociales en un mundo en el que la información tiene cada vez mayor importancia.

En este sentido, un hecho a destacar es que la Estadística tiene un peso de un tercio del total de la asignatura. Los otros contenidos que se trabajan a lo largo de este curso, aunque tienen su importancia en sí mismos, van a estar encauzados en el sentido anterior. Así, tanto en la parte algebraica como en la analítica, el fin es el análisis de situaciones, la resolución de problemas reales y la toma de decisiones, aplicando los instrumentos algebraicos o analíticos que se necesiten.

Otra forma de hacer una programación de esta materia podría ser establecer dos o tres problemas reales de las Ciencias Sociales, que servirían como centro de interés para, a partir de ellos, desarrollar los contenidos establecidos.

No sería conveniente establecer una programación en la que los distintos contenidos se parcelen en compartimentos estancos sin ninguna relación entre ellos.

Orientaciones didácticas y para la evaluación

Orientaciones didácticas

El protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje debe ser el alumno, no las matemáticas ni el profesor; cada alumno y alumna debe ser el motor de su propio aprendizaje.

En este sentido y en el contexto de esta modalidad de Bachillerato, Se deben presentar las matemáticas como un cuerpo de conocimientos en continua evolución y fundamentalmente práctico. Además su funcionalidad e instrumentalidad como lenguaje y como vehículo de expresión hace conveniente que los alumnos y alumnas de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, adquieran un buen dominio de determinadas destrezas y expresiones matemáticas. Por esto es aconsejable utilizar actividades de grupo que favorezcan la discusión, la confrontación y la reflexión sobre las experiencias matemáticas.

La sociedad moderna incorpora, cada vez con mayor rapidez, las nuevas tecnologías a esferas de actividad cada vez más variadas. En este último curso de la Enseñanza Secundaria la incorporación de estas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje debe ser una práctica habitual y sistemática dentro del propio entorno de aprendizaje.

La informática y los medios audiovisuales (ordenadores, calculadoras, transparencias, diapositivas, fotografías, vídeos y otros materiales) proporcionan nuevos instrumentos y recursos, posibilitando la introducción de cambios metodológicos necesarios en una línea de investigación e innovación en el aula. Pero, además, proporcionan también nuevas posibilidades de cálculo en más campos de la matemática, como en el diferencial, integral o matricial, posibilitando, de esta manera cambios en el peso de algunos contenidos hasta ahora imprescindibles.

En cuanto a los contenidos, en la introducción de esta asignatura, el Decreto de curriculo *(Ver Anexo)* menciona que:

> *«...aun cuando los contenidos conceptuales están presentes en la actividad matemática, no son los únicos elementos que actúan en su desarrollo. En los contenidos del currículo es preciso otorgar un lugar importante a los procedimientos o modos de saber hacer, como los que se refieren a:*
>
> — *Habilidades en la comprensión y en el uso de diferentes lenguajes matemáticos.*
>
> — *Las técnicas, rutinas y algoritmos particulares que tengan un propósito concreto.*
>
> — *Las estrategias generales o heurísticas necesarias en la resolución de problemas como análisis de tareas, búsqueda de regularidades y pautas, expectativas de resultados, comprobación y refutación de hipótesis.*
>
> — *Decisiones ejecutivas y de control utilizadas al hacer un plan y llevarlo a cabo para plantear y resolver un problema y tomar decisiones sobre los conceptos, algoritmos o estrategias que se van a utilizar».*

Y, posteriormente:

«...las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II proporcionan conocimientos e instrumentos más técnicos, que permiten interpretar y abordar problemas de mayor complejidad matemática; entre ellos, especialmente los relacionados con el mundo de la economía».

En este sentido, hay que remarcar el carácter funcional de las matemáticas, aunque sin olvidar que, en este último curso, el rigor debe estar acorde con los instrumentos y algoritmos que se trabajen, teniendo en cuenta su carácter terminal.

Orientaciones para la evaluación

La evaluación ha de tener en cuenta dos aspectos:

— Aprendizaje de los alumnos y alumnas

— Funcionamiento de cada Unidad didáctica

Evaluación del aprendizaje

Dentro de este apartado habría que evaluar, a su vez, tres aspectos:

- Conocimientos previos.
- Objetivos.
- Formación.

Conocimientos previos

Dentro de estos conocimientos están algunos estudiados por los alumnos y alumnas en Primer curso de Bachillerato y en la Educación Secundaria Obligatoria y otros, dados dentro de este curso de Bachillerato.

En cuanto a los primeros, aun cuando creemos necesario, en general, que se deben recordar dentro de la propia Unidad didáctica de que se trate a fin de unificar los conocimientos de los alumnos y alumnas, hará falta una evaluación de los mismos, puesto que lo consideramos conveniente para el tratamiento del tema y para, en algunos momentos, redistribuir de una manera eficaz a los alumnos y alumnas según los resultados obtenidos por los mismos en una Prueba Inicial que se les efectúe.

En cuanto a los segundos los habremos evaluado en las unidades didácticas anteriores a aquella en que nos encontremos.

Adquisición de los objetivos

Para realizar esta evaluación se propondrán, y según el criterio personal de cada profesor, dependiendo de la Unidad de que se trate, dos pruebas de control. La primera se realizará hacia la mitad de la Unidad didáctica, pretendiéndose con ella comprobar si los alumnos y alumnas han adquirido ciertos conocimientos que consideramos básicos para continuar con provecho el resto de la Unidad.

El segundo control se hará al término de la Unidad y será global de toda ella.

Estos controles han de ser elaborados para medir si los alumnos y alumnas han conseguido alcanzar los objetivos propuestos al principio de la Unidad. Se pretende medir, por tanto, conocimientos, tanto conceptos como procedimientos y la referencia estará en los criterios de evaluación *(Ver Anexo).*

Formación

Con esta evaluación se pretende observar el nivel de aprendizaje de los alumnos y alumnas para adecuar la ayuda que el profesor o profesora presta a cada uno en particular.

Esta evaluación, al contrario que la anterior que es cuantitativa, es esencialmente cualitativa y «subjetiva». El profesor, para realizarla, ha de tener en cuenta parámetros como los siguientes:

- El trabajo diario de los alumnos y alumnas.
- Actitud en clase.
- Colaboración prestada por parte de cada alumno o alumna tanto al profesor como a sus compañeros y compañeras.
- Intervenciones en la clase.
- Trabajo en equipo y papel que realiza el alumno dentro del mismo.
- Opiniones de los alumnos y alumnas recogidas en conversaciones tanto individuales como colectivas.
- Autoevaluación por parte de los alumnos y alumnas.

Evaluación del funcionamiento de cada Unidad

El análisis de los parámetros recogidos en la evaluación de la formación nos permitirá efectuar la evaluación del funcionamiento de cada Unidad didáctica. Para ello, trataremos de observar todas las situaciones que se den en el aula, estén o no previstas, con lo cual podremos mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En definitiva, se trata de entrar en un proceso que se retroalimente de manera continua.

Cada actividad o ejercicio propuesto en la Unidad deberá ser analizado para adecuar su grado de dificultad al nivel que presenten los alumnos y alumnas con los que estamos interactuando. Esto nos permitirá detectar posibles discrepancias entre lo que teóricamente debería ocurrir y la realidad con que nos encontramos en el aula. Así conseguiremos detectar posibles lagunas que deberán ser subsanadas y que pueden referirse a aspectos importantes que necesitan refuerzo y que pueden o deben ser añadidos.

El proceso de aprendizaje de los alumnos y alumnas deberá ser analizado en lo posible para hacer extrapolaciones y analizar la secuencia de la programación y de cada Unidad didáctica en particular.

Los recursos utilizados en cada Unidad también serán motivo de estudio, midiendo su aportación, necesidad y ayuda a la mayor comprensión de los contenidos de la misma por parte de los alumnos y alumnas.

Otro aspecto importante en la evaluación de cada Unidad es el análisis del funcionamiento del binomio profesor-alumnos en torno al estudio de la misma. Para ello analizaremos *por qué y en qué momento*:

— Ha existido un mayor interés y participación.

— Ha existido un mayor desinterés y aburrimiento.

— El grupo ha actuado como tal convirtiéndose el estudio de la Unidad en una tarea común.

— Surgen estrategias para la formación de los grupos de trabajo, así como sus modos de funcionamiento.

— Aumentan o disminuyen las posibilidades de potenciar la participación de los alumnos y alumnas.

— Es mayor la adaptación a las distintas individualidades de los alumnos y alumnas.

Programación

Introducción

La finalidad del Álgebra, en este curso, es la resolución de los problemas que pueden plantearse mediante matrices o sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales. Por ello, el desarrollo que se hace en la Unidad didáctica de matrices y en la de sistemas de ecuaciones, se ha hecho teniendo presente este objetivo.

Las matrices nos van a permitir agrupar de manera ordenada y lógica una gran cantidad de información, permitiéndonos trabajar con ella con un gran ahorro de tiempo y espacio y más teniendo en cuenta los medios informáticos actuales que nos permiten el tratamiento de matrices de tamaño considerable con una gran rapidez y seguridad. Las operaciones con matrices tienen un sentido claro en el campo de las Ciencias Sociales y éste debe estar presente en el aula, así problemas de operaciones con matrices de información pueden dar sentido a unos algoritmos que no deben trabajarse descontextualizados.

Mediante sistemas de ecuaciones se pueden plantear multitud de situaciones de la vida real. En este curso el Álgebra va a permitir resolver estos sistemas de ecuaciones lineales mediante la aplicación de métodos sencillos.

Por último, con la programación lineal, mediante la resolución de sistemas de inecuaciones a través de los cuales se pretende conseguir el resultado óptimo de un problema (maximizar la ganancia o minimizar la pérdida), se pueden abordar multitud de problemas reales en multitud de campos que son objeto de estudio de las Ciencias Sociales, fundamentalmente de la Economía.

Unidades didácticas

- ***Unidad 1:*** *Matrices.*

  Tiempo: 3 semanas.

- ***Unidad 2:*** *Sistemas de ecuaciones lineales.*

  Tiempo: 3 semanas.

- ***Unidad 3:*** *Programación lineal.*

  Tiempo: 3 semanas.

Desarrollo de las unidades didácticas

Unidad 1: MATRICES.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Representar e interpretar tablas de números y grafos mediante una matriz, identificando elementos concretos de la misma, así como los tipos de matrices más característicos.
- Calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.
- Interpretar y manejar las matrices con sus propiedades en problemas extraídos de contextos reales.
- Utilizar el lenguaje matricial y operaciones con matrices como instrumento para representar e interpretar datos, relaciones y ecuaciones y, en general, para resolver situaciones diversas de las Ciencias Sociales.

Contenidos

Conceptos

- Matrices.
- Matrices de información y matrices que describen una relación.
- Dimensión u orden de una matriz.
- Igualdad de matrices.
- Tipos de matrices.
- Matriz transpuesta.
- Matriz nula y opuesta. Matriz inversa.
- Rango de una matriz.

Procedimientos

- Representación de matrices.
- Transposición de matrices.
- Suma de matrices. Producto de un número real por una matriz.
- Producto de matrices.
- Producto de una matriz mxn por una matriz fila y columna.
- Interpretación del significado de las operaciones con matrices y sus propiedades en situaciones diversas de la realidad.
- Cálculo de la inversa mediante procedimientos elementales.

— Cálculo del rango de una matriz mediante la aplicación del método de Gauss.

— Aplicación de las operaciones con matrices a la resolución de problemas extraídos de las Ciencias Sociales.

Actitudes

— Aprecio de los números como instrumento útil para describir y estudiar la realidad.

— Sensibilidad y gusto por la presentación tabulada y clara de números.

— Valoración de los medios tecnológicos para el tratamiento de la información.

Actividades

Abordamos su estudio mediante matrices de información. Para ello podemos empezar planteando el problema de información del horario de trenes, transcribiendolo en forma de matriz, o estudiar el paso de vehículos (motos, coches y camiones) por dos plazas en una hora punta durante varios días.

A continuación escribiremos matrices que describen una relación como es, por ejemplo, establecer la cantidad de preferencias o rechazos entre los alumnos y alumnas de una clase.

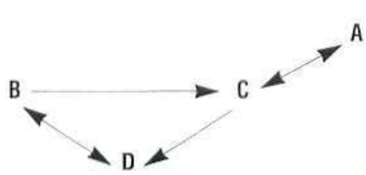
Se puede aplicar a muchos más problemas reales para que los alumnos y alumnas comprueben la necesidad y utilidad de las mismas, así como lo fácil que resulta extraer información de las mismas. Por ejemplo, se les puede plantear un problema similar al que figura a continuación, haciendo que los propios alumnos extraigan las consecuencias que crean oportunas sobre los datos que aparecen en la matriz:

A una serie de conferencias internacionales han asistido los siguientes delegados de los diversos países:

	Desarme	*Capa de ozono*	*Economía mundial*
EE.UU.	10	5	3
Rusia	8	3	12
C.E.E.	2	15	20

En cuanto a las operaciones con matrices, se abordará su estudio con matrices de órdenes bajos (como mucho 3x3) a fin de que los alumnos y alumnas vean de manera teórico-práctica en qué consisten y cómo se efectúan. Es importante que las operaciones se hagan partiendo de un contexto real con significado, por ejemplo empleando los problemas planteados al principio, aunque se dedique una parte de tiempo en ejercitar los algoritmos. Se pueden trabajar problemas reales, como por ejemplo:

Se consideran cuatro pueblos A, B, C y D unidos por carreteras según el gráfo siguiente:



Se pide construir la matriz T que indique el número de distintas formas de ir directamente de un pueblo a otro y que se analice el significado de T^2, de $T+T^2$ y de T^3.

Posteriormente, cuando ya estén familiarizados en como realizarlas, podemos proponer actividades como el estudio de la matriz «input-output» del conjunto de las actividades económicas de un país (por supuesto, no de manera exhaustiva), así como abordar el estudio de matrices de dimensiones elevadas a través de las posibilidades que nos proporcionan las hojas de cálculo electrónicas existentes.

Unidad 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Transcribir situaciones reales como sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos, cuando sea posible.
- Utilizar las matrices para escribir y resolver sistemas.
- Aplicar el método de Gauss para estudiar y resolver sistemas.
- Estudiar y resolver sistemas sencillos dependientes de un parámetro.

Contenidos

Conceptos

- Ecuaciones lineales. Ecuaciones equivalentes.
- Solución de una ecuación.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes.
- Solución de un sistema. Sistemas compatibles e incompatibles.
- Matriz de los coeficientes y matriz ampliada.
- Sistemas escalonados. Método de Gauss.

Procedimientos

- Interpretación geométrica de las ecuaciones de una y dos incógnitas.
- Estudio de la compatibilidad. Interpretación geométrica.
- Planteamiento de un sistema de ecuaciones a partir de una situación real.
- Resolución de sistemas de dos y de tres incógnitas.
- Interpretación geométrica de sistemas de dos y tres incógnitas.
- Expresión matricial de sistemas de ecuaciones lineales.
- Estudio de la compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales.
- Discusión y solución de las soluciones de un sistema por el Método de Gauss.
- Aplicación a sistemas homogéneos y a sistemas dependientes de un parámetro.

Actitudes

- Sentido crítico ante las soluciones intuitivas.
- Curiosidad e interés por investigar sobre posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- *Valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos en la representación gráfica* de las rectas y planos.

Actividades

Proponemos abordar el estudio de esta unidad planteando a los alumnos y alumnas problemas que den lugar a ecuaciones y a sistemas, pasando de inmediato a una interpretación geométrica de los mismos. Más adelante haremos un estudio pormenorizado de sistemas, por el Método de Gauss.

Este estudio se hará más exhaustivamente en sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas dependientes de un parámetro, haciendo hincapié en los distintos significados geométricos a que dan lugar los diversos valores del parámetro.

[Esta Unidad aparece desarrollada en el capítulo IV].

Unidad 3: PROGRAMACIÓN LINEAL.

Objetivos

- Saber dibujar el recinto de las restricciones que se impongan en un problema de extraído de un contexto real.
- Maximizar o minimizar una función objetivo cuyas variables estén sometidas a las restricciones del problema.
- Utilizar el ordenador para resolver problemas con más de dos variables.

Contenidos

Conceptos

- Inecuación.
- Solución de una inecuación.
- Sistemas de inecuaciones.
- Recinto de las restricciones de un problema.
- Vértices del recinto.
- Concepto de Programación lineal.

— Función objetivo.

— Máximo y mínimo.

— Introducción intuitiva de la programación lineal para más de dos variables.

Procedimientos

— Representación gráfica de las soluciones de una inecuación.

— Representación gráfica de un sistema de inecuaciones.

— Representación gráfica del recinto de las restricciones del problema.

— Interpretación del significado de los vértices de recinto.

— Cálculo del máximo y del mínimo de la función objetivo.

— Calcular la solución mediante el método gráfico.

— Interpretación geométrica de la solución.

Actitudes

— Darse cuenta de la importante interacción entre Matemáticas y ordenador.

— Valorar la funcionalidad de la Programación Lineal como método de resolver determinados problemas.

— Captar los progresos matemáticos llevados a cabo en este siglo y prever los futuros.

Actividades

Comenzaremos esta Unidad resolviendo analítica y gráficamente inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales, extraídos de contextos reales, para pasar a continuación a representar gráficamente recintos limitados por éstas, analizando los resultados obtenidos.

Después pasaremos a plantear problemas de enunciado aplicados directamente a sistemas sociales, económicos, etc. que tengan un comportamiento matemático, es decir, problemas con planteamiento real tales como: torres de control de un aeropuerto, semáforos, planes de producción, etc..., estudiando sobre ellos la función objetivo y los conceptos de máximo y mínimo. Por ejemplo:

En una pequeña empresa se fabrican diariamente sólo dos tipos de aparatos, A y B. Como máximo pueden fabricarse tres aparatos de cada tipo y, obligatoriamente, al menos, un artículo del tipo B. Indicar todas las posibilidades de fabricación si se quieren obtener unas ventas superiores a 6.000 pesetas, teniendo en cuenta que los precios de los artículos A y B son de 3.000 y 1.000 pesetas respectivamente.[1]

Por último, bien para un grupo de alumnos y alumnas, bien para toda la clase, si ello es posible, el profesor puede plantear la introducción intuitiva de programación lineal para más de dos variables.

1. (Pruebas de Selectividad, 1992).

Introducción

El Análisis matemático, en este curso, va enfocado a estudiar las dependencias entre magnitudes variables en general; es decir, lo importante no son las funciones particulares sino las funciones en general.

En este curso se comienza abordando el problema de los límites de funciones. Ya en el curso anterior se ha introducido la noción de tendencia, y es en este momento donde se introduce el concepto de límite a partir de esta interpretación. La idea del límite se presenta de manera sencilla determinando el valor exacto mediante una serie de aproximaciones. Esta idea, que hoy constituye un instrumento básico, fue elaborada en el transcurso de siglos.

El siguiente concepto fundamental es el de derivada y surge al resolver el problema de determinar la ecuación de la recta tangente a una curva en cualquier punto de ésta y como variación instantánea de una función. Esta doble vertiente pretende presentar la derivada de una función en un punto como un elemento dinámico y aplicable a distintas situaciones. Por supuesto esto no es más que una de las múltiples aplicaciones del cálculo diferencial, pero quizá sí sea el más importante en este curso.

En cuanto al uso que se hace del cálculo diferencial en la representación de curvas, nos sirve como nexo del Análisis con otros campos como el de la Economía.

El cálculo integral surge ante la necesidad de calcular el área encerrada por una curva —por ejemplo, encuentra la distancia recorrida por un cuerpo cuando se conoce su velocidad— y este será su enfoque en este curso.

Unidades didácticas

- ***Unidad 1:*** *Límites de funciones. Continuidad.*

  Tiempo: 2 semanas.

- ***Unidad 2:*** *Derivadas de funciones. Propiedades locales de las funciones.*

  Tiempo: 3 semanas.

- ***Unidad 3:*** *Optimización.*

  Tiempo: 4 semanas.

- ***Unidad 4:*** *Integral definida. Área limitada por una curva.*

  Tiempo: 2 semanas.

Unidad 1: Límites de funciones. Continuidad.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

— Adquirir intuitivamente y manejar el concepto de límite de una función en un punto y en el infinito.

— Calcular límites elementales.

— Adquirir, de una manera intuitiva, el concepto de continuidad de una función.

— Aproximarse al concepto intuitivo de derivada y aplicarlo en problemas de optimización.

— Tener una idea intuitiva del concepto de integral definida y aplicarlo al cálculo de áreas sencillas.

Contenidos

Conceptos

— Límite finito e infinito de una función en un punto.

— Límites en el infinito. Ramas infinitas.

— Continuidad de una función en un punto.

— Dominios de funciones elementales.

Procedimientos

— Interpretación gráfica de límite de una función en un punto.

— Interpretación gráfica de límite de una función en el infinito.

— Cálculo de límites elementales.

— Interpretación gráfica de función continua en un punto.

— Cálculo de dominios de funciones elementales.

Actitudes

— Gusto por la precisión en la medida y en las representaciones gráficas de los hechos cotidianos.

— Valoración del análisis matemático como instrumento para analizar e interpretar la realidad.

Actividades

Se comienza la Unidad proporcionando a los alumnos y alumnas diversidad de funciones, extraídas de problemas reales y siempre de carácter sencillo, (polinómicas y racionales), teniendo que estudiar gráficamente la tendencia de las mismas en diversos puntos. Es conveniente ayudarse en esta actividad con todos los medios que las nuevas tecnologías nos proporcionan.

Posteriormente, han de calcular los límites en los mismos puntos, comprobando la identidad de los valores obtenidos con su idea gráfica.

El concepto de continuidad se presenta a partir de los problemas anteriores de una manera gráfica y analizando sus límites.

Unidad 2: DERIVADAS DE FUNCIONES. PROPIEDADES LOCALES DE LAS FUNCIONES.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Adquirir y manejar concepto de derivada de una función en un punto y de función derivada.
- Calcular derivadas elementales.
- Calcular máximos y mínimos de funciones en problemas extraídos de la realidad y que tengan traducción en una función de una sola variable.

Contenidos

Conceptos

- Derivada de una función en un punto.
- Función derivada de una función dada.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.
- Máximos y mínimos relativos de funciones.
- Puntos de inflexión.

Procedimientos

- Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
- Cálculo de la derivada en un punto aplicando la definición.
- Cálculo de funciones derivadas de funciones elementales, aplicando la definición.
- Reglas para el cálculo de derivadas.
- Análisis de la relación existente entre las funciones continuas y las derivables.
- Cálculo de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y de máximos y mínimos relativos.
- Condiciones para la existencia de extremos relativos y puntos de inflexión.

Actitudes

- Valoración de la potencia del cálculo matemático para resolver problemas reales.
- Valoración de la potencia de las Matemáticas para interpretar la realidad.
- Disposición a realizar abstracciones y modelizar.
- Creación y desarrollo de hábitos de investigación sistemática.
- Sensibilidad y gusto por la elaboración y presentación cuidadosa de los cálculos realizados.

Actividades

Se puede comenzar esta Unidad planteando un problema de una trayectoria parabólica (por ejemplo, el lanzamiento a canasta de un jugador de baloncesto) en el que se conoce la función que relaciona el espacio recorrido con el tiempo. Los alumnos ya conocen la tasa de variación media, que podemos relacionar con la velocidad y, a partir de ahí, calcular el valor de la derivada de la función en un punto, insistiendo en el hecho de ser la pendiente de la recta tangente.

Así, a partir de problemas de variación de funciones, en un contexto, con problemas como el anterior o del tipo estudiar la velocidad de un coche respecto al tiempo en un determinado recorrido o la variación de la presión atmosférica, se introduce el concepto de derivada de una función en un punto, haciendo hincapié en la interpretación geométrica.

Se continúa calculando varias rectas tangentes a una misma función. Con ello conseguimos dos objetivos: por un lado, aproximarnos más al concepto de derivada en un punto y, simultáneamente, perciben la necesidad de ampliar ese concepto.

Posteriormente se calcula la derivada en un punto de diversas funciones aplicando la definición, para pasar al cálculo de funciones derivadas de funciones muy elementales, como forma de simplificar el cálculo en puntos concretos. Es importante que los alumnos y alumnas tengan claro que, mediante dicho concepto, es posible calcular diversas tangentes a una misma curva sin necesidad de repetir una y otra vez el cálculo del límite.

Las reglas para el cálculo de derivadas elementales (polinómicas, exponenciales y logarítmicas, productos y cocientes) y la elaboración de una tabla de derivadas de funciones muy sencillas, servirán para aligerar el cálculo en los problemas que se necesite.

El cálculo de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y de máximos y mínimos relativos, así como las condiciones para la existencia de extremos relativos y puntos de inflexión, son otros de los conocimientos sobre los que los alumnos y alumnas deben tener una cierta destreza.

La obtención de máximos y mínimos relativos de funciones extraídas de problemas de las ciencias sociales, debe relacionarse con aspectos de las mismas, como son: crecimiento o decrecimiento nulo, tangentes paralelas al eje de abscisas, derivadas nulas, etc.

El dibujo de la gráfica aplicando los conocimientos a los que hemos hecho referencia, puede ser interesante realizarlo, con algunos alumnos y alumnas con más nivel, paralelamente a la representación con calculadoras gráficas, ordenadores y/o transparencias.

Finalmente se pueden formalizar los conceptos que aparecen relacionados con la derivada: crecimiento, decrecimiento y puntos de inflexión.

Unidad 3: Optimización.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Aplicar las propiedades locales de las funciones en problemas de optimización.
- Resolver problemas de optimización en situaciones extraídas de las Ciencias Sociales.

Contenidos

Conceptos

- Optimización de una función.

Procedimientos

- Planteamiento y resolución de problemas de optimización.
- Comprobación e interpretación de la solución de problemas de optimización.

Actitudes

- Aprecio de los medios tecnológicos como instrumento para analizar la realidad.
- Desarrollo de los hábitos de investigación sistemática.
- Incorporación del lenguaje gráfico a la forma de tratar la información.
- Tendencia a formularse preguntas a partir de un fenómeno dado y explotar al máximo esta situación.
- Valoración del cálculo diferencial en actividades de mercado.

Actividades

Se puede partir de cualquier problema típico de economía de costes, comenzando por generalizar los nuevos conceptos que aparecen relacionados con la derivada: máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento,... con vistas a construir un todo que dé forma definitiva a cualquier gráfica que nos aparezca.

Posteriormente, a partir de ejemplos extraídos de problemas concretos se pueden representar sus gráficas utilizando ordenadores, calculadoras gráficas o transparencias.

Por último, se abordarán los problemas de optimización. La idea de optimización ya ha sido contemplada anteriormente en Programación Lineal y, por tanto, les resulta familiar. Se comenzará con problemas dados anteriormente de carácter sencillo. Después se puede insistir en la resolución con funciones sencillas y cuando dominen la técnica necesaria se pasará a problemas derivados de las ciencias sociales y de la naturaleza.

Unidad 4: INTEGRAL DEFINIDA. ÁREA LIMITADA POR UNA CURVA.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Adquirir el concepto de integral definida.
- Plantear problemas de cálculo de áreas de recintos planos.
- Calcular áreas de recintos planos, limitados por funciones sencillas.

Contenidos

Conceptos

- Idea intuitiva de área limitada por una curva.
- Integral definida.
- Regla de Barrow.

Procedimientos

- Interpretación geométrica de la integral definida.
- Aplicación de la regla de Barrow.
- Cálculo de primitivas elementales.
- Cálculo de áreas.

Actitudes

- Valoración de la importancia fundamental que ha tenido el cálculo integral en el desarrollo de diversas disciplinas, en particular, de la Física.

Actividades

Se introduce el concepto de área encerrada bajo una curva a través de un problema como el siguiente:

«Calcular el espacio recorrido por un móvil conocida la función velocidad del mismo».

Posteriormente se plantea el problema genérico del área encerrada bajo una curva cualquiera, así como la obtención de áreas de figuras definidas por varias funciones. Para ello se utilizará el cálculo de primitivas prácticamente inmediatas. Si en algún caso se presentan funciones complicadas se utilizarán los programas informáticos para el cálculo de primitivas.

Estadística y probabilidad

Introducción

Esta parte de la materia ocupa prácticamente un tercio del currículo de la misma. Esto es así, porque existen multitud de estudios y profesiones, de las Humanidades y Ciencias sociales, que hacen un uso contínuo del cálculo de probabilidades y de la estadística a un nivel profundo.

Los alumnos y alumnas que realicen esta modalidad de Bachillerato han de terminar, por tanto, con un bagaje de conocimientos estadísticos importante.

Así, por un lado, profundizamos en el estudio de las probabilidades realizado en la etapa anterior y, por otro lado se introduce el concepto de inferencia estadística y muestreo estudiando, posteriormente, la fiabilidad del mismo.

Por último, se hace una aproximación al contraste de hipótesis basados en la distribución Normal. Se pretende que los alumnos y alumnas alcancen la idea de cómo se puede validar una afirmación sobre algunas características de una población utilizando el contraste de hipótesis.

Unidades didácticas

- ***Unidad 1:*** *Probabilidades compuestas, condicionadas, totales y a posteriori.*

  Tiempo: 3 semanas.

- ***Unidad 2:*** *Inferencia estadística. Muestreo.*

  Tiempo: 2 semanas.

- ***Unidad 3:*** *Tests de hipótesis.*

  Tiempo: 3 semanas.

Desarrollo de las Unidades didácticas

Unidad 1: PROBABILIDADES COMPUESTAS, CONDICIONADAS, TOTALES Y A POSTERIORI.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Distinguir los tipos de sucesos y si son o no equiprobables.
- Afianzar el concepto de probabilidad.
- Saber determinar probabilidades a priori y a posteriori.
- Asignar probabilidades a sucesos compuestos.
- Adquirir el concepto de probabilidad condicionada y asignar probabilidades a sucesos condicionados.

Contenidos

Conceptos

- Sucesos aleatorios.
- Tipos de sucesos: elementales y compuestos, seguro e imposible, compatible e incompatible.
- Unión e intersección de sucesos.
- Probabilidad de un suceso.

- Probabilidad:
  - A priori y a posteriori.
  - Condicionada.
  - Compuesta.

Procedimientos

- Distinción entre sucesos aleatorios y deterministas.
- Realización de operaciones con sucesos: unión, intersección, simplificación, ...
- Aplicación de distintas técnicas para el cálculo de probabilidades.
- Formulación y validación de conjeturas sobre fenómenos aleatorios.
- Utilización de programas informáticos de simulación para estudiar fenómenos complejos.
- Aplicación del cálculo de probabilidades a juegos de azar.
- Utilización del cálculo de probabilidades para tomar decisiones.

Actitudes

- Valoración de la probabilidad a la hora de la toma de decisiones.
- Disposición a investigar el papel del azar en las situaciones cotidianas.
- Sentido crítico y cautela ante las aparentes soluciones intuitivas.

Actividades

Se parte de la investigación sobre un fenómeno o situación en la que el azar juegue un papel no evidente. Por ejemplo:

> **«En una ciudad se ha realizado una encuesta sobre la conveniencia de prohibir el tráfico en el centro urbano».**

Se obtienen así una serie de datos de respuestas afirmativas y negativas además de otros sobre la edad, sexo, partido al que votó, nivel de estudios, profesión, etc. Con estos datos de una muestra se plantea realizar un estudio probabilístico sobre toda la población:

- Probabilidad de encontrar una persona que esté a favor de prohibir el tráfico.
- Probabilidad de obtener una respuesta negativa al preguntar a una mujer, a un parado, a un ejecutivo, a un joven, etc.
- Probabilidad de que al elegir una encuesta sea de una mujer con estudios superiores.
- Probabilidad de que al elegir una encuesta afirmativa sea de un votante del partido X.

Para ello es necesario basarse en los conocimientos de probabilidad que tienen que tener de la etapa anterior, es por ello fundamental en esta Unidad hacer una prueba inicial.

A lo largo de este estudio, se plantean los distintos tipos de sucesos, el alumno tiene que diferenciar los distintos tipos de probabilidad y aplicar mecanismos para calcularlas. Al mismo tiempo se investigará sobre la dependencia o independencia de varios sucesos. Es interesante utilizar las posibilidades que ofrecen los medios informáticos para el cálculo de probabilidades.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Distinguir entre población y muestra.
- Estudiar la representatividad de una muestra.
- Aproximarse al concepto de inferencia estadística.
- Realizar una estimación.

Contenidos

Conceptos

- Población y muestra. Tipos de muestras.
- Estimación estadística.
- Parámetros poblacionales y estadísticos muestrales.
- Inferencia estadística.
- Distribuciones muestrales (de medias, de proporciones y de diferencias y sumas).
- Estimaciones. Estimación puntual y por intervalos de confianza.

Procedimientos

- Elección de una muestra al azar, simple y estratificada.
- Estudio de la representatividad de una muestra.
- Selección de muestras con y sin reemplazamiento.
- Inferencia mediante estimación puntual.
- Estimas por intervalos de confianza.

Actitudes

- Valorar la necesidad del muestreo para hacer una estimación.
- Saber apreciar la representatividad de una muestra.
- Apreciar cómo a partir de una muestra de tamaño muy pequeño se pueden obtener resultados absolutamente fiables para toda una población por muy grande que sea el tamaño de la misma.

Actividades

Se plantea a los alumnos y alumnas el estudio de una actitud, actividad, cualidad ..., que les interese en su ámbito social, como puede ser:

«Estimar la altura media de los estudiantes del Centro. Seleccionando varias muestras del mismo número de estudiantes, obteniendo la media de las mismas y su desviación típica».

Una vez elegidas las muestras han de estudiar si cada una es o no representativa, si se ha elegido al azar, los estratos utilizados, estudio de su tamaño y de las consecuencias que parece pueda plantear el mismo y, por último, han de tratar de efectuar una estimación sobre el total de la población analizando los estadísticos y los parámetros.

Posteriormente comprueban que las medias de cada muestra constituyen una nueva variable aleatoria, tal que su media coincide aproximadamente con la calculada para el total de la población y su desviación típica con la anterior dividida por la raíz del número de elementos de cada muestra. Por último comprueban que las desviaciones de las medias muestrales respecto de la media poblacional conforman una nueva variable aleatoria que se distribuye normalmente con media 0 y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Unidad 3: TESTS DE HIPÓTESIS.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

— Aceptar o rechazar una hipótesis estadística utilizando algún test de contraste de hipótesis.

Contenidos

Conceptos

— Grandes y pequeñas muestras.

— Nivel de confianza.

— Hipótesis nula. Hipótesis alternativa.

— Nivel de significación.

— Error de tipo I y tipo II.

Procedimientos

— Cálculo del intervalo de confianza para un nivel de confianza dado.

— Aceptar o rechazar una hipótesis estadística con un nivel de significación dado.

— Determinación de las regiones de aceptación y de rechazo de una hipótesis.

— Cálculo de la probabilidad de cometer un error de tipo I o de tipo II.

Actitudes

— Valorar la estadística como instrumento importante para contrastar una afirmación sobre algunas características de una población, analizando una muestra aleatoria.

Actividades

A partir de la muestra extraída en la Unidad anterior, se plantea la aceptación o rechazo de una *determinada altura media de todos los estudiantes con unos determinados niveles de significación.* Los alumnos y alumnas deberán definir la hipótesis nula y la hipótesis alternativa y aceptarla o rechazarla con un nivel de significación determinado (probabilidad de rechazar la hipótesis nula) a partir del análisis de la muestra, además deberán encontrar la región de aceptación y calcular la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo ésta cierta (error de tipo I) o aceptarla siendo falsa (error de tipo II).

También se plantearán y resolverán ejercicios similares al siguiente:

«La vida media de bombillas de 60 vatios está garantizada por un mínimo de 800 horas, con una desviación típica de 120 horas. Si se escoge al azar una muestra de 50 lámparas de un lote y después de comprobarlas se calcula una vida media de 750 horas en esta muestra, ¿habría que rechazar el lote por no cumplir las garantías?».

Desarrollo de la Unidad: Sistemas de ecuaciones lineales

Introducción

Hemos decidido comenzar la Unidad didáctica desarrollada desde un nivel sumamente elemental alcanzándose, no obstante, al final unos niveles suficientes para poder utilizar los sistemas de ecuaciones en la resolución de problemas concretos. Dejamos en manos del profesor, como repetidamente indicamos en el desarrollo de la Unidad, profundizar, o en caso contrario ignorar, unos determinados puntos, de acuerdo con el grado de conocimiento que posean los alumnos y alumnas concretos con los que se encuentre, así como el interés de los mismos y su capacidad para adquirir y desarrollar nuevos conceptos.

Como se indica en la introducción al tema Álgebra, su finalidad fundamental es la obtención y análisis de resultados en los problemas que pueden plantearse mediante sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

Ahora bien, para poder obtener el aprovechamiento imprescindible en cuanto al estudio y resolución de problemas de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, es necesario saber manejar una herramienta básica como son las matrices.

Al ser las matrices desconocidas todavía por los alumnos y alumnas, se hace necesario que, previo al estudio y manejo de los sistemas de ecuaciones, aquéllos adquieran un cierto grado de conocimiento de las mismas. Es aquí, por tanto, donde se sitúa esta Unidad didáctica.

Por otro lado, la dificultad de los temas a tratar ha de ir incrementándose, evidentemente, poco a *poco, con lo cual, el estudio de los sistemas de ecuaciones tiene que ir situado antes que el de los* sistemas de inecuaciones (programación lineal).

Además, el álgebra comprende la primera parte del currículo de las Matemáticas en este curso, es decir, está situada en el primer trimestre, suponiendo por tanto la toma de contacto de los alumnos y alumnas con las Matemáticas después varios meses de vacaciones.

Por último, la situación temporal de esta Unidad será a finales del mes de Octubre, durando su estudio aproximadamente un mes.

Objetivos

En esta Unidad se pretende que los alumnos y alumnas sean capaces de:

- Transcribir situaciones reales como sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos, cuando sea posible.
- Utilizar las matrices para escribir y resolver sistemas.
- Aplicar el método de Gauss para estudiar y resolver sistemas.
- Estudiar y resolver sistemas sencillos dependientes de un parámetro.

Contenidos

Conceptos

- Ecuaciones lineales. Ecuaciones equivalentes.
- Solución de una ecuación.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes.
- Solución de un sistema. Sistemas compatibles e incompatibles.
- Matriz de los coeficientes y matriz ampliada.
- Sistemas escalonados. Método de Gauss.

Procedimientos

- Interpretación geométrica de las ecuaciones de una y dos incógnitas.
- Estudio de la compatibilidad. Interpretación geométrica.
- Planteamiento de un sistema de ecuaciones a partir de una situación real.
- Resolución de sistemas de dos y de tres incógnitas.
- Interpretación geométrica de sistemas de dos y de tres incógnitas.
- Expresión matricial de sistemas de ecuaciones lineales.
- Estudio de la compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales.
- Discusión y solución de las soluciones de un sistema por el Método de Gauss.
- Aplicación a sistemas homogéneos y a sistemas dependientes de un parámetro.

Actitudes

- Sentido crítico ante las soluciones intuitivas.
- Curiosidad e interés por investigar sobre posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos en la representación gráfica de las rectas y planos.

Conocimientos previos

A lo largo de la E. S. O. y de primero de Bachillerato, los alumnos y alumnas han estado en contacto con el Álgebra estudiando temas como son: ecuaciones, resolución de sistemas de ecuaciones lineales sencillos, representación gráfica de una recta y otros. Posteriormente, y ya dentro de este mismo curso, han estudiado las matrices.

En lo que se refiere a los conocimientos de cursos anteriores, es conveniente que el profesor plantee una prueba inicial para poder calibrar el grado de profundidad que poseen los alumnos y alumnas de los mismos. No debe desdeñarse, a la vista de los resultados obtenidos en dicha prueba, la conveniencia de dividir a los alumnos en grupos para un mejor aprovechamiento de la materia nueva que se vea en este curso.

Por otro lado, hemos creído conveniente recordar estos puntos dentro de la propia Unidad didáctica, antes de comenzar con los nuevos contenidos, buscando, por un lado, refrescar dichos conocimientos y, por otro, que haya una continuidad en los mismos, siendo el profesor, y en vista de su grupo concreto, quien deberá determinar el grado de intervención.

En cuanto a los segundos, matrices, los hemos visto inmediatamente antes de esta Unidad y, por tanto, no será necesario hacer una repetición de los mismos.

Ecuaciones lineales

Introducción

Tanto en la E. S. O. como en Matemáticas aplicadas a Ciencias Sociales I, los alumnos y alumnas han tomado ya contacto con las ecuaciones y con la resolución de las mismas, por lo que, el profesor tendría únicamente que recordar en qué consisten dichas ecuaciones.

No obstante, y antes de abordar el estudio de los sistemas como tales, es conveniente repetir y afianzar lo que los alumnos y alumnas ya conocen.

Hacemos hincapié en el hecho de que en esta Unidad didáctica, se desarrollan todos los puntos de manera exhaustiva. Será labor del profesor determinar qué partes y a qué alumnos no debe incluirse en determinadas explicaciones, dependiendo de los resultados de la evaluación inicial (si es el caso).

Así pues, el profesor comenzará diferenciando los dos problemas inherentes a la resolución de las ecuaciones:

— La *mecánica* de la resolución de las ecuaciones.

— La *conversión* de un enunciado en una ecuación.

La verdadera dificultad estriba en este segundo punto por lo que lo abordaremos posteriormente en profundidad. Ahora recordaremos la parte mecánica de la resolución, cuyos pasos, habitualmente, son los siguientes:

— Supresión de denominadores: los denominadores son «molestos» y es una buena idea comenzar por ellos, eliminándolos, si la ecuación los tiene.

— Efectuar los paréntesis: se trata, igual que en el caso anterior, de ir dejando nuestra ecuación de la forma más elemental posible.

— Situar todos los términos que afectan a la incógnita en un miembro, mientras que aquellos términos que no están afectados por la misma se sitúan en el otro miembro.

— Despejar la incógnita.

Para terminar de redondear este punto, se deberá proponer la resolución de algún ejemplo para ser resuelto de manera individual por los alumnos y alumnas. No obstante, resolvemos este ejemplo de manera exhaustiva por si el profesor considera conveniente dárselos fotocopiados en lugar de resolverlos en el aula.

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación: $$\frac{3x+5}{4} + 2 = \frac{6x}{2} + \frac{5}{6}$$

Comenzamos eliminando los denominadores. Para ello, calculamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores y multiplicamos por el mismo a toda la ecuación.

Teniendo en cuenta que:

$$4 = 2^2$$

$$2 = 2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

El m.c.m. de los tres números será: $2^2 \cdot 3 = 12$

Por tanto: $$\frac{12\,(3x + 5)}{4} + 12 \cdot 2 = \frac{12 \cdot 6x}{2} + \frac{12 \cdot 5}{6}$$

Por supuesto, y para quitar más fácilmente los denominadores, efectuamos los cocientes indicados:

$$3\,(3x + 5) + 24 = 6 \cdot 6x + 2 \cdot 5$$

Quitamos ahora el paréntesis:

$$9x + 15 + 24 = 36x + 10$$

Trasponemos términos («todo lo que tiene x a un lado y lo que no tiene x al otro lado»):

$$9x - 36x = 10 - 15 - 24$$

Sumando: $-27x = -29$

Y, por último, despejando:

$$x = \frac{-29}{-27} = \frac{29}{27}$$

Para acabar esta introducción, el profesor recordará cuales son las ecuaciones lineales, ecuaciones que, insistimos, los alumnos y alumnas han visto ya en cursos anteriores. Así mismo, hará hincapié en que todo lo que se diga en la Unidad didáctica es para estas ecuaciones: esto es algo que los alumnos y alumnas han de tener presente en todo momento.

Así, son ecuaciones lineales las siguientes:

$x + 2y = 3;$ $\quad$ $2x + 3y + z = 7;$ $\quad$ $2x + 3 = 5;$

Mientras que las ecuaciones:

$x^2 + 2y = 3$

$2x + 3y + z^3 = 7$

$xy + 3x = 4$

no serían ecuaciones lineales.

En definitiva:

> Ecuaciones lineales son aquellas en las que sus incógnitas, todas ellas y siempre que aparezcan, están elevadas a la unidad, no apareciendo además indicado el producto de dos o más de ellas.

Planteamiento de ecuaciones

Como se ha comentado anteriormente, lo normal es que en este curso los alumnos y alumnas no tengan excesivas dificultades en la mecánica de resolver una ecuación lineal con una incógnita, tienen problemas en llegar a plantear una ecuación de este tipo que en resolverla.

Por ello, vamos a insistir tanto en la resolución de las ecuaciones como en su propio planteamiento. Comenzamos, pues, planteando un problema elemental como el siguiente:

Ejemplo

Hallar un número cuyo doble sea igual a 8.

Al ser el primer ejercicio que resuelven en este curso, de este tipo, se hará hincapié en el proceso habitual de planteamiento de una ecuación:

> — Leer el problema tantas veces como haga falta hasta estar seguro de haber comprendido perfectamente el enunciado.
>
> — Averiguar exactamente la pregunta que se hace.
>
> — Asignar la incógnita.
>
> — Traducir el enunciado al lenguaje algebraico.

En este ejemplo propuesto, de enunciado tan corto, comenzaremos, directamente, preguntándonos (preguntándoles a los alumnos y alumnas) qué es lo que se nos pide averiguar.

Una vez conseguida la respuesta correcta —un número—, llamaremos de la forma habitual, con la **x**, a ese número que hay que hallar.

Antes de proseguir el profesor debe comentar que aunque la letra normal para designar a una incógnita sea la x, esto no es en absoluto necesario y que por tanto no deben extrañarse, ni dudar en cuanto a su resolución, si se encuentran con ecuaciones en las cuales aparezca otra u otras letras. Además del comentario, es conveniente que alguno de los ejercicios que se planteen en clase tengan como incógnita otra letra, a ser posible que tenga alguna relación con el dato que se pida en el problema.

Retomando nuestro problema, escribiremos «el doble de x», y por último, en completar la ecuación:

$$2x = 8$$

y en su posterior resolución: $x = 4$.

> *Observación 1:*
>
> Los profesores estamos habituados a emplear una serie de términos con, quizá, excesiva ligereza pensando que todos los alumnos y alumnas nos entienden sin ninguna dificultad, siendo el caso de que muchas veces el significado que nosotros damos a las palabras no es el mismo que el que dan los alumnos.

Así, lo normal en el ejemplo anterior es decir que 4 es la solución de esa ecuación porque la verifica; pero no debemos quedarnos aquí; debemos indicar claramente: «decimos que 4 es la solución de esa ecuación porque al sustituir la x por 4 y multiplicar a este número por 2 nos resulta 8, valor del segundo miembro».

Si bien en este ejemplo este hecho es inmediato, habrá otras veces en que tal cosa no sea tan evidente. Por tanto, el profesor insistirá en los sucesivos ejemplos sobre este punto.

Observación 2:

De la misma forma, el profesor insistirá en el hecho de que es totalmente conveniente *comprobar* la solución, es decir, comprobar que la respuesta dada verifica la ecuación.

Deberá dejar completamente claro que esa comprobación los alumnos la deben hacer, no para el profesor, sino para ellos mismos: resulta sorprendente la cantidad de veces que preguntan «si deben comprobar el resultado».

Ejemplos resueltos

Es conveniente que, en este momento, se resuelvan varios ejemplos de problemas que den lugar a ecuaciones con una o dos incógnitas.

En primer lugar veremos tres ejemplos de ecuaciones con una incógnita; el primero de ellos será resuelto en grupo por los alumnos mientras que los otros dos serán resueltos de forma individual.

Posteriormente se verá el ejemplo 4 de una ecuación con dos incógnitas. Este ejemplo deberá ser resuelto por el profesor.

De la misma manera que en el resto de la Unidad, todos los ejemplos aparecen resueltos para que el profesor, si considera que es conveniente, pueda proporcionar copia de los mismos a sus alumnos y alumnas.

Ejemplo 1

La suma de tres números pares consecutivos es 606. ¿Cuáles son esos números?

Solución:

Como ya se indicó anteriormente, la primera cuestión que debemos plantearnos es: qué se nos *pregunta*.

La respuesta a esta pregunta, en este caso, es: tres números pares consecutivos. Probemos a escribir esos números.

Una primera aproximación podría consistir en llamar al menor de esos tres números con la letra «x» y, al aparecer la palabra «consecutivos», considerar que son de la forma:

$$x; \qquad x+1; \qquad x+2.$$

Esto evidentemente no es correcto puesto que si, por ejemplo, fuera $x = 50$, entonces sería $x + 1 = 51$ y, por tanto, no es par como se nos exige en el enunciado.

Será necesario entonces que los números se diferencien en dos unidades y, por consiguiente, nuestros números serán de la forma:

$$x; \qquad x+2; \quad x+2+2=x+4.$$

Ya hemos mejorado nuestro planteamiento inicial: ahora los tres números se diferencian en dos unidades, como debe ser. Sin embargo todavía no hemos resuelto un inconveniente: los tres números así escritos pueden ser todos ellos impares, lo que ocurrirá siempre que el más pequeño, x, lo sea.

¿Cómo conseguir que sean pares? Basta tener en cuenta que cualquier número natural, sea del tipo que sea, al multiplicarlo por 2, el resultado es un número par.

Por ello, en definitiva, los tres números que escribimos son:

— $2x$: para asegurarnos que es número par.

— $2x + 2$: sería el primer número par consecutivo al anterior.

— $2x + 4$: siguiente número par.

Por otro lado, el enunciado afirma que la suma de los tres números ha de ser 606. Por tanto:

$$(2x) + (2x + 2) + (2x + 4) = 606$$

Donde los paréntesis escritos no son en absoluto necesarios por ser la operación que estamos considerando en todos los casos la misma: suma de números naturales (propiedad asociativa). Esos paréntesis se han escrito, exclusivamente, para indicar más claramente qué estamos haciendo.

En definitiva, la ecuación que estamos planteando será:

$$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 606$$

Dejando todas las x a un lado y los números sin x en el otro miembro:

$$2x + 2x + 2x = 606 - 2 - 4.$$

Por tanto: $6x = 600$ y, despejando, $x = 100$.

Hay que tener mucho cuidado con la respuesta que se da a este problema. Muchos de los alumnos y alumnas considerarían que con lo anterior ya han terminado de resolverlo.

Para ver que eso no es cierto, basta con exigir la comprobación del resultado: $100 + 102 + 104$ no es 606.

Se ha de dar la respuesta correcta:

$$\left.\begin{array}{l} 2x \qquad = 200 \\ 2x + 2 = 202 \\ 2x + 4 = 204 \end{array}\right\}$$

Esto es, los tres números pedidos son: 200, 202 y 204.

Ejemplo 2

Una empresa que se dedica a la venta por correo propone a un estudiante que escriba las direcciones de sus posibles clientes bajo las siguientes condiciones: por cada dirección bien escrita recibirá 100 pesetas, mientras que si se ha equivocado en la misma no solamente no recibirá nada sino que, además, deberá devolver 50 pesetas. Después de escribir 1.000 direcciones el estudiante recibió 47.500 pesetas. ¿Cuántas direcciones escribió bien?

Solución:

Asignamos la letra x al dato que desconocemos en la pregunta que se nos hace: cuántas direcciones escribió bien.

Por tanto, como en total hemos escrito 1.000 direcciones, será:

x: número de direcciones correctas.

1.000 - x: número de incorrectas.

Con lo cual, el dinero que el estudiante debería percibir por las direcciones correctas:

$$x \cdot 100 = 100x$$

Y el dinero que debería devolver:

50 pesetas por 1.000 - x: 50 (1.000 - x)

Por tanto, habrá de ser: $100x - 50\,(1000 - x) = 47.500$ que es la cantidad realmente percibida.

Quitando paréntesis: $100x - 50.000 + 50x = 47.500$. Y, en definitiva, despejando x:

$$100x + 50x = 47.500 + 50.000;$$

$$150x = 97.500$$

$$x = 650$$

Por tanto, el estudiante ha escrito correctamente 650 direcciones de las 1.000 encargadas.

Ejemplo 3

Un trabajador de una empresa percibe mensualmente un sueldo neto de 195.000. El descuento que le aplica la empresa es de un 22%. ¿Cuál es el sueldo bruto anual de este trabajador si percibe 15 pagas completas al año?

Solución:

El sueldo bruto anual es, sencillamente, 15 veces el sueldo bruto que percibe en cada una de las nóminas. Vamos a hallar, por tanto, cuánto es el sueldo bruto de cada una de éstas, siendo el resultado final pedido el producto de 15 por la cantidad que obtengamos.

Llamamos x al bruto de cada paga.

Se le descuenta el 22%. Por tanto, la cantidad que se le descuenta es:

$$\frac{22 \cdot x}{100}$$

Con lo cual, lo que realmente cobra es:

$$x - \frac{22x}{100} = 195.000$$

Quitando denominadores: $100x - 22x = 19.500.000$

Por tanto: $78x = 19.500.000$ y, en definitiva, $x =$ **250.000** pesetas brutas de cada paga.

Sueldo bruto anual: 250.000 . 15 = **3.750.000** pesetas.

Ejemplo 4

Escribir los rectángulos cuyo perímetro sea de 20 centímetros.

Solución:

Evidentemente, los alumnos y alumnas ya conocen cuál es el perímetro de cualquier figura geométrica plana. No deberían tener, por tanto, dificultad en plantear el problema si no fuera por el hecho de que la mayoría de ellos, influenciados por los ejercicios anteriores, van a intentar escribir una ecuación con una sola incógnita.

Labor del profesor será doble: en primer lugar hacerles ver que el planteamiento de este ejercicio no se aparta en nada del planteamiento de los anteriores y, posteriormente, discutir la solución que resulta:

¿Qué es lo que nos preguntan?

En este caso, como los rectángulos tienen dos dimensiones distintas, base y altura, serán dos las incógnitas a hallar: x para la base e y para la altura.

¿Cuánto vale el perímetro del rectángulo de base x y altura y?

$x + x + y + y = 2x + 2y$

¿Cuánto vale en este caso en concreto el perímetro?

Según el enunciado, vale 20.

En definitiva: $2x + 2y = 20$

y, simplificando: $x + y = 20$.

Ecuación que es la traducción del enunciado del problema al lenguaje algebraico.

Si bien, como hemos comentado más arriba, el planteamiento es el mismo que en cualquier otro ejercicio, el resultado difiere, y mucho, de lo visto hasta ahora: hasta el momento, todas las ecuaciones planteadas tenían una solución muy concreta y única.

Sin embargo, en este caso, los alumnos y alumnas deberían haberse dado cuenta, previamente a la resolución del ejercicio, de que es imposible dar una respuesta concreta, situación que nos viene reflejada en la ecuación-solución del mismo.

Por supuesto, se pueden hallar diversos rectángulos que cumplan el enunciado y su respuesta ($x + y = 10$):

- 3 y 7
- 2 y 8
- 6 y 4
- 5 y 5: Todo cuadrado es un rectángulo.
- 1'5 y 8'5: No hay ningún impedimento en que la solución no sea entera.

Conclusión que se puede extraer de este ejercicio:

Una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Interpretación geométrica

Por otro lado, los alumnos y alumnas también saben ya, de cursos anteriores, que una ecuación lineal con dos incógnitas como la planteada más arriba, $x + y = 10$, representa una recta.

Para representar gráficamente la misma, el profesor recordará, haciendo más o menos hincapié según los resultados de la prueba inicial del tema, que:

— Hay que dar un valor a una de las incógnitas (normalmente la x),

— Hay que despejar de la ecuación el valor de la otra (la y)

— El punto de coordenadas (x,y) es un punto de la recta.

Como por dos puntos distintos sólo puede pasar una recta, con obtener un par de puntos de la misma, podríamos hallar su representación gráfica.

Aunque lo anterior es de sobra conocido por los alumnos y alumnas, siempre suelen oponer una cierta resistencia a obtener solamente esos dos puntos, ya que normalmente están acostumbrados a representar una recta dando cuatro, cinco o incluso más valores, creyendo que, de esta forma, «sale mejor».

Por otro lado, aunque sea un concepto que no está incluido en este curso, es bueno que se indique en este momento que una ecuación lineal de tres incógnitas, como $2x + 3y + z = 7$, representa un plano en el espacio. Evidentemente, no se trata, ni mucho menos, de profundizar en este tema: sólo deben conocerlo.

Para calcular puntos de los planos:

— Hay que dar dos valores cualesquiera a dos de las incógnitas, uno a cada una de ellas.

— Despejar de la ecuación el valor de la tercera.

— El punto de coordenadas (x, y, z) es un punto del plano.

Como tres puntos determinan un plano, si quisiéramos representar el mismo, tendríamos que calcular tres ternas, tres puntos, para poder hacer su representación gráfica sobre los tres ejes de coordenadas, sistema de referencia del espacio.

Actividades

- Dada una serie de ecuaciones, proponer a los alumnos y alumnas que las clasifiquen en lineales y no lineales.
- Dada una serie de ecuaciones, proponer a los alumnos y alumnas que las clasifiquen según su número de incógnitas y que hagan su interpretación geométrica.
- Proponer a los problemas que den lugar a una ecuación con una incógnita, algunos con solución y otros sin solución.
- Recordar las diversas ecuaciones de líneas rectas que se han visto en primer curso.
- Por último, como resultado del ejemplo 2.1 escribimos la ecuación $x + y = 10$. A la vista de la interpretación geométrica de las ecuaciones lineales con dos incógnitas, se les puede proponer a los alumnos que representen la solución de este problema. Con ello, conseguiremos dos objetivos:
- Comprobar de forma palpable que existen infinitas soluciones al problema y que esas infinitas soluciones están alineadas.
- Que no todos los puntos de la recta $x + y = 10$ son solución de nuestro problema: no tiene sentido dar como solución $x = -1$; $y = 11$, pues ¿qué sentido tiene dar un rectángulo de base negativa?

Este resultado permite al profesor insistir en el hecho de que las soluciones de una ecuación o sistema de ecuaciones no solamente han de comprobarse aritméticamente, sino que han de tener sentido para el problema que se haya planteado y resuelto.

Por último y como conclusión de este punto y antes de comenzar con el estudio de los sistemas de ecuaciones, el profesor, sin hacer ninguna indicación previa, planteará la resolución de una ecuación como el siguiente:

Resolver: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}x = 10$

Al resolver esta ecuación llegamos a la siguiente situación:

$$0 \cdot x = 60$$

Se trata de hacer reaccionar a los alumnos y alumnas ante este resultado tan «raro» y, posteriormente, hacerles ver que existen ecuaciones sin solución.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Planteamiento

El profesor abordará este punto planteando un problema similar al siguiente:

«Descomponer el número 27 en dos partes de manera que al dividir una entre otra obtengamos 2 de cociente y 6 de resto».

Si bien habrá alumnos que resolverán este problema planteando una ecuación con una incógnita, llamando x a una de las cantidades y 27 − x a la otra, lo usual, y lo más conveniente para resolver este tipo de problemas, será considerar dos incógnitas, una para cada uno de los números que hay que hallar. Por este motivo, y porque en general a los alumnos y alumnas les cuesta bastante la «traducción» de los enunciados a ecuaciones, el profesor comenzará recordando y reiterando los pasos necesarios para conseguirlo:

- Leer comprensivamente todo el enunciado del problema.
- Fijarse de forma concreta en las preguntas que se hacen en el problema.
- Asignar una incógnita a cada uno de los elementos desconocidos que hay que calcular.
- Escribir las ecuaciones correspondientes.

En definitiva, tendremos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 27 \\ y &= 2x + 6 \end{aligned}\right\}$$

Este es el sistema que hay que resolver.

Por otro lado, este es el momento de volver a insistir en el nombre que reciben esas dos ecuaciones consideradas como ecuaciones de sendas rectas.

Resolución. Interpretación geométrica

Resolver un sistema es hallar la solución del mismo, es decir, los valores que hay que dar a cada una de las incógnitas para que se verifiquen *simultáneamente* todas las ecuaciones.

Los alumnos y alumnas resolverán el sistema anterior por cualquiera de los métodos ya conocidos: sustitución, reducción o igualación, obteniendo el resultado de $x = 7$ e $y = 20$. Aquí el profesor insistirá en el hecho de que los alumnos y alumnas tienen total libertad para resolver los sistemas elementales de la forma que crean más conveniente, ya que no existe un método «mejor» que otro de manera objetiva.

Es conveniente insistir en el hecho de que este par de valores, 7 y 20, no son las dos soluciones del problema sino que son la «una» (única) solución de este sistema.

El profesor deberá corregir desde ahora los abusos de lenguaje que se comenten en cuanto a la cantidad de soluciones que posee un sistema.

Hay que recalcar también que esos dos números, la solución, son los únicos que verifican simultáneamente ambas ecuaciones, llegando a la conclusión de su significado a través de las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos pares de números verifican la ecuación $x + y = 27$?
- ¿Cuál será la representación gráfica de todos esos pares de números?
- ¿Verifican todos esos pares la ecuación $y = 2x + 6$?
- ¿Cuántos pares de números verifican la ecuación $y = 2x + 6$?
- ¿Cuál es la representación gráfica de todos esos pares de números?

— ¿Verifican todos esos pares la ecuación $x + y = 27$?

— Por último: ¿cuál es el único punto del plano que pertenece simultáneamente a ambas rectas?

De esta manera, de forma completamente natural, hemos hecho la interpretación geométrica de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y de su solución.

Para mayor y mejor aclaración del método gráfico, usaremos dos transparencias realizadas sobre papel cuadriculado o milimetrado. En una de ellas, estará dibujada la recta $x + y = 27$, mientras que en la otra estará la segunda recta. Al solapar ambas transparencias se comprobará cuál es el punto solución.

Actividades

Los alumnos y alumnas resolverán ahora los siguientes ejercicios:

Actividad 1

En un corral hay 50 animales entre gallinas y conejos. El número total de patas es de 150. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Normalmente, los alumnos y alumnas están muy acostumbrados a que las soluciones que resultan en cualquiera de los problemas que resuelven sean soluciones enteras. Por ello, una vez resuelto el ejercicio anterior, propondremos ahora estos dos ejemplos:

Actividad 2

Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 50 \\ 2x + 4y &= 159 \end{aligned}\right|$$

De solución $x = 41/2$ e $y = 59/2$.

Una vez que se les ha insistido en que no deben por qué extrañarse de que la solución no sea entera, sino que en general será un número real, les propondremos, de nuevo, el problema de los conejos y las gallinas:

Actividad 3

En un corral hay 50 gallinas y conejos. El número total de patas es de 159. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Al resolver este problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, obtenemos el mismo sistema que en el ejercicio anterior. Posiblemente habrá alumnos que, sin pensar más, se dediquen a resolverlo, mientras que otros plantearán en este momento objeciones en cuanto al resultado que va a aparecer. Así, este ejercicio, nos servirá para insistir en el hecho de que deben estudiar si las soluciones que resultan no solamente son correctas sino si, además, son válidas.

Número de soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Hasta ahora todos los ejemplos que se han resuelto tienen, todos ellos, una única solución, sea ésta válida o no. Es conveniente abordar ya el estudio de sistemas en los que esto no sea cierto.

Planteamiento

Propondremos a los alumnos y alumnas que, por grupos, intenten resolver sistemas como los *siguientes sacando sus propias conclusiones:*

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 4x - 4y &= 5 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x - y &= 4 \\ 6x - 2y &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Ninguno de los dos «les saldrá». En el primer caso porque no tiene solución, las dos rectas que representan ambas ecuaciones son paralelas y, por tanto, no se cortan, y en el segundo caso porque tiene infinitas soluciones, puesto que ambas rectas son coincidentes.

Tanto un caso como otro se pueden ver muy bien mediante sendas transparencias superpuestas.

Conclusión

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede:

— Tener una solución: punto de intersección de dos rectas.

— No tener solución: ambas rectas son paralelas.

— Tener infinitas soluciones: ambas rectas son coincidentes.

Definiciones

Si un sistema tiene solución se dice que es compatible. Si la solución es única se dice compatible determinado, mientras que si tiene infinitas soluciones se dice compatible indeterminado.

Un sistema que no tiene solución se dice que es incompatible.

Insistiendo sobre estas definiciones:

— Si dos rectas se cortan en un punto estaremos ante un sistema compatible determinado.

— Si dos rectas son coincidentes estaremos ante un sistema compatible indeterminado.

— Si dos rectas son paralelas estaremos ante un sistema incompatible.

Actividades

Comenzaremos planteando la siguiente pregunta, dando tiempo a que, por grupos, los alumnos y alumnas discutan los posibles resultados: ¿Puede un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tener 2 soluciones? ¿Por qué?

2. Escribir matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x \quad\quad &= 4 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

La notación matricial será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Actividades propuestas

Propondremos a continuación problemas que den lugar a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se plantearán para su resolución en grupos de 3-4 alumnos, debiendo escribir los sistemas resultantes en notación matricial.

Por ejemplo:

1. **Compramos 8 kg de café natural y 5 kg de café torrefacto, pagando 11.000 ptas. Calcular el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 800 pts.**

2. **Un rectángulo tiene de área 12 cm². Si alargamos un centímetro su base y acortamos dos centímetros su altura, el área es 8. Hallar su base y su altura.**

Sistemas equivalentes

Planteamiento

Propondremos a los alumnos y alumnas la resolución de los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 3y &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x + 7y &= -5 \\ 3x - 5y &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Vemos que la solución para ambos es la misma: $x = 1$, $y = -1$

Por ocurrir este hecho, se dice que ambos sistemas son equivalentes.

Definición

Dos sistemas se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

La utilidad que posee la equivalencia de sistemas es evidente: se trata de resolver un sistema cuyas ecuaciones son complicadas; en su lugar, vamos a resolver otro sistema que tenga las mismas soluciones que el propuesto (sistema equivalente) y que sea de ecuaciones mucho más sencillas.

Interpretación geométrica

La interpretación geométrica de la equivalencia de sistemas es inmediata: ya que por un punto pasan infinitas rectas, se trata de elegir dos pares de las mismas de entre todas las que pasen por el punto considerado.

Por otro lado, esto es para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. De forma natural se extiende esta idea a la de cualquier sistema de ecuaciones.

Criterios de equivalencia

Es conveniente, aunque sea sabido ya por los alumnos y alumnas, hacer un breve repaso de las propiedades más útiles que se manejan a la hora de trabajar con sistemas.

Se trata de ver cuáles son las transformaciones que podemos efectuar en un sistema dado de manera que obtengamos otro sistema equivalente y más sencillo.

Se van a comprobar a través de ejemplos. Las demostraciones quedan fuera del alcance de este nivel de estudios.

1. Al intercambiar dos ecuaciones cualesquiera de un sistema, resulta un sistema equivalente al dado.

En efecto, consideremos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Al intercambiar las dos ecuaciones obtendremos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

La solución de ambos sistemas es, obviamente, la misma.

2. Al multiplicar toda una ecuación de un sistema por un número distinto de cero, resulta un sistema equivalente al dado.

Así, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 2x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\}$$

es equivalente a cualquiera de los dos anteriores.

Hay que recalcar el hecho de que el cambio de signo no es más que un caso muy concreto del producto: producto por –1.

3. Si una ecuación de un sistema se sustituye por ella misma más una combinación lineal de las demás, el sistema que se obtiene es equivalente al dado.

Así, si en el primer sistema que escribimos, sustituimos la segunda ecuación por ella misma más la primera, obtendremos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 3x &= 3 \end{aligned}\right\}$$

sistema que es equivalente al dado.

Llegados a este punto, el profesor comentará la idea geométrica subyacente a todos los criterios que estamos estudiando.

Ha tenido que quedar ya perfectamente claro para los alumnos y alumnas la relación biunívoca existente entre las ecuaciones lineales de dos incógnitas y las ecuaciones de las rectas en el plano. Ya hemos visto también que resolver un sistema no es más que hallar el punto de corte de las dos rectas que lo forman.

Así, lo que nos interesa de esas rectas que forman el sistema a resolver, no son ellas mismas, sino el punto de corte de ambas. Pero por ese punto pasan infinitas rectas (haz de rectas que pasan por un punto) y, en definitiva, cuando estamos escribiendo ecuaciones equivalentes a las dadas, lo que hacemos es elegir las rectas que más nos convengan de entre todas las que pasen por ese punto; de entre todas las que se cortan en él.

Para terminar: el profesor también puede comentar el hecho de que al decir que la solución de un sistema es «$x = 3$» e «$y = 5$», lo que se hace es definir un punto del plano, el punto (3,5), como intersección de dos de las rectas que pasan por él y que tienen la particularidad de que son paralelas a los ejes.

Actividades

Se trata de conseguir que los alumnos y alumnas sean capaces de romper su pasividad; que no estén a la espera de que el profesor proponga un enunciado y que ellos mismos sean capaces de inventarse/plantearse los problemas. Por este motivo se plantean las siguientes actividades que los alumnos han de resolver por grupos:

— Proponer a los alumnos y alumnas una serie de sistemas debiendo éstos agrupar todos aquellos que sean equivalentes entre sí.

— Dar un sistema de ecuaciones teniendo que plantear los alumnos y alumnas sistemas equivalentes al mismo.

— Escribir varios sistemas de ecuaciones que tengan como soluciones unos valores indicados por el profesor.

Será obligación del profesor exigir algo más a sus alumnos y alumnas: normalmente los ejemplos que éstos se propongan será de dos ecuaciones con dos incógnitas; el profesor hará que también se planteen enunciados de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. Método de Gauss

Sistemas escalonados

En este momento de la Unidad didáctica vamos a enseñar a los alumnos y alumnas a resolver sistemas más amplios que los vistos hasta el momento utilizando una nueva técnica para ellos desconocida: el método de Gauss.

Comenzaremos planteando el siguiente ejercicio:

Averiguar cuántos hombres, mujeres y niños hay en una reunión sabiendo que:

— Si hubiera un niño más, habría igual número de niños que de hombres y mujeres juntos.

— Si hubiera 8 mujeres más, el número de éstas doblaría a la suma de hombres y niños.

— El triple de la cantidad de hombres más el número de mujeres es igual al número de niños más 5.

Evidentemente, este enunciado, a la hora de resolverlo, se nos transforma en un sistema. Se trata de resolver este sistema aplicando los criterios de equivalencia que hemos visto en el apartado anterior.

Empezamos escribiendo el sistema resultante del enunciado. Como ya se ha comentado anteriormente, muchos alumnos y alumnas tienen una enorme dificultad en «traducir» los enunciados de los problemas. Para paliar este hecho, deberán ser los propios alumnos y alumnas, no el profesor, los que lleguen, por sus propios medios, a escribir las ecuaciones correspondientes, aún a costa de emplear más tiempo. Es conveniente que en este primer ejercicio, los alumnos se agrupen, como mucho de tres en tres, para la discusión y escritura de las ecuaciones correspondientes y que se siga este sistema en los tres o cuatro ejercicios siguientes. Posteriormente se les ha de exigir que los planteen de forma absolutamente individual.

Así mismo, se les debe recordar que tienen que comenzar todos los problemas de este tipo indicando claramente a qué llaman de qué modo.

Si llamamos x al número de hombres, y al de mujeres y z al de niños, el sistema será el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} z + 1 &= x + y \\ y + 8 &= 2(x + z) \\ 3x + y &= z + 5 \end{aligned}\right\}$$

A continuación, hacemos que cada ecuación tenga todas las incógnitas en el primer miembro, quedando en el segundo miembro únicamente los términos independientes:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= 8 \\ 3x + y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

(Al mismo tiempo hemos hecho que la «x» tuviera siempre el signo positivo exclusivamente por cuestión de comodidad).

Restando a la 2.ª ecuación el doble de la 1.ª, obtenemos el sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -3y + 4z &= 6 \\ 3x + y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Restando a la 3.ª ecuación el triple de la 1.ª, llegaremos al sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -3y + 4z &= 6 \\ -2y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

La 3.ª ecuación es simplificable. La dividimos por 2, aunque realmente no haga falta, más que nada para que los alumnos y alumnas se acostumbren a trabajar con las expresiones más sencillas posibles.

Simultáneamente, cambiamos de signo a las ecuaciones 2.ª y 3.ª para hacer que la primera incógnita tenga signo positivo. Igual que decíamos antes, esto no es necesario en absoluto: únicamente se trata de seguir insistiendo en crear hábitos de trabajo que faciliten la tarea a realizar en el futuro.

En definitiva, el sistema queda convertido en:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3y - 4z &= -6 \\ y - z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicamos la 3.ª ecuación por 3 y le restamos la 2.ª con el fin de eliminar la «y». El sistema resultante es:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3y - 4z &= -6 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Ya se ha obtenido el valor de una de las incógnitas: la z.

No se debe dar por supuesto que una vez hallada la z, los valores de la x y la y son obtenidos por los alumnos y alumnas de forma elemental: hay que hacer que los obtengan.

Para hallar el valor de la «y», sustituimos en la 2.ª ecuación la «z» por 3, obteniéndose $y = 2$.

Por último, para obtener el valor de la «x», sustituimos en la 1.ª ecuación la «y» por 2 y la «z» por 3, obteniéndose $x = 2$ y quedando resuelto el problema:

Solución: $x = 2$
$y = 2$
$z = 3$

Es decir, hay 2 hombres, 2 mujeres y 3 niños.

El sistema que hemos obtenido al final se dice que tiene forma **escalonada**.

Por último, hay que recalcar que las incógnitas a eliminar en un sistema escalonado pueden ser cualesquiera, no la x y la y, sino los que más convenga en función de la sencillez de las operaciones a efectuar.

Definición

> Un sistema de ecuaciones se dice que tiene forma escalonada cuando cada una de las ecuaciones tiene una incógnita menos que la anterior.

Método de Gauss

El método que hemos seguido para la resolución del problema anterior es una ampliación del método de reducción ya conocido por los alumnos y alumnas. A esta ampliación del método de reducción se le conoce como **método de Gauss**.

Definición

> Diremos que un sistema de ecuaciones se ha resuelto por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones previa la reducción del sistema dado a otro equivalente a él que sea escalonado.

Como ejercicio, resolveremos por el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = 9 \end{array}\right\}$$

Vamos a eliminar de la 2.ª y 3.ª ecuaciones la x.

Para eliminar la x de la 2.ª ecuación, multiplicamos a la 1.ª ecuación por 2 ($2x + 2y + 2z = 4$) *y se la restamos a la 2.ª*.

Para eliminar la x de la 3.ª ecuación, sencillamente le restamos la 1.ª

El sistema equivalente resultante será:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ -3y - 3z = -3 \\ -3y + 2z = 7 \end{array}\right\}$$

Eliminamos ahora de la 3.ª ecuación la y. Le restamos la 2.ª ecuación quedando, en definitiva, el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ -3y - 3z = -3 \\ 5z = 10 \end{array}\right\}$$

Sistema escalonado de solución única: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$

Interpretación geométrica

Como se comentó en su momento, una ecuación del tipo $ax + by + cz = d$ es la ecuación de un plano en el espacio, donde las ternas de números (x_1, y_1, z_1) que verifican dicha ecuación, son puntos del plano correspondiente.

Por tanto, resolver sistemas con tres incógnitas no es más que hallar los puntos del espacio que verifican las correspondientes ecuaciones o, con otras palabras, que están en los correspondientes planos representados por las mismas.

Así, decir que la solución del sistema anterior era la $x = 2$, $y = 2$ y $z = 3$ es lo mismo que decir que los tres planos:

$$x + y - z = 1; \quad 2x - y + 2z = 8; \quad 3x + y - z = 5$$

se cortan en el punto (2,2,3)

Generalización

Al igual que se hizo con los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas generalizamos lo visto hasta el momento sobre los de tres.

Definiciones

Se llaman sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas a expresiones del tipo:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array}\right\}$$

Se llama solución del sistema a una terna de números (s_1,s_2,s_3) tales que al cambiar la x por s_1, la y por s_2 y la z por s_3, se verifiquen simultáneamente las tres ecuaciones.

Expresión matricial

Consideremos las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Al ser la primera de ellas de dimensión 3x3 y la segunda de dimensión 3x1, ambas se pueden multiplicar siendo el producto de ambas la matriz de dimensión 3x1 siguiente:

$$\begin{pmatrix} ax + by + cz \\ a'x + b'y + c'z \\ a''x + b''y + c''y \end{pmatrix}$$

En definitiva, lo que acabamos de comprobar es que el sistema genérico de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array}\right\}$$

se puede expresar de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

Que, de la misma manera que vimos con los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, si llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

se puede reescribir: $A \cdot X = B$

Ejemplo:

Escribir matricialmente el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 1 \\ x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

La notación matricial será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Actividades resueltas

1. Resolver, en grupos de dos y aplicando el método de Gauss, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Vamos a eliminar la x de la 2.ª y 3.ª ecuaciones restándoles a ambas la 1.ª:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2y + 3z &= 0 \\ 2y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ahora intentamos eliminar la y de la 3.ª ecuación. Para ello, le sumamos la 2.ª, obteniendo:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2y + 3z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Con lo cual, esa 3.ª ecuación nos sobra, quedando nuestro sistema reducido al sistema equivalente siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que es un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Por tanto, al tener menos ecuaciones que incógnitas, no va a tener solución única, sino que va a tener infinitas soluciones.

De la misma forma que decíamos en los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, podemos plantear en este momento a los alumnos si dos planos pueden tener 2 puntos, y sólo 2, de contacto.

Vamos a calcular esas infinitas soluciones. Por ser tres las incógnitas y 2 las ecuaciones, esas infinitas soluciones van a depender de 1 (= 3 inc.– 2 ec.) incógnita (parámetro).

Podemos tomar como parámetro una cualquiera de las incógnitas. Sea, por ejemplo, la z. Pasamos, entonces, la z al 2.º miembro de las ecuaciones llegando al sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ -2y &= -3z \end{aligned}\right\}$$

Despejando la y: $y = 3/2\ z$

Y, por tanto, $x = z - y = z - 3/2\ z = -1/2\ z$.

En definitiva, las infinitas soluciones de este sistema son:

$$x = -1/2\ t$$
$$y = 3/2\ t$$
$$z = t$$

obteniéndose cada una de ellas dando sucesivos valores al parámetro «t». Así, por ejemplo, si $t = 2$, una solución del sistema es:

$x = -1;\ y = 3;\ z = 2.$

Tomando, por ejemplo, $t = -8$, otra solución será:

$x = 4;\ y = -12;\ z = -8.$

Y así sucesivamente.

2. Resolver, individualmente y aplicando el método de Gauss, el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comenzamos por escribirlo de la forma habitual:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{array}\right\}$$

Al restar a la 2.ª y 3.ª ecuaciones la 1.ª para eliminar la x, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ -2y + 3z = 1 \\ 2y - 3z = 2 \end{array}\right\}$$

Posteriormente, al sumarle a la 3.ª ecuación la 2.ª para eliminar la y:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ -2y + 3z = 1 \\ 0 = 3 \end{array}\right\}$$

Es decir, llegamos a un absurdo. Por tanto, este sistema no tiene solución.

Conclusión:

Los sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, lo mismo que los de 2 con 2, pueden ser:

— Compatibles determinados: con una única solución.

— Compatibles indeterminados: con infinitas soluciones.

— Incompatibles: sin solución.

Actividades propuestas

Proponer a los alumnos y alumnas problemas que den lugar a sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, como por ejemplo los siguientes:

- **Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus dos hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano. La suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?**
- **La suma de las tres cifras de un número es 12. La cifra de las decenas es la suma de las unidades más la de las centenas y si se invierte el orden de las cifras, el número así obtenido es 198 unidades más pequeño que el dado. Calcular el número.**

Además de plantear y resolver estos sistemas, y analizar la solución, los alumnos y alumnas han de escribir sus notaciones matricial.

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Este punto de la Unidad didáctica intenta cumplir un doble objetivo: por un lado, formalizar y extender lo estudiado en concreto para sistemas de 2 y 3 ecuaciones con 2–3 incógnitas a un sistema cualquiera para, en caso de que los alumnos y alumnas se encuentren con algún sistema superior, sean capaces de abordarlo.

Por otro lado, se trata también de que aquellos alumnos y alumnas que piensen proseguir sus estudios con una carrera universitaria donde se incluyan los sistemas de ecuaciones, hayan formalizado previamente los resultados vistos hasta el momento de manera que sirvan de puente con esos futuros estudios.

De todas maneras, el profesor debe considerar hasta qué punto debe insistir y/o profundizar en este punto, de acuerdo con los resultados de la prueba inicial que efectuó a los alumnos y alumnas, así como las perspectivas que éstos tengan.

Definiciones

Se llama sistema de «m» ecuaciones con «n» incógnitas a cualquier expresión del tipo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_r = b_m \end{array}\right\}$$

Donde:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas del sistema.
- $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ son los coeficientes de las incógnitas.
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son los términos independientes.

- Se llama solución del sistema al conjunto de números (s_1, s_2, ... s_n) tal que, al sustituir la x_1 por s_1, la x_2 por s_2, ... la x_n por s_n, se nos verifiquen simultáneamente las m ecuaciones.
- Resolver un sistema es hallar su solución o soluciones, si es que existen.
- Discutir un sistema es analizar cuántas soluciones posee: una, infinitas o ninguna.

Normalmente, la discusión se hace de modo independiente a la búsqueda de la solución y previamente a la misma.

Clasificación

Los sistemas, según las soluciones que posean, se clasifican de la siguiente manera:

— Un sistema se dice que es **compatible** si tiene al menos una solución.
Si esa solución es única, se dice **compatible determinado**. Si las soluciones son infinitas, se dice que el sistema es **compatible indeterminado**.

— Si un sistema no tiene solución se dice que es **incompatible**.

Hay que insistir en el hecho, como ya se comentó en los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y en los de 3 con 3, de que si un sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas soluciones. Es decir, no cabe el caso de un sistema que tenga un número finito de soluciones distinto de 1.

En resumen:

$$\text{Sistemas}\begin{cases}\text{Compatibles: con solución}\begin{cases}\text{Determinados: una}\\ \text{Indeterminados: infinitas}\end{cases}\\ \text{Incompatibles: sin solución}\end{cases}$$

Expresión matricial

Ya hemos visto las expresiones matriciales respectivas de los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. De forma análoga, generalizando, escribimos la expresión matricial de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas. Será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots & a_{3n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ecuación que se acostumbra a escribir de forma más sencilla de la siguiente manera: $C \cdot X = B$, siendo la matriz C la matriz de los coeficientes, la matriz X la matriz columna formada por las incógnitas y la matriz B la matriz columna de los términos independientes.

Ejemplo:

Escribir matricialmente sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t + v = 2 \\ 2x + 3y - z \quad - 2v = 1 \\ -x - y + 2z - 3t + 4v = -2 \\ 4x + 2y - z + 2t - 3v = 3 \end{array}\right\}$$

Observaciones:

— En los ejercicios y ejemplos que se hagan en clase se deben usar indistintamente, como nombre de las incógnitas, tanto las letras x, y , z, ..., como la notación x_1, x_2, x_3, ..., con el fin de que los alumnos y alumnas se acostumbren a manejar sin problemas tanto la una como la otra.

— De la misma forma, si estamos hablando de sistemas de m ecuaciones con n incógnitas, m distinto de n, debemos acostumbrarles/acostumbrarnos a no escribir siempre sistemas que tengan igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Solución:

La notación matricial será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matriz de los coeficientes y matriz ampliada

Por último, asociadas a cualquier sistema, siempre consideraremos dos matrices:

— *Matriz de los coeficientes:*

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, esta matriz es de dimensión mxn.

— *Matriz ampliada:*

$$C^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz ampliada es la matriz de los coeficientes a la que se le ha añadido una columna más: la columna de los términos independientes.

Por tanto, la dimensión de esta matriz es $m x(n+1)$.

Como ejemplo, haremos escribir a los alumnos y alumnas las dos matrices asociadas al último sistema estudiado.

La matriz de los coeficientes es la matriz de orden 4 x 5 siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Mientras que la matriz ampliada es la matriz de orden 4 x 6 siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Actividades resueltas

Vamos a resolver ahora una serie de actividades que sirvan como compendio de todo lo estudiado hasta el momento. Por otro lado, en algunos de ellos se introducirán y comentarán los sistemas homogéneos y los sistemas dependientes de un parámetro, así como el teorema de Rouché.

Como ya se ha indicado repetidamente, se resuelven estos ejercicios bastante pormenorizadamente a fin de que el profesor, si lo cree necesario, pueda proporcionar una copia a aquellos alumnos y alumnas que estime conveniente.

Así mismo, será el profesor el que deba decidir cuántos, cuáles y de qué modo deben ser resueltos para un mejor aprovechamiento por parte de los alumnos. A pesar de ello, en cada ejercicio indicamos si debe ser resuelto por el profesor, si debe ser resuelto en grupo o si, por el contrario, debe resolverlo cada alumno individualmente.

Por otro lado, en el primer ejercicio se habla por primera vez del teorema de Rouché. Queda, por supuesto a discreción del profesor insistir más o menos sobre dicho teorema.

Actividad 1

Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(Este ejercicio debe ser resuelto de forma individual).

Solución:

— Si a la segunda ecuación le restamos dos veces la primera, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

— Si a la 3.ª le restamos la primera:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -y - 2z &= 0 \\ -y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

— Al ser la 3.ª ecuación igual a la 2.ª, no proporciona ninguna información nueva. Por tanto, podemos suprimirla resultando, en definitiva, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

O bien, cambiando de signo la 2.ª ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ +y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

— Por ser 2 las ecuaciones y 3 las incógnitas, resulta ser un sistema compatible indeterminado, es decir, con infinitas soluciones que dependen de 1 parámetro. Así, el sistema a resolver, será, por ejemplo, el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= -3z \\ y &= -2z \end{aligned}\right\}$$

de soluciones: $x = t$, $y = -2t$, $z = t$

Una vez resuelto el problema, el profesor *puede* hacer una doble intervención comentando:

— Sistemas homogéneos.

— Teorema de Rouché.

Sistemas homogéneos

Se llaman sistemas homogéneos a aquellos sistemas tales que todos sus términos independientes valen

Hemos visto ya, aunque sin nombrarlos, dos sistemas homogéneos. Uno, este último ejemplo, y otro en la página 54.

Vemos que en ambos ejemplos la situación ha sido similar: en ambos nos ha resultado un sistema compatible indeterminado. Podemos preguntarnos si esto ha sido debido exclusivamente a la casualidad o si, por el contrario, este es un resultado que va a ocurrir siempre que el sistema sea homogéneo.

Aquí el profesor puede plantear una discusión entre los alumnos y alumnas hasta que lleguen a la conclusión evidente: todo sistema homogéneo, por el hecho de serlo tiene como mínimo la solución $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, la llamada **solución trivial**.

Conclusión última a indicar por el profesor: un sistema homogéneo nunca puede ser incompatible; siempre ha de tener solución. Además, si al escalonar el sistema resultan menos ecuaciones que incógnitas, es compatible indeterminado (infinitas soluciones) como en los ejemplos considerados. En caso contrario, si el número de ecuaciones coincide con el de incógnitas, será compatible determinado teniendo como solución única la trivial.

Teorema de Rouché

En el ejemplo último que hemos visto, las dos matrices asociadas al sistema son:

Matriz de los coeficientes: Matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Repitiendo en ambas los pasos que hemos realizado con el sistema, obtendremos las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Y, posteriormente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, hemos llegado a comprobar que el rango de la matriz de los coeficientes es 2 y, asimismo, el rango de la matriz ampliada, también es 2. Es decir: **ambas matrices, matriz de los coeficientes y matriz ampliada, tiene el mismo rango.**

Este es un resultado general que, en caso de seguir ampliando los estudios de Matemáticas en cursos superiores los alumnos y alumnas aplicarán continuamente y que es conveniente que conozcan ya, **teorema de Rouché** que afirma lo siguiente:

— Condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de las dos matrices asociadas al mismo sea el mismo.

— Además, si el rango coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y, si por el contrario, el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Por otro lado, además de lo ya expuesto, resulta que incluso es más cómodo escribir las matrices asociadas a los sistemas que las ecuaciones completas de los mismos. Por ello, los ejemplos que veamos a continuación se resolverán a partir de las matrices correspondientes.

Actividad 2

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 4x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La resolución de este sistema la han de hacer los alumnos por grupos.

Solución:

— Consideremos las dos matrices del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— Intercambiando entre sí las dos primeras filas para conseguir que en la posición a_{11} tengamos un 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Con otras palabras: hemos intercambiado entre sí las dos primeras ecuaciones).

— A la 2.ª fila le restamos la 1.ª multiplicada por 2 y a la 3.ª fila le restamos la 1.ª multiplicada por 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

— Le sumamos ahora a la 3.ª fila la 2.ª:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

— Por tanto, el rango de ambas matrices es 3. Así, por el teorema de Rouché, el sistema es compatible al coincidir ambos rangos. Además, por ser tres que es el número de incógnitas, es compatible determinado, es decir, con una sola solución. Esta solución, al ser un sistema homogéneo ha de ser, por tanto, la trivial: $x = y = z = 0$.

Actividad 3

Resolver el siguiente sistema según los valores que tome el parámetro «m».

$$\left.\begin{aligned} mx - y &= 1 \\ x - my &= 2m-1 \end{aligned}\right\}$$

Este ejercicio ha de ser resuelto por el profesor.

Solución:

Las dos matrices asociadas al sistema son:

$$\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos entre sí las dos filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -m & 2m-1 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le restamos a la 2.ª fila la 1.ª multiplicada por m para conseguir un 0 en la posición a_{21}:

$$\begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & -1+m^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -m & 2m-1 \\ 0 & -1+m^2 & 1-2m^2+m \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes será 2 ó 1 dependiendo, respectivamente, de que $-1+m^2$ sea distinto de cero o igual a cero.

Como $-1+m^2$ se hace cero cuando m toma el valor 1 o el valor -1 (basta con resolver la ecuación $-1+m^2 = 0$), se nos plantean tres posibilidades: que m tome el valor 1, que tome el valor -1 o que no tome ninguno de ambos. Veamos cada uno de ellos:

— *Caso m = 1.*

Las dos matrices quedan de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de ambas es igual a 1. Estamos así ante un sistema compatible (son del mismo rango) e indeterminado (es menor al número de incógnitas).

La única ecuación a considerar será la $x - y = 1$, y, por tanto, las soluciones resultan de trasladar una de las incógnitas al 2.° miembro: $x = 1 + y$.

Las infinitas soluciones son: $\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = t \end{array}$

— *Caso m = -1*

Las matrices son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, el rango de la matriz de los coeficientes es 1 mientras que el rango de la matriz ampliada es 2. Estamos, por tanto, ante un sistema incompatible, un sistema sin soluciones.

— *Caso $m \neq 1$ y $m \neq -1$.*

En este caso, por ser $-1 + m^2$ distinto de cero, el rango de la matriz de los coeficientes es 2. Además, por ser la matriz ampliada una prolongación de la matriz de los coeficientes, también será 2. Así el sistema es compatible determinado.

Actividad 4

Dado el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ mx + (m+3)y + 3z = 1 \end{array}\right|$

a) Estudiar si existe algún valor de m que haga el sistema incompatible.

b) Resolver el sistema para algún valor de m en que ello sea posible.

Solución:

Las dos matrices asociadas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m+3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & m+3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Restando a la 2.ª fila la 1.ª multiplicada por m:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3-m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3-m & 1-3m \end{pmatrix}$$

Por tanto, como las dos matrices tienen de rango 2 al margen del valor de m, el sistema siempre va a ser compatible.

Por ser el rango menor que el número de incógnitas, es indeterminado. Las infinitas soluciones se obtienen al resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 - z \\ 3y &= 1-3m - (3-m)z \end{aligned}\right\}$$

Obteniéndose tantos sistemas como valores le podemos dar a m. Es decir, se pueden plantear infinitos sistemas todos ellos compatibles indeterminados.

Vamos a resolver el sistema correspondiente, por ejemplo, al *caso $m = 0$;* es decir:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3 - z \\ 3y &= 1 - 3z \end{aligned}\right\}$$

Despejando la «y» en la 2.ª ecuación: $y = 1/3 - z$.

Y sustituyendo este valor en la 1.ª : $x = 8/3$

Por tanto, las infinitas soluciones para este caso son:

$$\begin{aligned} x &= 8/3 \\ y &= 1/3 - t \\ z &= t \end{aligned}$$

Actividad 5

Un estado compra 540.000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 27, 28 y 31 dólares el barril, respectivamente. La factura total asciende a 16 millones de dólares. Si del primer suministrador recibe el 30% del total del petróleo comprado, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

Ejercicio propuesto en la prueba de Selectividad del año 1991. Deberá ser resuelto de forma individual por los alumnos.

Solución:

Llamando x_1 lo que se compra al primer país, x_2 lo que se compra al segundo y x_3 al tercero, será:

— Ecuación correspondiente a las cantidades compradas:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 540.000$$

— Ecuación correspondiente al dinero gastado:

$$27x_1 + 28x_2 + 31x_3 = 16.000.000$$

— Y ya que al primero compra el 30% del total:

$$x_1 = 30/100\,(x_1 + x_2 + x_3)$$

Con lo cual, el sistema que se nos plantea y que hay que resolver es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 540.000 \\ 27x_1 + 28x_2 + 31x_3 &= 16.000.000 \\ x_1 &= 30/100(x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}\right\}$$

Sistema, que reconvirtiendo la 3.ª ecuación, podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 540.000 \\ 27x_1 + 28x_2 + 31x_3 &= 16.000.000 \\ 7x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Siendo sus matrices asociadas las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 28 & 31 \\ 7 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 540.000 \\ 27 & 28 & 31 & 16.000.000 \\ 7 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Restando a la 2.ª fila 28 veces la 1.ª y sumando a la 3.ª fila 3 veces la 1.ª, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 540.000 \\ -1 & 0 & 3 & 880.000 \\ 10 & 0 & 0 & 1.620.000 \end{pmatrix}$$

Por tanto, al ser las dos matrices de rango 3, igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. La solución es:

- De la 3.ª ecuación: $x_1 = 1.620.000/10 = 162.000$ barriles.
- Sustituyendo en la 2.ª ecuación:
  $-162.000 + 3x_3 = 880.000$. Por tanto: $x_3 = 347.333,33$
- Y, por último, de la 1.ª: $x_2 = 30.666,67$

En definitiva, teniendo en cuenta que los barriles han de ser enteros, la solución la podemos redondear de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= 162.000 \text{ barriles} \\ x_2 &= 30.667 \text{ barriles} \\ x_3 &= 347.333 \text{ barriles} \end{aligned}$$

Resolución de sistemas: método de la matriz inversa

Este es un método que en la práctica no se utiliza excesivamente por el inconveniente que resulta tener que calcular la inversa de la matriz de los coeficientes, aunque en la actualidad, con ayuda de programas informáticos, resulta relativamente fácil calcular la inversa de cualquier matriz; posteriormente, dentro de este mismo apartado, vemos este último hecho desarrollado por medio del programa Derive.

Por otro lado, después de todo lo que han visto los alumnos y alumnas en cuanto a la resolución de sistemas y al trabajo con matrices, no deben tener la más mínima dificultad en su aplicación teórica. Así, requerirá poco tiempo el estudio de este apartado.

Vimos en su momento que un sistema cualquiera podía escribirse de forma matricial de la siguiente manera:

$$A \cdot X = B$$

donde A es la matriz de los coeficientes, X la matriz columna de las incógnitas y B la matriz columna de los términos independientes.

Supongamos ahora que la matriz A es cuadrada y posee inversa.

Considerando estas condiciones, el sistema podemos resolverlo de la siguiente forma:

1.º Multiplicamos a la ecuación matricial por la izquierda por la matriz inversa de la matriz A (recordamos que el producto de matrices no es conmutativo y que, por tanto, no es lo mismo multiplicar por un lado que por otro). Tendremos entonces:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

2.º Como el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad (I):

$$IX = A^{-1}B$$

3.º El producto de la matriz identidad por cualquier matriz da como resultado esa misma matriz (IX = X):

$$X = A^{-1}B$$

Ecuación que nos da el resultado del sistema.

Ejemplo 1

Resolver, en grupo y por el método de la matriz inversa, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ -x + 2y &= 5 \end{aligned}\right|$$

Solución:

La ecuación matricial de este sistema es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de la matriz de los coeficientes, cuyo resultado es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y, en definitiva: $x = -1$

$y = 2$

son las soluciones del problema.

Ejemplo 2

De acuerdo con lo expuesto al comienzo de este punto, consideramos que si los alumnos y alumnas tienen posibilidad de tener acceso a algún programa informático de Matemáticas, como puede ser «Derive», éste es un método muy útil y rápido para la resolución de los sistemas, pues dichos programas realizan todos los cálculos de manera prácticamente inmediata.

Como aplicación práctica, vamos a resolver la actividad 5 del apartado anterior aplicando dicho programa.

Partimos del sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 540.000 \\ 27x_1 + 28x_2 + 31x_3 &= 16.000.000 \\ 7x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

• *Paso 1.º:* Declaramos («Declare») la matriz («Matrix») de los coeficientes de orden 3 x 3.

En nuestra primera línea aparecerá, por tanto, la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 28 & 31 \\ 7 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

• *Paso 2.º:* Declaramos la matriz de orden 3 x 1 de los términos independientes.

En la 2.ª línea aparecerá:

$$\begin{pmatrix} 540.000 \\ 16.000.000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• *Paso 3.º:* Procedemos a calcular la inversa de la matriz de los coeficientes.

Seleccionamos «Author» y tecleamos: #1^-1

En la línea 3 aparece la matriz de los coeficientes elevada a -1. Para proceder a su cálculo seleccionamos la orden «Simplify».

En la línea 4 aparece la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 3/10 & 0 & 1/10 \\ 149/15 & -1/3 & -2/15 \\ -277/30 & 1/3 & 1/30 \end{pmatrix}$$

• *Paso 4.º:* Procedemos a realizar el producto de esta matriz (está en la posición #4) por la matriz de los términos independientes (se encuentra en la posición #2).

Seleccionamos «Build» y escribimos: #4 . #2

Seleccionando «aproX» aparece, por último, el resultado final:

$$\begin{pmatrix} 162.000 \\ 30.667 \\ 347.333 \end{pmatrix}$$

Evaluación

De acuerdo con lo expuesto en el apartado de «Orientaciones didácticas y para la evaluación», proponemos los siguientes modelos de pruebas de control.

Los problemas que figuran en estos controles han sido propuestos en diversos tribunales de Selectividad en los últimos años.

PRUEBA 1

1. *Estudiar y resolver el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -3 \\ 3x + y &= 5 \\ y - 2x &= 1 \end{aligned}\right\}$$

2. *Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:*

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

   a) Añadir una ecuación al sistema de modo que el sistema resultante sea compatible.

   b) Añadir una ecuación de modo que el sistema resultante sea incompatible.

   c) Interpretar geométricamente los apartados anteriores.

PRUEBA 2

1. *Determinar los valores del parámetro «a» para que el sistema:*

$$\left.\begin{aligned} a^2x + a^3y &= 1 \\ x + a^2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

tenga solución y resolverlo.

2. *En una finca, el número de cerezos y manzanos es igual al número de perales más dos. El doble de cerezos y perales juntos es igual al de manzanos más uno.*

Estudiar cuántos perales debe de haber para que se cumpla que el número de éstos más el doble de cerezos sea igual al número de manzanos más uno.

Bibliografía y recursos

Bibliografía recomendada

- ALCAIDE, A. *Estadística aplicada a las Ciencias Sociales.* Madrid. Ed. Pirámide. 1975.
- ALEKSANDROV, KOLMOGOROV, LAURENTIEV y otros. *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid. Alianza Editorial. 1980.
- APARY, R., y otros. *Pensar la Matemática.* Barcelona. Tusquets editores. 1984.
- AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. *Funciones y gráficas.* Madrid. Ed. Síntesis. 1990.
- COCHRAN, W. *Técnicas de muestreo.* Méjico. Ed. Cecsa 1974.
- LIPSCHUTZ, S. *Probabilidad.* McGraw-Hill. 1979.
- POLYA, G. *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid. Ed. Tecnos. 1966.
- POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* Méjico. Ed. Trillas. 1965.
- SALVADOR, A., BRIHUEGA, J. y PÉREZ, A. *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I.* Ed. MEC. 1992.
- BRIHUEGA, J., PÉREZ, A. y SALVADOR, A., *Matemáticas I.* Ed. MEC. 1992.
- SPIEGEL, M. *Estadística.* Madrid. Ed. Mc Graw-Hill. 1989.
- SPIVAK, M. *Calculus: cálculo infinitesimal.* Barcelona. Ed. Reverté. 1970.
- VIZMANOS, J. R. y ANZOLA, M. *Matemáticas. Algoritmo 3.* Madrid. Ed. SM. 1990.

Recursos recomendados

Medios materiales

- Calculadora.
- Reglas, compás y escuadras.
- Acetatos.

Medios audiovisuales

El uso de los medios audiovisuales en la clase de Matemáticas, lejos de ser algo excepcional, como hasta la fecha ha venido ocurriendo, debería ser habitual, pues pueden prestar un apoyo fundamental a la enseñanza de nuestra asignatura: en la actualidad hay disponible en el mercado una importante cantidad de este tipo de medios aplicados a la enseñanza y didáctica de las Matemáticas.

- Proyector de diapositivas.
- Retroproyector de transparencias.
- Pantalla de proyección.
- Magnetoscopio y televisor.
- Cámara de vídeo.

Vídeos didácticos

- *El ojo matemático (2.ª parte).*
  Cómo abordar problemas.
  Yorkshire T.V.
  Distribuidora: Imagen 35 & Asociados.
- *Símbolos y ecuaciones.*
  The Open University.
- *La estadística por dentro.*
  Annemberg TV.
  Distribuidora: BBC Enterprises.
- Medios informáticos.
- Ordenadores compatibles, 3 1/2 ó 5 1/4, S.O. MS-DOS versión 2.1 o posterior.

Materiales informáticos

Se debe tener siempre presente que no se trata de «enseñar Informática». Por el contrario, se trata de aplicar la herramienta informática al desarrollo y aprendizaje de nuestra asignatura. Por ello, se deben buscar programas de fácil manejo y que no requieran unos grandes medios en cuanto a los recursos físicos.

- *Sistemas de ecuaciones.*
  Editorial SM. Madrid 1987.
  Distribuidor: Ediciones SM.
- *Sistemas de ecuaciones.*
  Editorial SM-Idealogic S. A. Madrid 1989.
  Distribuidor: Idealogic S. A.
- *Sistemas de ecuaciones.*
  Editorial Edicinco S. A. Valencia 1989
  Distribuidor: Edicinco, S. A.

- *Estudio de funciones.*
  Editorial Edicinco. S. A. Valencia.
  Distribuidor: Edicinco, S. A.
- *Derive: A Mathematical Assistant Program.*
  Distribuidor: Add Link. Barcelona.
- *Mathematica 2.0*
  Editorial Champaign.
  Distribuidor: Wolfram Research Inc.

Anexo: Currículo oficial(*)

Introducción

A medida que las matemáticas han ido ensanchando y diversificando su objeto y su perspectiva, han sido también crecientemente consideradas como un lenguaje aplicable a los más distintos fenómenos y aspectos de la realidad: un lenguaje universal por su estructura y uso, y, además, sumamente eficaz. Con ello, las matemáticas se han convertido en un potente y más apreciado instrumento de intercomunicación entre los conocimientos. En relación con esta funcionalidad e instrumentalidad suya como lenguaje, como vehículo de expresión de las realidades de que tratan los saberes, es conveniente que los alumnos de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, adquieran un buen dominio de determinadas destrezas y expresiones matemáticas.

Las matemáticas constituyen un conjunto muy amplio de conocimientos que evoluciona continuamente en interdependencia con los de otras esferas del saber y con la necesidad de resolver determinados problemas prácticos. Es importante que el currículo, y su forma de ser presentado a los alumnos, reflejen el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el individuo. La adquisición de conocimientos matemáticos no puede reducirse, por lo tanto, a la posesión de los resultados finales de esta ciencia, sino al dominio de su «forma de hacer».

De acuerdo con esto, aun cuando los contenidos conceptuales están presentes en la actividad matemática, no son los únicos elementos que actúan en su desarrollo. En los contenidos del currículo es preciso otorgar un lugar importante a los procedimientos o modos de saber hacer, como los que se refieren a:

— Habilidades en la comprensión y en el uso de diferentes lenguajes matemáticos.

— Las técnicas, rutinas y algoritmos particulares que tengan un propósito concreto.

— Las estrategias generales o heurísticas necesarias en la resolución de problemas como análisis de tareas, búsqueda de regularidades y pautas, expectativas de resultados, comprobación y refutación de hipótesis.

— Decisiones ejecutivas y de control utilizadas al hacer un plan y llevarlo a cabo para plantear y resolver un problema y tomar decisiones sobre los conceptos, algoritmos o estrategias que se van a utilizar.

Sin menoscabo de su importancia funcional e instrumental, hay que resaltar también el valor formativo de las matemáticas. Este carácter formativo potenciará en los alumnos la consolidación de

(*) Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo de Bachillerato. («B. O. E.», n.º 253 de 21 de octubre de 1992).

hábitos y estructuras mentales y también de actitudes cuya utilidad trasciende el ámbito de las propias matemáticas. En particular, forman al alumno en la resolución de problemas genuinos, es decir, de aquellos problemas en los que la dificultad está en encuadrarlos y en establecer una estrategia de resolución adecuada. La resolución frecuente de este tipo de problemas proporciona además al alumno actitudes y hábitos de indagación, le facilita técnicas útiles para enfrentarse a situaciones imprevistas, y fomenta su creatividad. Pero el aprendizaje de las Matemáticas no debe limitarse a un adiestramiento en la resolución de problemas, por importante que éste sea, debiendo completarse con la formación en aspectos como la búsqueda de la belleza y la armonía, una visión amplia y científica de la realidad, el desarrollo de la creatividad y de otras capacidades personales y sociales.

La fuerte abstracción simbólica, rigor sintáctico y exigencia probatoria que definen el saber matemático, deben tener una presencia menor en las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. En esta asignatura basta con conocer y usar correctamente lo que es de más inmediata utilidad en el lenguaje matemático y obviar todo contenido y forma tecnicista que dificulte el primer valor de este lenguaje: comprender, interpretar, expresar, comunicar. Han de ser prácticas y poco técnicas. Proporcionarán cierta soltura en el cálculo y, sobre todo, gran destreza en la interpretación de funciones y estadísticas, mediante tablas, gráficas, fórmulas o referencias a sus parámetros. Con ello, los alumnos, al acabar el curso, han de estar capacitados para comprender, interpretar y sacar conclusiones de escritos en los que se utilicen términos matemáticos (funcionales, de estadística, etcétera), no especialmente técnicos, y para participar en la elaboración de trabajos en los que se requieran ciertas técnicas matemáticas.

Por el contrario, las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II proporcionan conocimientos e instrumentos más técnicos, que permiten interpretar y abordar problemas de mayor complejidad matemática; entre ellos, especialmente los relacionados con el mundo de la economía. Teniendo en cuenta los posibles estudios posteriores de los alumnos, habrá que prestar también cierta atención a la fundamentación teórica.

Los contenidos incluidos bajo el nombre de «Resolución de problemas», básicamente procedimentales, pretenden desarrollar en el alumno hábitos y actitudes propios del modo de hacer matemático, entendido como un proceso dinámico, mediante la ocupación activa con problemas relacionados con el resto de los contenidos; entendiendo aquí como problema una situación abierta, susceptible de enfoques variados, que permite formularse preguntas, seleccionar las estrategias heurísticas y tomar las decisiones ejecutivas pertinentes. Estos contenidos han de tener, por consiguiente, un marcado carácter transversal, y deben estar presentes también en las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.

Objetivos generales

El desarrollo de esta materia ha de contribuir a que las alumnas y alumnos adquieran las siguientes capacidades:

1. Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos, en particular, en la interpretación de fenómenos y procesos de las ciencias sociales y humanas y en las actividades cotidianas.
2. Utilizar y contrastar estrategias diversas para la resolución de problemas, de forma que les permita enfrentarse a situaciones nuevas con autonomía, eficacia y creatividad.
3. Elaborar juicios y formar criterios propios sobre fenómenos sociales y económicos, utilizando tratamientos matemáticos, y expresar críticamente opiniones, argumentando con precisión y rigor y aceptando la discrepancia y los puntos de vista diferentes.
4. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas.

5. Utilizar los conocimientos matemáticos adquiridos para interpretar críticamente los mensajes, datos e informaciones que aparecen en los medios de comunicación y otros ámbitos sobre cuestiones económicas y sociales de la actualidad.

6. Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, adquirir cierto rigor en el pensamiento científico, encadenar coherentemente los argumentos y detectar incorrecciones lógicas.

7. Expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos.

8. Establecer relaciones entre las Matemáticas y el entorno social, cultural y económico, apreciando su lugar como parte de nuestra cultura.

La materia de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II contribuirá a que los alumnos que la cursen progresen en la adquisición de estas capacidades.

Contenidos

Álgebra

- Las matrices como forma de representación de tablas y grafos.
- Suma y producto de matrices. Interpretación del significado de estas operaciones en el contexto de problemas extraídos de la realidad. Aplicación a la resolución de problemas extraídos de las Ciencias Sociales.
- Aplicación de las matrices a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Iniciación a la programación lineal bidimensional. Optimización de expresiones lineales sometidas a restricciones expresadas por medio de ecuaciones, utilizando métodos gráficos.

Análisis

- Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de las tendencias de una función. Ramas infinitas.
- Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica como pendiente de una curva y como variación de una función.
- Aplicación del límite y la derivada a la determinación e interpretación de las propiedades locales de funciones habituales basadas en situaciones contextualizadas.
- Aplicación del cálculo de derivadas elementales (polinómicas, exponenciales y logarítmicas, productos y cocientes) a problemas de optimización.
- Aproximación intuitiva al concepto de integral definida: el problema del cálculo del área limitada por una curva.

Estadística y probabilidad

- *Profundización en los conceptos de probabilidades compuestas, condicionadas, totales y a* posteriori. Utilización de técnicas elementales (conteo directo, diagrama en árbol...).

- Introducción al concepto, uso y alcance de la inferencia estadística: problemas relacionados con la elección de las muestras, las condiciones de representatividad y análisis de las conclusiones que cabe extraer de ellas.

- Estudio de algún test de contraste de hipótesis basado en la distribución normal y aplicación a situaciones sencillas.

Criterios de evaluación

1. *Utilizar el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de situaciones que manejen datos estructurados en forma de tablas o grafos.*

   Este criterio pretende evaluar las destrezas en la forma de organizar la información, codificarla utilizando las matrices y realizar operaciones con éstas, como sumas y productos. También va dirigido a comprobar si saben interpretar las matrices obtenidas en el tratamiento de las situaciones estudiadas.

2. *Transcribir un problema expresado en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlo utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y programación lineal bidimensional.*

   Este criterio va dirigido a comprobar si el alumno es capaz de utilizar con soltura el lenguaje algebraico, seleccionar las herramientas algebraicas adecuadas, aplicarlas correctamente y por último interpretar críticamente el significado de las soluciones obtenidas. Debe tenerse en cuenta que la resolución de forma mecánica de ejercicios de aplicación inmediata no responde al sentido de este criterio.

3. *Analizar cualitativa y cuantitativamente las propiedades locales (límites, crecimiento, derivada, máximos y mínimos) de una función que describa una situación real, extraída de fenómenos habituales en las ciencias sociales.*

   A través de este criterio se pretende evaluar la capacidad del alumno para interpretar las propiedades locales de una función aplicando nociones analíticas. Se trata en todo caso de estudiar funciones provenientes de contextos reales. Ejemplos de estos contextos son las curvas marginales, las curvas de oferta y demanda o las curvas de coste y beneficios.

4. *Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico y sociológico.*

   Este criterio va dirigido a valorar la capacidad para utilizar las técnicas de obtención de valores extremos en situaciones relacionadas con las ciencias sociales: expresando las relaciones y restricciones en forma algebraica y aplicando el cálculo de derivadas. La resolución de los problemas a los que se refiere el criterio exige también la interpretación del resultado en el contexto inicial.

5. *Asignar e interpretar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos (dependientes o independientes) utilizando técnicas de conteo directo, diagramas de árbol o cálculos simples.*

   Este criterio persigue evaluar la capacidad para tomar decisiones ante situaciones que exijan un estudio probabilístico de varias alternativas no discernibles a priori, enmarcados en un contexto de juego o de investigación, y que no requieran la utilización de complicados cálculos combinatorios.

6. *Planificar y realizar estudios concretos partiendo de la elaboración de encuestas, selección de la muestra y estudio estadístico de los datos obtenidos, para inferir conclusiones, asignándoles una confianza medible, acerca de determinadas características de la población estudiada.*

   Por medio de este criterio puede ponerse de manifiesto por una parte, la capacidad de aplicar los conceptos relacionados con el muestreo para obtener datos estadísticos de una población; y por otra, si los alumnos y alumnas son capaces de extraer conclusiones sobre aspectos determinantes de la población de partida.

7. *Analizar de forma crítica informes estadísticos presentes en los medios de comunicación y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones en la presentación de determinados datos.*

   El alumno ha de mostrar, a través de este criterio, una actitud crítica ante las informaciones que, revestidas de un formalismo estadístico, intentan deformar la realidad ajustándola a intereses determinados. Los informes a los que se refiere podrán incluir datos en forma de tabla o gráfica, parámetros obtenidos a partir de ellas, así como posibles interpretaciones.

8. *Aplicar los conocimientos matemáticos a situaciones nuevas, diseñando, utilizando y contrastando distintas estrategias y herramientas matemáticas para su resolución.*

   Este criterio pretende evaluar la capacidad del alumno de utilizar el «modo de hacer matemático» para enfrentarse a situaciones prácticas de la vida real.

CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR

9 788436 926620

DIRECCIÓN GENERAL DE RENOVACIÓN PEDAGÓGICA
CENTRO DE DESARRROLLO CURRICULAR