GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Escuela de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”: enseñar divulgando

Serie: Ciencias

IFIIE
Aulas de Verano

Escuela de Educación Matemática "Miguel De Guzmán": enseñar divulgando

Colección: Aulas de Verano
Serie: Ciencias

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
IFIIE
INSTITUTO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO, INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA

Escuela de Educación Matemática "Miguel de Guzmán": enseñar divulgando

Colección: Aulas de Verano
Serie: Ciencias

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE ESTADO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL
Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa

Edita:
© SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA
Subdirección General de Documentación y Publicaciones

Catálogo de publicaciones del Ministerio: educacion.es
Catálogo general: publicacionesoficiales.boe.es

Fecha de edición: 2010
NIPO 820-10-329-6
ISBN 978-84-369-4937-7

Depósito Legal: M-4449-2011
Imprime: Artes Gráficas Rupem S.Coop.

Dirección editorial del volumen ***Escuela de educación matemática "Miguel de Guzmán": enseñar divulgando***: RAQUEL MALLAVIBARRENA MARTÍNEZ DE CASTRO

Coordinación: FRANCISCO MARTÍN CASALDERREY

Autores:

Anton AUBANELL POU
CREAMAT, Departament d'Educació, Generalitat de Catalunya

David BLANCO LASERNA
Escritor

Constantino DE LA FUENTE MARTÍNEZ
IES "Cardenal López de Mendoza", Burgos
Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"

Maria DEDÒ
Universidad de Milán, Italia

Santiago FERNÁNDEZ
Asesor de matemáticas del Berritzegune de Bilbao

Raúl IBÁÑEZ TORRES
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco

Raquel MALLAVIBARRENA
Departamento de Álgebra, Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM

Francisco MARTÍN CASALDERREY
IES Juan de la Cierva

Juana Mª NAVAS PLEGUEZUELOS
Directora del Centro del Profesorado de Baza, Granada

Antonio PÉREZ SANZ
Director del Instituto Superior de Formación y Recursos en Red del Profesorado 2009

Josep Lluís POL I LLOMPART
CentMat Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic
Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX

José María SORANDO MUZÁS
Catedrático de Matemáticas. IES Elaios

Escuela de Educación Matemática "Miguel de Guzmán": enseñar divulgando

El tema propuesto para la quinta edición de la Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán, "Enseñar divulgando", tuvo como objetivo animar la reflexión sobre la relación entre la divulgación de las Matemáticas y su enseñanza. Mediante ponencias y mesas redondas se abordó el tema desde varios enfoques y se mostraron iniciativas que se han ido desarrollando en los últimos años en los ámbitos de la Educación Secundaria y de la Universidad.

Miguel de Guzmán contribuyó en gran medida a la divulgación de las Matemáticas y mostró el papel tan importante de esta en la educación matemática. Tomaremos sus reflexiones como punto de partida.

Este volumen está dirigido fundamentalmente a docentes de Matemáticas de los niveles educativos de Secundaria y Universidad con interés en los aspectos divulgativos de su tarea. También está diseñado para personas dedicadas a la divulgación de la Ciencia y en concreto las Matemáticas desde los medios de comunicación, museos, literatura…

Índice

Enseñar divulgando:
V Escuela de Educación Matemática
“Miguel de Guzmán”

Antonio Pérez Sanz

Quiero empezar esta bienvenida a los asistentes con unas palabras de Miguel de Guzmán, que encajan a la perfección con la idea que inspira el tema central de esta V Escuela de verano que lleva su nombre:

> Existen constelaciones de hechos matemáticos que se prestan para hacer de ellos una novela bien interesante.
>
> Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales, en los que tanto abundamos los profesores de Matemáticas de todos los niveles, no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano.

Enseñar y divulgar Matemáticas parecen dos actividades que viven de espaldas; de hecho, parece que en nuestro país el encuentro entre los dos verbos sea un encuentro imposible. Yo he tenido la suerte de trabajar en las dos riberas de este binomio, enseñanza y educación, y puedo afirmar con conocimiento de causa que los profesores que de alguna forma nos dedicamos a la divulgación matemática somos algo excepcional, aunque el número va en aumento. Y no digamos los divulgadores que se dedican a la enseñanza de las Matemáticas, en cualquier nivel educativo. De hecho la figura del divulgador matemático es una figura extraña en nuestro país. Miguel de Guzmán, Claudi Alsina, Raúl Ibáñez, Fernando Corbalán, Rafael Pérez y yo mismo constituíamos hace solo unos años el escaso ejército itinerante de conferenciantes de las charlas de carácter divulgativo que se impartían en la extensa geografía de nuestro país.

El nacimiento del portal de divulgación de la RSME, Divulgamat, hace más de seis años constituyó un momento importante en el proceso de sensibilización de los matemáticos sobre la necesidad de acercar su ciencia al gran público. Una de sus primeras actividades, además de la creación del portal www.divulgamat.net, fue la celebración en el Miramon Kutxaespacio de la Ciencia de San Sebastián, los días 18 y 19 de noviembre de 2004, de unas Jornadas sobre popularización de la Ciencia: las Matemáticas.

Entre las conclusiones de estas jornadas, publicadas en un libro editado por Nivola con el título *Divulgar las Matemáticas*, quiero traer aquí estas tres:

- No se debe hacer una excesiva separación entre los científicos por una parte y los ciudadanos por otra.
- La comunicación es indispensable.
- El trabajo de divulgación es incluso una obligación social, aunque poco valorada entre los científicos y profesores españoles.

Es evidente que divulgar la ciencia es una necesidad social, y mucho más en un momento en que las vocaciones científicas en Europa están en franco retroceso. En el marco de estas jornadas se remarcaron los aspectos generales en los que hacer hincapié a la hora de abordar actividades de divulgación:

- Matemáticas para la vida cotidiana.
- Matemáticas para el trabajo.
- Matemáticas como cultura.
- Matemáticas para la ciencia y la tecnología.

1. La realidad sociológica. Cultura científica

La inmensa mayoría de la población de nuestro país sigue asociando las Matemáticas con la escuela, y con nada más. No existen otras Matemáticas que las que "sufrieron" en las aulas del colegio o del instituto. Logaritmos neperianos, factorización de polinomios de grado 5, castillos de fracciones interminables... son las huellas más odiosas de las Matemáticas de la gente que ha cursado la enseñanza secundaria en las últimas décadas.

Por desgracia, para esas personas, la mayoría de la población, las Matemáticas son sólo eso. Recuerdos inútiles de rutinas y procesos complicados que no han vuelto a utilizar en su vida. Porque, seamos serios, ¿qué político, periodista, médico, fontanero, carpintero, economista, químico, antropólogo, cineasta, cámara de televisión, jardinero, ministro, concejal... ha utilizado para tomar alguna decisión trascendental de su vida la tecla *ln* de la calculadora? Nadie. Aunque otros la pulsen por él.

La simplificación Matemáticas = Matemáticas escolares es triste pero real. Sobre todo pensando que las Matemáticas constituyen una de las fuerzas que, en gran medida, han contribuido a la creación del mundo moderno y tecnológico que disfrutamos o sufrimos hoy en día.

Y esta visión limitada de las Matemáticas no es un fenómeno local. Ian Steward, en su libro *Cartas a una joven matemática* (Ed. Crítica, 2006) nos dice:

> Hay muchas personas que creen que las matemáticas se limitan a lo que se les enseñó en la escuela y que "todo está hecho". Si pocos estudiantes llegan a darse cuenta de que hay matemáticas fuera de los libros de texto es porque nadie se lo dice.

Hace unos años la RSME editó un folleto "publicitario" sobre las Matemáticas. Por desgracia su difusión fue muy limitada, incluso entre los profesores de la materia, pues contenía un argumentario contundente sobre las "posibilidades" que brinda estudiar Matemáticas. Una de sus secciones se titulaba precisamente "Multiplica tus posibilidades" y en un lenguaje muy comercial nos presentaba las Matemáticas de una forma muy diferente de la habitual:

> ¿Te gustan las MATEMÁTICAS?
> ¿Quieres aprobar el examen de tu vida?
> Prepárate para el Futuro de la mano de los grandes maestros de la Historia:
> Euclides, Pitágoras, Gauss, Euler... ¡4.000 años de experiencia a tu alcance!
>
> Elige la mejor opción. Las MATEMÁTICAS están a tu alrededor, en la mayoría de las actividades diarias.
> Conócelas y tendrás la llave del éxito.

Y continuaba trayendo a primer plano las aplicaciones de las Matemáticas a los instrumentos tecnológicos más actuales:

> Desarrolla tu potencial intelectual al máximo: aprende cómo funcionan los MP3, los sistemas de televisión o la telefonía digital, qué son las claves criptográficas empleadas en las transacciones bancarias o las compras en Internet, ¿cuál es la Geometría del Universo?

En otra parte del folleto y bajo el atractivo lema: "Atrévete, no seas un cero a la izquierda", nos presentaba el amplio panorama profesional donde se integran matemáticos dentro de equipos multidisciplinares, cada vez más habituales:

- Profesor.
- Investigador universitario.
- Controlador del tráfico aéreo.
- Periodista científico.
- Criptógrafo.
- Ecólogo de poblaciones.
- Investigador de redes neuronales.
- Experto en el desarrollo de técnicas de la imagen en medicina.
- Diseñador de coches, aviones, etc.
- Analista de predicciones meteorológicas.
- Genetista.
- Experto en aplicaciones estadísticas.
- Analista de mercados financieros.
- Controlador de misiones espaciales.
- Programador informático.
- Corredor de bolsa.
- Cosmólogo.
- Editor de libros científicos.
- Oncólogo.
- Gestor de recursos educativos…

2. El nuevo papel de las Matemáticas

A la luz de esta amplia relación, no exhaustiva por cierto, parece posible establecer un nuevo consenso sobre el papel de las Matemáticas en el mundo actual como frontera de la investigación científica, como motor de impulso de las tecnologías y como parte fundamental de la cultura de la humanidad; de hecho, nunca como hoy ha sido mayor la necesidad de entender y ser capaz de usar Matemáticas en la vida diaria y en el trabajo.

Los modelos matemáticos entendidos como una representación abstracta de un fenómeno que sirve para comprender mejor el comportamiento de la realidad nos permiten el estudio de todo tipo de fenómenos, y no sólo del mundo físico. Los modelos matemáticos nos permiten analizar y dar respuestas a fenómenos industriales, económicos, financieros, físicos, químicos, biológicos, culturales, administrativos, políticos, históricos, etc.

Algunas de sus aplicaciones más familiares al conjunto de la sociedad son:

Simulación

Es un método numérico que sirve para analizar, diseñar y evaluar el desempeño de un sistema a través de experimentos por computadora. Se aplica en situaciones tan dispares como:

- Finanzas: simular ocurrencias de incidentes para obtener su distribución.
- Economía: simular la elasticidad de la demanda de un bien ante un cambio en su precio dentro de un mercado cambiante.
- Ecología: simular el comportamiento del clima en un ecosistema atendiendo a la variación de los distintos parámetros que lo afectan.
- Biología: simular el crecimiento y desarrollo de un virus en una comunidad de personas.
- Ingeniería industrial: simular los tiempos de entrega, los costos, la cantidad y los niveles de inventario. Diseños y rendimientos de aviones, coches...

Optimización

Son métodos numéricos que buscan minimizar o maximizar una función que represente de manera numérica la delimitación de un problema. Y se aplican, entre muchas otras ramas, en:

- Ingeniería industrial: optimizar la logística utilizada en las rutas de distribución a través de redes de transporte y centros de almacenaje.
- Finanzas: optimizar las tasas de rendimiento de un portafolio de inversión.
- Mercadotecnia: optimizar el *mix* de medios de una campaña publicitaria para obtener mayor impacto bajo un presupuesto definido.
- Transporte: optimizar la logística involucrada en los planes de vuelo.

Pronósticos

Son una serie de técnicas sistemáticas para anticipar eventos o condiciones en el futuro. Sus campos de aplicación son casi ilimitados: desde la industria a la economía, pasando por las decisiones políticas.

Análisis de redes

Una red es una estructura usada para modelar relaciones entre pares de objetos de cierta colección.

Las herramientas matemáticas empleadas van mucho más allá de las clásicas matemáticas escolares:

- Teoría de gráficas (grafos).
- Redes neuronales.

- Procesos estocásticos.
- Modelos probabilísticos.
- Programación lineal.
- Programación no lineal.
- Optimización numérica.
- Investigación operativa.
- Series de tiempo.
- Sistemas dinámicos.
- Estructuras fractales.

Hacer visibles al público en general esas Matemáticas ocultas pero omnipresentes en nuestra sociedad es una obligación de los matemáticos, y también de los profesores, pues la divulgación matemática debe empezar en la escuela.

3. Aspectos educativos

- ¿En qué siglo vivió Arquímedes?
- ¿Quién reinaba en Francia cuando vivió Fermat?
- ¿De qué país eran los Bernoulli?
- ¿Dónde desarrolló Euler su trabajo?
- ¿En qué libro publicó Newton su teoría de las fluxiones?
- ¿Quién descubrió la forma de resolver la ecuación cúbica?
- ¿Eran contemporáneos Galois y Lagrange?
- ¿Es cierto que Galileo se inspiró en la Geometría de Descartes para desarrollar algunas de sus ideas de dinámica?...

Muchas de estas preguntas pondrían en un brete a muchos profesores de Matemáticas y no digamos a sus alumnos.

La Matemática es una ciencia original. Muchas son las características que la distinguen de cualquier otra ciencia, unas positivas y otras no tanto. Una de estas últimas, quizás la más llamativa, es el desconocimiento por parte de los profesionales, profesores, alumnos o simples aficionados de su propia historia. Desconocimiento que en países como el nuestro está muy próximo al desprecio de la misma.

Si hacemos una encuesta entre alumnos de Secundaria, Bachillerato o incluso de Universidad solicitando el nombre de diez matemáticos famosos a lo largo de la historia, muy pocos serán capaces de completar la lista. No hablemos ya de los resultados si se trata de ordenar una serie de matemáticos notables asignándoles su país de origen y el siglo en que vivieron. El profesor Antonio José Durán realizó la experiencia con alumnos de los últimos cursos y con profesores de la Universidad de Sevilla, y menos del 5 % fue capaz de ubicar correctamente a los diez matemáticos de más renombre. Yo tuve la ocasión de constatar estos resultados en otras dos ocasiones, la primera en la Universidad de Otoño de la Complutense, en un curso para alumnos del último curso de Matemáticas y para profesores, y en otra ocasión en un curso para profesores en el CEP de Sevilla.

La conclusión es clara. El panorama es más que desolador. Para nuestros alumnos Pitágoras, y poco más, constituye todo el bagaje cultural sobre la historia de una asignatura que están estudiando desde los seis años. Para los alumnos, las Matemáticas no tienen autores: detrás de los resultados, de las fórmulas y de los teoremas no hay personas, ni épocas, ni caras.

Pero la culpa no es suya. ¿Cuántos de nosotros hemos eludido la consideración de la experiencia acumulada en la historia de la Matemática y nos hemos conformado con repetir mecánicamente fórmulas, definiciones y teoremas, sin pensar ni siquiera por qué y para qué comunicar ese conocimiento?

4. Tercer pie. Los materiales

Hace unos años podía ser un pretexto la ausencia de materiales de carácter divulgativo para utilizar en el aula. Hoy la oferta, sin ser todo lo extensa que quisiéramos, constituye una aceptable base para dar los primeros pasos en esa aventura divulgativa en el aula que reclamaba Miguel de Guzmán. Este material se centra en:

- Libros de divulgación de historia de las Matemáticas.
- Vídeos y TV.
- Internet: aula de informática, ordenador en el aula + cañón de proyección.
- Exposiciones y murales.

La publicación de libros como *La música de los números primos* de Marcus de Sautoy, editada por Acantilado, nos da el pretexto para poder llevar al aula cuestiones como estas:

Conjetura de Joseph Bertrand (1822-1900)

"Entre n y $2n$ siempre hay un número primo, si $n > 2$".

Demostrado por Chebichew en 1850.

Conjetura de Gauss

$$\pi(n) \rightarrow \frac{n}{Ln}$$

Demostrado en 1896 por Vallée-Puossin y Hadamard.

El famoso Tío Petros y la conjetura de Golbach nos permite mostrar a los alumnos el hecho, sorprendente para ellos, de que hay muchas cuestiones, en apariencia simples, aún, como la famosa conjetura planteada por Golbach a Euler en 1742 y aún no resuelta:

"Todo número par, mayor que dos, es suma de dos números primos".

Una prueba evidente de que la historia de las Matemáticas es una historia abierta…

Nuestro gran reto es hacer ver primero a los profesores, y luego a través de ellos a los alumnos, que los verdaderos protagonistas de las Matemáticas no son los teoremas, las fórmulas y los algoritmos. Que los auténticos protagonistas son los libros, las revistas, los periódicos, los documentales, los programas de radio, la televisión, los vídeos, los museos de ciencias, las exposiciones temporales, las conferencias divulgativas, Internet, el *software* informático, los juegos y los concursos y olimpiadas matemáticas... y por supuesto los investigadores y los profesores de Matemáticas de todos los niveles, desde infantil hasta la universidad, deben ser los instrumentos a movilizar en esta gran empresa.

Y vosotros sois la vanguardia de este reto. Vosotros también sois los verdaderos protagonistas. Gracias por vuestra atención y vuestros ánimos.

Las Escuelas de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”

Raquel Mallavibarrena

El 14 de abril de 2004 fallecía en Madrid el profesor Miguel de Guzmán, catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid (UCM) y miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Fue sin duda la personalidad más relevante en España, en las últimas décadas, del mundo de la Matemática y de la educación matemática.

La Universidad Internacional Menéndez y Pelayo (UIMP) le concedió la medalla de honor en septiembre de ese mismo año, en el marco de un curso del cual estaba previsto que fuese el director.

1. Inicios

Para recoger el legado de Miguel de Guzmán, la Real Sociedad Matemática Española (RSME) propuso, en el año 2004, establecer una actividad anual en educación matemática con su nombre y con tema relacionado con su actividad, de manera que la organización estuviera a cargo de la RSME y una sociedad de profesores de Secundaria de Matemáticas. En las tres primeras ediciones esta sociedad fue la Asociación Galega de Profesores de Educación Matemática (AGAPEMA), la cual brindó muy pronto su colaboración.

2. Ediciones anteriores

La primera edición de la Escuela fue en el verano de 2005; a continuación se detallan las ediciones de la Escuela de Educación Matemática "Miguel de Guzmán":

I Escuela, Pazo de Mariñán (Bergondo, La Coruña), julio de 2005: "Ordenadores y Matemáticas" (AGAPEMA - RSME).

II Escuela, curso de verano de la UCM, El Escorial (Madrid), julio de 2006: "En torno a la Geometría de Miguel de Guzmán" (AGAPEMA - RSME).

III Escuela, Pazo de Mariñán (Bergondo, La Coruña), julio de 2007: "Los nuevos currículos de Matemáticas en Secundaria" (AGAPEMA - RSME).

IV Escuela, Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM (Madrid), julio de 2008: "De la Secundaria a la Universidad en Matemáticas" (Cátedra UCM "Miguel de Guzmán"-RSME-Sociedad Madrileña de Profesores de matemáticas, SMPM, "Emma Castelnuovo").

Los directores de las tres primeras ediciones de la escuela fueron: Tomás Recio, catedrático de Álgebra de la Universidad de Cantabria y presidente en esos años de la Comisión de Educación de la RSME, y Manuel Díaz Regueiro, profesor de Enseñanza Secundaria y presidente de AGAPEMA.

La IV Escuela tuvo un comité organizador formado por Juan Martínez y Concepción Toboso (presidente y vicepresidenta de la SMPM) y Raquel Mallavibarrena y Roberto Muñoz (presidenta y secretario de la Comisión de Educación de la RSME y la primera co-directora de la Cátedra UCM "Miguel de Guzmán"). Tanto la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM como las editoriales Anaya y Santillana patrocinaron esta cuarta edición.

La V Escuela parte de un acuerdo de colaboración entre la FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas) y la RSME para organizar conjuntamente las escuelas de educación matemática "Miguel de Guzmán". En este año 2009 se consigue el patrocinio del Instituto Superior de Formación del Profesorado y Recursos en Red del Ministerio de Educación (ISFTIC) para incluir la escuela en los cursos que organiza el propio ISFTIC en la UIMP en el mes de julio en Santander. Los directores somos Raquel Mallavibarrena (RSME) y Francisco Martín (FESPM)

El planteamiento de las dos últimas ediciones es ampliar el ámbito de la escuela a otras zonas y fomentar el debate entre profesores de distintos niveles educativos y otras personas interesadas.

3. Miguel de Guzmán y la divulgación de las Matemáticas

En la página web de la Cátedra UCM “Miguel de Guzmán”, www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal, hay una recopilación detallada del legado de este matemático tan relevante. Dicha recopilación se ha hecho a partir del material coleccionado por él mismo: “… tratar de poner a disposición de todos de la forma a mi parecer más asequible lo que en muchos casos he aprendido con bastante trabajo”.

Un primer aspecto divulgador que podemos considerar en su intensa actividad es la publicación de libros de texto en colaboración con otros autores para BUP y COU (Anaya). En ellos aparecen elementos motivadores de contenido histórico, comentarios sobre la relación de las Matemáticas con la cultura en general, juegos y recreaciones clásicas…

El legado de Miguel de Guzmán aporta reflexiones sobre la filosofía de las Matemáticas (retos para el futuro, aspectos éticos, el proceso de matematización de la cultura, la relación con la ciencia…).

La visión pitagórica que aparece con frecuencia en el pensamiento de Miguel de Guzmán, como presencia de la armonía, el orden o el rigor en las cosas, tiene que ver con lo que él llama el “quehacer matemático”. En ese sentido resalta el valor de lo estético en la tarea matemática, los aspectos de dicha tarea como juego, como aventura matemática. Pone de manifiesto la conexión y puntos en común de las Matemáticas con la música, la literatura… Hay claramente una gran tarea divulgadora en lo que se ha citado, pues las Matemáticas no quedan aisladas, puramente abstractas o demasiado teóricas, sino que están presentes y profundamente relacionadas con otros aspectos de la ciencia y del conocimiento en general.

Cabe mencionar también, entre otras publicaciones suyas, el libro *Mirar y Ver: nueve ensayos de geometría intuitiva*, publicados en 1977 por la Editorial Alhambra y reeditado luego por la Editorial Nivola.

Mis recuerdos personales, como alumna suya en un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias (Análisis III en el plan de estudios de 1976 en la UCM), se fijan en los comentarios históricos que completaban sus clases (problema de la catenaria, historia de los hermanos Bernoulli…) o en el debate que propuso a los alumnos en un determinado momento del curso: las Matemáticas están en función de sus aplicaciones a la Ciencia o la Tecnología y otras ramas del conocimiento o tienen sentido por sí mismas.

La actividad matemática y la reflexión sobre la educación matemática realizadas por Miguel de Guzmán tuvieron un impacto extraordinario, tanto en España como en otros países. De nuevo estamos ante una oportunidad privilegiada para la divulgación de las Matemáticas y su conexión con otros aspectos de la vida y de la cultura.

Supo relacionar con planteamientos certeros la divulgación, la enseñanza y el aprendizaje. Así pues, sus reflexiones son el pórtico ideal para el desarrollo de la quinta edición de la Escuela de Educación Matemática "Miguel de Guzmán".

"Eminente matemático, humanista y persona de bien" (Inscripción en el busto en su honor en Torrelodones, Madrid).

Bibliografía (y enlaces a páginas web)

De Guzmán, Miguel (1977). *Mirar y ver: nueve ensayos de geometría intuitiva*. Madrid: Ed. Alhambra, Proyecto MT-62. (Edición más moderna en Editorial Nivola).

CÁTEDRA UCM "MIGUEL DE GUZMÁN". http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS. www.fespm.org.

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA. www.rsme.es (entrando en *actividades científicas* y luego en *Escuela Miguel de Guzmán*).

La historia de las Matemáticas, un diamante en bruto

Santiago Fernández Fernández

Primeras reflexiones

El hombre, como ser racional, ha realizado extraordinarias construcciones en su anhelo de entender el mundo y ponerlo a su servicio. Una de las más ricas, tanto en su sutileza, potencia, complejidad, belleza, elegancia, durabilidad y flexibilidad, de tremendo impacto y de inimaginable ubicuidad, es la del Edificio Matemático.

Inicialmente como una colección de procedimientos técnicos, indispensables en cuestiones relacionadas con la actividad cotidiana y con la más especializada, las Matemáticas se vieron transformadas en un poderoso instrumento de análisis de las relaciones entre los objetos creados por su propia actividad y de las existentes entre los elementos conceptuados en la exploración de la Naturaleza.

Ese cuerpo de conocimientos, desarrollado en muchas ocasiones de forma autónoma, y muy a menudo en profunda interrelación con los problemas propuestos por los científicos naturales, es hoy tan diverso, tan ramificado, tan vivo, que el panorama que se extiende ante el observador es inabarcable.

"Momentos estelares del desarrollo de la Matemática", Valdivia, M. y Montesinos, V. (2000).

La historia de las Matemáticas, con sus periodos fecundos y sus momentos sombríos, pone al descubierto el proceso dinámico de la actividad creadora, en ocasiones brillante, en otras oscura, pero siempre fascinante. El conocimiento de los esfuerzos por avanzar y entender mejor la naturaleza es crucial. A este respecto, el historiador de la Matemática E.T. Bell en su *Historia de las Matemáticas* dice lo siguiente: "Ningún tema pierde de tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas".

1. La historia de las Matemáticas y la enseñanza

El debate sobre el uso didáctico de la historia de la Matemática no es muy reciente. Algún autor, como Fauvel (1991), menciona que durante décadas se ha insistido en el valor y la importancia de usar la historia de la Matemática en la enseñanza; no obstante, califica como incompletas las ideas que sustentan este mensaje. Fauvel considera que una de las razones fundamentales de este obstáculo es la brecha que existe entre las distintas maneras de visualizar la Matemática.

Por un lado, la concepción que percibe la Matemática compuesta por verdades absolutas preexistentes, que la humanidad debe descubrir, concepción que es fundamentalmente incoherente con una Matemática creada por seres humanos en el contexto de las sociedades y cuyas “verdades”, por lo tanto, son socio-históricamente relativas.

Otros autores consideran que, si bien se ha tratado mucho sobre la necesidad de integrar la historia de la Matemática en la educación matemática, es bastante escaso el material sobre cómo utilizar la historia de la Matemática en los procesos de aula.

Quizás las observaciones anteriores expliquen por qué los docentes pueden considerar la historia de la Matemática, dentro de un programa de estudios matemático, como una carga adicional de escaso valor didáctico. Debe considerarse que la historia de la Matemática es un recurso, y que lo bueno o malo que surja de su incorporación a los procesos de enseñanza-aprendizaje depende de cómo se utilice.

Las relaciones –en nuestro país– entre la historia de las Matemáticas y su enseñanza han discurrido por diversas etapas:

- Hacia los años cincuenta del pasado siglo, los matemáticos D. Julio Rey Pastor y D. Pedro Puig Adam incluyeron en sus libros de texto algunas notas históricas adaptadas a los alumnos, que si bien eran notas algo deslavazadas, supusieron un primer acercamiento serio al tema en cuestión. Años más tarde, D. Pedro Puig Adam, en su ya archifamoso decálogo, profundizando en esta línea, decía: "No hay que olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución".

- Los años de la llamada Matemática Moderna fueron especialmente yermos. Algunos autores como D. Modesto Sierra la definen como una reforma esencialmente antihistórica. En estos años es difícil encontrar notas o aspectos históricos en los libros de texto publicados.

- A principios de los años ochenta del siglo XX, hay un florecimiento de la historia de las Matemáticas en relación con su enseñanza. Se puede palpar este renacimiento, tanto en artículos como en varios libros de texto. En las orientaciones didácticas –correspondientes al área de Matemáticas– en la ESO se mencionan, en relación con la utilización de la historia de la Matemática, los siguientes aspectos:

  - La historia de las Matemáticas proporciona contextos apropiados para introducir o afianzar determinados contenidos.

  - El planteamiento de un número suficiente de contextos históricos, etc., debe permitir que los alumnos perciban la evolución temporal de las Matemáticas.

  - La historia de las Matemáticas informa sobre cuáles han sido los modos de razonar matemático en el transcurso del tiempo, qué conceptos son difíciles, cuáles han servido para afianzar teorías, etc.

Fuera de nuestro país, el interés por los aspectos históricos en educación matemática es evidente y ha consumido muchas energías. De modo conciso señalaré las muestras más relevantes:

- Publicaciones en los IREM (Institutes de Recherche pour l´Enseigment des Mathématiques). Se persigue como objetivo primordial la utilización de la historia de las Matemáticas en las aulas. Entre sus publicaciones cabe destacar una obra colectiva entre los diversos IREM franceses titulada *Mathématiques au fil des âges.*

- En el año 1989, el NCTM (National Council of Theachers of Mathematics) reúne una serie de materiales altamente interesantes en relación con la historia de las Matemáticas bajo el título *Historical Topics for the Matemathical Clasroom.*

- En el año 1991 (junio) cabe destacar el número monográfico sobre historia de las Matemáticas publicado por la revista *For the learning of Mathematics*.

- Los congresos celebrados en Montpellier (Francia, 1993) y Braga (Portugal, 1996) y organizados por HPM (International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics) se centraron en el estudio de las relaciones entre la historia y la pedagogía de las Matemáticas en el aula.

- Los últimos Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME) también reflejan una preocupación creciente por la enseñanza y aplicación de la historia de las Matemáticas en el aula.

2. Maneras de usar la historia de las Matemáticas en el aula

Cada vez se impone con mayor fuerza la idea de que la historia de las Matemáticas, a pesar de que es aún asignatura pendiente en muchos planes de estudio de las diferentes facultades de Matemáticas españolas, debe ser parte integral de la formación de todo matemático. Actualmente, nadie cuestiona que el conocimiento de la historia de las Matemáticas es claramente un valor añadido. Para el profesorado constituye un conocimiento altamente interesante, puesto que le ayuda a comprender mejor la evolución de los diversos conceptos y procedimientos matemáticos. Para el alumnado, es una fuente de conocimiento de interés y motivación.

Entre los historiadores de la Matemática, cabe citar a J.I. Fauvel y su propuesta de trabajo en esta dirección:

1. Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para el alumnado.
2. Trabajar con pósters, exposiciones u otros proyectos con trasfondo histórico.
3. Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico.
4. Trabajar en la comprensión de algunos problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos matemáticos.
5. Mencionar anécdotas históricas.
6. Repasar situaciones históricas para ilustrar técnicas y métodos de resolución.
7. Proponer ejercicios similares a los propuestos en textos históricos del pasado.
8. Realizar proyectos en torno a actividades históricas del pasado.
9. Estudiar errores históricos para ayudar a comprender y resolver dificultades relacionadas con el aprendizaje de las Matemáticas.
10. Estudiar e impartir lecciones sobre historia de las Matemáticas.

Propuesta de J.I. Fauvel (1987 y 1997).

3. ¿Cómo implementar la historia de las Matemáticas en el aula?

Es una pregunta de difícil respuesta. Es evidente que hay muchas maneras de acercarnos al tema:

- Quizás queramos obtener simplemente una cronología de nombres, citas, fechas y aspectos más importantes. Esta posibilidad no requiere mucho esfuerzo de estudio, pero hemos de ser conscientes de que nos proporciona una panorámica muy parcial de la historia de las Matemáticas.

- El ser más ambiciosos nos lleva necesariamente a profundizar en la evolución del pensamiento y en el quehacer matemático. Es una vía altamente interesante. Sin embargo, requiere una sólida formación matemática y humanística. Entre los temas a estudiar podemos citar los siguientes:
  - Las distintas culturas científico-matemáticas.
  - Evolución de los principales conceptos matemáticos.
  - Nacimiento y evolución de las distintas ramas matemáticas: Aritmética, Geometría, Álgebra, Estadística, Análisis, Probabilidad, etcétera.
  - Los hitos más importantes del pensamiento matemático.
  - Los problemas más interesantes.
  - Los diversos procedimientos de resolución.
  - Las escuelas y tendencias en Matemáticas.
  - Luces y sombras en Matemáticas.

- Existe también la posibilidad de estudiar la historia de la Matemática tomando como referencia a sus creadores y creadoras. Una cuidadosa elección de personajes es esencial para poder ilustrar los momentos matemáticos más relevantes. Es, sin duda, un camino productivo y, en muchas ocasiones, motivador, ya que conecta con la parte humana de los actores y actrices de esa gran obra colectiva del espíritu humano que es la Matemática. En esta selección hay un conjunto de personajes que hemos de estudiar con una cierta atención y profundidad. Son los faros de la historia de las Matemáticas. Sus aportaciones han sido cruciales. Los imprescindibles son los siguientes: Pitágoras, Arquímedes, Euclides, Apolonio, Diofanto, Al-Khuarizmi, Newton, Descartes, Fermat, Pascal, Leibniz, Gauss, Lobachevski, Riemann, Euler, Weierstrass, Cauchy y Hilbert.

- Otra opción interesante de estudio es seguir la pista a la evolución y desenlace de determinados problemas matemáticos. Algunas de las cuestiones a investigar pueden ser las siguientes:

  - ¿Cuándo se planteó el problema?
  - ¿Quién o quiénes lo plantearon?
  - ¿Quiénes lo resolvieron?
  - ¿Qué dificultades encontraron en la resolución del problema?
  - ¿Qué importancia tuvo la solución de dicho problema?

  Es una opción muy sugerente si elegimos problemas motivadores.

- Cabe la posibilidad de profundizar en ciertas partes de las matemáticas: Aritmética, Álgebra, Análisis, Geometría, Estadística, probabilidad, etcétera.

- Por último, nuestro interés se podría centrar en un personaje, en una determinada cultura o en un periodo de tiempo más o menos largo: la figura de Descartes, la cultura matemática griega, la cultura china, la cultura egipcia, la cultura renacentista, el periodo comprendido entre los siglos XVI y XVIII.

Al final de cualquiera de las opciones elegidas dispondremos de una serie de personajes, anécdotas, hechos, problemas, culturas... que poco a poco nos ayudarán a apropiarnos y a entender mejor la historia de las Matemáticas.

Sin embargo, no hay que olvidar que el estudio y el uso de la historia de las Matemáticas (a nivel no universitario) tienen que estar al servicio de la enseñanza, y no deben de ser un fin en sí mismos.

4. Algunos ejemplos

Alguien ha dicho alguna vez que la distancia más corta entre la verdad y una persona es un cuento. Los cuentistas saben del poder y la magia de los cuentos. Cada cuento describe un mundo mágico y único. Pues bien, permitidme recorrer con vosotros esa distancia contando pequeños cuentos, pequeñas historias forjadas por los esfuerzos de hombres y mujeres a lo largo y ancho del mundo[1].

4.1. Los magos egipcios

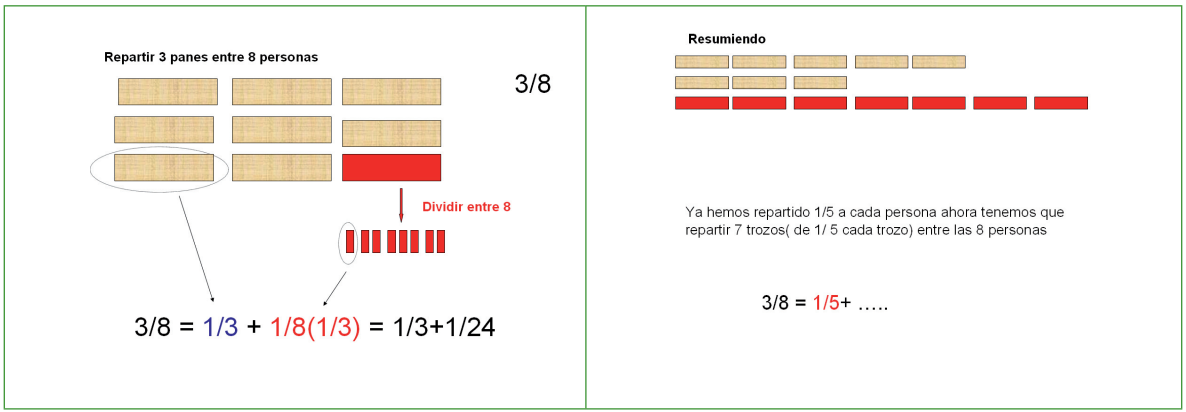
Podemos decir que las Matemáticas en las civilizaciones primitivas, en gran medida, vienen referidas al cálculo de terrenos, a la decoración en cerámica, al comercio, a los modelos y diseños en la ropa o al recuento del correr del tiempo en la vida cotidiana.

1 No se describen los detalles de cada uno de los cuentos, ya que están suficientemente documentados en la presentación que se realizó de la comunicación. En las siguientes páginas se presenta una selección de dichos cuentos.

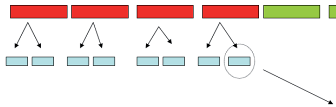
En este periodo las Matemáticas están imbricadas en la práctica humana, inmersas interactivamente en su entorno. Las fórmulas utilizadas eran empíricas. Así, el área de un cuadrilátero de lados *a*, *b*, *c*, *d* estaba dado por $A = (a + c)/2 \cdot (d + b)/2$.

Una fracción egipcia es una fracción de la forma $1/n$ en la que n es un entero positivo. Dados dos enteros positivos $a < b$ el problema de las fracciones egipcias se puede plantear de la siguiente manera: ¿Cómo se puede expresar la razón a/b como una suma de fracciones egipcias?

En el papiro de Rhind podemos encontrar el reparto de 3 panes entre 8 personas. El proceso seguido podría ser muy parecido al siguiente procedimiento:



Vamos ahora a repartir los 7 trozos restantes.
Primero repartimos 4 de los siete trozos, para ello dividimos cada trozo en dos partes iguales

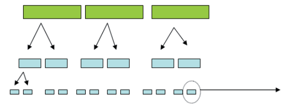


$(1/2).(1/5) = 1/10$

Nos quedan 3 (de tamaño1/5) para repartir entre 8 personas

$3/8 = 1/5 + 1/10 + \ldots$..

Cada uno de los trozos de tamaño 1/5 lo dividimos por la mitad y luego otra vez por la mitad



$(1/2).(1/2).(1/5) = 1/20$

Por tanto

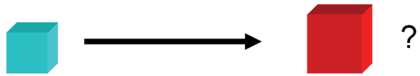
$$3/8 = 1/5 + 1/10 + 1/20$$

¿Es la única manera de descomponer 3/8 en fracciones unitarias?

4.2. Primer mago... Arquitas de Tarento

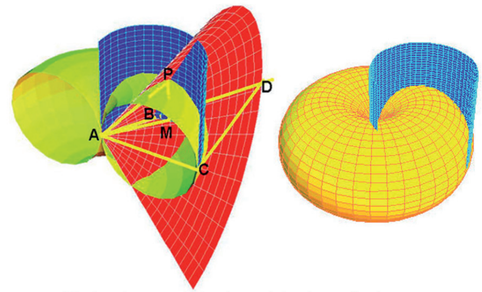
Primer mago........

Problema de la Duplicación del Cubo



Construir con regla y compás el lado de un cubo que tenga doble volumen que otro cubo dado.

La solución de Arquitas es la más notable de todas, especialmente cuando se considera su fecha (primera mitad del siglo IV a.C.), ya que no es una construcción plana sino una atrevida construcción en tres dimensiones la cual determina un cierto punto(solución del problema) como la intersección de tres superficies de revolución: un cono, un cilindro y un toro.



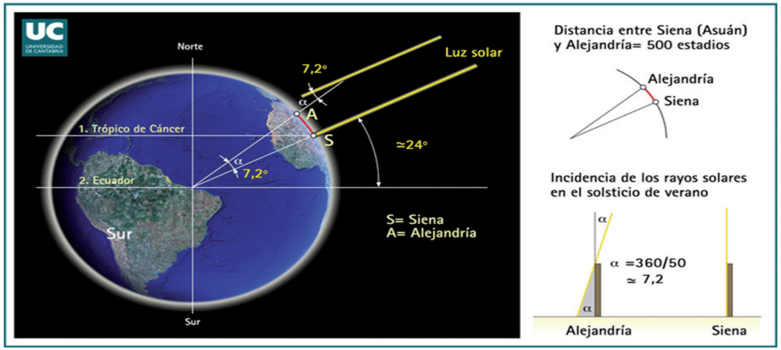
Si el volumen del cubo original es a^3, el problema equivale a construir un segmento de longitud x, tal que $x^3 = 2a^3$.

4.3. Tercer mago... Eratóstenes de Cirene

Tercer mago……..

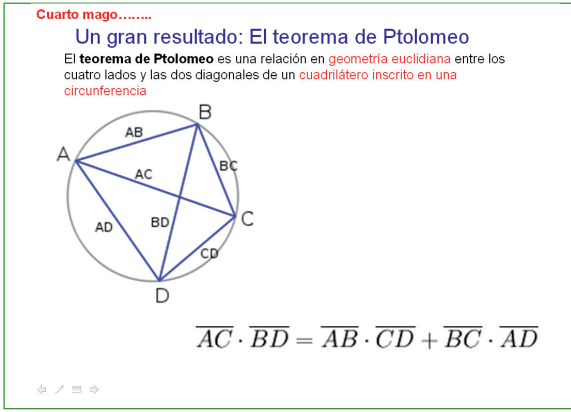
Cálculo del radio de la tierra- método de Eratóstenes.

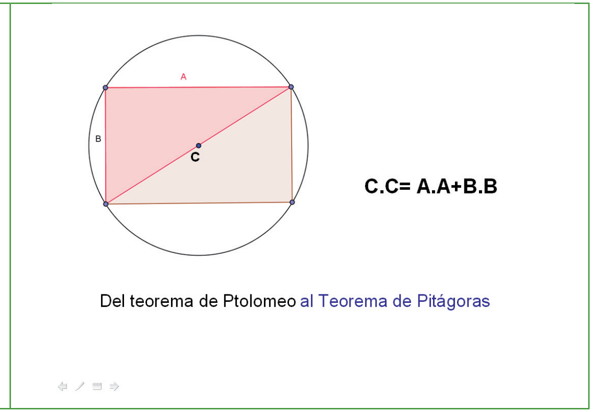
En el solsticio de verano los rayos solares inciden perpendicularmente sobre el Trópico de Cáncer, donde se encuentra Siena (Asuán). En Alejandría, más al norte esto no sucede.



Carl Sagan, uno de los grandes divulgadores científicos en la serie COSMOS

4. 4. Cuarto mago... Ptolomeo





4.5 Quinto mago... Kepler

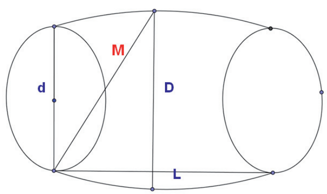
Quinto mago...

Kepler y las barricas de vino

La costa de Linz estaba abarrotada con barricas de vino que se vendían a precio razonable … Es por esa razón que fueron traídas a mi casa y colocadas en fila un cierto número de barricas, y cuatro días más tarde el vendedor vino y midió todos los barriles, sin distinción, sin poner atención a la forma, sin pensar o hacer cálculo alguno. A saber, metía la punta de cobre de una regla por el hoyo de llenado del barril atravesándolo hasta llegar al talón de cada uno de los discos de madera a los que nos referiremos simplemente como los fondos, y tan pronto como la longitud era medida el vendedor daba el número de ánforas contenidas en el barril después de tan sólo ver el número en la regla en el punto donde la longitud en cuestión terminaba. ¡Quedé asombrado!".

J. Kepler

Conociendo el valor de M calculaba el volumen de la barrica

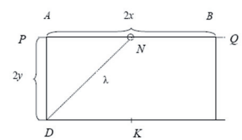


El método tradicional, el que se ha empleado toda la vida por parte de los toneleros y llagareros para medir el volumen es:

$$V = 0{,}625 \cdot M^3$$

$$V = D \cdot d \cdot L \cdot 0{,}82$$

Kepler consideró primero el caso de los barriles cilíndricos.



$t = x/y$

$$V = 2 \cdot (\pi) \cdot \lambda^3 \cdot t \cdot (4 + t^2)^{-3/2}$$

De esta fórmula se observa, pensó Kepler, que el volumen de un barril cilíndrico no se determina solamente con ***λ***. Para que se pueda usar el método de medición de los toneleros Austriacos, los barriles tendrían que fabricarse con una relación ***t*** fija.

¿Cuál será la mejor selección de *t*? ¿Cómo podría escogerse ventajosamente la relación entre el segmento *AB* o altura del cilindro y el diámetro *AD* de los fondos?

Kepler supuso que los vinateros Austriacos habían elegido con astucia a *t*, **tomándola como aquel valor que maximiza el volumen *V* de todos los barriles que tengan el mismo valor de *λ***, obteniendo por métodos discretos y aproximativos que .

$$V = \pi . \lambda^3 / 3 . \sqrt{3} = 0{,}6053 . \lambda^3$$

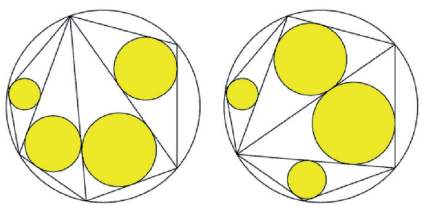
No todas las barricas son iguales……. investiguemos

4.6. Los magos japoneses

Los magos japoneses…

Primer teorema de Mikami y Kobayashi

Al triangular un polígono convexo inscrito en un círculo, trazando todas las diagonales desde uno de los vértices, la suma de los radios de los círculos inscritos en los triángulos es una constante que es independiente del vértice usado para hacer la triangulación.



El teorema de Descartes

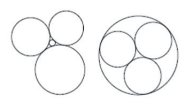
En una carta de Noviembre de 1643 a la princesa Isabel de Bohemia, Descartes encontró una fórmula para los radios de cuatro círculos mutuamente tangentes.

El teorema de Descartes se expresa de forma sencilla usando el concepto de curvatura de un círculo.

Curvatura de un círculo de radio r: $\varepsilon = \frac{1}{r}$.

$$2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2.$$

En el caso de cuatro círculos mutuamente tangentes, si todos los contactos son externos, entonces convendremos en que todas las curvaturas son positivas, pero si un círculo encierra a los demás, entonces le asignaremos curvatura negativa.



(a) (b)

Bibliografía

Aleksandrov, A.; Kolmogorov, A.; Laurentiev, M.A. et ál. (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado* (Tomos 1, 2 y 3). Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C.B. (1987). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Coolidge, J.L. (1963). *A History of mathematics*. New York: Editorial Dover.

Fauvel, J.; Gray, J. (eds.). (1987). The History of Mathematics: A Reader. London: Macmillan.

Fauvel, J.; van Maanen, J.A. (1997). "The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion document for an ICMI study (1997-2000)". *Educational Studies in Mathematics* 34, págs. 255-259.

Fernández, S. (2001). "La historia de las matemáticas en el aula". *Revista UNO* 26.

Fouz, F. (2003). "Sangaku: geometría en los templos japoneses". *Revista SIGMA* 22.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Editorial Alianza.

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*. New York: Editorial Dover.

Valdivia, M.; Montesinos, V. (2000). "Momentos estelares del desarrollo de la Matemática". Conferencia Año Mundial de las Matemáticas.

Tatón R. (1971). *Historia General de las Ciencias*. Barcelona: Editorial Destino.

Matemática informal: ¿una contradicción?

Maria Dedò

El emparejamiento de la palabra "informal" con Matemática puede sorprender y parecer un absurdo. Nos proponemos argumentar por qué, por el contrario, nos parece necesario este plano informal de comunicación y por qué esto no contradice la exigencia sustancial de rigor que en todo caso es uno de los rasgos distintivos de la Matemática. La importancia de las imágenes en este proceso cobrará un relieve particular.

Desde muchos lugares en los últimos años ha surgido el problema de si es oportuno buscar formas de comunicación de la Ciencia, y en particular de las Matemáticas, que salgan de los cánones clásicos para utilizar otros canales. Al principio estas iniciativas se vieron con cierta desconfianza, pero casi enseguida su indudable éxito ha llevado al convencimiento de que, por lo menos, vale la pena discutir el problema con mayor atención.

En Italia, el Centro *matematita*[1] se constituyó (en 2005) como centro de investigación, precisamente partiendo de la convicción de que el problema de la comunicación y el aprendizaje informal de las Matemáticas es un punto crucial, que merece una atención especial. La constatación de la que se ha partido es el hecho de que cualquier forma de enseñanza y/o aprendizaje de las Matemáticas, si se pretende tener esperanza de éxito y sobre todo esperanza de enraizarse en el tiempo, debe basarse en un conocimiento preestablecido que dé significado a los conceptos que poco a poco se van aprendiendo. El aprendizaje informal no se ve, por tanto, como algo que se contrapone a un aprendizaje formalizado, sino más bien como un momento precedente, que constituye un estadio necesario con el fin de que el paso sucesivo tenga un sentido.

1 *matematita*, Centro de Investigación Interuniversitario para la Comunicación y el Aprendizaje Informal de las Matemáticas, ver [1]. El nombre *matematita* se forma en italiano como acrónimo de *matemática* y *matita* (lápiz en italiano) [N. del T.].

Demos un paso atrás y comencemos declarando explícitamente qué entendemos por "comunicación de las Matemáticas": hablando de comunicación de la Matemática nos referimos aquí a las iniciativas (libros, materiales multimedia, artículos, exposiciones, películas o cualquier otra) que no sólo hablen de Matemáticas, sino que intenten también un acercamiento del público a contenidos matemáticos. Por tanto, por ejemplo, no nos interesa (en este lugar y para esta discusión) un texto o una película donde las Matemáticas aparezcan simplemente porque el protagonista sea un matemático, pero en la que no se entre en contenidos matemáticos. Vale la pena observar que en estos últimos años han proliferado también este otro tipo de iniciativas, que seguramente pueden tener un interés notable para acercar las Matemáticas a un público muy a menudo hostil y con prejuicios. Como hemos señalado, en lo que sigue no nos ocuparemos de este tipo de iniciativas.

¿Qué sentido tiene entonces el adjetivo informal referido a una iniciativa de comunicación? Antes de responder a esta pregunta, digamos rápidamente que sentido no tiene: hablando de un plano informal de la comunicación no queremos decir que la comunicación pueda ser aproximada o que descuide ese rigor, que es un rasgo distintivo de las Matemáticas. Por el contrario, el término "informal" se refiere principalmente a la deliberada renuncia al lenguaje técnico típico de la Matemática y a la consiguiente decisión de utilizar la lengua "normal", con toda su riqueza de matices y de soportes externos y, a la vez, con toda su carga de ambigüedad y con los problemas que esto comporta y a los que dedicaremos una atención especial.

No se trata, por tanto, de renunciar al rigor, se trata de renunciar a ese rigor que se obtiene de "modo automático" utilizando (¡correctamente!) el lenguaje "matematesco", de una manera que resulta fácil –¡en muchos sentidos incluso demasiado fácil!– para el que conoce este lenguaje, pero incompresible para todos los demás. El rigor sustancial sobre lo que se quiere decir se deberá buscar (fatigosamente), adecuándolo al interlocutor al que se quiere llegar, solo con la fuerza del lenguaje común.

En efecto, en Matemáticas el lenguaje es un componente crucial; y es un elemento precioso precisamente porque garantiza, respetando ciertas reglas del juego, una forma de hablar absolutamente no ambigua; no obstante, está claro que se trata de un elemento que excluye *a priori* a todos los que no tengan claras dichas "reglas del juego"; y es por tanto un lenguaje a cuya necesidad hay que llegar, lentamente y con aproximaciones sucesivas, y quizás precisamente mediante el choque con la ambigüedad del lenguaje común.

Para aclarar este asunto del rigor y el lenguaje, de la diferencia entre un rigor sustancial y un rigor solo formal y vacío de contenidos, me parece útil abrir un inciso y poner un ejemplo presentando un "juego" que se ha propuesto desde hace años bajo formas distintas en los laboratorios del Centro *matematita*. El juego se llama la *mosca ciega*[2] (retomando el nombre de un juego común entre los niños en Italia) y en el que participan dos grupos de dos o tres muchachos cada uno, sentados a una mesa y separados por una tabla divisoria, de modo que cada grupo no pueda ver qué tiene el otro grupo. A cada uno de los grupos se le da un "objeto

2 Similar a nuestra *gallina ciega* [Nota del traductor].

matemático": para fijar las ideas, pensemos en un poliedro realizado con piezas encajables (**11080**)[3]. Este no debe ser demasiado complicado, ni tampoco demasiado simple. No usamos, por tanto, un cubo o una pirámide, sino poliedros uniformes como la figura 1 (**11108**) o un antiprisma (**10839**) o un deltaedro (**10842**); o tal vez algo absolutamente disparatado (**11115**) (naturalmente el ejemplo se elige de manera cuidadosa, según la edad y la competencia de las personas que hay enfrente). Cada grupo tiene a su disposición el material necesario y debe dar a los chicos del otro grupo indicaciones para que reconstruyan el poliedro que éstos no pueden ver. Al final, naturalmente, se sube el panel divisorio y se comprueba el resultado…

3 De aquí en adelante: cuando se inserte un número en negrita, como por ejemplo, 11080, se refiere a la imagen localizable en red en la página *Immagini per la matematica*, en la dirección: http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&im=11080 .

Figura 1. Poliedros uniformes. Imagen 11108.

Este juego, que se puede "reciclar" con otros ingredientes [por ejemplo una figura plana un poco complicada para rehacer sobre un papel cuadriculado, o un mosaico (**10752**), o también un rosetón (**7101**)], ayuda a los alumnos a tomar conciencia de la necesidad de un lenguaje no ambiguo y de cómo la insistencia de sus profesores en usar una palabra y no otra (insistencia que a veces a ellos les parece pura meticulosidad y, a veces, desafortunadamente, lo es de verdad) puede por el contrario servir para centrar la atención precisamente sobre el elemento significativo que sirve para identificar un objeto en lugar de otro.

Hemos iniciado este artículo refiriéndonos a iniciativas dirigidas al gran público (y en lo que sigue lo mantendremos como referencia) y después hemos dado un ejemplo en el terreno estrictamente escolar. En efecto, el problema de la comunicación informal une estrechamente el plano de la divulgación dirigida al gran público al de la enseñanza escolar, con la correspondiente carga de problemas.

Se trata de dos terrenos bastante distintos y, sin embargo, unidos tanto por un hecho banal (la mayor parte del público de una exposición de Matemáticas, o más en general de cualquier iniciativa divulgativa, está constituido por chicos en edad escolar), como por una razón mucho más profunda: que en ambas situaciones son necesarias actividades que hagan emerger los significados de lo que se está haciendo y, por tanto, precisan una comunicación informal en la que la observación de los hechos matemáticos no quede oculta por un pesado aparataje técnico quizás no (o todavía no) digerido.

Es evidente que no es posible (y no sería deseable) que las formas usuales de aprendizaje sean sustituidas completamente por experiencias de tipo informal como la visita a una exposición o el visionado de una película. Es también evidente, por tanto, que el aparato técnico debe en algún momento entrar en el proceso de aprendizaje, por lo menos para los que tendrán luego necesidad de Matemáticas de un cierto nivel. Los dos planos, no obstante, pueden darse la mano e interactuar de un modo útil. Aun más, las actividades de tipo informal pueden servir para constituir en los chicos un sustrato que dé sentido y significado a las abstracciones formales con las que estarán en contacto en los ciclos educativos sucesivos y que en caso contrario corren el riesgo de desvanecerse.

En efecto, cuando se intenta analizar los motivos de la escasa eficiencia de la enseñanza escolar de las Matemáticas, reconocida y lamentada por muchos, en muchas ocasiones y en diversos países, europeos y no europeos (Lockhart, 2009), el punto crucial contra el que casi siempre se choca es precisamente el de la falta de significado: algoritmos o procedimientos aprendidos mecánicamente sin dar un significado a lo que se está haciendo, y por tanto olvidados con rapidez, o aplicados donde no procede; muchachos que, incluso cuando han llegado a la universidad, confunden paralelismo con perpendicularidad, o 0 con 1, o que declaran saber resolver ecuaciones en *x* pero no en *y*… Todo profesor posee una colección personal de “amenidades” de este tipo, las cuales poseen todas el mismo denominador común, es decir, la enseñanza de palabras, o de técnicas, o de fórmulas, que llegan a los alumnos completamente privadas de su significado.

Las experiencias de comunicación informal pueden, por el contrario, ayudar a construir un bagaje de significados sobre el que se podrá después impostar de manera más fácil una enseñanza (¡formalizada, esta vez sí!) que tenga posibilidades de resultar sólida con el paso del tiempo.

Entre los elementos que nos parecen especialmente significativos para caracterizar positivamente una iniciativa de comunicación informal, queremos subrayar dos aspectos: el primero es que al visitante-usuario se pida que intervenga directamente, que se ponga a jugar en primera persona, a “hacer matemáticas”; cada uno a su nivel, obviamente, pero sin renunciar a nada de ese componente de aventura, de descubrimiento, de fantasía que caracteriza la investigación matemática; el segundo se refiere a los contenidos, que deben ser ricos y profundos, y que no pueden limitarse a banalidades o quedarse en la superficie del problema[4]. Con

4 Naturalmente esta exigencia requiere por principio ejemplos que expliquen qué se entiende efectivamente por “contenidos ricos y profundos”. Nos limitamos aquí a redirigir al lector a algunos libros y/o páginas web, por ejemplo AA.VV. 2004, Bellinger et ál. 2000, [1], [2], [3], donde se pueden encontrar algunos ejemplos de las iniciativas llevadas a cabo por el Centro en estos años.

esta intención vale la pena observar que mantenerse precisamente en este plano informal permite explorar asuntos que sería difícil tratar si se quisiese hacer de una manera orgánica y formal.

Pongamos un ejemplo explícito, también este en el ámbito escolar, en una franja de edad que en Italia corresponde a la Scuola Media (11-14 años)[5]: la gran mayoría de los profesores evitan la geometría sólida, dejándola para el último año y a menudo para las últimas clases del último curso, consiguiendo así suprimirla casi completamente. El motivo aducido para esta praxis tan difundida es que la geometría sólida “es demasiado difícil”. Pero, ¿es acaso verdad que la geometría sólida sea más difícil que la geometría plana? Seguramente sería verdad si nuestro objetivo fuese la construcción axiomática de la geometría euclídea. Pero con muchachos de estas edades nuestro propósito no debe ser éste, sino más bien ponerles en contacto con un bagaje de hechos geométricos, hacerles observar fenómenos que estimulen su curiosidad y que les empujen autónomamente a hacerse preguntas y, ojalá, después, a buscar las respuestas, aunque sólo sean parciales, a estas preguntas. Y, para esta tarea, la geometría sólida es quizás hasta más fácil que la plana; es seguro que se presta mejor a ello no solo porque es más natural (ya que es la geometría del entorno en el que nos movemos y no una abstracción, como la *planilandia* de un trozo de papel), sino también por la mayor variedad y riqueza de los fenómenos que en ella encontramos.

Recapitulando, tenemos una situación en la que pretendemos estimular la interacción de las personas con hechos matemáticamente significativos, incluso difíciles, renunciando al lenguaje codificado propio de las Matemáticas, pero sin renunciar, aunque sea mediante modos y formas no canónicos, a la precisión y al rigor. Es, por tanto, natural preguntarse qué argumentos nos pueden ser de ayuda en estos intentos.

5 La *Scuola Media* italiana dura tres cursos y se corresponde con 6º de Primaria y el primer ciclo de la ESO en el sistema español. [Nota del traductor].

Un instrumento especialmente significativo –y que en los últimos años ha ampliado muchísimo sus posibilidades con la ayuda de la tecnología más reciente– es la comunicación a través de imágenes. Su uso (y su abuso) ha aumentado de modo vertiginoso en los últimos 20 años y, desde luego, no sólo en lo referente a la comunicación matemática. Nos hemos habituado a ser bombardeados con imágenes por todos los frentes, y es cierto que las imágenes hablan, las imágenes son bellas, nos enganchan, se recuerdan (mucho más que un texto escrito), son "eficaces" (en el sentido de que consiguen transmitir un concepto de manera mucho más directa que cuando usamos muchas palabras: ¡pensemos en los iconos!). En el campo de las Matemáticas sucede lo mismo. Basta pasar las páginas de dos libros del mismo tipo, uno actual y otro de hace 20 años (dos libros de texto, o dos libros de divulgación, por ejemplo), para quedarnos sorprendidos de las diferencias en el uso de las imágenes.

En primer lugar, pongamos un poco de orden, por qué usamos la palabra "imagen" (me refiero aquí al uso en lengua italiana, pero creo –aun más, ¡me imagino!– que la misma ambigüedad existe también en otras lenguas) con significados que resultan ser completamente distintos: hablamos de imágenes al referirnos a fotografías, a dibujos que pueden ser representaciones más o menos realistas de objetos tridimensionales, también a dibujos geométricos planos, a esquemas que representan situaciones abstractas, e incluso… a otras cosas.

Desde el punto de vista de la comunicación de la Matemática, podemos distinguir dos grandes categorías: las imágenes hechas *ad hoc*, con el fin de ilustrar un concepto dado (**10835**) y las imágenes "del mundo", en las que somos nosotros los que las "leemos" matemáticamente al usarlas para transmitir un concepto abstracto. Y una vez que empezamos este "juego" descubrimos que el mundo a nuestro alrededor es obviamente riquísimo en sugerencias matemáticas: desde las espirales (**3917**) a la perspectiva (**8486**), de los fractales (**12312**) a los mosaicos (**4422**), de los poliedros (**7934**) a los problemas de empaquetamiento (**11872**), de las superficies regladas (**9525**) a las foliaciones (**7030**), de los helicoides (**66**) a las cintas de Moebius (**7943**)…

Figura 2. Granadas. Imagen 11872.

Figura 3. Dibujos en la madera. Imagen 7030.

Pero cuando empleamos la palabra "imagen", frecuentemente nos referimos a algo completamente distinto a lo anterior. Es decir, no a imágenes "reales" (una fotografía, un dibujo), sino a una imagen mental, que existe sólo en nuestra cabeza. Probablemente asociamos esta imagen con el sentido de la vista, imaginándola como una especie de "transferencia" a nuestro cerebro de una imagen real que recordamos haber visto, o que podríamos ver. Como si nuestros ojos hubieran hecho una fotografía que ha sido después revelada en el cerebro. En realidad las cosas no son exactamente así y la imagen mental es algo que puede ser mucho más rico y articulado que el simple contrapunto mental de una imagen "verdadera". En efecto, el mismo verbo "ver" se utiliza en lengua italiana (y en otras también) no sólo en su significado literal, de ver utilizando el sentido de la vista, sino también como sinónimo de "entender". Y, en este caso, se trata de una forma de "entender" que indica una comprensión especialmente profunda, de esas que echan raíces y que dan sentido a las cosas, contrapuesto a la comprensión mecánica y superficial: "¡Lo he visto!" es un grito de *eureka*, es ese "¡lo he entendido!" que se convierte en un basamento y permanece con nosotros en futuras construcciones mentales.

Pensemos como comprobación de este hecho (es decir, que las imágenes mentales no se corresponden con imágenes visibles reales) en las muchas veces que quedamos insatisfechos con los dibujos que representan situaciones de las que tenemos en la cabeza una clarísima imagen mental. Cuando nos damos cuenta de que el dibujo no va bien (incluso después del tercer intento, ni siquiera girándolo…), puede que el motivo sea que buscamos (quizás inconscientemente) una transferencia sobre el papel de la imagen que tenemos en la cabeza; salvo que esa imagen es, en este caso, no una imagen, sino algo mucho más rico (algo que nos hace "entender" e "imaginar", y no sólo "ver"). Por ejemplo, una imagen mental de un objeto tridimensional comprende la tridimensionalidad, comprende informaciones que nos vienen del sentido de tacto, más que del de la vista, comprende no uno sino muchos puntos de vista del objeto. Es, por tanto, bastante fácil que una imagen real nos deje insatisfechos ante toda esta riqueza[6].

Conway, Doyle, Gilman y Thurston, en sus *ejercicios de imaginación* [4], citan un bonito ejemplo sobre esto. Se presentan unos problemas para ser discutidos en pareja, a veces con los ojos cerrados, tratando de hacer que surja una imagen mental. Como ejemplo para apoyar lo que decimos pensemos en un problema clásico: el hexágono regular se puede obtener como sección de un cubo, cortándolo por un plano ortogonal a una

6 Con respecto a esto se debería abrir otro discurso –que dejamos para otro momento– dedicado al frente de las imágenes en movimiento que, en parte, pueden ayudar a superar estos inconvenientes, sobre todo si se trata de animaciones interactivas, en las que el usuario puede intervenir seleccionado y haciendo rotar el objeto.

diagonal que pase por el centro del cubo. Se puede hacer un experimento con las personas que previamente han pasado un cierto tiempo "imaginando" el hexágono regular en el cubo, hasta lograr "verlo", y pedirles de qué tamaño es el cubo que han imaginado. Parece a primera vista una pregunta tonta, porque el problema es invariante por semejanza, y que por tanto es lo mismo pensar en un cubo que tenga 1 cm que 1 km de arista. Sin embargo, la mayoría de las personas responde que han pensado en un cubo de arista entre 10 y 20 cm; aun más, si a quien ha imaginado el hexágono en el cubo y ha declarado que lo ha "visto", le pedimos que repita el "ejercicio de imaginación" con un cubo de 1 m de arista, se dará cuenta con sorpresa de que no le resulta fácil, ni es una consecuencia automática del primer "ejercicio". No hablemos siquiera de realizarlo con cubos de 1 km, o de tan solo 10 m; esta es una tarea casi imposible para la mayoría de las personas. La imagen mental es una cosa, por tanto, mucho más articulada que la imagen real, es algo en donde interviene el sentido del tacto y los distintos puntos de vista: no es casual que el cubo de 10 cm sea un cubo que se pueda coger con la mano, se pueda girar y se pueda mirar por todas partes, cosa que no se puede hacer con un cubo de 10 m de lado.

Hemos hablado solamente de imágenes mentales que de alguna manera se correspondan con situaciones tridimensionales, pero existen imágenes mucho más abstractas (un hipercubo, un grupo…), para las que varía muchísimo la situación y la versatilidad cuando las usamos, consciente o inconscientemente. Una imagen mental es a veces, precisamente, el lugar donde condensamos la síntesis de todo el arduo trabajo de comprensión de un concepto dado.

Esta digresión sobre las imágenes mentales es necesaria porque, cuando hablamos de la utilización de imágenes en la comunicación, es decir, en la enseñanza/aprendizaje de la Matemática, estamos en realidad discutiendo sobre un proceso que parte de la imagen mental que tenemos en nuestro pensamiento y que busca "traducirla" y transferirla a una imagen real, sobre el papel o sobre la pantalla, buscando después un nuevo proceso de traducción por parte de la persona que, usando como soporte esta nueva imagen, deberá fabricarse su propia imagen mental.

Tenemos, por tanto, dos trayectos, ninguno de los cuales es automático: el de quien trasmite (de la imagen mental a la real) y el de quien recibe (de la imagen real a la mental). Intentaremos en lo que sigue proporcionar algunos elementos de análisis para ambos, prestando una atención especial a los riesgos que pueden emerger en estos recorridos y a las estrategias para evitarlos o por lo menos minimizarlos.

Antes que nada, del análisis muy sumario que hemos hecho de la idea de imagen mental, se puede deducir que el primer trayecto es "inicuo", ya que el punto de partida es mucho más rico que el de llegada y, por tanto, se perderán muchas informaciones.

A este respecto, me gusta citar la portada de Coxeter (1974), que representa un mosaico uniforme con pentágonos (**fig. 4, 847**): sólo después de haber leído el libro, y de haber asimilado la construcción que da Coxeter del 120-celdas (uno de los seis politopos regulares, constituido por 120 dodecaedros), nos damos cuenta del hecho de que la imagen representa una síntesis maravillosa de esta construcción (**fig. 5, 3246**). Es cierto, no obstante, que se trata de una "alusión" que sólo unos pocos captan.

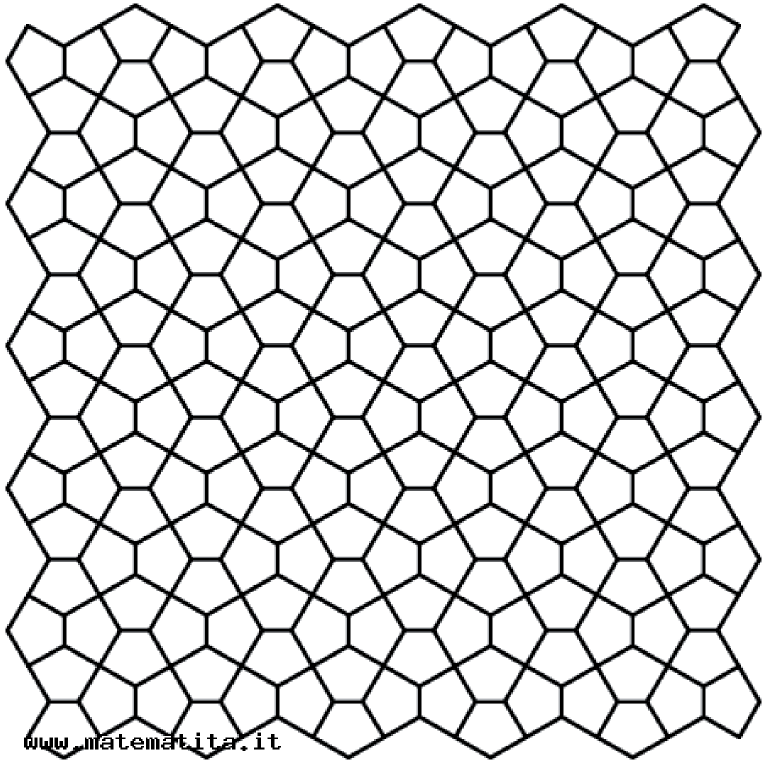


Figura 4. Un mosaico de pentágonos. Imagen 847.

Figura 5. Construcción del 120-celdas. Imagen 3246.

En casos como éstos, la pérdida de información es enorme y evidente; pero en realidad siempre hay pérdida, también en casos más banales, en los que pensaríamos que la imagen está más directamente representada por el concepto que tenemos en la cabeza.

Figura 6. Un tapacubos C4. Imagen 4821.

Hay, por lo menos en algunos casos, medidas que podemos adoptar para disminuir esta pérdida de información. Un primer apunte, obvio (pero a pesar de ello muchas veces inobservado), es que **muchas** imágenes constituyen algo que, a menudo, es estructuralmente distinto de **una** sola imagen. Si estamos introduciendo la idea de grupo de simetría de una figura plana y buscamos ejemplificar una simetría cíclica, no basta con mostrar un ejemplo. Los "objetos" de la Matemática, que son conceptos abstractos, no pueden ser fotografiados obviamente, por lo que una imagen matemática apropiada podrá ser solo evocadora y nunca representativa.

Sin embargo, el asunto resulta completamente distinto si se presentan juntas muchas imágenes (***127**)[7], posiblemente muy diferentes entre sí con respecto al objeto representado: un mosaico (6174) y un tapacubos de coche (**fig.6, 4821**), una vidriera (**fig.7, 646**) y una rueda (**8414**)…, pero todas con el mismo tipo de simetría, de manera que el destinatario del mensaje se vea llevado de manera natural a intentar determinar qué tienen en común todas estas imágenes y su atención venga, por tanto, transportada del objeto concreto representado en la imagen, al concepto abstracto que subyace y que queremos evocar.

Figura 7. Un rosetón C4 de vidrio. Imagen 646.

7 Aquí y en adelante: cundo se ponga un número en **negrita** precedido de un asterisco, como por ejemplo, *127, nos referiremos a la colección de imágenes sobre un asunto determinado que pueden ser encontradas en la red, en la página *Immagini per la matematica*, en la dirección http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=127 .

Por poner otro ejemplo, si queremos utilizar imágenes para dar una idea intuitiva de en qué consiste el género de una superficie, no basta presentar una única imagen, aunque sea muy "ordenada", con la superficie de manera estándar, como una rosquilla con agujeros (**11405**) o como una esfera con asas (**7330**). Resulta "obligatorio" presentar juntas muchas imágenes de objetos distintos, de uso cotidiano (**7480**), esculturas (**12161**), imágenes virtuales (**fig.8, 3601**), junto con cosas quizás no reconocibles a simple vista (**fig.9, 3612**), de manera que se pueda después apreciar la solidez del teorema de clasificación de las superficies, cuando se descubre que cualquier superficie (con ciertas características) se puede deformar hasta llegar a una de las formas estándar.

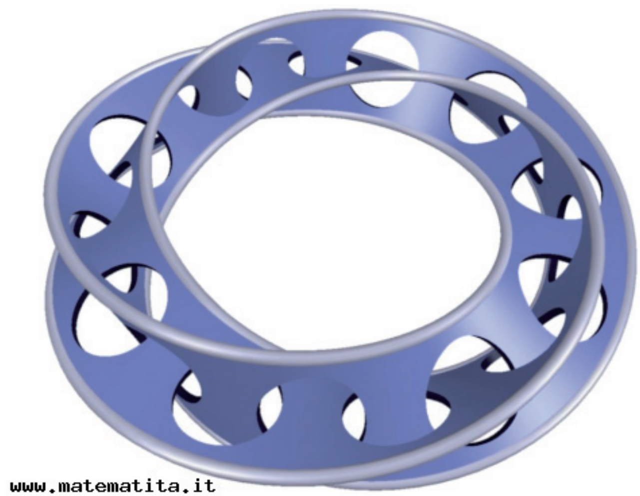


Figura 8. Una superficie. Imagen 3601.

Figura 9. Una superficie de género mayor que 2. Imagen 3612.

La riqueza y la variedad de situaciones que se hayan ofrecido **primero** puede ser lo que marque la diferencia a la hora de percibir **más tarde** (en el momento en el que nos lo presenten) un teorema de matemáticas como un potente instrumento de análisis y de control de la realidad, en vez de como una banalidad poco significativa que no nos llama la atención.

Otro punto obviamente importante es la elección de las imágenes. Ya a propósito del lenguaje observamos que renunciar intencionadamente al lenguaje técnico de las Matemáticas y usar el lenguaje común, significa renunciar a la certeza de la comunicación no ambigua y situarse en todo momento en el punto de vista del que recibe el mensaje, imaginando las posibles interpretaciones. Naturalmente, esta ambigüedad es todavía más fuerte con las imágenes, para bien y para mal. Para bien, porque en el fondo es precisamente este contexto un poco desdibujado y ambiguo el que facilita el arranque de procesos, como el de la asociación mental, que pueden ser especialmente significativos y llevarnos percibir enlaces quizás inesperados. Para mal, porque, obviamente, se ha ser consciente de que se viaja siempre sobre el filo de la navaja y que no es de hecho seguro que la lectura de una imagen sea unívoca.

Hay, por tanto, que prestar siempre una enorme atención a los detalles (que pueden ser la clave que desencadene una interpretación en vez de otra) y también al texto que eventualmente acompaña a la imagen misma. Por otra parte, el magnífico lenguaje riguroso y no ambiguo de las Matemáticas tampoco nos garantizaría, ciertamente, la ausencia de malentendidos si quisiéramos utilizarlo en contextos en los que éste no se domina.

Centrando la atención en el segundo trayecto del que hablábamos antes, es decir, el del que aprende y del que queremos que usando (también, pero no solo) imágenes reales comience a construir una imagen mental de un concepto determinado, nos encontraremos enseguida con una paradoja, ya que todas estas características de la comunicación por imágenes que la hacen tan potente y significativa (la inmediatez en la comunicación, el poder de atracción que tienen las imágenes, su belleza) corren el riesgo de convertirse simultáneamente en elementos negativos en el proceso de aprendizaje.

El hecho de que las imágenes "hablen", como señalábamos antes, se convierte en algo peligroso, ya que el mensaje es siempre ambiguo y es fácil , por tanto, que las imágenes terminen por "hablar demasiado".

El hecho de que posibiliten una comunicación veloz e inmediata pasa a ser un hándicap puesto que, al aprender, uno necesita tiempo para pensar y asimilar los conceptos. En efecto, la velocidad es una característica casi necesaria con las imágenes[8] y este no es un problema pequeño ya que, por el contrario, la lentitud y la posibilidad de adaptarse con extrema calma a los tiempos distintos de personas distintas, son características también necesarias e imprescindibles en cualquier proceso de aprendizaje.

La belleza de las imágenes también puede –paradójicamente– constituir un límite, simplemente porque nos arriesgamos a inducir la adopción de una actitud pasiva, de contemplación, que es exactamente lo contrario de la actitud que se necesita suscitar para lograr el aprendizaje.

Si se quiere entender algo es necesario remangarse, entrar en el juego y probar, probar incluso a hacer esbozos (a esta tarea nos ayuda la imagen real). Un esbozo feísimo, hecho por uno mismo, es mucho más útil para aprender que una imagen muy bonita contemplada de forma pasiva.

8 Hemos hablado aquí sólo de imágenes estáticas y no hemos abordado el capítulo de las imágenes en movimiento; lo citamos de pasada, justo porque una manera de darse cuenta de cuánto es intrínseca la velocidad en la comunicación por imágenes, es tomar un vídeo y reducir la velocidad de visualización: se llega enseguida una situación insostenible.

¿Qué estrategias pueden, por tanto, utilizarse para disminuir estos riesgos y seguir aprovechando todo el potencial que tienen las imágenes y toda su riqueza, también en el ámbito del aprendizaje? Se trata de uno de los problemas que está estudiando el Centro *matematita* y las experiencias que hasta ahora se han hecho comienzan a dar resultados satisfactorios.

Un primer resultado, ya citado, es utilizar juntas distintas imágenes; entre las distintas experiencias que el Centro está llevando a cabo citaremos:

- Una página [2] cuya estructura favorece, por encima de las imágenes individuales como tales, las imágenes agrupadas, que pueden ser el grupo obtenido a través de los enlaces hipertextuales en los comentarios (algunos ejemplos, bastante distintos entre ellos: **7920**, **9939**, **8511**, **6941**..., o el grupo constituido de una sección del archivo (***23**, ***325**, ***963**...), o el construido *ad hoc* (algunos ejemplos se pueden visualizar usando el menú de la izquierda).

- La sección *La via delle immagini*[9] en la revista *XlaTangente*[10], que busca precisamente despertar una idea a partir del emparejamiento de dos o más imágenes: algunos ejemplos se pueden encontrar en ***1058**.

Otra posibilidad, utilizada principalmente en los talleres o en las exposiciones promovidas por el Centro, es la de poner junto con las imágenes objetos reales: estos son un perfecto antídoto ante el problema de la velocidad, porque tiene un efecto "ralentizador" en la misma medida en que las imágenes lo tienen de "acelerador".

9 *La calle de las imágenes* [N. del T.].

10 El título puede traducirse como "por la tangente" [N. del T.].

Si se propone a los chicos que corten una cinta de Moebius, podemos estar seguros de que muchos empezarán mal, se equivocarán, deberán volver a empezar, en resumen, permanecerán haciendo esta actividad un tiempo enormemente más largo que el que se emplea en ponerles un vídeo sobre una cinta de Moebius que se corta por la mitad. ¿Tiempo perdido? Probablemente no; verdaderamente no para muchos de ellos, sea por la implicación distinta inducida de la actividad realizada por uno mismo (con todo lo que esto significa a nivel de la memorización), sea porque precisamente ese "tiempo perdido" puede ser el ingrediente necesario para "digerir" un concepto concreto.

Una última experticia que queremos citar es la del "Taller" de *XlaTangente*, cuyos trabajos se pueden ver en la página [3] usando el botón *Officina* del menú superior; el taller es un lugar en el que los estudiantes se enfrentan al problema de construir ellos las imágenes (o los vídeos, las animaciones…) que expresen un concepto determinado, se lanzan por doquier desafíos y usan el foro para discutir los resultados.

Para concluir, una invitación. ¿Habéis utilizado las imágenes en vuestras clases? ¿Os gustaría contarnos vuestra experiencia? La página [2] pretende convertirse en algo más que un archivo con miles de imágenes, pretende ser un verdadero punto de referencia para proponer nuevas maneras de uso de estas imágenes y para discutir sobre su eficacia. Y para poder hacerlo, necesita vuestras contribuciones: ¡escribidnos!

Bibliografía

AA.VV. (2004). *Matemilano, percorsi matematici in città*. Italia: Springer

Bellingeri, P.; Dedò, M.; Disieno, S.; Turrini, C. (2000). *Il ritmo delle forme*. Mimesis.

Coxeter, H.S.M. (1974). *Complex regular polytopes*. Cambridge University Press.

Lockhart, P. (2009). *A mathematician's lament*. New York: Bellevue Literary Press.

Algunas páginas web

[1] Página del Centro Matematita
http://www.matematita.it/.

[2] Página de *Immagini per la matematica*, a cargo del Centro Matematita
http://www.matematita.it/materiale/.

[3] Página de la revista *XlaTangente*, editada por el Centro Matematita
http://www.xlatangente.it/xlatangente/index.do.

[4] J. Conway, P. Doyle, J. Gilman, W. Thurston: Geometry and the imagination in Minneapolis
http://www.geom.uiuc.edu/docs/education/institute91/handouts/handouts.html.

El efecto "mariposa" y la cultura matemática

Raúl Ibáñez Torres

1. Primera parte: divulgar las Matemáticas

A pesar de la importancia social, cultural y para la formación de las personas, de las Matemáticas, la imagen de estas y de los propios matemáticos es muy negativa. Este desencuentro entre la sociedad y las Matemáticas fue sin duda determinante en la decisión de la UNESCO, a instancias de la Unión Matemática Internacional, de declarar el año 2000 Año Mundial de las Matemáticas. Este evento fue un punto de inflexión en la divulgación y popularización de las Matemáticas a nivel internacional, y muy particularmente en España. La comunidad matemática, de forma extraordinaria, se volcó en trabajar por mejorar la imagen social de las Matemáticas, difundir la cultura matemática a la sociedad y que esta fuese consciente de que las Matemáticas son una parte fundamental de nuestra sociedad, de nuestra vida diaria, de nuestra cultura, y que el desarrollo económico, científico y tecnológico de un país sería imposible sin ellas. A lo largo de todo el mundo los matemáticos, aunque la mayoría se encontrara ante un reto novedoso, se esmeraron en esta tarea, organizando ciclos de conferencias, exposiciones, mesas redondas, colaboraciones con los medios de comunicación, escribiendo libros, etc.

La Real Sociedad Matemática Española (RSME) decidió seguir trabajando tras el impulso que supuso el año 2000. A mediados del año 2003, encarga al autor de este artículo la creación de la Comisión de Divulgación con el objetivo de diseñar y desarrollar un programa global de divulgación de las Matemáticas. La comisión fue creada siguiendo la idea de que participe gente de Primaria, Secundaria y Universidad, de colaborar con otras sociedades y en general con toda la comunidad matemática. Así mismo, con la filosofía de colaboración con otras sociedades matemáticas y científicas y con agentes sociales y culturales de nuestra sociedad. Los objetivos marcados inicialmente por la comisión fueron: I) mejorar la actitud social ante las Matemáticas; II) desarrollar la cultura matemática de nuestra sociedad; III) deshacer el tópico ciencias/letras; IV) compartir su belleza; V) hacer personas matemáticamente activas; VI) apreciar las matemáticas de nuestro entorno; VII) estimular la actividad matemática; VIII) divulgar la investigación matemática; IX) "un país desarrollado necesita unas matemáticas desarrolladas".

A continuación, vamos a exponer algunas de las acciones que se han organizado desde la Comisión de Divulgación de la RSME, bajo la presidencia del autor de este artículo. En la actualidad, el presidente de la Comisión de Divulgación es Pedro Alegría, y R. Ibáñez sigue trabajando como miembro de la misma.

1.1. DivulgaMAT, centro virtual de divulgación de las Matemáticas

La primera acción que desarrolló la Comisión de Divulgación fue la creación de un portal de divulgación de las Matemáticas, DivulgaMAT (www.divulgamat.net), que intentaba recoger la esencia del programa diseñado. El motivo fue que Internet es un medio que nos permite llegar a un mayor número de gente, pero también a gente a la que no llegaríamos de otras formas, como por ejemplo los jóvenes, que son nuestro futuro. Es un medio muy dinámico y, además, cada día empieza a ser más frecuente que en muchos hogares haya ordenadores y conexión a Internet.

DivulgaMAT es un portal en castellano, que prima el trabajo de calidad realizado en España y Latinoamérica por los expertos en las materias tratadas sobre las simples traducciones de materiales existentes ya en la red. Es un portal abierto, que aunque surge de la RSME pretende serlo de toda la comunidad matemática española, en el que colaboran una gran cantidad de matemáticos, educadores, escritores, periodistas, artistas… Ya han colaborado con esta iniciativa más de 150 personas. Dentro de DivulgaMAT nos encontraremos con cultura, información, entretenimiento, motivación, recursos didácticos…, pero sobre todo un mundo de Matemáticas.

En 2008-09 DivulgaMAT afrontó un cambio importante en su estructura y diseño, modernizando su estética, pero también la organización interna, con el objetivo de facilitar tanto la navegación como el trabajo detrás de la página.

En la página principal de este portal se mostrarán bellas imágenes, así como las noticias más destacadas por el portal. Se distinguen cinco "carpetas" de organización de la página: menú principal, información, novedades, texto literario del mes e imagen del mes. Las secciones del menú principal del portal son:

- *Retos matemáticos:* dos problemas o retos matemáticos (uno más elemental y otro más avanzado), con soluciones en la siguiente entrega.

- *Historia de las Matemáticas:* biografías de matemáticos, temas matemáticos, obras clave, diferentes culturas, artículos de *La Gaceta de la RSME*, la historia a través de la imagen…

- *Exposiciones virtuales:* exposiciones relacionadas con las Matemáticas, de arte, fotografía, libros, historia y otros.

- *Cultura y Matemáticas:* las matemáticas en la ciencia ficción, la música, la magia, el cine, el teatro, el arte, la papiroflexia, los medios de comunicación.

- *Ficciones matemáticas: Érase una vez… un problema*, con cuentos con problema, una mezcla de problemas matemáticos, relatos literarios y sentido del humor. Y *humor gráfico*.

- *Publicaciones de divulgación:* bases de datos con información y reseñas de libros de divulgación (unos 500 actualmente), vídeos, artículos de periódicos y revistas.

- *Textos on line:* textos matemáticos inéditos, de difusión local o reducida, seminarios, jornadas, lecciones inaugurales, discursos de la Academia…

- *Recursos:* guía comentada de recursos didácticos para el aula en la que poder encontrar materiales para aprender y disfrutar de las matemáticas.

- *Aplicaciones matemáticas actuales:* se trata de mostrar de forma divulgativa las multiples aplicaciones que tienen las Matemáticas a nuestra vida cotidiana, industria, economía, medicina, arquitectura, arte...

- *Homenajes:* Miguel de Guzmán (2004), El Quijote (2005), Congreso Internacional de Matemáticas (ICM 2006), Olimpiada Matemática Internacional (2008), RSME (2010).

- *Sorpresas matemáticas:* citas, chistes, anécdotas, ilusiones, paradojas, acertijos, caricaturas…

La parte de infomación se compone de novedades editoriales, eventos, noticias, sugerencias, concursos literarios RSME-ANAYA, exposiciones de la RSME, y enlaces de Interés, entre otras. A continuación hay un apartado dedicado a novedades, en el que se incluyen novedades de DivulgaMAT, novedades de la RSME relacionadas con la divulgación, u otras novedades que se dan en la sociedad y que son de interés. Y los dos últimos apartados son texto literario del mes e imagen del mes, en donde cada quince días se muestra un fragmento literario, o una imagen, respectivamente, relacionados con las Matemáticas.

Desde sus inicios en la red a mediados de 2004, DivulgaMAT se ha convertido en un portal de referencia en la divulgación de las matemáticas en castellano, alcanzando ya en sus dos primeros años de existencia más de 9.000 visitas diarias.

DivulgaMAT es un portal de la RSME, financiado en la actualidad por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, con la colaboración puntual de la Fundación ICO, Anaya y la Universidad del País Vasco.

1.2. Jornadas de popularización de la Ciencia: las Matemáticas

Desde la RSME nos pareció importante que al finalizar el primer año (2004) de trabajo de la Comisión de Divulgación, se realizara una reflexión general sobre el problema de la divulgación y popularización de las Matemáticas. Esta reflexión nos permitiría analizar el problema y podría orientar sobre las necesidades y posibles acciones a realizar en el futuro. Sin embargo, nos parecía importante que esta reflexión se realizara junto con otros científicos, otros educadores, periodistas, escritores, editores, artistas, políticos, directores de museos de la Ciencia, etc., ya que nos serviría para tener perspectivas diferentes sobre el problema que estamos tratando. Con tal objetivo organizamos las "Jornadas sobre la popularización de la Ciencia: las Matemáticas", que se celebraron en Miramon Kutxaespacio de la Ciencia (Donostia-San Sebastián) durante los días 18 y 19 de noviembre de 2004.

Las jornadas, dirigidas por el autor de este artículo, como presidente de la comisión, se organizaron en tres grupos de trabajo: Prensa y Medios de Comunicación (coordinado por A. Pérez), Educación e Investigación (coordinado por M. Lezaun), Museos, Editoriales Especializadas y Revistas (coordinado por R. M. Ros). Las reflexiones realizadas y las conclusiones de las jornadas se recogieron en el libro *Divulgar las Matemáticas*, editado por Nivola en 2005.

Colaboración con los medios de comunicación.

En las jornadas anteriores se plantearon actuaciones de futuro, como la colaboración entre los matemáticos y los medios de comunicación. Era importante la creación de un gabinete de prensa para la comunidad matemática española (iniciativa que en la actualidad ha recogido el proyecto i-math), y establecer colaboraciones puntuales con los medios (entrevistas, asesoría científica, contactos, artículos…); además, cuando existan posibles noticias relacionadas con las Matemáticas, hay que realizar el esfuerzo de comunicárselo a los medios y facilitarles la información; y finalmente, en la medida de lo posible, hay que establecer colaboraciones más permanentes. Un ejemplo es la colaboración que desde julio de 2005 he venido desarrollando en el programa *Graffiti* de Radio Euskadi. Todos los jueves de 19:40 a 20:00 se habla de Matemáticas en esta radio (con una gran audiencia) y se plantean sencillos problemas a los oyentes. Sorprende la buena acogida del público, que es de lo más heterogéneo.

1.3. Ciclos de conferencias, seminarios, cursos, jornadas científicas

Unas herramientas divulgativas muy importantes, que a pesar de ser clásicas siguen siendo útiles vías de comunicación con la sociedad, son los ciclos de conferencias, seminarios, cursos y jornadas científicas, dirigidos a otros matemáticos o científicos, profesores, estudiantes o público en general. Como ejemplo tenemos el ciclo "Las matemáticas en la vida cotidiana" (Bidebarrieta, Biblioteca Municipal de Bilbao). Un ciclo abierto, para todos los públicos, organizado desde el año 2004, y con la presencia de entre 130 y 150 personas por conferencia. Como muestra las conferencias de las últimas ediciones: 2006 ("El *Challenger* no se habría lanzado si en la NASA hubieran sabido estadística", J. A. Cuesta; "La vida es una tómbola: gestión del azar y finanzas", J. L. Fernández; "Mirar el arte con ojos matemáticos", F. Martín); 2007 ("De los mensajes secretos a la seguridad en nuestra vida cotidiana", P. Morillo; "Papiroflexia y Matemáticas", J. I. Royo; "El secreto de Google", P. Fernández), y 2008 ("Matemáticas aplicadas a los trucos de magia", Pedro Alegría; "Mi pentágono de la belleza", Rafael Pérez Gómez; "Decidir y repartir: una mirada matemática a las elecciones", Adolfo Quirós).

1.4. Concursos literarios RSME-Anaya: narraciones escolares y relatos cortos

Estos concursos han sido organizados por la RSME con la colaboración de las editoriales Anaya, Nivola y Proyecto Sur, con la filosofía de mostrar a los estudiantes, profesores y público en general, que las Matemáticas forman parte de la cultura humana.

1.4.1. Narraciones escolares

El objetivo fundamental de este concurso, para jóvenes de entre 12 y 18 años, es la popularización de las Matemáticas entre los jóvenes (y por extensión a la sociedad), fomentando su interés por esta ciencia, por su historia y sus protagonistas. El concurso consiste en la presentación de un relato de ficción basado en un resultado matemático, un personaje relacionado con esta ciencia, una situación donde afloran las matemáticas... Se trataría de mostrar alguno de estos temas a través de la mirada crítica e imaginativa del autor de la narración. Este concurso es una herramienta didáctica apasionante, que ha conseguido llegar a los jóvenes, ademas de implicar al profesorado. La participación en la edición 2006 ha sido de 328 narraciones; en 2007 se presentaron 591 trabajos, y en 2008 490 narraciones.

1.4.2. Relatos cortos

El concursante presentará un relato corto, de tema libre, relacionado con las Matemáticas (de la forma que su autor considere oportuno). En 2006 se presentaron 31 relatos, en 2007 91, y en 2008, 59. Los autores proceden de todas las provincias de España, pero también de Argentina, Chile, Colombia, Cuba, EE.UU., Francia, Guatemala, México y Uruguay. El jurado, en ambos concursos, está formado por matemáticos (profesores de secundaria y universidad), escritores, periodistas,...

La calidad de los trabajos presentados ha animado a la RSME y a Anaya a publicar las obras finalistas y ganadoras de los concursos, bajo los títulos de dos colecciones: “Ficciones Matemáticas” (Narraciones escolares) y “Relatos Matemáticos” (Relatos cortos).

1.5. Exposiciones

La utilización de exposiciones artísticas en la divulgación matemática nos muestra las Matemáticas como parte de la cultura, pero además contribuyen a la normalización de la relación de las personas con las Matemáticas, las anima a acercarse a ellas y además son una herramienta divulgativa y didáctica contundente.

1.5.1. La frontera entre el arte y las Matemáticas

Esta es una exposición internacional de arte fractal organizada con motivo del Año Mundial de las Matemáticas que ha visitado diferentes ciudades del mundo. Al igual que un pintor transmite a su obra su personalidad y sensibilidad mediante su técnica, los artistas de arte fractal se expresan a través de fórmulas y algoritmos (los fractales), modificándolos progresivamente hasta conseguir el objetivo deseado, en la frontera entre el arte y las Matemáticas. La exposición ha recorrido museos de la ciencia, salas de exposiciones y universidades de toda España. Es inicialmente una exposición de arte que invita a las personas a disfrutar la belleza de sus obras, que además nos permite introducir a los visitantes en la matemática de los fractales y en las múltiples aplicaciones sociales (computación, medicina, telecomunicaciones, ingeniería, economía, acústica...).

1.5.2. "Anda con ojo", exposición de fotografía matemática de Pilar Moreno

Pilar Moreno ha hecho de la fotografía una herramienta para la divulgación y la enseñanza de las Matemáticas. Lleva ya veinte años utilizando la fotografía como un recurso didáctico en la enseñanza/aprendizaje de esta materia, así como mostrando imágenes cotidianas llenas de belleza y sensibilidad, siempre relacionadas con la Geometría. La Geometría está por todas partes, pero será la fotografía la que seleccione y aísle los elementos para poderlos estudiar con detenimiento, utilizando como arma de seducción de la mirada el color o la sorpresa. La exposición ha recorrido museos de la ciencia, salas de exposiciones y universidades de toda España, con un éxito que sorprende allí donde va. Además, hemos colaborado en la publicación del libro Pilar Moreno, *Anda con Ojo*, editado por Factoría K de Libros en 2006 (introducciones de J. Talens y R. Ibáñez).

Otras exposiciones que se están impulsando desde la Comisión son "El Rostro Humano de las Matemáticas" (de la que hablaremos más adelante), "Momentos matemáticos" (exposición de la American Mathematical Society, traducida y desarrollada en la RSME, por I. Marrero) y "La mujer, innovadora de la Ciencia" (exposición y actividad desarrollada por la Comisión Mujer y Matemáticas de la RSME, y que recientemente ha sido premiada en el concurso Ciencia en Acción).

1.6. Colaboración: International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006)

En agosto de 2006 se celebró en Madrid el Congreso Internacional de Matemáticos, ICM 2006. Este evento, el más importante en el mundo de las Matemáticas, se celebra cada cuatro años desde 1897 y es la primera vez que tiene lugar en España. Sin embargo, desde la organización del ICM 2006 se apostó porque este evento no fuese solamente un acontecimiento para el mundo de las Matemáticas, sino para toda la sociedad. Por este motivo se realizó un esfuerzo especial en la organización de actividades culturales relacionadas con las Matemáticas.

Una de esas actividades fue la triple exposición que se celebró en el Centro Cultural del Conde Duque del 17 de agosto al 29 de octubre de 2006): "¿Por qué las matemáticas?", "Arte fractal: belleza y matemáticas" y "Demoscene: matemáticas en movimiento" (las dos últimas también se organizaron en el Palacio de Congresos durante la celebración del ICM 2006). Fue visitada por más de 40.000 personas y recibió más de 100 visitas organizadas de centros educativos además de una gran atención de los medios, tanto prensa, como radio y televisión. Los comisarios fueron R. Ibáñez y A. Pérez.

La exposición "¿Por qué las matemáticas?" tiene su origen en las acciones emprendidas en el año 2000 por la International Mathematical Union con motivo de la celebración del Año Mundial de las Matemáticas y se inscribe dentro del marco de misiones culturales y científicas de la UNESCO. Esta exposición pretende mostrar que las Matemáticas son: asombrosas, interesantes y útiles. Accesibles a todos. Juegan un gran papel en la vida diaria. Y tienen mucha importancia en nuestra cultura, desarrollo y progreso. Dirigida al gran público… aunque está particularmente pensada para un público joven y su entorno inmediato, padres y profesores. Exposición interactiva… una exposición para mirar, ver, jugar-tocar-experimentar y pensar. ¡Prohibido no tocar!

La exposición se acompañaba de una exhibición de documentales matemáticos, entre ellos las series de TVE “Más por menos” y “Universo Matemático” (guión y presentación de Antonio Pérez Sanz). Así mismo, preparamos para la exposición un catálogo (ver DivulgaMAT) con textos que desarrollaban algunos de los temas de la exposición, así como un cuaderno de actividades dirigido a los estudiantes de secundaria. Esta exposición se organizó con la ayuda del Ministerio de Educación.

La segunda exposición organizada *ex profeso* para la ocasión, bajo el título de “Arte fractal: belleza y matemáticas”, mostró las veinticinco obras finalistas del concurso internacional promovido con motivo de la celebración del ICM 2006 en Madrid, cuyo jurado estuvo presidido por B. Mandelbrot. La exposición también se acompañó de un catálogo muy visual (ver divulgamat). La tercera exposición fue “Demoscene: matemáticas en movimiento”, que recogía una selección de películas animadas realizadas con ordenador, la Demoscene, una poderosa fuente de algoritmos matemáticos para la creación de efectos gráficos y visuales, cuyos efectos especiales digitales son utilizados hoy en día en películas y videojuegos. Como complemento de esta exposición, artistas de Demoscene explicaron al público su arte. Estas dos últimas exposiciones se realizaron con la financiación de la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECyT). Esta exposición ha seguido moviéndose desde entonces por toda España, en diferentes salas de exposiciones y universidades, incluso en el metro de Bilbao.

Así mismo, el escultor japonés Keizo Ushio realizó una escultura en vivo durante la celebración del ICM 2006 (ver divulgaMAT).

1.7. El rostro humano de las Matemáticas

Esta es una exposición de caricaturas de matemáticos (realizadas por los dibujantes E. Morente y G. Basabe de Viñaspre), acompañadas de una sencilla biografía, cuyo objetivo es acercar la historia de las Matemáticas, y más concretamente los personajes que han jugado un papel destacado en dicha historia, a los jóvenes, a los estudiantes, así como a sus padres y profesores y a la sociedad en general. Esta exposición, financiada por la FECyT a través de la convocatoria del Año de la Ciencia 2007, consta de varios formatos: la exposición original para museos y salas de exposiciones; varias copias flexibles que se exponen en centros educativos (IES y universidades) y una exposición virtual en DivulgaMAT. El equipo está formado por un grupo de matemáticos con una gran experiencia: R. Ibáñez, S. Fernández, P. M. González, V. Meavilla, Fco. J. Peralta, A. Pérez, A. Salvador. Los matemáticos que formarán parte de la exposición serán: Pitágoras, Euclides, Arquímedes, Apolonio, Al-Jwarizmi, Fibonacci, Cardano y Tartaglia, Fermat, Descartes, Newton, Lagrange, Cauchy, Galois, Leibniz, Euler, Gauss, Riemann, Hilbert, Poincaré, Abel, además de Hipatia, Madame de Chatelet, Sophie Germain, Sonia Kovaleskaia, Emmy Noether y los matemáticos españoles Julio Rey Pastor, Luís Santaló, Puig Adam, Miguel de Guzmán y Ventura Reyes Prosper.

Así mismo, se ha publicado un libro en la editorial Nivola con el título *El Rostro Humano de las Matemáticas*.

1.8. Las Matemáticas en las bibliotecas escolares

En este interesante proyecto en el que estamos trabajando en la actualidad junto al Gobierno Vasco y la Fundación BBK, se pretende que las Matemáticas sean una parte activa de las bibliotecas escolares. Como ya se ha comentado en anteriores acciones, las Matemáticas forman parte de nuestra cultura, además de que hemos apostado fuerte, al igual que lo hemos hecho en la exposición anterior, por la divulgación de las Matemáticas en los centros escolares. Este programa tiene como objetivo que las Matemáticas sean una parte importante de las actividades extraescolares de los centros educativos y que además la literatura relacionada con las Matemáticas esté presente en la formación de nuestros jóvenes. El programa se dirige fundamentalmente a estudiantes de Educación Primaria y primer ciclo de Educación Secundaria.

El programa "Las matemáticas en las bibliotecas escolares" se desarrolla en 81 centros educativos de Vizcaya. Las acciones de este programa consisten en la entrega a cada centro educativo participante de un lote de libros de literatura infantil y juvenil relacionados con las Matemáticas y acompañados de una publicación con sugerencias didácticas para esos y otros libros, así como un lote de juegos de ingenio, acompañados de guías didácticas. Además, el programa se completa con dos micro-exposiciones itinerantes que se exhibirán en los centros educativos participantes en el programa: I) "Los números de nuestras ciudades" (fotógrafo y diseñador: Axi Olano); II) "Geometría cotidiana: veo, veo... (I y II)" (fotógrafa: Pilar Moreno); III) "El rostro humano de las Matemáticas". Además se desarrollan talleres (juegos, papiroflexia y magia) para profesores, bibliotecarios y estudiantes. El programa se completa con encuentros con matemáticos, escritores y artistas.

También apoyamos la publicación de excelentes textos divulgativos, como *Las Matemáticas en el Cine*, de A. J. Población, coeditado por Proyecto Sur y la RSME en 2006.

Una conclusión positiva: la experiencia nos muestra que cuando se realizan actividades interesantes y bien organizadas, la sociedad muestra su enorme interés por las Matemáticas y la Ciencia.

2. Segunda parte: la divulgación como recurso educativo

Para empezar, me gustaría comentar que debe quedar claro que la educación y la divulgación no son lo mismo. Hay una anécdota personal al respecto muy ilustrativa, que seguramente han vivido casi todas las personas que hacen divulgación de las Matemáticas. Algunos oyentes del programa de radio en el que colaboro me han comentado en alguna ocasión: "Ojalá me hubiesen enseñado así las Matemáticas a mí cuando estaba en la escuela y el instituto". La respuesta a este comentario es que así, como yo explico las Matemáticas en la radio o en una conferencia, no se enseñan las Matemáticas, así se divulgan las Matemáticas, que no es lo mismo. La educación y la divulgación de las Matemáticas tiene objetivos diferentes, aunque la divulgación (como es el tema de esta Escuela Miguel de Guzmán), bien utilizada, puede ser un buen recurso educativo y, más generalmente, un elemento importante en relación con la educación.

2.1. Divulgar en el aula

La divulgación puede convertirse en un recurso didáctico muy interesante que nos sirva para motivar a nuestros estudiantes, interesarles e introducirles en los temas que tienen que estudiar en clase, quitarles el miedo a las Matemáticas, que en ocasiones se adentren en algunos temas matemáticos sin ser conscientes de ello (por ejemplo, juegos, magia, cómic...) o incluso desde otras perspectivas (historia de las Matemáticas, papiroflexia...), que sean más activos matemáticamente e incluso que tomen ellos mismos la iniciativa en algún tema.

Unas preguntas importantes sobre las que hemos discutido en esta escuela son: ¿cómo, qué actividades, materiales, temas...? Desde la Comisión de Divulgación de la RSME (DivulgaMAT, exposiciones, las matemáticas en las bibliotecas escolares,...) hemos intentado, en la medida de nuestras posibilidades, ayudar a responderlas, a diseñar acciones y a conseguir materiales.

Aunque abusar de la divulgación en el aula puede ser también negativo. Hay que saber gestionar la divulgación.

2.2. Divulgar en el centro educativo

En ocasiones organizar actividades divulgativas en el centro educativo, pero fuera del aula o de la dinámica de la clase normal, puede ayudarnos a llegar mejor a los estudiantes en algunas actividades, a captar su interés y motivarles, pero sin que vean estas actividades como "temarios de clase", "como las mates del aula", teniendo en cuenta además que en el aula hay también un temario que cumplir y el tiempo es finito. Así, podremos:

- Realizar actividades transversales (Matemáticas, Lengua, Literatura, Historia, Arte, Física...) sin preocuparnos si la clase es de tal o cual materia. Talleres, teatro, lectura, exposiciones...
- Que puedan llegar a ver las Matemáticas como parte de la cultura, de la historia, de la vida cotidiana...
- Que sirva de bisagra entre el aula y su casa (familia, barrio), ya que hay actividades que pueden tener varios tiempos (aula, biblioteca o centro, hogar).
- Que ellos sean más activos que en clase (así, los que en el aula se manifiestan como "malos", en ocasiones esta motivación les descubre como buenos o mejores de lo que parecían, tanto para ellos mismos como para el profesorado) e incluso que se conviertan ellos mismos en divulgadores (después de realizar un taller o una actividad).

De nuevo, en esta escuela hemos discutido sobre cómo y qué materiales, temas o actividades. También desde la Comisión de Divulgación de la RSME intentamos colaborar en la medida de lo posible (divulgamat, exposiciones, las matemáticas en las bibliotecas escolares…, son buenos ejemplos).

2.3. Los estudiantes se desplazan a la acción divulgativa

También es muy positivo –por supuesto, siempre planificado y sin abusar de todas estas cuestiones y actividades– para los estudiantes, para su motivación e interés, el sacarles fuera del centro escolar en determinados momentos, para acercarles a cosas distintas a las estudiadas en clase, complementarias o relacionadas directamente con lo estudiado, llevándoles donde en ocasiones está la acción.

Algunas veces pueden ser actividades externas ya organizadas (museo de la Ciencia, feria de la Ciencia, teatro o cine, conferencia, museo de Arte…).

O podemos darle forma desde el profesorado (visitar el supermercado, hacer un paseo matemático, que visiten a algún profesional que haga uso de las Matemáticas, en mayor o menor medida, en su trabajo…).

2.4. La divulgación social

La divulgación social, para todos los públicos, no es sí misma un recurso didáctico, pero es importante para la educación en general, ya que:

- Ayuda a combatir el miedo social a las matemáticas y su leyenda negra, creando además un “clima” más positivo.

- Influye positivamente en la sociedad y, por tanto, en administraciones, medios de comunicación, en todos nosotros...

- Nos hace ver su utilidad (formación de las personas, aplicaciones matemáticas, cultura matemática...) y la necesidad tanto de su desarrollo como de una buena educación en la escuela.

Bibliografía

Allen Paulos, John (1990). *El hombre anumérico*. Barcelona: Tusquets.

Enzensberger, Hans Magnus (2002). *Los elixires de la ciencia*. Barcelona: Anagrama.

Ibáñez, Raúl (editor) (2005). *Divulgar las Matemáticas*. Madrid: Nivola.

Ibáñez, Raúl; Pérez, Antonio (comisarios) (2006). *Catálogo de la exposición "¿Por qué las Matemáticas?"* ICM2006-Conde Duque. (Ver www.divulgamat.net).

Ibáñez, Raúl; Pérez, Antonio (comisarios); Bas, Menchu; Bell-Lloch, Aurora; Del Rincón, Rosario (2006). *Cuaderno de actividades de la exposición ¿Por qué las Matemáticas?* ICM2006-Conde Duque. (Ver www.divulgamat.net).

Ibáñez, Raúl; Pérez, Antonio (comisarios) (2006). *Catálogo de la exposición "Arte Fractal: belleza y matemáticas"*, ICM2006-Conde Duque. (Ver www.divulgamat.net).

Moreno, Pilar (2006). *Anda con Ojo* (introducción de R. Ibáñez). Vigo: Factoría K de Ediciones.

Población, Alfonso J. (2006). *Las Matemáticas en el Cine*. Granada: Proyecto Sur-RSME.

Stewart, Ian (2007). *Cartas a una joven matemática*. Barcelona: Crítica.

Páginas web

DivulgaMAT, Cetro Virtual de Divulgación de las Matemáticas, RSME, www.divulgamat.net

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA, www.rsme.es

Cuatro miradas familiares a la "Ciutat de les Mallorques"

Josep Lluís Pol i Llompart

Resumen

En este artículo se presentan cuatro itinerarios matemáticos en familia que la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX viene realizando en la ciudad de Palma (Mallorca) en colaboración con el Ayuntamiento. Itinerarios que contemplan la participación de personas de todas las edades. En este trabajo se describen las actividades realizadas en torno a los diversos centros de interés y se describe además una adaptación curricular para 4° de ESO y 1° de Bachillerato sobre trigonometría en la catedral.

Introducción

La realización de itinerarios en la ciudad de Palma era una actividad que funcionaba hacía algunos años a partir de temas como las leyendas, la historia o la literatura. A partir de esta idea, la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX presentó algunas propuestas para realizar itinerarios que centraran su interés en los aspectos matemáticos de la ciudad. La idea fue bien recibida y se fueron elaborando año tras año los cuatro itinerarios que aquí se presentan.

Se trataba de diseñar un recorrido o visita que se realizaría durante unas dos horas los domingos por la mañana. El equipo humano que las desarrolló lo hizo a partir de las siguientes premisas:

- Debían realizarse en lugares emblemáticos.
- Debían combinar las matemáticas con aspectos históricos, arquitectónicos, naturales…
- Debían realizarse a partir de centros de interés diversos, de manera que fueran concebidos como un conjunto de actividades relativamente cortas (10 o 15 minutos).
- Debían contener al menos una pequeña investigación o enigma.

- Debían contener al menos un juego.
- Se elaborarían unos apuntes escritos para los adultos y para que la actividad dejara rastro físico.

Con todo ello, se elaboraron cuatro itinerarios definidos por el lugar donde se iban a realizar:

1. *Històries matemàtiques per la ciutat vella*
   Itinerario de paseo por el barrio gótico de la ciudad
2. *El llenguatge de la natura*
   Itinerario de paseo por un espacio litoral poco humanizado
3. *Matemàtiques a la defensiva*
   Visita matemática a la fortaleza conocida como el castillo de Bellver
4. *Matemàtiques a la Seu*
   Visita matemática a la catedral de Mallorca

1. Històries matemàtiques per la ciutat vella

El barrio gótico de la ciudad de Palma (conocida en aquella época como Ciutat de les Mallorques) se nos presenta como un escenario soberbio que refleja aquella época de esplendor en que la isla daba nombre a un reino independiente. Un paseo por sus calles el domingo por la mañana en el que la mayoría de coches duermen nos permite gozar de una tranquilidad adicional para realizar nuestro cometido. El itinerario se organiza a partir de siete centros de interés.

1.1. El banco del *Sinofós* del Ayuntamiento

La fachada principal del edificio que alberga el Ayuntamiento de Palma presenta un gran banco de piedra llamado “de los vagos” o “del Sinofós”. Desde este banco, las familias participantes hacen un recorrido visual por la historia del universo. De menos a más, se hace referencia a la vida de las personas (unas décadas), a la factura del edificio (unos 300 años), a la edad del olivo del centro de la plaza (medio milenio), a la fundación romana de la ciudad (dos milenios), a los fósiles de erizo que contiene la piedra bajo sus pies (de dos a cinco millones de años), a la edad de la tierra (unos 4.500 millones de años) o, incluso, a la edad del universo (en torno a 13.500 millones de años).

La actividad propiamente dicha, que siempre sorprende, es la de intentar construir las combinaciones de orden posibles cuando dos, tres, cuatro, etc., personas se sientan en el banco. Aquí los participantes son los más jóvenes. Ya sabemos que se trata simplemente de un n!, pero aquello que se descubre es que para realizar todas las combinaciones posibles para veinte personas, a un segundo por combinación y sin parar, no basta la historia del universo.

1.2. El colegio y convento de Sant Francesc

En este punto, el itinerario centra su atención en una de las iglesias góticas más emblemáticas de la ciudad, que alberga en su ábside la tumba del pensador universal Ramon Llull. De factura gótica en alabastro, el sepulcro está sustentado por siete alegorías que representan las siete artes liberales medievales. El hecho de que los nombres de estas estén realizados en tipografía gótica difícil de leer y localizar, permite plantear el juego de intentar adivinar a qué arte corresponde cada imagen (siete monjes) a partir de los elementos que en ella aparecen. Un retablo barroco oculta dos artes del *Trivium* y el juego se centra en el *Quadrivium* matemático (aritmética, geometría, astronomía y música).

Ramon Llull aparece además en la base de biografías matemáticas de la prestigiosa universidad escocesa de Saint Andrews por sus estudios en combinatoria. A la salida, la calle que une el convento con la plaza del Temple, próxima parada, presenta también en los siete ventanales de la Casa de Cultura otra realización alegórica a las siete artes liberales.

1.3. La escultura de Jafudà Cresques

En la plaza del Temple encontramos una escultura, obra de María Isabel Ballester, que representa la figura del cartógrafo mallorquín Jafudà Cresques, conocido en su época como *bruixoler i il·luminador de mapes*. En efecto, la escuela de cartografía de los Cresques (en la que destacó también el padre de aquel, Abraham) fue en el siglo XIV una de las más importantes de Occidente.

En esta ocasión, los participantes más jóvenes deben descubrir el oficio de "ese señor" a partir de los elementos simbólicos de la escultura que encuentran en sus manos: rollos de mapas identificados por la rosa de los vientos en una y el compás en la otra.

Después se explica la imposibilidad de trazar un mapa plano que conserve las proporciones y las áreas de un trozo de la superficie terrestre, y se comentan las proyecciones de Mercator y Peters. Para argumentarlo, sobre un huevo (previamente vaciado sin que el público lo sepa) se dibuja un conjunto de tierras imaginarias, y después se aplana literalmente sobre la mano de alguien (con el consiguiente susto) para ver qué ocurre con el dibujo original.

1.4. El colegio y convento de Monti-sion

El colegio y la iglesia de Monti-sion ocupan los terrenos de una antigua sinagoga de la judería mayor de Palma. Es muy destacable, artísticamente hablando, su fachada gótica.

Aquí se tratan dos temas. Por una parte, se hace mención de un profesor de este colegio, Vicenç Mut (siglo XVII), cuyas observaciones en astronomía le han hecho merecedor de un cráter en la Luna (Mutus). Parece, además, que el mismo Galileo utilizó datos recogidos por el telescopio de Mut.

Por otra parte, atendiendo al origen judío del enclave, se procede a jugar y apostar (con judías) al juego de la perinola judía. En esta ocasión, la probabilidad hace su aparición, como no podía ser de otra manera, en forma de juego (http://www.xeix.org/El-joc-de-la-baldufa-jueva).

1.5. Los baños árabes de Can Fontirroig

Uno de los únicos recintos que quedan en Mallorca de la época árabe (y aun así su verdadero origen es todavía fuente de discusión) son los baños árabes, sitos en la calle Serra. Una pequeña cúpula interior y un delicioso jardín son el escenario ideal para contar historias.

El marco descrito es aprovechado para explicar el hecho que, a causa de la conquista de la isla en 1229 por el rey Jaume I *el conqueridor*, en realidad las matemáticas en Mallorca dieron un paso atrás debido a que el sistema de numeración romano, y en general todas las Matemáticas, estaban más atrasadas respecto de sus hermanas árabes.

Finalmente, se cuenta a los más pequeños alguna historia de ambiente moro, extraída del libro de Malba Tahan, *el hombre que calculaba*.

1.6. La muralla renacentista de la ciudad

En este punto, el itinerario alcanza la fachada marítima de la ciudad, deambulando sobre la muralla renacentista que defiende la catedral y el palacio episcopal. La visión del mar nos sirve de excusa para trasladarnos a otra ciudad mediterránea amurallada, Siracusa, cuna del insigne Arquímedes.

Se cuentan aquí las famosas leyendas que jalonan la vida de uno de los cinco matemáticos más importantes de la historia. Después, pertrechados con cucharas de plástico y garbanzos secos, los más jóvenes experimentan con una improvisada catapulta la defensa de la ciudad. El objetivo es descubrir dónde debe colocarse el fulcro o punto de apoyo para lograr el lanzamiento más largo.

1.7. Las baldosas del paseo de es Born

Finalmente, el recorrido acaba en el paseo del Born, lugar que era utilizado hace algunos siglos –después de desecar y desviar la riera que por él pasaba– para realizar los torneos medievales a caballo.

En este paseo estudiamos el pavimento. A partir de material manipulable y de imágenes del anterior embaldosado, los participantes conocen la historia de la baldosa hexagonal que diseñó Gaudí y que actualmente es el emblema del paseo de Gràcia de Barcelona. Además, la solución actual es una excusa perfecta para hacer una interpretación geométrica del mínimo común múltiplo. Efectivamente, la construcción de grandes rombos a partir de teselas romboidales permite una visualización clara del concepto.

2. El llenguatge de la natura

En este itinerario, el marco escogido es un rincón litoral poco humanizado del término municipal de Palma, en el centro de la bahía homónima. Abierto y conocido como Es Carnatge, una pequeña construcción –ahora en ruinas– albergaba lo necesario para descarnar los animales muertos que antiguamente no eran aptos para el consumo humano. De esta manera se podían aprovechar la piel y los huesos para hacer grasa y jabón. De ahí el topónimo.

2.1. Las bolas de posidonia

El primer punto de parada es cala Pudent. Aquí los más jóvenes recogen bolas de alga (en realidad *Posidonia oceanica*) que el mar ha ido depositando. Se trata de pequeñas esferas compuestas por las fibras de esta planta que el mar ha ido engarzando. A partir de su aspecto despeinado, se comenta el teorema de Hopf-Poincaré, según el cual no podemos peinar una esfera de manera continua sin que quede una coronilla o sumidero en algún punto.

Después se corta una de ellas y se explica que el área de la sección central es un cuarto del área de la superficie esférica. Todo el mundo debe guardar las esferas que ha recogido para la siguiente actividad.

2.2. Los sistemas de numeración

La próxima parada se realiza delante de la casa abandonada, junto al mar. Aquí se explican algunos de los diversos sistemas de numeración y su origen natural referido en general a partes del cuerpo humano (10, 20, 60, 5...).

El juego consiste en reproducir el hecho contable de una tribu africana que no tenía más números que uno, dos y muchos. Los más jóvenes deberán participar en una guerra incruenta armados con sus proyectiles de posidonia. Como no saben contar, antes de partir cada uno deja en un círculo una piedrecita. Cuando regresen los supervivientes, cada uno recogerá una piedra y podrán evaluar la cuantía de las pérdidas.

2.3. El teorema de Jordan

Frente al islote de sa Galera, se cuenta a la gente que la dificultad de demostración de un teorema no siempre va ligada a la dificultad de enunciarlo. Es el caso del teorema de la curva de Jordan.

Todo el mundo distingue entre la parte terrestre del islote (interior) y la marítima (exterior). La línea de costa las separa unívocamente. Jordan enunció matemáticamente este hecho, pero se equivocó al demostrarlo pues su dificultad es elevada.

Jugar con el interior y el exterior es la mejor manera. Se atan las manos de dos personas con dos trozos de cuerda de un metro y medio de manera que queden entrelazadas. Ahora el objetivo es que las personas se separen sin deshacer los nudos. Y es posible, siempre y cuando el aro de una de las muñecas permita pasar la cuerda del otro participante.

2.4. La sucesión de Fibonacci

No podíamos hablar de Matemáticas en la naturaleza sin recurrir al maestro pisano. Esta actividad se realiza en el extremo opuesto al que hemos empezado nuestra pequeña caminata.

Cuando las margaritas (*Asteriscus maritimus*) están en flor o, en su defecto, cogiendo piñas de los pinos (en este caso *Pinus halepensis*), se explica a los asistentes que la naturaleza, y en concreto el mundo de las plantas, tiene predilección por ciertos números enteros que conocemos como sucesión de Fibonacci. Aquí aprendemos la ley de recurrencia que la genera y se habla por primera vez de proporción áurea.

2.5. El giro de los caracoles y las plantas

Otra vez de regreso, hablamos de los diferentes tipos de simetría que presentan los seres vivos. La simetría esférica, propia de los organismos más elementales, la simetría radial, propia de aquellos que ya detectan la gravedad pero que no tienen voluntad de movimiento, y la simetría especular que genera en los organismos superiores una derecha y una izquierda.

Pero algunos organismos presentan geometrías espirales o helicoidales como los caracoles. En estos casos, es curioso comprobar que más del 95 % de las especies eligen un crecimiento dextrógiro.

Los participantes se estiran en la arena, formada por multitud de pequeñas especies de caracoles, y recogen una bella colección en la que comprueban que todos presentan un crecimiento de giro hacia la derecha.

Por ahí cerca anda el lirio de playa (*Pancratium maritimum*) que curiosamente presenta sus hojas en giro helicoidal, pero esta vez levógiro.

2.6. La proporción áurea

Otra vez cerca de las ruinas de la casita, echamos una mirada a la naturaleza más próxima, nuestro cuerpo.

Armados con cintas métricas y calculadoras, se pide a los participantes que se tomen la medida de su altura y también de la altura de su ombligo. Después, simplemente deben dividir las dos medidas y observar el conjunto de resultados.

Siempre es muy provechosa la discusión, en función de la formación de los participantes, de temas como la media, la campana de Gauss, la muestra, la diferencia significativa entre adultos y pequeños, etc.

2.7. Los colores de la naturaleza

Para finalizar, se recuerda a los participantes que al principio se les encargó hacer un inventario de todos los colores que fueran viendo durante el recorrido. Y observamos ahora los frentes de olas que habitualmente acarician (o azotan) la costa en este lugar. El trabajo del monitor consiste en establecer el paralelismo entre la sinusoide marina y la distinta frecuencia de las ondas electromagnéticas que dan lugar a la percepción cromática. El arco iris es siempre una referencia imprescindible para comprobar que existe un orden real en la paleta de los colores de la naturaleza.

3. Matemàtiques a la defensiva

En esta ocasión, el escenario para nuestra propuesta matemática es el castillo de Bellver, situado en la cima de un pequeño monte cercano a la ciudad de Palma y desde la cual dominamos por completo su bahía. El castillo fue construido en el s. xiv por orden de Jaume II, primer rey del Reino de Mallorca.

3.1. La línea más corta entre dos puntos

La primera actividad se desarrolla en la barbacana o paseo exterior del castillo, frente a la puerta que da acceso al recinto interior. La propuesta es descubrir dónde están las poleas que permitían bajar el puente levadizo y explicar su ubicación. En efecto, se observa que aquellas se sitúan sobre el puente que ahora es de piedra, pero desplazadas de la dirección de la puerta. El motivo era evitar la carrera con ariete si el puente levadizo caía. En este caso, la estrategia era evitar la línea recta.

Por otra parte, sobre la puerta de entrada, tenemos el matacán, obra o murete defensivo que permite observar y hostigar el enemigo desde su vertical. En este caso, la gravedad actúa a favor de la línea recta.

3.2. Las marcas masónicas

Se propone ahora a los participantes que localicen el máximo de marcas masónicas en los sillares que conforman los paramentos de la muralla exterior. En ellos descubren marcas en forma de aspa, de rectángulo, de flecha, de dos o tres o cuatro rayas paralelas, etc. Una vez hecho el “inventario” se explica su función y se hace un pequeño estudio de sus simetrías.

3.3. La altura de la torre del homenaje

Esta actividad es la más elevada en cuanto a su fundamento teórico, aunque en realidad es una aplicación directa del teorema de Tales. En ella, se hace uso del método de Liu-Hui publicado en su *Manual de la isla Marina* para el cálculo de alturas inaccesibles. Dos parejas de padre o madre e hijo intentan colocar visualmente una vara vertical de manera que su extremo superior coincida con la parte superior de la torre del homenaje.

Una vez sabidas la altura de la vista del niño, de la vara, y la distancia que las separa, se repite la medida más atrás. El sistema de ecuaciones nos permite resolver la distancia a la torre y su altura.

3.4. El área del patio de armas

Esta es la primera actividad que se realiza en el interior del recinto. Aquí trabajamos la característica principal del castillo de Bellver. El hecho es que se trata de una de las poquísimas fortalezas en la historia de todo el mundo de planta circular. Seguramente realizada por cuestiones estéticas (el castillo ha hecho más las funciones de palacio que de defensa), la forma circular de este nos permite hablar de optimización de la superficie en relación al volumen de pared utilizado para cerrar el recinto.

Para explicarlo, se dispone de una cuerda cerrada de 20 palmos de perímetro (unidad utilizada en aquellos días) con la que los chavales deben ir construyendo rectángulos. También con cuadrados de un palmo de lado recortados en periódico, hasta los más pequeños calculan sus áreas. Se comprueba cómo el cuadrado es el que mayor superficie engloba, e incluso se hace una prueba con un octógono irregular, para extrapolarlo hasta el círculo.

3.5. El meridiano del castillo y François Arago

El castillo de Bellver tuvo el honor de proteger al astrónomo y matemático francés F. Arago en tiempos difíciles para cualquier galo que deambulara por España en 1808. Arago se encontraba cerrando el decimoséptimo triángulo de la última campaña de medida del meridiano de París (que había dado lugar a la creación del metro patrón), cuando sus mediciones y hogueras en lo alto de la sierra de Tramuntana lo hicieron sospechoso de espía. Su petición de protección lo llevó a habitar el castillo durante algunas semanas hasta su salida definitiva de la isla.

Además, el año pasado la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX, junto con otras instituciones, dejó una placa en piedra de 1 metro de longitud con el nombre de Arago en la línea que sigue el eje de simetría del castillo y que coincide con el meridiano local. Aprovechando esta orientación, se pide a las familias que sitúen los ocho puntos cardinales y ocho ciudades que encontraríamos en cada dirección.

Sobre la torre del homenaje, en el punto culminante, tenemos además un vértice geodésico que corresponde a la red trazada a principios del s. xx y desde la que se puede observar los vértices adyacentes.

3.6. La escalera de caracol

En nuestro subir y bajar de la torre del homenaje, transitamos por una hermosa escalera de caracol. Es la ocasión perfecta para trabajar una función de dos variables. En efecto, para que una escalera que se cierra sobre sí misma sea transitable, la combinación de sus dos variables debe permitir el tránsito erguido de una persona. Enseguida los más jóvenes se dan cuenta de que la pisada (ángulo de abertura del escalón aquí) y la contra-pisada (altura del escalón) deben combinarse adecuadamente para lograr el objetivo.

Además, las escaleras de caracol tenían la función de facilitar a los moradores del castillo la defensa del acceso, por el que sólo podían llegar los atacantes de uno en uno y en situación harto incómoda.

Una maqueta con un eje de hierro y escalones móviles de madera permite a los más pequeños construir *in situ* su propia escalera de caracol.

3.7. Un logo redondo

Finalmente, otra vez en el patio de armas, centramos nuestra atención en las dos galerías porticadas que recorren el interior de la planta baja y el primer piso. Las intersecciones de dos series de arcos de medio punto generan otros tantos arcos ojivales que fueron aprovechados por los maestros de obra para trazar hojas de trébol inseridas en sendos triángulos de Rouleaux. El papel continuo, un cordel y un rotulador permiten reproducir la figura que el castillo ha adoptado como logo.

4. Matemàtiques a la Seu

El marco escogido para el cuarto paseo matemático en familia es la catedral de Mallorca, más conocida en la isla como la Seu. Es un magnífico edificio comenzado a construir en 1306 y uno de los ejemplos más bellos del gótico catalán.

4.1. El juego de los rosetones mayores

El centro de interés más relevante por cuanto es original y propio solamente de esta construcción es el juego de luz que producen los dos grandes rosetones colocados en ambos extremos de la nave principal. En efecto, por una parte, los días 11 de noviembre y 2 de febrero se produce la proyección del rosetón del altar justo debajo del rosetón del portal mayor, de manera que se genera en la pared el efecto de dos rosetones. El otro efecto se produce en torno al solsticio de invierno, cuando la luz que atraviesa el rosetón de levante incide justo sobre el otro rosetón. El efecto es admirable especialmente desde fuera.

A partir de estos efectos (las visitas se procuran en estos días), se explica que la orientación de la catedral probablemente obedezca a criterios simbólicos (orientada hacia el nacimiento del Sol el día del solsticio).

Además, cobra especial relevancia el hecho de que el campanario, que aprovecha los paramentos de un antiguo minarete, está perfectamente orientado hacia La Meca con un descuadre de 10 grados respecto de la nave principal. Una maqueta con las paredes principales y una linterna permiten la reproducción del efecto.

4.2. Los arcos de sustentación

En el claustro catedralicio, de estilo barroco, aprovechamos para hablar de arcos y sustentación. La catedral es un edificio rico en estilos y en ella encontramos abundantes ejemplos de arcos (plano, rebajado, escarzano, de medio punto, ojival, e incluso, quizás, catenario).

Otra vez, el papel continuo, un cordel y un rotulador permiten a los más jóvenes poder trazar ellos mismos los diferentes tipos. Finalmente, tres maquetas en madera que están trazadas como arcos de medio punto, gótico y catenario, permiten comprobar de forma viva cuál es la sustentación de cada uno de ellos y las ventajas o desventajas que esto comporta.

4.3. Las dimensiones y su proporción

Otra vez en la nave principal, se comentan las dimensiones de la catedral. El hecho de que la reforma llevada a cabo por Antoni Gaudí eliminara de su centro el coro, hace resaltar el volumen de la misma.

Algunos guías hablan del rosetón más grande del mundo. Esto no es cierto, aunque sin duda sus once metros y medio y su trazado a base de triángulos sorprenden agradablemente.

Finalmente, se hace observar la esbeltez de los pilares. Los primeros cuatro, según el orden de construcción desde el ábside, tienen un perímetro de 4,93 m, mientras que los diez restantes arrojan una medida de 5,53 m. Este hecho se interpreta como si el grueso de los octógonos se hubiera llevado al límite de altura posible en aquellos primeros y la construcción amenazara con venirse abajo, lo cual aconsejó aumentar la base de sustentación.

4.4. Elementos geométricos

Lógicamente, son muchos los elementos geométricos que aparecen en una gran obra como la Seu. Es un buen desafío, planteado al principio, la localización de aquellos. Son especialmente interesantes los dodecaedros y hexaedros estrellados del baldaquino del altar mayor, obra también del arquitecto catalán Gaudí.

4.5. El retablo de Barceló y el 153

Finalmente, se aprovecha la reciente intervención del artista mallorquín Miquel Barceló en la capilla del Santísimo para disfrutarla y hablar un poco de simbología numérica. El hecho de que el retablo esté inspirado en el milagro de la multiplicación de los panes y los peces hace que podamos echar mano del milagro descrito por San Juan en que los apóstoles pescaron 153 peces.

El número 153 es un tesoro de propiedades aritméticas y geométricas. Número triangular y hexagonal, puede obtenerse como la suma de los cubos de sus cifras, generarse con ellas (51 x 3), como la suma de los cinco primeros factoriales, es un número de Friedman, forma un par de Ruth Aaron con el 154, es un número de Harshad... una verdadera maravilla.

5. De la divulgación a la enseñanza formal

A partir de este último itinerario para familias, surgió la idea de realizar una actividad desde el CentMat (Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic) para alumnos de 4° de ESO y 1° de Bachillerato durante una mañana completa y exclusivamente sobre trigonometría.

Cada monitor acoge un grupo-clase y distribuye su tiempo de la siguiente manera:

- Trabajo de campo en la catedral (2 horas).
- De camino al CentMat. Tiempo de recreo (1/2 hora).
- Obtención de resultados e interpretación (2 horas).

5.1. Trabajo de campo

Sobre las nueve de la mañana, un grupo de alumnos llega al punto de encuentro, entre la catedral y el palacio de la Almudaina. Ellos habrán trabajado en clase el método de Liu-Hui sobre cálculo de alturas inaccesibles. Una hoja de campo les permitirá ir haciendo las anotaciones pertinentes.

En primer lugar se les pide que hagan una estimación visual (que anotarán) de la altura de las torres que enmarcan la fachada principal. Después, con la ayuda de dos trípodes de diferente altura, un metro (con un milímetro de precisión) y una cinta métrica de 30 m (con un centímetro de precisión), aplicaran el método chino y anotaran las medidas, sin calcular el resultado final.

Después se fija la atención en el hecho de que la catedral y el campanario no formen un ángulo recto. Se pide a los alumnos que formulen hipótesis sobre el origen de este descuadre que deberán anotar. Después, se pasa a cuantificar el ángulo que realmente forman. Se toman las medidas con la cinta métrica de un triángulo adecuado que contenga los lados de la catedral (una parte) y del campanario. Tampoco aquí se calcula nada, pero sí se pide que se pronuncien sobre si es mejor escoger un gran triángulo o uno pequeño. Finalmente, se pasa al interior de la catedral.

Curiosamente, el acceso al interior de la catedral se realiza a través de su campanario. Este hecho se aprovecha para medir la orientación de uno y otra con la ayuda de unas brújulas. De esta manera, podremos cotejar datos y verificar resultados.

Es el momento de medir ángulos directamente. Con la ayuda de clinómetros escolares (Invicta, un grado de precisión) se mide a una cierta distancia la altura angular de uno de los pilares (que sabemos pasan por ser muy esbeltos). En esta ocasión, la medida del perímetro ya se les da hecha (pues hay algunos elementos delicados a su alrededor, como altavoces y candelabros, que no aconsejan el tránsito o manipulación de alumnos).

Finalmente, se les pide si es posible calcular el diámetro del rosetón de Levante, que pasa por ser el más grande del mundo. Entonces, desde el centro de la nave y desde el fondo (con una distancia entre sí cercana a los 25 m), se realizan las medidas angulares de la parte superior e inferior. Tendremos así dos sistemas de ecuaciones que resolver en el CentMat.

5.2. Obtención de resultados

Si el trabajo de campo obliga a los alumnos a plantearse delante de qué problema se encuentran, qué herramientas necesitan, qué medidas deben tomar… el trabajo (individual y en grupo) de cálculo, con la ayuda de calculadora individual y hoja de cálculo electrónica proyectada en común, les plantea (y ayuda a resolver) otras cuestiones igualmente importantes y ricas.

¿Por qué las medidas de una misma cosa con instrumentos idénticos no son las mismas? De manera natural, cuando se trabaja este tema surgen casi siempre las medias y las modas (incluso, a veces, la mediana), propuestas casi sin saberlo. El trabajo estadístico de las medidas y la acotación de errores tienen su espacio y tiempo significativo en la actividad.

Pero, además, la posibilidad de cambiar algunos datos en la hoja de cálculo proyectada nos brinda la posibilidad de reflexionar sobre si todas las medidas de un cálculo son igualmente importantes o si bien el método en cuestión es más sensible a unas que otras. Este es, en general, un campo totalmente nuevo y sorprendente para el alumno.

En el caso concreto del diámetro del rosetón, los alumnos se dan cuenta de que el instrumento utilizado no tiene una precisión suficiente. (¿Puede ocurrir esto en un problema de libro?)

Finalmente, a través de fotografías y de programas como el Google-Earth u otros de cálculo sobre ortos y ocasos en cualquier lugar del mundo, los alumnos pueden llegar a interpretar por sí mismos el motivo de la diferente orientación del campanario y la nave principal. Un hecho estéticamente magnífico.

Bibliografía

Pol, Josep Lluís et ál. (2008). *Històries matemàtiques de la Ciutat Vella*. Ed. Ajuntament de Palma.

Serra, Jaume et ál. (2006). *Història de la ciència a les Illes Balears*. Volums I i II (encara en edició). Palma: Conselleria d'Economia, Hisenda i Innovació del Govern de les Illes Balears.

Lucena, Martí et ál. (1997). *Palma. Guia d'arquitectura*. Palma: Col·legi Oficial d'Arquitectes de Balears.

Pascual, A. et ál. (1995). *La Seu de Mallorca*. Palma: José J. de Olañeta, Editor.

Webs consultadas

(Activas en febrero 2010)

El mapamundi dels Cresques
http://fabian.balearweb.net/post/4586

Página de la catedral de Mallorca
http://www.catedraldemallorca.info/

Página de la wikipedia sobre el castillo de Bellver
http://ca.wikipedia.org/wiki/Castell_de_Bellver

Imágenes del solsticio en la catedral de Mallorca
http://www.xeix.org/Resso-del-Solstici-a-la-Seu

Un paseo matemático por el Parque de las Ciencias de Granada

Juana M.ª Navas Pleguezuelos

Introducción[1]

Con motivo de la celebración en Granada de la XIX Olimpiada Matemática "Thales", los integrantes del Grupo LaX[2] de ese momento decidimos organizar una prueba por equipos de carácter matemático que se llevara a cabo en el Parque de las Ciencias (el parque interactivo más importante de Andalucía). Para este evento, se elaboró un cuaderno de trabajo que consistía en una guía para una visita matemática al Parque. Derivado de esta experiencia surge el siguiente material que presentamos aquí.

Nuestra intención es promover que el visitante utilice el cuadernillo para hacer matemáticas, empleando los materiales y experiencias que propone el Parque, aprovechando las peculiaridades de este enclave para mostrar la relación existente entre las Matemáticas y nuestro entorno.

1. Presentación del cuadernillo

El documento que a continuación presentamos consta de quince pruebas que se realizan en diversos emplazamientos del Parque de las Ciencias y que obligan a desarrollar distintos conocimientos matemáticos. Dado

1 Agradecemos al Parque de las Ciencias de Granada, la colaboración prestada para visitarlo, estudiar sus actividades y realizar pruebas, sin la que hubiera sido imposible la realización de este trabajo. Todas estas pruebas se pueden encontrar en: http://thales.cica.es/~granada/recursos/GRUPOLAX/PARQUEDELASCIENCIAS/index.htm

2 Miembros del Grupo LaX: Luis Berenguer Cruz (IES Américo Castro); Belén Cobo Merino (IES Los Neveros); Pablo Flores Martínez (Universidad de Granada); Francisca Izquierdo Gómez (CP La Purísima); Benito López Calahorro (IES Alhama); María Luisa Marín Cámara (IES Alhama); Antonio Javier Moreno Verdejo (IES Los Cahorros); Juana María Navas Pleguezuelos (CEP Baza); María Peñas Troyano (Universidad de Granada); Olalla Romero López (Colegio Santa María del LLano); Francisco Ruiz López (Universidad de Granada); José Manuel Toquero Molina (IES Nº 2 Salobreña); Rafael Ramírez Uclés (Colegio El Carmelo); Margarita García Schiaffino (Colegio Santo Tomás de Villanueva).

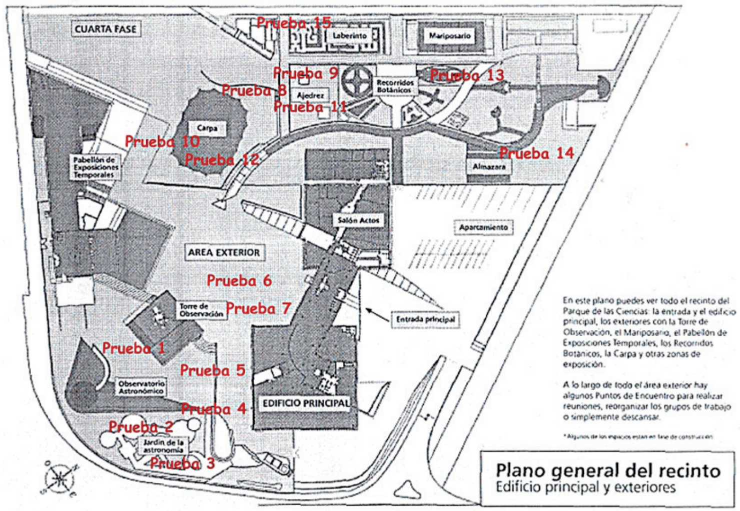
que el entorno es un museo interactivo, las pruebas tienen una fase manipulativa y otra fase de elaboración y desarrollo de destrezas de tipo matemático.

El cuaderno pretende ser autosuficiente, de manera que el visitante pueda servirse de él para llevar adelante el paseo matemático por el Parque, sin necesidad de monitores especializados. Cada prueba aparece con dos apartados: una introducción donde se especifica el interés general de la prueba, los objetivos y los conocimientos matemáticos implicados, y un enunciado donde se presenta la actividad y las cuestiones que hay que resolver. En algunos casos será necesario el uso de material añadido al existente en el propio Parque como explicitaremos en el desarrollo de las diferentes pruebas.

Hemos intentado que estas actividades puedan afrontarse con conocimientos básicos y prácticamente a cualquier edad, para de esta manera favorecer el acercamiento entre los visitantes al Parque y las Matemáticas.

2. Ejemplos de algunas pruebas

En primer lugar facilitamos el mapa del Parque con la ubicación de las actividades:



2.1. Prueba 1: ¡Qué pequeños somos!

Interés de la prueba

Con esta prueba intentamos hacer comparaciones entre nuestra especie, el hombre, y otras especies que nos encontramos en el mundo animal. Para ello partimos de unos datos que nos encontramos de forma curiosa en una escalera en la que, a medida que vamos avanzando, vemos qué animales u objetos naturales o construidos por el hombre van quedando bajo nosotros.

Objetivos

- Leer datos de forma numérica y de tablas.
- Trabajar con reglas de tres simples.
- Trabajar con fórmulas sencillas.
- Usar diferentes magnitudes.

Conocimientos implicados

La comparación de magnitudes a partir de la lectura de datos y usando reglas de proporcionalidad directa. El manejo de fórmulas sencillas para la resolución de problemas.

Material necesario

Prueba tamaño cuartilla, calculadora, bolígrafo y papel.

Enunciado

En un panel próximo a la torre encontraréis el tamaño de diversos animales. En las paredes de la escalera de la torre aparecen las alturas de otros animales. En esta prueba tendréis que establecer relaciones entre los tamaños de los animales y el tamaño del hombre.

A. Calcular cuántos hombres de altura media hay que poner para alcanzar la altura de:
   a. Un mamut.
   b. Una jirafa.

B. Un hombre de mediana estatura pesa 70 kg. Un elefante africano mediano pesa 5.000 kilos. Sus patas son cilíndricas, con un diámetro de 50 cm. Determinar cuántos hombres medios soporta cada pata del elefante.

C. La presión es la fuerza que se ejerce sobre la unidad de superficie y se calcula dividiendo la fuerza por la superficie donde se aplica la fórmula:
   Presión = Fuerza/Superficie
   Calcular la presión que ejerce el peso (entendiendo el peso como la fuerza sobre la superficie en la que actúa) del elefante sobre un centímetro cuadrado de su pata.

2.2. Prueba 7: la flauta de Pan

Interés de la prueba

La escuela pitagórica expresó la relación sonora entre dos fragmentos de cuerda como una razón matemática; actualmente esa razón relaciona las frecuencias de las notas que componen cada intervalo musical. Desde entonces, la construcción y afinación de instrumentos se desarrolla empleando la Matemática. La siguiente actividad es una aproximación a la relación entre música (sonidos emitidos por la flauta), física (diseño de los tubos que forman el instrumento) y matemáticas (relación entre las frecuencias de los sonidos producidos en los tubos).

En la "flauta de Pan" el visitante explorará relaciones entre los conceptos matemáticos utilizados y reflexionará sobre las estrategias puestas en juego para realizar la actividad.

Objetivos

- Aplicar conocimientos de medida.
- Aproximar datos obtenidos para minimizar los errores de cálculo.
- Aplicar correctamente, en fórmula dada, los datos obtenidos.
- Interpretar datos obtenidos en la fórmula.
- Extraer conclusiones referentes a la prueba.

Conocimientos implicados

La actividad propuesta trabaja contenidos de diversas áreas de la Matemática: la medida y el tratamiento de sus errores, interpretación de expresiones algebraicas, el concepto de valor numérico, la aproximación numérica, los conceptos de múltiplo y divisor, la interpretación de información presentada de distintas formas y la relación matemática existente entre las notas musicales.

Material necesario

Prueba tamaño cuartilla, calculadora, regla, flexómetro, bolígrafo y papel, cuerda con plomada de 1 metro y medio.

Enunciado

En la zona de Mecánica y Ondas se encuentra una flauta de Pan. El oído humano percibe los sonidos en un rango de frecuencias que oscila desde 20 hasta 20.000 hercios (el hercio, hz, es la unidad en que se mide la frecuencia).

Si consideramos una nota cualquiera, por ejemplo la nota *do*, su frecuencia se corresponde con 523 hercios, con su doble 1.046 hercios, con su mitad y así sucesivamente.

En los tubos abiertos de la flauta de Pan, la vibración que se produce tiene una frecuencia que viene dada por la fórmula: $v = \frac{170}{L}$, donde L es la longitud de los tubos.

Frecuencias	Notas
440 hz	*la*
494 hz	*si*
523 hz	*do*
587 hz	*re*
659 hz	*mi*
698 hz	*fa*
784 hz	*sol*

Tabla 1

A. Con ayuda de una cuerda, medir los cinco tubos más cortos de la flauta de pan y apuntar el resultado en la tabla.

Tubos	Longitud de los tubos en m
Tubo más corto	
Segundo tubo	
Tercer tubo	
Cuarto tubo	
Quinto tubo	

Con ayuda de la fórmula dada averiguar las frecuencias de cada tubo.

Tubos	Frecuencia
Tubo más corto	
Segundo tubo	
Tercer tubo	
Cuarto tubo	
Quinto tubo	

Aproximar, con ayuda de la tabla situada a continuación, con qué notas se corresponde el sonido que sale de cada tubo. Recordar que la frecuencia que obtenéis será un divisor (aproximado) de las frecuencias que os presentamos en la tabla 1.

Tubos	Nota que da cada tubo
Tubo más corto	
Segundo tubo	
Tercer tubo	
Cuarto tubo	
Quinto tubo	

2.3. Prueba 3: mirando las estrellas

Interés de la prueba

Desde la Antigüedad se ha sentido la necesidad de conocer el lugar en el que se vive y de orientarse en él. Esto ha conducido a la búsqueda de un sistema que permita construir mapas, cartas geográficas, cartas celestes, etc. La solución a este problema fueron los sistemas de referencia y las coordenadas, entre las que encontramos las coordenadas esféricas como forma de localizar las estrellas en la bóveda celeste.

Objetivos

- Reconocer la utilidad de los sistemas de referencia y las coordenadas.
- Identificar objetos por su posición en el espacio.
- Manejar coordenadas.

Conocimientos implicados

Interés y lectura de coordenadas, así como localización de puntos dadas sus coordenadas y de coordenadas dado un punto.

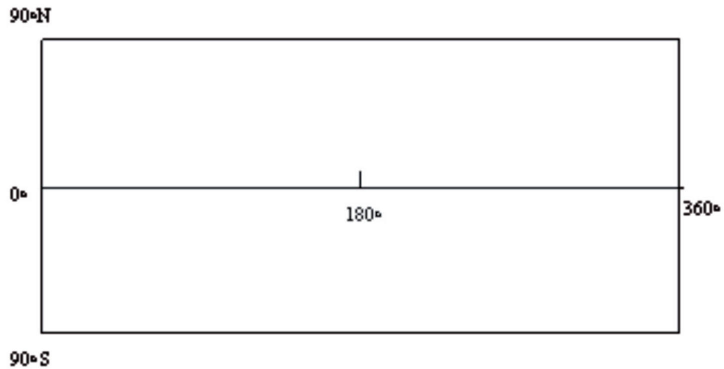
Material necesario

Prueba tamaño cuartilla, calculadora, flexómetro, bolígrafo y papel.

Enunciado

En el Jardín de Astronomía se encuentra un módulo que permite conocer las coordenadas esféricas celestes (la posición) de algunas de las más conocidas estrellas y constelaciones.

A. Indica cuáles son las coordenadas de las estrellas: Sirio y Espiga. (Ten en cuenta que entre dos meridianos hay 15º).
B. Indica a qué estrella pertenecen las siguientes coordenadas: 142º 43º S.
C. Sitúa en el sistema de coordenadas siguiente la estrella Arturo.



2.4. Prueba 15: el laberinto

Interés de la prueba

La fascinación de los hombres por los laberintos se remonta a la antigüedad. Sin lugar a dudas el interés que despiertan está ligado a la necesidad de resolver un problema vital, escapar de él.

Desde el punto de vista matemático, el laberinto supone enfrentarse a un problema para el cual es necesario tener alguna estrategia (tanteo, no repetir caminos, percibir los distintos caminos) y, si uno es el que se encuentra inmerso en él, también supone destrezas de orientación espacial.

Objetivos

- Utilizar el sistema de representación de dos dimensiones como una forma de interpretar, simplificar y resolver otros problemas más complejos.

- Desarrollar el sentido de la orientación espacial.
- Buscar estrategias de resolución de problemas.
- Entender y aplicar las escalas en la representación.

Conocimientos implicados

Para la realización de las dos primeras actividades no es necesario ningún conocimiento específico, y pueden ser resueltas por niños de corta edad. La tercera actividad implica tener algún manejo en sistemas de representación y medida.

Material necesario

Prueba tamaño cuartilla, calculadora, flexómetro y bolígrafo y papel.

Enunciado

Un laberinto es un lugar formado por intrincados caminos para dificultar la localización de la salida a la persona que está dentro o que intenta atravesarlo.

A. Debes recorrerlo, encontrar la salida y realizar un boceto de este laberinto.

3. Contenidos de las diferentes pruebas

Para diseñar el recorrido facilitamos un cuadro resumen donde aparecen las diferentes pruebas y los contenidos que se abordan en cada una de ellas.

Cuadro resumen: pruebas/contenidos

Prueba	Números y medida	Álgebra	Geometría	Funciones	Estadística	Lógica	Resolución de problemas
¡Qué pequeños somos!	X	X					
El tiempo nos controla	X	X	X	X			
Mirando las estrellas			X				
Formas: la avenida de Aristóteles			X				
El eco	X	X					
La vista nos engaña						X	X
Flauta de Pan	X			X			
Banda de Moebius			X				X
Hagamos trenzas			X				X

Prueba	Números y medida	Álgebra	Geometría	Funciones	Estadística	Lógica	Resolución de problemas
Pirámides en granada			X				
Torres de Hanoi						X	X
Atrapados			X			X	X
Paseando por el bosque	X				X		
Fauna y almazara			X	X			
El laberinto				X		X	X

4. Conclusiones

Como puede apreciarse, esta propuesta reúne tareas matemáticas que pueden incluirse en los bloques de Números, Álgebra, Geometría y Funciones del currículo de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria (Junta de Andalucía, 2002).

Las pruebas realizadas han pretendido aprovechar las Matemáticas que nos ofrecen las actividades expuestas en el Parque, prestando especial atención a aquellas que representaban situaciones en las que se utilizan realmente los conceptos matemáticos trabajados. Si bien en algunos casos nos vimos obligados a buscar tareas matemáticas tomando la actividad como pretexto, hemos tratado de seleccionar y dar mayor auge a aquellas actividades propuestas en el Parque que son manifestaciones de fenómenos que están relacionados directamente con los conceptos matemáticos que hemos seleccionado.

De esta forma pretendemos que los asistentes relacionen las Matemáticas con su utilización en los fenómenos del entorno, mostrando a la vez la riqueza de la fenomenología de los conceptos matemáticos y el potencial científico de las herramientas matemáticas para afrontar problemas del entorno.

Creemos que si logramos que los visitantes de un museo interactivo se fijen en estos aspectos, tendrán mayor disposición a buscar los fenómenos que se relacionan con los conceptos matemáticos en otros contextos.

Si los visitantes son además miembros de la comunidad educativa, esta apertura hacia las Matemáticas provocará que se acostumbren a pensar en la Matemática como una ciencia básica, herramienta de las ciencias, en la que sus conceptos tienen la funcionalidad de resolver problemas de estas ciencias. Con ello pretendemos colaborar a divulgar la idea de las Matemáticas como herramienta, más que como un conjunto de resultados, en consonancia con las indicaciones educativas actuales (Ferrini-Mundi, 2000; OCDE, 2003).

Bibliografía

JUNTA DE ANDALUCÍA (2002). Currículo de matemáticas de ESO.

Ferrini-mundy J. y Martin, W.G. (eds.) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París, OCDE.

Páginas web

http://thales.cica.es/~granada/recursos/GRUPOLAX/PARQUEDELASCIENCIAS/index.htm.

Matemáticas entre cuadros

Francisco Martín Casalderrey

1. El Arte y las Matemáticas

El Arte, como otros campos del conocimiento, es un ámbito adecuado para pensar matemáticamente. Las Matemáticas, con su metodología específica y su forma de ver la realidad, pueden contribuir al análisis de la obra de arte y a su lectura proporcionando al que la contempla herramientas que permitan dar un valor añadido a la lectura y, en general, contribuyan a que el espectador disfrute más con lo que percibe.

Cuando afirmamos esto no nos referimos exclusivamente a los aspectos más formales del lenguaje artístico, como pueden ser la composición más o menos geométrica de un determinado cuadro, o la estructura que definen los diferentes elementos narrativos de una pintura. En cada obra la mirada matemática ha de aportar un valor añadido al espectador, que le permita un nuevo acercamiento, no exclusivo evidentemente, a la obra contemplada.

El acercamiento matemático al Arte proporciona así una ayuda a la lectura de la obra, un complemento a otras visiones –la visión estrictamente artística, la histórica, la narrativa, entre otras– que coadyuva a la mejor contemplación y que puede aumentar el disfrute del Arte.

Por otra parte, los paradigmas científicos en el sentido de Kuhn[1] se extienden más allá del ámbito de la Ciencia. De algún modo podríamos hablar de metaparadigmas, relacionándolo con la *Gestalt* en un sentido más holístico, que contempla en cada momento histórico aquello que puede ser conocido como un todo, que se determina en cada ámbito de conocimiento en una visión epistemológica concreta, que a su vez se manifiesta en una praxis determinada y en el modo concreto en el que se crea, sea esta creación la artística o la científica.

1 KUHN, Thomas S. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions*, 2nd Ed., Chicago & Londres: Univ. of Chicago Press.

De algún modo, quedarían así conectadas las diferentes formas concretas de crear conocimiento y de crear Arte, a través de un vínculo que trasciende cada ámbito concreto de conocimiento y la Ciencia misma y permea otros aspectos de la cultura en cada momento. Estos metaparadigmas son reflejo de lo que se sabe y de cómo se concibe el conocimiento y el mismo hecho de qué es conocer en un determinado momento, pero delimitan a la vez las herramientas que sirven para concebir el entorno en el que la Ciencia y el Arte se desarrollan.

Así, por ejemplo, el Renacimiento en el Arte, en la Ciencia y en la Filosofía no pueden entenderse por separado. El avance del Álgebra en la Italia de Quattrocento y del primer Cinquecento, con Pacioli, Tartaglia y Cardano, coincide en el tiempo con la invención de la perspectiva matemática de Brunelleschi y el resto de los artistas-matemáticos –Paolo Ucello, Leonbattista Alberti, Piero della Francesca, Alberto Durero–. Todos ellos, además de artistas de primer orden, escribieron tratados de Matemáticas y no sólo sobre temas vinculados con la creación artística en sí. Por ejemplo, Piero della Francesca escribió un *Opúsculo sobre los cinco cuerpos regulares* y un *Tratado de ábaco* y Alberto Durero un libro *Sobre la Medida*[2], ambos dentro del estricto campo de las Matemáticas de la época.

Otro ejemplo, sin ánimo de ser exhaustivo en su enumeración, lo constituyen las vanguardias. En los comienzos del siglo xx coinciden en el tiempo la crisis de los fundamentos en Matemáticas (y en otras de las Ciencias clásicas) con los movimientos de vanguardia en el Arte. Muchos de los planteamientos de base en ambos movimientos son coincidentes no sólo en el tiempo sino también ese ámbito metaparadigmático del que hemos hablado.

2 MARTÍN CASALDERREY, Francisco (2000). Cardano y Tartaglia. *Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Madrid: Nivola.

Además, las Matemáticas han sido una herramienta auxiliar del artista de manera más o menos marcada a lo largo de toda la historia. Esto es muy claro en determinadas manifestaciones artísticas –cómo sería posible construir el Panteón sin geometría, o muchas obras de pintura sin una cuidada proporción matemática entre sus partes– y menos en otras.

Para analizar estas ideas de una manera más directa tomaremos un ejemplo concreto; una obra que permita mirar con ojos matemáticos y permita, a través de esa mirada, un acercamiento distinto al habitual del espectador que la contempla paseando por un museo. La obra que hemos elegido es la *Pala Montefeltro* o *Sacra conversazione* de Piero della Francesca, actualmente en la pinacoteca de Brera en Milán, por lo que también es conocida como la *Pala di Brera*.

2. Piero della Francesca, artista y matemático

Piero di Benedetto dei Franceschi (1416ca -1492), conocido como Piero della Francesca, era natural de Borgo Sansepolcro, un pequeño pueblo en el alto Tíber.

Además de pintor fue matemático y realmente combinó ambas profesiones, ilustrando con dibujos sus libros de Matemáticas y valiéndose de ellas en su trabajo de pintor.

En la *Pala di Brera* esa simbiosis es patente. No obstante, al mirarlo con ojos matemáticos nos llevaremos más de una sorpresa. En esta obra nada carece de intención; está llena de engaños visuales y de guiños matemáticos. Trataremos de desvelar algunos de ellos, en especial los referentes al espacio y la luz.

De la vida de Piero se sabe poco. Vasari en *Le vite*[3] dice de él:

> Piero estudió matemáticas en su juventud; y, aunque desde los quince años se había encaminado a la pintura, nunca abandonó el estudio de esta ciencia. [...] Fue Piero un grandísimo estudioso del Arte, se ejercitó mucho en la perspectiva, y alcanzó un altísimo conocimiento de Euclides. Comprendió mejor que todos los demás geómetras el trazado de los giros de los cuerpos regulares, y las mejores explicaciones que sobre estos asuntos que existen, provienen de su pluma.

Nació en Borgo Sansepolcro (Toscana) en la segunda década del Quattrocento, en una familia relativamente acomodada dedicada al comercio. Su padre fue por dos veces concejal de Sansepolcro. Debió, por tanto, Piero, como era habitual entre los hijos de los comerciantes, acudir a una *scuola d'abacco*, donde aprendería rudimentos de aritmética, geometría y un poco de álgebra y contabilidad.

Sus estudios como pintor parece que empezaron como aprendiz en algún taller en su pueblo natal, hasta que sus capacidades personales superaron el estrecho marco geográfico de su entorno y tuvo que viajar a Florencia y a otras cortes italianas renacentistas. Viajó también a Roma, donde trabajó al servicio del Papa Pío II, pero sus frescos en las estancias vaticanas fueron destruidos poco tiempo más tarde, durante el pontificado de Julio II, para ser sustituidos por los de Rafael.

Su obra artística fue poco conocida y estudiada hasta prácticamente el siglo xx. En los noventa se restauraron sus frescos del Ciclo de la Vera Cruz de la basílica de San Francisco en Arezzo, que son una auténtica maravilla.

3 VASARI, Girogio (1542-1550). *Vite de' più eccellenti architetti, pittori, et scultori italiani, da Cimabue insino a' tempi nostri*. (La Vida de los más excelentes arquitectos pintores y escultores italianos desde Cimabue a nuestros Tiempos. Grandes Temas Cátedra, 2002).

Fue maestro y amigo de Luca Pacioli, el autor de la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* (1494) y *De Divina Proportione* (1497), natural también de Sansepolcro, al que, como veremos, retrató en la Pala Montefeltro, en el papel de San Pedro Mártir de Verona.

En sus últimos años, con la vista ya muy escasa, redactó los tres libros matemáticos que han llegado hasta nuestros días: *De prospectiva pingendi, Trattato d'abaco* y *De quinque corporibus regularibus*, aunque Vasari afirma que escribió muchos otros que no nos han llegado.

De prospectiva pingendi es un espléndido tratado de cómo dibujar en perspectiva, no sólo un paisaje o un interior arquitectónico, sino incluso la figura humana.

El *Trattato d'abaco*, según confiesa el autor en la introducción, no fue escrito para su uso en una escuela de ábaco, sino a petición de sus amigos, probablemente artesanos como él de la pintura. Por lo demás, su estructura es similar a la de otros tratados de ábaco, con una única novedad muy significativa: el peso de la geometría es mucho mayor de lo habitual. De hecho, 48 de las 127 páginas están dedicadas a ella.

En el ámbito meramente aritmético, el *Trattato d'abaco* puede servir de muestra de otros tratados de la época. Veamos como ejemplo cómo introduce la regla de tres:

> Siete varas de tela cuestan nueve libras, ¿cuánto costarán cinco varas?

La libra era una moneda de la época, cuyo nombre derivaba del antiguo valor de una libra (de peso) de plata. Cada libra florentina estaba dividida en 20 sueldos, y estos en 12 dineros, exactamente como las libras esterlinas, divididas en 20 chelines y estos en 12 peniques, hasta la reforma decimal de 1971. La respuesta al problema es la siguiente:

> Deberás hacer esto: multiplica la cantidad que desees saber por lo que cuestan las siete varas de tela, que eran 9 libras, esto es 5 por 9, que hacen 45; divide después el resultado por 7, obtendrás 6 libras y te restarán 3 libras; conviértelas en sueldos y obtendrás 60, divídelos por 7, te dará como resultado 8 sueldos y te restarán otros 4; transfórmalos en dineros, eso hace 48; divide otra vez entre 7, el resultado es 6 dineros y 6/7. Por tanto tendrás que 5 varas de tela a ese precio costarán 6 libras, 8 sueldos, 6 dineros y 6/7.

En el *Libelus de quinque corporibus regularibus* retoma muchos de los problemas geométricos del tratado de ábaco, pero, en algunos casos, de manera más desarrollada y completa. El objetivo central de este libro es el estudio de los cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro.

Los problemas presentados en este tratado son del tipo:

> Tomemos un cuerpo esférico cuyo diámetro mida 7. Quiero poner en él una figura con cuatro caras triangulares equiláteras, de manera que cada vértice toque la circunferencia [sic]. ¿Cuánto medirán las aristas?

Como aproximación de π usa 22/7. Estudia también en el *Libelus* seis de los trece poliedros arquimedianos.

Como vemos, Piero, además de un pintor excelente, fue un matemático de cierta altura en el contexto de su época, y aunque esta faceta de su vida sea mucho menos conocida para el gran público, era obligado hacer referencia a ella en el contexto de este artículo.

Además, como veremos, sin esta consideración no se podría entender la obra artística de Piero della Francesca en su conjunto, ni de la *Pala di Brera*, objeto central de nuestros comentarios, en particular.

3. La *Pala di Brera*

Figura 1. *Pala di Brera*, Piero della Francesca 1472. Pinacoteca de Brera, Milán.

El cuadro de Piero titulado *Sacra conversazione* o *Pala Montefeltro*, viene denominándose unánimemente desde el ochocientos *Pala di Brera*, por encontrarse en la actualidad, y desde las requisiciones napoleónicas, en la Pinacoteca de Brera, en Milán.

Observándolo, vemos un espacio arquitectónico de estilo clásico representado en perspectiva cónica central, casi absolutamente simétrico, en su disposición. Destaca lo que parece ser el ábside de una iglesia que, en una primera impresión, parece de planta semicircular. Los arcos de los lados nos hacen pensar en una planta de dos naves perpendiculares. El ábside se cubre con una bóveda de cañón cubierta de casetones. La bóveda termina en un cascarón a cuarto de esfera, cubierto interiormente por una concha de vieira gigante, desde la que pende sostenido por una cadena dorada un huevo.

También aparentemente en semicírculo, se disponen nueve personajes distribuidos en pequeños grupos que rodean a la Virgen sentada en un trono, con las manos juntas, sosteniendo sobre el regazo al Niño, que relajadamente distendido parece que duerme.

La composición de los personajes resalta la simetría de la arquitectura y la subraya. La Virgen junta las manos y nos mira frontalmente resaltando el eje vertical. Los restantes personajes se reagrupan en dos tríos de santos y dos parejas de ángeles, dispuestos también simétricamente con respecto al eje central. La simetría sólo se rompe, de una manera muy marcada, en la disposición del donante, arrodillado a la derecha, en el primer plano. Se trata de Federico de Montefeltro, duque de Urbino, personaje controvertido, apasionado y apasionante de la Italia del Quattrocento, vestido con una armadura de gala y como en todos sus retratos, de perfil, ya que había perdido el ojo derecho y parte del entrecejo en un torneo. La asimetría en la disposición de Federico resalta, por ausencia, la reciente muerte de su mujer Battista Sforza, pocos meses después del nacimiento muy esperado de su primer hijo varón, Guidobaldo. La crítica no se pone de acuerdo en la datación del cuadro, aunque la mayoría de los autores lo sitúan entre 1472, año del nacimiento de Guidobaldo, y 1474.

La palabra *pala* en italiano hace referencia a un cuadro de altar, y la de Brera parece ser que estaba destinada en un primer momento a la iglesia de San Donato degli Osservanti, donde fue enterrado Federico, para trasladarse a la iglesia de San Bernardino, concebida como mausoleo para los Montefeltro, una vez que esta fue acabada. El traslado a Milán, sede actual, se realizó en 1811, en las requisiciones de obras de arte italianas ordenadas por Napoleón, en las que participó el matemático Gaspar Monge.

Los santos son, de izquierda a derecha, San Juan Bautista, patrono de Battista Sforza, San Jerónimo y San Bernardino de Siena, de la orden franciscana, canonizado en 1450; en la derecha están San Francisco, mostrando sus estigmas, San Pedro Mártir de la orden dominicana, con la herida en el cráneo que le causó su asesino, y San Juan, con su evangelio en la mano.

Sabemos que el rostro de uno de los santos retrata a un amigo de Piero. Se trata de fra Luca Pacioli, otro importante matemático renacentista. Los rostros de los ángeles, al contrario que los de los santos, resultan mucho menos realistas, probablemente era más difícil encontrar caras de amigos a los que retratar como ángeles y Piero los crea de su propia imaginación, vistiéndolos con telas lujosas, decoradas con joyas variadas.

Figura 2. *Pala di Brera*, Piero della Francesca, (detalle). De izquierda a derecha, San Francisco, San Pedro Mártir (retrato de Luca Pacioli) y San Juan Evangelista.

Simbólicamente el cuadro establece un paralelismo entre la arquitectura representada y los personajes. Así la Virgen, en el centro, se identifica con el edificio que simbólicamente representa la Iglesia, como comunión de los fieles. Además, las cabezas de los santos están dispuestas en correspondencia con los pilares corintios acanalados del edificio y los ángeles con los paneles de mármol que decoran el ábside, de los cuales, el central, de pórfido, es el único que vemos de frente y se sitúa exactamente detrás de la Virgen.

Por último está la concha y sobre todo el huevo que, en el plano de la imagen, pende sobre la cabeza de la Virgen. Parece ser que no era extraño en las iglesias colgar huevos de avestruz, objeto raro que podía atraer la atención de los visitantes, símbolo según algunos de la virginidad y según otros de la Iglesia.

4. La *pala* vista con ojos matemáticos

Empecemos a mirar con ojos matemáticos y comencemos analizando el espacio delimitado por la arquitectura que vemos en el cuadro. Aprovechándonos de la simetría haremos el trazado de la mitad izquierda, para luego duplicarlo de forma especular sobre la derecha. El resultado aproximado es el siguiente (ver figuras 3 y 4).

Figura 3. Trazado de la arquitectura de la *Pala di Brera*, con el punto de fuga.

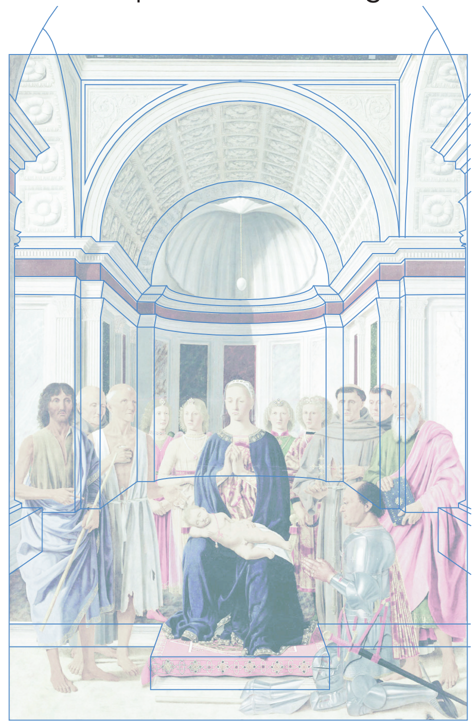


Figura 4. Compleción por simetría del trazado de la arquitectura de la *Pala di Brera*.

Observando el proceso vemos que la simetría del edificio representado es total, con excepción hecha de una estrecha franja en el lado derecho, que en la figura 4 viene marcada por las líneas arquitectónicas que sobresalen del contorno del cuadro. Se sabe, a raíz de la restauración llevada a cabo en 1982, que las dimensiones del cuadro original fueron recortadas en todos sus lados, pero fundamentalmente en la parte inferior.

El soporte está formado en la actualidad por ocho tablas de madera dispuestas horizontalmente, pero parece demostrado que originariamente el número de tablas era nueve. Podemos suponer, sin por ello dar mucho margen al error, que el cuadro era, por tanto, de una altura aproximada de 9/8 de la actual.

Si observamos en detalle los arranques de los arcos que se ven sobre las molduras en los dos laterales, veremos que no pueden corresponder a la parte final de los que vemos en escorzo a ambos lados, sino que son los extremos de un nuevo arco, paralelo a los del ábside y al plano de la imagen, que hemos completado en las figuras 3 y 4. El recorte en los laterales y en la parte superior serían, en nuestra opinión, mucho menores y probablemente ocasionados sólo por el normal deterioro de los cantos sufrido en los traslados. El inferior, sin embargo, correspondería a una tabla entera.

5. La reconstrucción de las medidas originales. Una hipótesis

Las medidas actuales de la tabla son 170 cm × 250 cm. Si añadimos en vertical 1/8 del total obtendríamos unas medidas de 170 cm × 281 cm, faltando por considerar los recortes laterales y superiores. Es razonable pensar, al menos en el terreno de la hipótesis, que al encargar la tabla al carpintero se le dieran unas medidas determinadas, y que probablemente una de las dos se expresase en un número entero de unidades de medida. Pues bien, la unidad de medida de longitud usada en esa época era el *braccio fiorentino*, que equivale a 58,36 cm. Expresadas las medidas en brazos florentinos vemos que la anchura corresponde prácticamente a tres brazos florentinos (175,08 cm) y, multiplicando esta altura por el número áureo, Φ, obtendríamos 283,29 cm. La coincidencia numérica hace bastante plausible la hipótesis. En ese caso, el cuadro original sería un rectángulo áureo de tres brazos florentinos de ancho, que habría sufrido un recorte de aproximadamente un octavo de su altura total en el lado inferior, un par de centímetros en el borde superior y otros recortes similares a ambos lados, algo mayor el de la derecha (Figura 5).

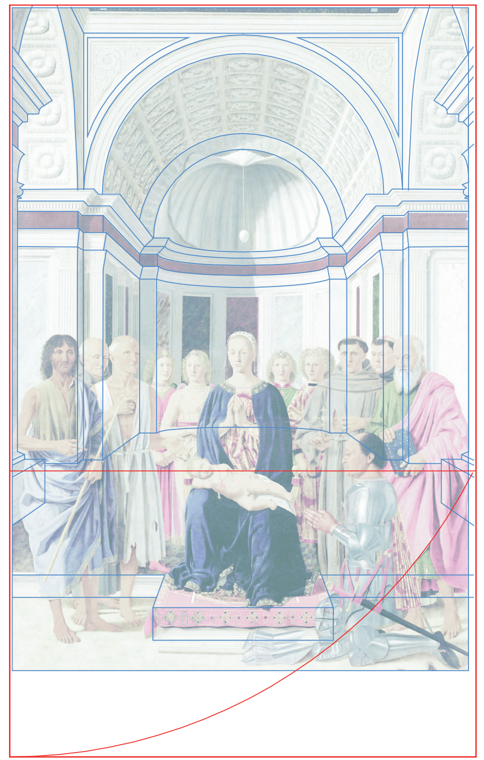


Figura 5. Medidas originales probables de la *Pala di Brera*, formando un rectángulo áureo de tres brazos florentinos de anchura, es decir, unos 175 cm × 283 cm; eso significaría que ha sido recortada en unos 33 cm en altura y unos 5 en anchura.

6. El espacio en la *Pala* de Piero della Francesca

La perspectiva matemática, inventada poco tiempo antes por Brunelleschi y descrita por primera vez por Leon Battista Alberti en *De pictura* y años después por el mismo Piero della Francesca en su *De prospectiva pingendi*, alcanza un grado altísimo de perfección en la concepción del espacio en el que se desarrolla la escena de la *Pala Montefeltro*. Intentaremos deshacer el proceso seguido por Piero, para de esta manera recomponer el espacio que vemos representado en el cuadro.

El proceso de representación en perspectiva no es siempre invertible; es necesario para poder deshacerlo valerse de ciertos recursos y poder tener algún dato sobre lo representado. Necesitamos en primer lugar encontrar en la imagen un cuadrado que se sitúe en un plano perpendicular al plano de la imagen, es decir, paralelo al suelo en un plano horizontal. Usándolo podremos tomar medidas en los planos en profundidad, paralelos al del cuadro, determinar el punto de vista, es decir, la distancia a la que se debe situar el espectador para poder ver el cuadro de manera que la perspectiva resulte realista. Podremos también determinar la planta de la iglesia que vemos y la situación relativa a ella de los personajes representados.

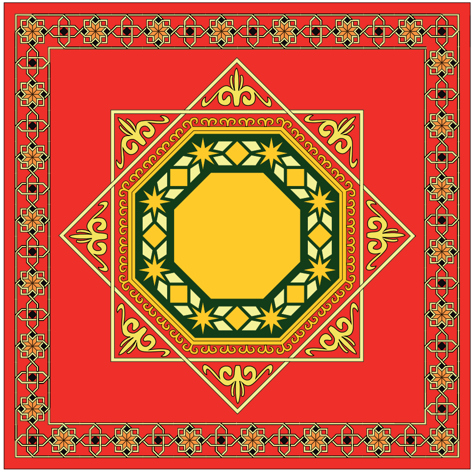


Figura 6. Reproducción de la alfombra bajo el sitial de la Virgen en la *Pala di Brera*.

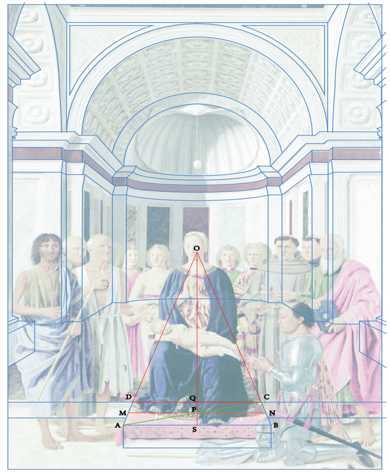


Figura 7. Partición en cuatro cuadrados de la peana de la Virgen.

I. La peana sobre la que está el sitial de la Virgen es un cuadrado. Observemos la plataforma en la que se encuentra el sitial de la Virgen. Esta cubierta por una alfombra que hemos reproducido en la figura 6. En la alfombra, orlada por una cenefa estrellada, se dibuja una estrella de ocho puntas formada por dos cuadrados entrelazados. Observando la distancia de los vértices visibles de esa estrella en el lado izquierdo de la imagen y en el frontal, vemos que la separación de la cenefa es aparentemente la misma. Por simetría, suponemos que la alfombra es cuadrada. Pero si nos fijamos, la cenefa cuelga por delante en su totalidad, mientras que a los lados, casi media cenefa se encuentra sobre la peana de la virgen. Podría esto hacernos pensar que la plataforma sea rectangular, pero, si analizamos que al estar esta unida al suelo del presbiterio, la alfombra no puede colgar por detrás, necesariamente y aun siendo ambas, peana y alfombra, cuadradas, el trozo que cuelga por delante ha de ser mayor que el que cuelga a cada lado. Por tanto, podemos afirmar que la Virgen se encuentra sobre una peana cuadrada.

II. El punto de fuga está sobre el rostro de la Virgen. Esto es fácilmente observable prolongando líneas perpendiculares al plano del dibujo y observando dónde se cortan. En la figura 3 hemos usado la de la arista de la cornisa que bordea el ábside y reaparece en el lado izquierdo de la imagen, y una de los lados de la peana sobre la que está sentada la Virgen. En la figura 7 lo hemos señalado con la letra O.

III. El eje de simetría del cuadro divide la peana de la Virgen en dos partes iguales. Esto es obvio, ya que la arista frontal de la peana es paralela al plano del dibujo, y la línea que pase por su punto medio y por el punto de fuga, es decir, el eje de simetría del cuadro, es la mediatriz de dicha arista.

IV. Dividimos la peana en cuatro. Para ello, trazamos la diagonal, figura 7, y una paralela a la arista frontal por el punto de intersección de la diagonal y el eje de simetría. Es decir, sabiendo que ABCD es un cuadrado, trazamos la diagonal AC, que corta al eje central en P y trazando una paralela a AB por P obtenemos MN. Los cuadriláteros ASPM, BNPS, CQPN y DMPQ son todos cuadrados e iguales.

V. Ajedrezado del suelo. Usando ahora uno de estos cuadrados, por ejemplo CQPN, y trazando una diagonal, podemos formar una retícula de cuadrados sobre el suelo. El resultado del proceso lo podemos ver en la figura 8, en la que hemos cuadriculado el plano en el que se encuentra el presbiterio usando como tesela el cuadrado de la peana de la Virgen.

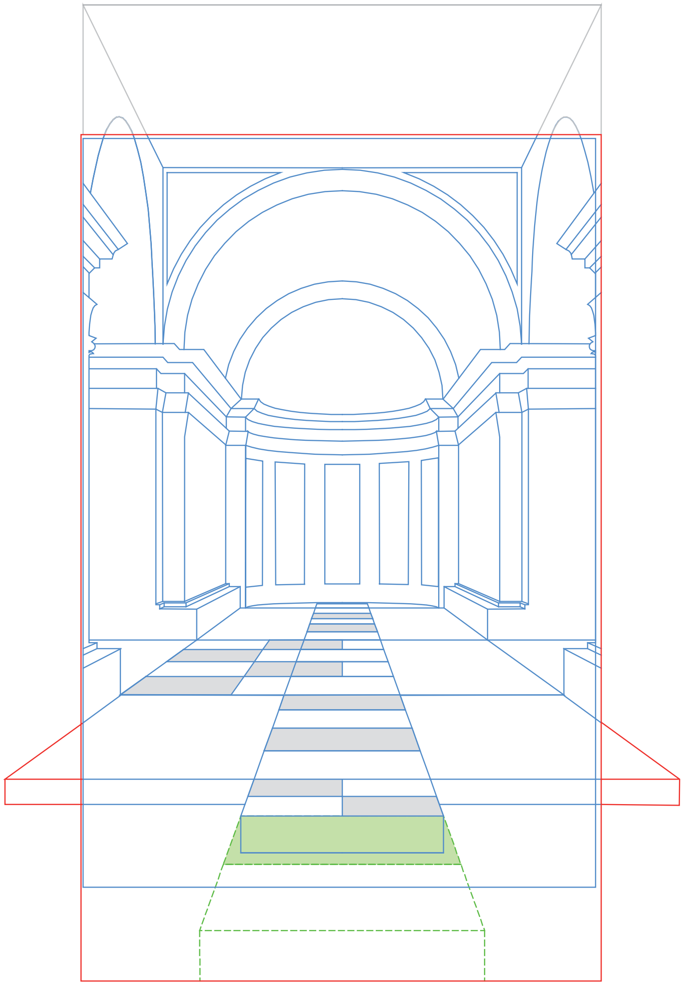


Figura 8. Esquema de la arquitectura representada en la *Pala de Brera*. En trazo azul las líneas en el interior del cuadro, el rectángulo azul delimita las dimensiones actuales, el rectángulo rojo las posibles dimensiones del cuadro originalmente, en gris se ha prologado hacia arriba la arquitectura; por último, las líneas verdes a trazos, prolongan hacia el frente el plano del suelo del presbiterio y la plataforma de la Virgen, hasta el límite de las dimensiones originales.

VI. Medición del espacio. El proceso anterior nos permite medir distancias en el espacio. Para usar como medida la peana de la Virgen observemos que San Juan Bautista, el primero de los santos por la izquierda, mide 3/2 del lado de dicha peana. Si atribuimos una medida al santo de 175 cm, entonces el lado de la peana sería de 116,7 cm, que es aproximadamente dos brazos florentinos.

Las medidas totales, expresadas en brazos, serían aproximadamente las siguientes (Figura 8): la nave mide de anchura ocho brazos florentinos; la longitud visible la podemos dividir en varios tramos: el más cercano a nosotros mide, desde el borde del cuadro original hasta la línea que delimita el presbiterio, seis brazos; el tramo comprendido entre la línea del presbiterio y la más cercana del cruce de la nave y el crucero es un cuadrado de ocho brazos de lado, al igual que el cuadrado delimitado por el cruce de las naves; el espacio situado debajo de la bóveda de casetones mide diez brazos de longitud por ocho de anchura y el ábside en profundidad mediría algo más de dos brazos. El espacio total resultaría así mucho más profundo de lo que aparenta y mucho menos monumental por su anchura y su altura.

Las medidas resultan, por tanto, sorprendentes. Por ejemplo, la anchura de la nave mediría sólo 467 cm; el huevo estaría a una distancia horizontal de la cabeza de la Virgen de 26 brazos, es decir, unos 15 metros. El diámetro de este último sería de 23 cm, lo que confirmaría que es un huevo de avestruz.

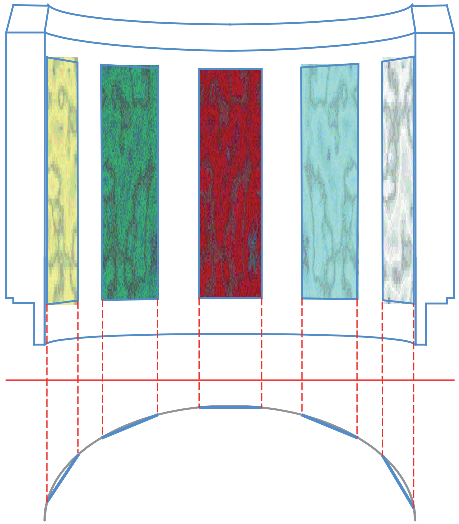


Figura 9. Reconstrucción de la planta del ábside en la *Pala di Brera.*

VII. El ábside no es semicircular. En efecto, como ya hemos señalado, el ábside mide algo menos de dos brazos de profundidad mientras que de achura mide siete, ya que el arco que lo define tiene medio brazo de anchura. Resulta así semielíptico, con ejes de 7 y 2,15 brazos, lo que supone que la elipse sea inscribible en un rectángulo áureo (Figura 9).

VIII. La Virgen mide más de dos metros de altura. Hemos tomado como medida de San Juan Bautista 1,75 metros. San Juan y la Virgen se encuentran aproximadamente en el mismo plano, paralelo al del dibujo. Una persona sentada en una silla disminuye su altura en un 20% aproximadamente, variando poco este porcentaje con la altura de la silla y, puesto que la cabeza de la Virgen sobresale sobre la línea de las de los santos, aun considerando que éstos se encuentran en un plano unos 15 cm más bajo que el del sitial de la Virgen, ésta mediría en proporción 2,08 m de altura. Aunque pase desapercibido a simple vista, la Virgen es desproporcionadamente grande en relación con los santos. Obviamente, Piero sigue también en este cuadro la tradición medieval, que establece la jerarquía en la composición en relación con el tamaño con el que los personajes son representados. Los ángeles, por el contrario, resultan ser muy bajitos, poco más de 1,50 m.

IX. Reconstrucción de la planta. Estamos ya en condiciones de reconstruir la planta del espacio escénico representado en la *Pala Montefeltro*. De acuerdo con los datos anteriores, la planta sería aproximadamente la siguiente (Figura 10).

Como ya hemos señalado las dimensiones sorprenden; el espacio, que parecía mucho menos profundo, resulta ser enorme, de 20 m; la anchura es de medidas casi domésticas, no alcanzando siquiera los cinco metros.

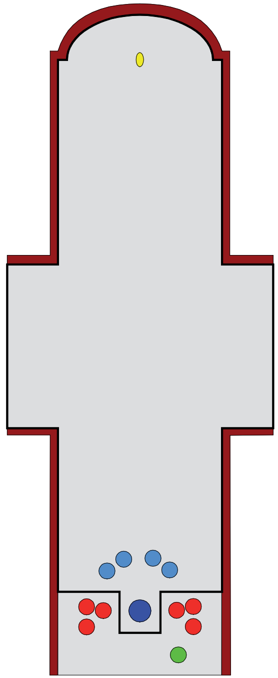


Figura 10. Reconstrucción de la planta: en rojos, ubicación aproximada de los santos, en azul oscuro la Virgen, en verde el duque y en azul claro los ángeles; el huevo de avestruz aparece en blanco.

X. Determinación del punto de vista. En su *De prospectiva pingendi*, escrito en la misma época en que pintó la *Pala*, Piero establece las reglas de la perspectiva matemática. En esencia, estas no difieren de las de Alberti en su *De pictura* (1436), ni de las que definió a principios del Quattrocento Brunelleschi.

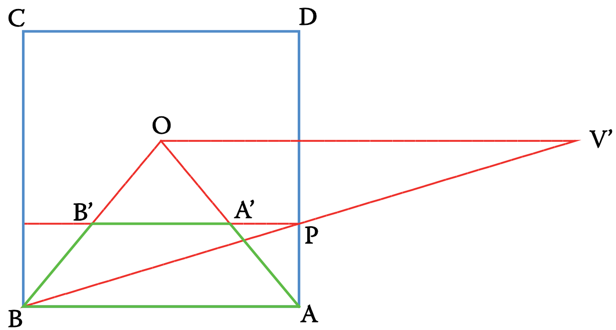


Figura 11. Método de representación en perspectiva propuesto por Piero en De prospectiva pingendi.

El proceso propuesto es el siguiente. Queremos representar en el plano del dibujo ABCD un cuadrado perpendicular a él y de las mismas dimensiones, de la manera en la que se vería desde un punto V, situado sobre la perpendicular al plano ABCD por O. Alargamos el plano ABCD hacia uno de sus lados y dibujamos, en la horizontal que pasa por O, un punto V' de manera que OV sea igual a OV'. Trazamos la línea V'B que corta a AD en P; por P trazamos una horizontal que corta a OA y OB en los puntos A' y B'. El trapecio ABB'A es la representación buscada del cuadrado.

Aplicando este proceso de manera inversa a la *Pala di Brera*, obtenemos la figura 12, que fija el punto de vista a una distancia aproximada de 5,8 m, es decir, 10 brazos florentinos.

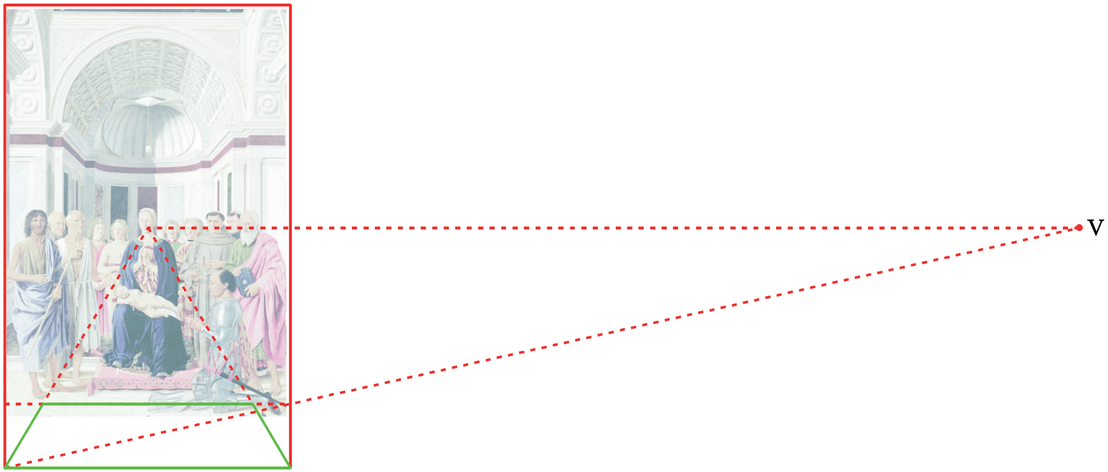


Figura 12. Determinación del punto de vista en la *Pala de Brera*, siguiendo el método de Piero della Francesca.

Volvamos a la figura 10. Observándola, descubrimos uno de los engaños a los que Piero somete a nuestros ojos: el huevo, que a simple vista parece pender sobre la cabeza de la Virgen, en realidad se encuentra a mucha distancia, unos 26 brazos florentinos, que equivalen a unos 15 metros.

Nuestro dibujo, obviamente, no incluye aquellas partes sobre las que el cuadro no nos da información. Por ejemplo, no podemos calcular la longitud de la nave transversal, ya que solo podemos apreciar en la pintura el arranque de las bóvedas y, de ellas, sólo la anchura correspondiente a un casetón.

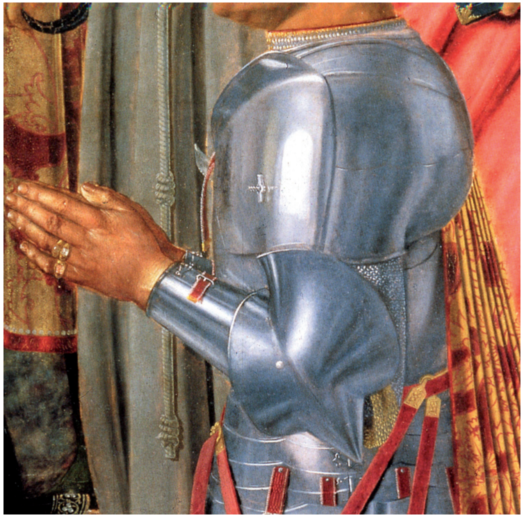
Tampoco tenemos información sobre la longitud total de la nave principal, ya que queda a nuestra espalda como espectadores. El límite de lo visible define un plano vertical, perpendicular a dicha nave, que es precisamente el plano del dibujo.

De todas formas, esta ausencia de información no es absoluta y, observando ciertos detalles, podemos encontrar muchas más cosas que permanecen ocultas y que, a simple vista, pasan desapercibidas.

Cuando miramos el cuadro por primera vez, tendemos a situar a los personajes en el crucero y a pensar que la luz que los ilumina procede de la parte izquierda de la nave transversal. Sin embargo, cuando analizamos la situación real, con la reconstrucción de la planta de la iglesia y la situación de los personajes en ella, vemos que esto es imposible.

Deben existir, por tanto, al menos, dos entradas distintas de luz. Una, la de la luz que ilumina el ábside y la concha que procede, efectivamente, del lado izquierdo de la nave transversal. La otra, la de la luz que ilumina a los personajes, no puede provenir del extremo derecho de la nave transversal, ya que el crucero queda a la espalda de los personajes. Debe, por tanto, ser distinta y entrar por algún punto fuera del alcance de nuestra vista, a nuestra espalda como espectadores, del lado de acá con respecto al plano dibujo. Probablemente de una ventana en el lateral izquierdo de la nave principal.

En efecto, si observamos la hombrera de la armadura del duque, podemos ver con claridad esa ventana, o mejor su reflexión anamórfica. Como la hombrera tiene una forma casi cilíndrica de eje vertical, esa ventana, de forma rectangular y coronada por un semicírculo, debe encontrarse efectivamente en el muro derecho de la nave principal y efectivamente puede ser la fuente de la luz que ilumina a los personajes.



Figuras 13 y 14. Detalle de la hombrera de la armadura del duque Montefeltro. En él podemos distinguir el reflejo de dos ventanas: una situada en el lateral izquierdo de la nave principal, muy iluminada; la otra, en el lateral derecho, en penumbra; entre ambas se extiende la nave, a la espalda del espectador, en la oscuridad.

Además, si observamos con atención, en la parte del gorjal que cubre la espalda, podemos distinguir otra ventana, ésta en penumbra, que correspondería a la que se encuentra en el muro opuesto de la nave, enfrentada a la anterior. Aparece mucho más oscura ya que se encuentra del lado contrario al del Sol, y evidentemente ha de encontrarse a la derecha de la nave. Entre los reflejos de ambas ventanas se ve una zona oscura más difícil de distinguir, que en nuestra opinión correspondería a los pies de la iglesia, probablemente con el portal de acceso, a la espalda del espectador.

7. La luz, la ubicación, la época y la hora

Que la luz provenga del lado izquierdo plantea un problema. Muchos críticos, analizando esta luz mágica que ilumina toda la escena y que proviene del exterior a través de dos ventanas distintas, como hemos visto, opinan que es una luz inventada, imaginada, puesto que si la iglesia se encontrase bien orientada, es decir, con el ábside apuntando hacia el Oriente, el Sur quedaría a la derecha del espectador y, por tanto, afirman que nunca podría entrar desde la izquierda de la escena.

Comprobaremos que ambas afirmaciones son discutibles. No sabemos si Piero se basó en una iglesia existente para concebir el cuadro, pero podemos suponer que se inspiró al menos en las luces de Urbino y que, por tanto, aunque sólo sea en su imaginación, la situó en sus proximidades. A estas alturas, y dadas las dimensiones escasas del edificio representado, más que iglesia deberíamos llamarlo capilla.

Nuestra capilla la podemos considerar, por tanto, ubicada en la ciudad del duque Montefeltro. El palacio ducal, centro de la ciudad, se encuentra a 43° 43′ 26″ Norte y 12° 38′ 13″ Este. Los 43°43′ de latitud Norte corresponden a los lugares más septentrionales de la península Ibérica (Estaca de Bares tiene una latitud aproximadamente igual).

En una iglesia bien orientada construida en estas latitudes, efectivamente, la luz entra desde el lado derecho, de manera tal que, a mediodía, cuando se celebra la misa mayor, el Sol entra por el brazo derecho del crucero e ilumina el altar en el momento de la consagración. No obstante, los 23° 30′ de la inclinación de la eclíptica con respecto al plano del Ecuador terrestre hacen que en invierno el Sol salga ligeramente al Sureste y se ponga ligeramente al Suroeste. En verano las cosas suceden al revés: el Sol sale ligeramente al Noreste y se pone ligeramente al Noroeste. Si observamos la luz que se proyecta sobre el ábside (Figura 15), vemos que ilumina el huevo y proyecta el arco del brazo izquierdo del crucero sobre la concha. Los casetones de este arco aparecen muy iluminados por la luz que atraviesa el arco, casi perpendicular a ellos.

Figura 15. Detalle del ábside.

En la figura 16 podemos apreciar que para que la luz del Sol pueda incidir en el huevo e iluminarlo, este ángulo debería ser de unos 70° con respecto a la dirección Norte-Sur.

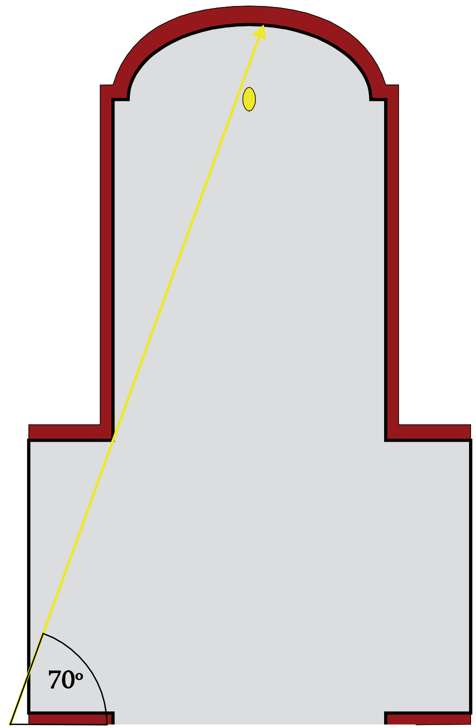


Figura 16. Ángulo mínimo de la luz para poder iluminar el huevo.

Pues bien, si hacemos un estudio de las puestas de Sol en la latitud de Urbino, encontramos un corto periodo del año en el que el último rayo del Sol forma un ángulo menor o igual a 70°. Este periodo del año es breve, un intervalo de poco más de una semana, centrado en el solsticio de verano, es decir, del 17 al 25 de junio. Por tanto, durante ese corto periodo de días, el Sol podría entrar en una iglesia bien orientada con un ángulo como el necesario para iluminar el huevo y reflejar la sombra del arco sobre la concha. Además, esto ocurre durante sólo unos minutos antes de la puesta de Sol, cada uno de los días señalados.

Esta afirmación la podemos corroborar por varios caminos. Por un lado, si observamos de nuevo la figura 13, y en ella la proyección del arco sobre la concha. El máximo de la curva de la sombra reflejada se encuentra aproximadamente en el borde derecho de la concha. Si medimos cuánto ha bajado ese punto con respecto al arco, vemos que es una cantidad muy pequeña, poco más de la cuarta parte del radio del arco, es decir, poco más de un brazo florentino. Sin entrar en cálculos trigonométricos detallados, podemos afirmar que es una luz sensiblemente horizontal, como correspondería a una luz del atardecer, poco tiempo antes de que se ponga el Sol.

Por tanto, podemos afirmar con poco margen de error que, si partimos de la hipótesis de que el cuadro de Piero fuere ambientado en Urbino, en una iglesia real o imaginada suficientemente bien orientada, la escena representada sucede en la última semana de junio, alrededor de las siete horas de la tarde, poco antes del atardecer.

Otra conclusión colateral que podemos afirmar es que, para que esto sea posible, la longitud de los dos brazos de la supuesta nave transversal ha de ser bastante escasa; a lo sumo dos brazos florentinos y medio, como en la figura. Alternativamente, tendría que haber una ventana en el muro Oeste del lado izquierdo de esa nave (aproximadamente en el vértice del ángulo señalado en la figura 16).

Por último, esa misteriosa luz pálida que llena la escena nos permite apreciar la existencia de un altar de color claro o cubierto con un paño claro, situado en el ábside, oculto por los personajes que pueblan la escena. La luz reflejada por ese altar la vemos iluminando la parte inferior de la moldura en el lado izquierdo del presbiterio.

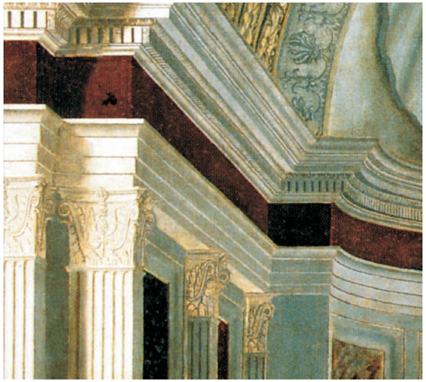


Figura 17. Detalle de la luz reflejada sobre la moldura del lado izquierdo del presbiterio.

8. La *Pala di Brera* en tres dimensiones

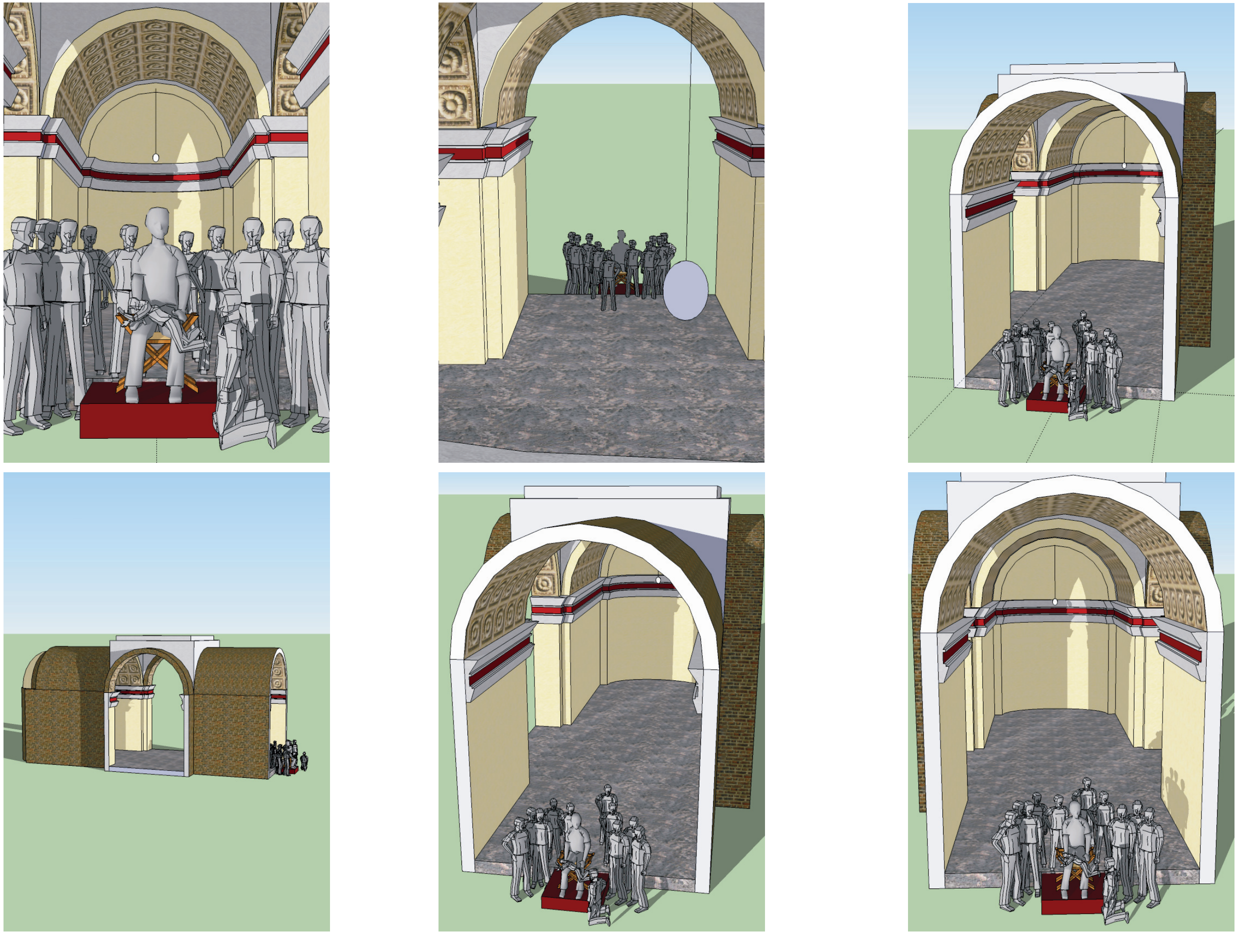
Para acabar esta mirada matemática a la *Pala di Brera*, y a modo de compilación de toda la información que hemos ido descubriendo, hemos hecho una reproducción aproximada en 3D de la escena representada. Hemos utilizado únicamente la información deducible del cuadro, sin licencias artísticas a la hora de describir lo que no se ve o lo que no puede ser calculado.

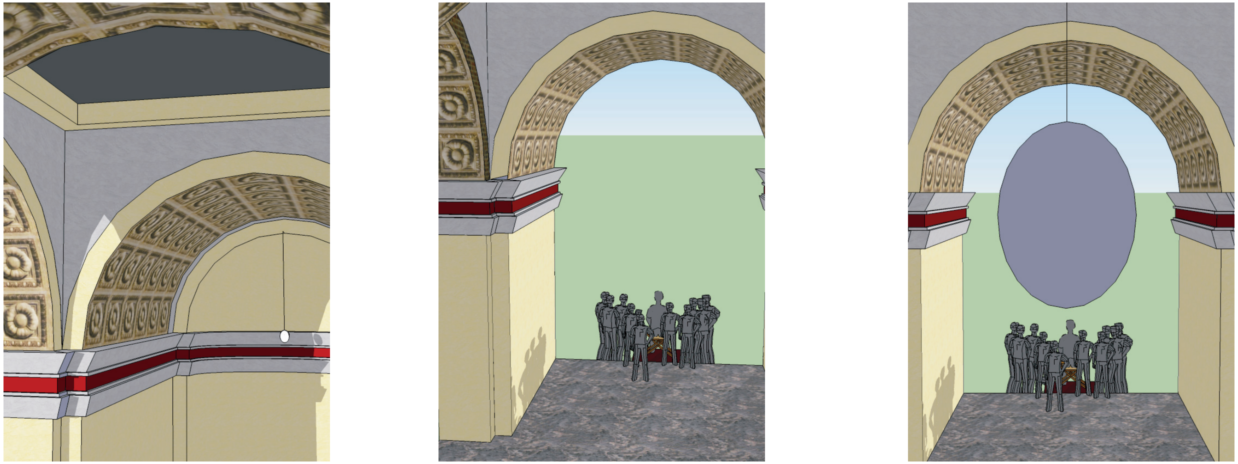
Nos hemos servido para ello del programa Google SketchUp 7.0, que se puede descargar de forma gratuita de la dirección http://sketchup.google.com/download/. Las medidas de la maqueta son las que hemos calculado a lo largo de este artículo; también lo son las medidas de los personajes. La ubicación se ha determinado en las coordenadas geográficas de Urbino. Las luces y las sombras que se aprecian en las distintas imágenes de la página anterior corresponden, de acuerdo con lo expuesto, a la luz de Urbino, el 21 de junio, a las 7:15 de la tarde, hora solar.

No hemos prolongado la nave más allá del plano del dibujo, por lo que no hemos representado las ventanas de las que se habla en este artículo. No obstante, la luz que ilumina a los personajes en nuestra maqueta proviene sustancialmente del mismo lugar y desde luego con el mismo ángulo.

Presentamos nueve vistas de la misma maqueta en 3D y con la misma luz.

Empezando de arriba a abajo y de izquierda a derecha, podemos ver, en primer lugar, una vista muy parecida al cuadro de Piero. El huevo aparece suspendido sobre la cabeza de la Virgen y la vista, como el cuadro, ofrece una simetría central. La segunda vista muestra desde una cierta distancia el aspecto global de la maqueta. La tercera muestra las bóvedas desde un punto de vista situado a la altura de la cornisa, desde uno de los vértices del cuadro definido por el cruce de las naves. La cuarta nos ofrece un picado desde detrás del huevo orientado hacia los personajes, que aparecen de espalda. La quinta, al igual que la séptima, es un picado frontal, que sirve para apreciar la distancia que efectivamente separa la posición del huevo de la cabeza de la Virgen. En la octava, el punto de vista se ha alzado con respecto a la primera, de manera que el aplanamiento se mitigue y podamos apreciar más facilmente la profundidad de la nave. Por último, en la novena hemos querido ofrecer la perspectiva contraria a la mostrada en el cuadro original. Manteniendo la simetría central, el punto de vista se ha situado sobre el punto central de la cornisa que recorre el ábside. El huevo, en primer plano, suspendido sobre la cabeza de la Virgen, parece ahora enorme y queda aparentemente enmarcado por la bóveda bajo la que se encuentran los personajes.





Figuras 18-26. Distintas vistas de la maqueta 3D de la *Pala di Brera*, cambiando el punto de vista.

9. Invitación a seguir mirando

Hemos tratado de analizar algunos aspectos de esta esplendida obra de Piero della Francesca. Sin duda nuestras reflexiones, aun desde el punto de vista matemático, son solo algunos de los muchos acercamientos posibles. Haciéndolas nos hemos sentido cómplices de este matemático y pintor que no descuidó ninguno de los detalles al concebir el espacio, los objetos, los personajes, la luz que lo ilumina todo...

Los engaños que el pintor dispone como trampas visuales ante el espectador, se transforman en guiños cómplices para los ojos de quien atravesando la tabla va más allá y los descubre. El Piero matemático se vuelve cercano cuando aprendemos su lenguaje, descubrimos sus claves y apreciamos su arte con ojos matemáticos.

Bibliografía

Francesca, Piero della (2005). *De prospective pingendi. Edizione critica a cura di G. Nico-Fasola. Con una lettura di Eugenio Battisti*. Firenze: Casa Editrice Le Lettere.

Kuhn, Thomas S. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions* (2nd Ed.). Chicago & Londres: Univ. of Chicago Press.

Martín Casalderrey, Francisco (2008a). “Ha vuelto para mirarnos”. *Suma* nº 57, págs. 67-72.

— (2008b). “El Greco en otra dimensión”. *Suma* nº 59, págs. 67-72.

— (2008c). “Un Zurbarán anamórfico”. *Suma* nº 58, págs. 81-86.

— (2009). *Cardano y Tartaglia. La aventura de la ecuación cúbica*. Madrid: Nivola.

— (2009a). “Velazquez y el retrato del espacio”. *Suma* nº 60, febrero de 2009, págs. 73-78.

— (2009b). “Piero de la Francesca y el engaño de los ojos. I. El espacio”. *Suma* nº 61, págs. 63-70.

— (2009c). “Piero de la Francesca y el engaño de los ojos. II. La luz”. *Suma* nº 62, págs. 63-68.

Maetzke, Anna Maria (1998). *Piero della Francesca*. Silvana Editoriale.

Mussini, Massimo & Grasselli, Luigi (2008). *Piero della Francesca. De Prospectiva pingendi*. Sansepolcro (Arezzo): Aboca Museum Edizioni.

Vasari, Giorgio (1542-1550). *Vite de’ più eccellenti architetti, pittori, et scultori italiani, da Cimabue insino a’ tempi nostri*. (La Vida de los más excelentes arquitectos pintores y escultores italianos desde Cimabue a nuestros tiempos. Grandes Temas Cátedra, 2002).

Cine y Matemáticas

José María Sorando Muzás

1. Cine vs Matemáticas

El cine y las Matemáticas, como cualquier arte o ciencia, son medios de conocimiento. Siendo diferentes sus objetos de atención y los lenguajes que utilizan, generan discursos distintos.

Las Matemáticas profundizan en nuestra percepción del mundo, organizándola y buscando el control racional del espacio físico, de las situaciones problemáticas, así como de los fenómenos naturales y sociales. Crea para ello conceptos abstractos (números, formas y relaciones) y analiza su funcionalidad (operaciones, invariantes, propiedades y estructuras). Según demostró la Psicología Genética con Jean Piaget[1], las tres estructuras matemáticas básicas (algebraicas, topológicas y de orden) se corresponden con aquellas en que se organiza espontáneamente el conocimiento humano desde la primera infancia. De ahí la transferencia del aprendizaje matemático al desarrollo intelectual global; de ahí su valor educativo.

El cine se sumerge en los interrogantes de la vida humana: en la peripecia individual, en las relaciones sociales o en la historia colectiva. Lo hace a través de personajes y situaciones, creando una ficción que nos permita conocer nuestra realidad. Es un engaño con la pretensión de descubrir una verdad. Su lenguaje es fundamentalmente el de la imagen, seleccionando puntos de vista, ritmos, luces y colores; pero también se basa en el texto, en la interpretación, en la escenografía y en la música.

Puede pensarse que la anterior es una concepción ambiciosa del cine; que las más de las veces su fin es el puro y simple entretenimiento. El entretenimiento no necesita justificación; es muy loable como reposo y dis-

1 PIAGET, Jean et ál. (1971). *La enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Ed. Aguilar.

tracción a tanta ocupación y preocupación cotidianas, pero nunca es simple. Los personajes y sus relaciones, de forma expresa o implícita, son portadores de ideología y transmiten ideas, aun en situaciones banales. Así es desde Superman a Schrek, desde Robocop a Torrente.

También existe una Matemática Recreativa, para el entretenimiento, en tiempos subestimada como producto de una clase inferior. Hoy se reconoce su valor educativo: tanto por su capacidad motivadora como porque es una forma de “hacer Matemáticas” en contextos reducidos capaz de generar conceptos de validez general.

Los discursos cinematográfico y matemático parecen contrapuestos: la pasión frente a la precisión; lo humano frente a lo abstracto; lo subjetivo frente a lo objetivo; lo discutible frente a lo inapelable. Ambos manejan distintos valores de “verdad”.

En las películas, incluso en las históricas basadas en hechos documentados, la elección de los personajes y de las situaciones supone la adopción de un punto de vista. Como les sucede a los testigos en *Rashomon* (Akira Kurosawa, 1950), podemos encontrar distintas tesis sobre una misma situación en sus diversas versiones fílmicas. Tenemos un ejemplo en la batalla de Little Big Horn donde perecieron el general George Custer y el Séptimo de Caballería en 1847 frente a sioux y cheyennes, con tan diferentes interpretaciones en *Murieron con las botas puestas* (Raoul Walsh, 1941) o en *Pequeño Gran Hombre* (Arthur Penn, 1970): los héroes de la primera son unos canallas en la segunda. ¿Qué verdad prevalece...? aquella que es expuesta con mayor capacidad de seducción. La verdad cinematográfica es, por lo tanto, una verdad discutible, pero atrayente por cuanto habla de nosotros mismos.

Las Matemáticas fueron llamadas Ciencias Exactas por utilizar un método y un lenguaje rigurosos, sin ambigüedad. En el método hipotético deductivo, a partir de unos axiomas aceptados como verdades indiscutibles, por el uso de la lógica sin contradicciones se descubren nuevas verdades o teoremas. Este método fue establecido en Geometría por Euclides en los *Elementos* (siglo IV a.C.). Y fue en el siglo XIX, en el mismo territorio geométrico, tras la conmoción producida por el desarrollo de las geometrías no euclídeas (Lobachevski, Bolyai, Gauss, Riemann), que se extendió a todas las Matemáticas con el logicismo. La verdad matemática ya no nacía de su correspondencia con el mundo físico, sino de la corrección en el método de razonamiento, de la lógica.

También este concepto de verdad lógica sería puesto en cuestión con el teorema de Gödel (1931), al demostrar que incluso a partir de la intuición matemática más común y ajena al mundo físico, la aritmética de los números naturales, se pueden formular infinitas proposiciones indecidibles: se pueden construir unas Matemáticas igualmente correctas tanto si se aceptan como verdaderas o como falsas. Además, incluso lo aparentemente incierto, caótico y desestructurado ha sido objeto del afán ordenador de las Matemáticas, con la teoría de la probabilidad y la geometría fractal.

En ese complejo panorama, la verdad y exactitud matemáticas hoy en día deben ser, cuanto menos, acotadas. Y ello, a causa del rigor implacable con que esta ciencia revisa sus fundamentos.

En síntesis, el Cine pone su énfasis en la expresión, buscando la emoción; mientras que las Matemáticas lo pone en el análisis, buscando el rigor (según Sorando, 2007a1).

2. Pero el cine usa las Matemáticas...

Pese a esa aparente distancia, el cine hace uso de las Matemáticas. Lo hace de varias formas: hay un cine con estructura matemática; en algunas películas aparecen conceptos matemáticos e incluso se recrean momentos históricos de esta ciencia; en ocasiones se incurre en errores matemáticos, unas veces por ignorancia y otras de forma deliberada; cuando se alude a las Matemáticas, se transmite una cierta imagen de esta ciencia y los matemáticos aparecen como personajes; con mayor frecuencia, la resolución de problemas, actividad con fuerte sustrato matemático, mueve la trama de la película.

2.1. Estructura matemática

¿Usa el cine las Matemáticas en el diseño mismo de las películas? Hay evidencias afirmativas en algunos directores que usan principios matemáticos, sobre todo geométricos, tanto en la composición de las escenas como en la estructura del guión; principios que son portadores a la vez de plasticidad y simbolismo (según Sorando, 2007a1). Entre ellos:

- La **simetría** como canon estético y recurso narrativo. Grandes directores como Akira Kurosawa o Alfred Hitchcock cuidan con esmero la composición simétrica de muchas escenas. En *Barry Lindon* (1975), Stanley Kubrick incluye sendos duelos al principio y al final de la película, ajenos a la novela de referencia, para darle una simetría muy adecuada en una obra ambientada en el Barroco y barroca en sí misma (simétrica es la estructura de un concierto barroco de cámara). El mismo énfasis en la simetría formal encontramos en *La fuente de la vida* (*The Fountain*. Darren Aronofsky, 2006).

  Simétricas, que no paralelas, son las vidas de los dos personajes de *El hombre del tren* (Patrice Leconte, 2002), un aventurero y un profesor jubilado, como queda de manifiesto en el propio cartel de la película (Figura 1); al igual que ocurre con los dos niños de *El niño del pijama de rayas* (Mark Herman, 2008).

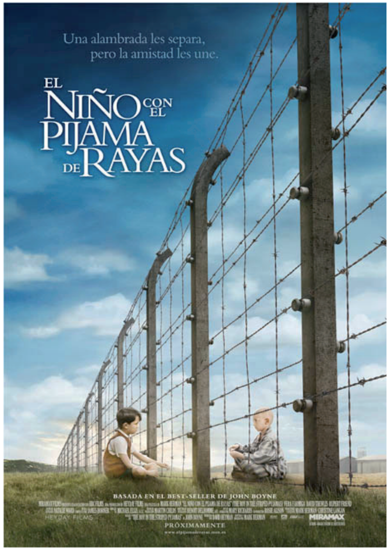


Figura 1. *El niño del pijama de rayas* (Mark Herman, 2008).

Figura 2. *El hombre del tren* (Patrice Leconte, 2002).

- **Paralelismo** de tramas. Hasta 9 tramas avanzan de forma paralela e independiente, sin llegar a confluir, en *Magnolia* (Paul Thomas Anderson, 1999), pero reforzando en diferentes niveles un sentido conjunto: el tormento interior y el perdón.

- **Convergencia** de tramas. En películas como *Para todos los gustos* (Agnès Jaoui, 2000) o como *Cosas que diría con sólo mirarla* (Rodrigo García, 2000), varias tramas, inicialmente separadas e independientes, convergen en un final común donde quedan entrelazadas.

- **Ángulos** creadores de ambientes. Los ángulos agudos y las paredes oblicuas en la escenografía expresionista de *El Gabinete del Dr. Caligari* (R. Wiener, 1919) conforman un mundo amenazador (Figura 3). La retícula perfectamente ortogonal en la oficina cartesiana de *Playtime* (Jacques Tati, 1958) escenifica la burocracia que ahoga al individuo (Figura 4). Anuncia el mundo cibernético de *Tron* (Steve Lisberger, 1982), donde la acción se desarrolla también sobre una retícula sin curvas: solo ángulos rectos. Este escenario, llevado a las tres dimensiones, sería el laberinto cúbico de *Cube* (Figura 5).

Figura 3. *El Gabinete del Dr. Caligari* (R. Wiener, 1919).

Figura 4. *Playtime* (Jacques Tati, 1958).

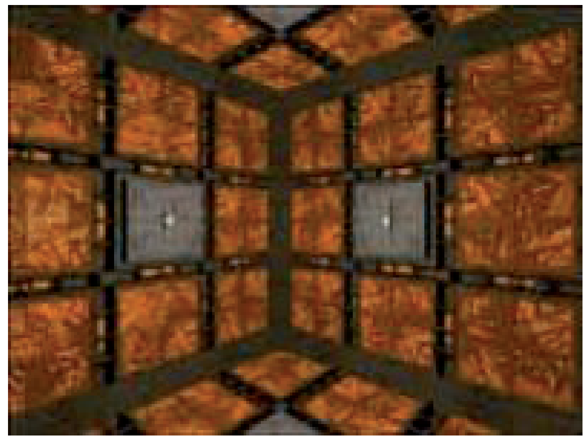


Figura 5. *Cube* (Vincenzo Natali, 1977).

- **Figuras geométricas.** La espiral y la hélice son utilizadas con profusión por Alfred Hitchcock en *Vértigo* (1958): en el propio cartel de la película, emergiendo desde el ojo inicial y pasando por los moños de las protagonistas hasta la escena final en la escalera de caracol; y nuevamente, en el desagüe de la ducha en *Psicosis* (1960). En *2001: Una odisea del espacio* (Stanley Kubrick, 1968), siguiendo la novela de Arthur C. Clarke, un cuerpo geométrico adquiere la categoría de mudo protagonista: el enigmático monolito negro testigo de la evolución humana (Figura 6). Es un prisma rectangular de dimensiones 1, 4 y 9; y estos son los tres primeros números cuadrados perfectos, detalle que revela la procedencia inteligente del monolito. En *El código Da Vinci* (Ron Howard, 2005) la pirámide está cargada de simbología y encierra la respuesta al enigma de la historia, en la escena final.

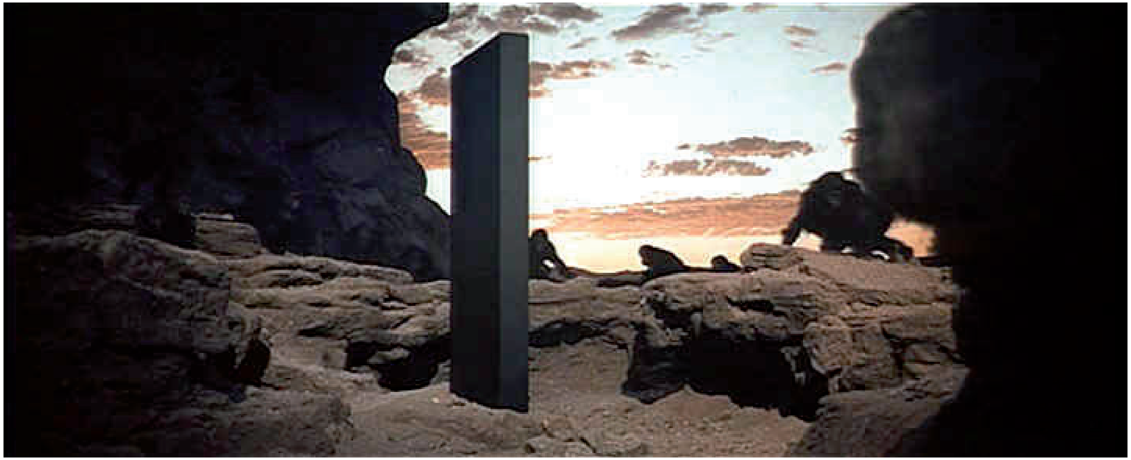


Foto 6. 2001: *Una odisea del espacio* (Stanley Kubrick, 1968).

- **Fractales.** En los últimos años, la geometría de superficies es utilizada con profusión en la generación de paisajes y personajes por ordenador. Sobre todo, en la ciencia-ficción, ya que los algoritmos fractales suponen una gran economía de medios informáticos con respecto a lo que sería la definición detallista de escenarios fantásticos. Se usan fractales, por ejemplo, para generar entornos montañosos o arborescentes; también, para simular fluidos y llamas; y se prueban diversas propiedades topológicas hasta conseguir la veracidad deseada en las texturas de las superficies (roca, piel, tela, plumas, etc.).

  Se usaron por vez primera en el planeta Génesis de *Star Trek II: la ira de Khan*. Después, por ejemplo, en *La Guerra de las Galaxias* y en la trilogía *El Señor de los Anillos* (*Lord of the rings*. Peter Jackson, 2001-2003).

- **Método hipotético-deductivo.** Un caso singular es el de Shane Carruth, un director de cine que es licenciado en Matemáticas. Su formación ha repercutido en que su primer largometraje *Primer* (2004) tenga una estructura matemática, no ya en sentido geométrico, sino en la novedosa plasmación fílmica del método de desarrollo lógico matemático, el método hipotético-deductivo, como guía de la trama. Se habla de *thriller intelectual*.

  Los protagonistas, Aaron (interpretado por el propio Carruth) y Abe, son dos ingenieros que trabajan con otros dos compañeros en un garaje, produciendo tarjetas para ordenador. En su tiempo libre desarrollan un ambicioso ingenio que produce pequeños desplazamientos en el tiempo. Enseguida caen en la tentación de trasladarse a sí mismos. Pero, una vez que han aprovechado la oportunidad, van a tener que enfrentarse a las consecuencias. Al viajar a un pasado próximo, van a coexistir con sus “dobles”: ellos mismos “de vuelta” consigo mismos “de ida” en el tiempo y deben neutralizar cualquier posible variación de la cadena de acontecimientos (una simple llamada a un teléfono móvil puede romper esa simetría de realidades). Una vez realizado el descubrimiento, el relato es puramente matemático. En palabras del autor: "Se trata de partir de una premisa y de seguirla de una manera interesante hasta una conclusión lógica".

Dice Shane Carruth: "Hay una parte muy importante de las matemáticas que no trata solamente de números –explica–. Se trata de quienes tienen delante un problema que parece irresoluble y que, sin embargo, si lo disecciones puedes resolverlo".

2.2. Conceptos matemáticos

Un concepto matemático no es por sí mismo de interés cinematográfico, a no ser por sus implicaciones en la trama de la película. Por eso sus apariciones en la pantalla suelen ser escasas y rápidas.

Los números primos están en el meollo de dos películas: en *Contact* (Robert Zemeckis, 1990), los extraterrestres se comunican con la Tierra a través de los números primos, volviendo a la idea de que las Matemáticas son el único lenguaje universal. En *Cube* (Vicenzo Natali, 1997), para poder avanzar en el laberinto de cubos con trampas, los personajes deben, ante la numeración de cada celda, proceder a su descomposición como producto de factores primos y, después, razonar sobre coordenadas y vectores de permutación.

En *El indomable Will Hunting* (Gus Van Sant, 1997), un problema propuesto por un profesor a sus estudiantes como reto, en una pizarra de un pasillo del MIT, es resuelto por un genio espontáneo. Pese a la trascendencia de ese problema en la historia que se narra, pues supone la revelación del protagonista, no es verbalizado y resulta imposible leerlo en el montaje final de la película. Congelando la imagen se puede descubrir que se trata de un problema de teoría de grafos (según Población, 2006):

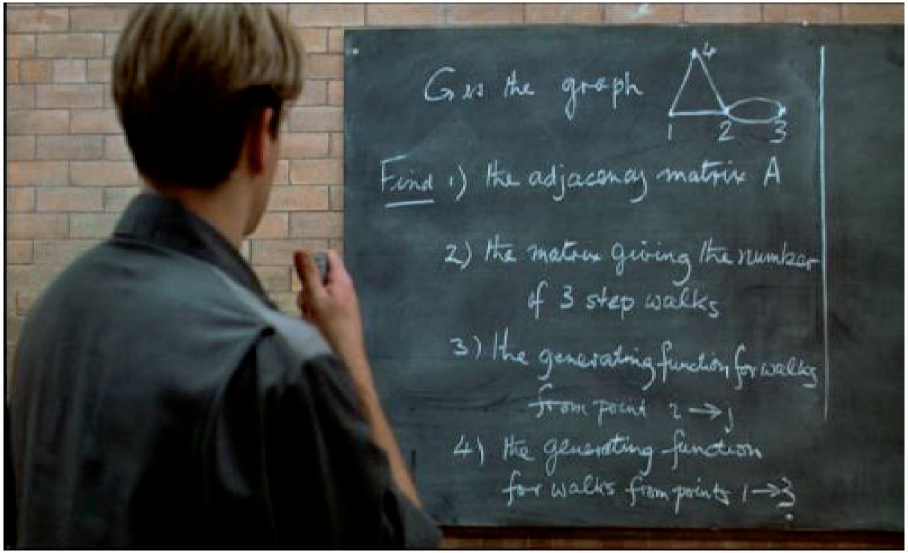


Figura 7. Fotograma de *El indomable Will Hunting* (Gus Van Sant, 1997).

Dado un grafo, encontrar:

1– la matriz de adyacencia A
2– la matriz que da el número de caminos de longitud 3
3– la función que genera los caminos de i → j
4– la función que genera los caminos de 1 → 3.

En *La verdad oculta* (Proof. John Madden, 2005) se habla brevemente de los números primos de Germaine: p es primo de Germaine si $2 \cdot p + 1$ también es primo (Ejemplo: 2, 3, 5, 11... lo son). Sophie Germaine (1776–1831), alias *Antoine Leblanc*, los estudió y demostró que el teorema de Fermat se cumple para estos números:

$$\text{No existen } x, y, z \text{ tales que } x^p + y^p = z^p \qquad p > 2$$

La alusión a Sophie Germain no es casual, pues esta matemática publicó sus trabajos con seudónimo masculino para no despertar recelos en una sociedad machista. Precisamente, la protagonista de la película también se ve cuestionada como autora de un teorema.

En *El código Da Vinci* (*The Da Vinci code*. Ron Howard, 2005), la intriga arranca con una serie numérica especial: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... es la sucesión de Fibonacci, donde, a partir del tercer término, cada término es igual a la suma de los dos precedentes. Y hay un escenario matemático: la tumba de Newton en la abadía de Westminster.

2.3. Historia y Matemáticas

La anterior es una de las escasas referencias a la historia y las Matemáticas en el cine. Conozco otras dos: en *Los Crímenes de Oxford* (Alex de la Iglesia, 2007) se recrea la famosa conferencia en Cambridge (1993) donde Andrew Wiles resolvió el teorema de Fermat (llamados Wilkins y Bormat en la película, para guardar ciertas cautelas legales ante el veto de Wiles a ser representado en pantalla).

En *Enigma* (Michael Apted, 2001), la acción gira en torno a los intentos de los matemáticos británicos por descifrar el código Enigma utilizado por los nazis para encriptar sus transmisiones durante la II Guerra Mundial. El protagonista principal en la realidad fue Alan Turing. En la ficción cinematográfica es Tom Jerico, quien expone a los altos mandos en qué consiste el problema; y, en la escena clave de la película, descubre y expresa la idea que va a conseguir descifrar el código. Esa idea es llevada a la práctica y asistimos a la resolución del problema mediante el uso de coordenadas y grafos.

2.4. "Gazapos" y "guiños" matemáticos

¿Se cuida en el cine la corrección matemática? Hay directores cuidadosos al respecto. Así, en la citada escena de *Los Crímenes de Oxford*, la pizarra refleja al detalle lo escrito por Wiles en aquella histórica ocasión. En *El indomable Will Hunting*, son totalmente correctas las pizarras sobre análisis de Fourier, con el teorema de Parseval, que aparecen tras el profesor Lambeau en su clase.

Y también en *Los Simpsons* se cuidan los detalles matemáticos. No en vano cinco de sus guionistas son licenciados o doctores en Matemáticas, Física o Informática (algunos con doble titulación). Apu, el tendero hindú, es capaz de recitar *pi* con 40.000 decimales. Dice: "la última cifra es 1". Para asegurar este detalle, se hizo una consulta a la NASA.

Pero mucho más frecuente es detectar "gazapos" matemáticos en las películas. En el caso de las películas de serie B, donde monstruos gigantescos recorren el mundo destruyendo todo a su paso, hay una objeción de base matemática a la situación que las sustenta, que es de hecho una "enmienda a la totalidad". Se han realizado muchas de estas películas en las que los protagonistas se ven amenazados por animales semejantes a los reales, pero de grandes dimensiones. Su éxito ha propiciado sucesivos *remakes* e imitaciones. Entre ellas, las del gorila gigante King Kong, las hormigas gigantes que aterrorizan a la feliz América en *La humanidad* *en peligro*, *La invasión de las tarántulas gigantes*, *El ataque de la mujer de 50 pies de altura* y *La Mosca*. La Geometría demuestra que esos seres no sólo no existen, sino que además no pueden existir. Y ello debido a la ley cuadrado-cúbica, enunciada por Galileo Galilei en 1600: "Cuando un objeto crece sin cambiar de forma, su superficie aumenta como el cuadrado de una longitud característica del mismo (por ejemplo, su altura), en tanto que su volumen se incrementa como el cubo de dicha longitud".

Figura 8. *La Mosca* (Kurt Neumann, 1958) y su secuela *El regreso de la Mosca* (1959).

En los grandes monstruos, su peso, multiplicado por la razón de semejanza al cubo, es excesivo para ser soportado por unos huesos cuya sección sólo ha sido multiplicada por dicha razón al cuadrado; se desmoronarían por un brutal aumento de presión.

El cine también ha recorrido el camino inverso, empequeñeciendo a seres humanos para quienes lo inofensivo y cotidiano pasaba a convertirse en fuente de aventuras y amenazas. Así: *El increíble hombre menguante* lucha con su propio gato; y en la comedia *Cariño, he encogido a los niños* la hierba del jardín deviene en una selva para el protagonista. Pero tampoco estos empequeñecimientos son viables, según la ley cuadradocúbica. Mientras la superficie de esos infortunados se dividiría por el cuadrado de la razón de semejanza, el volumen lo haría por su cubo. ¿Resultado? Mucha superficie en relación a poca masa, lo cual les generaría unos insuperables problemas metabólicos. Perderían calor rápidamente y sólo una exagerada voracidad les permitiría mantener la temperatura corporal, como sucede a los ratones (según Sorando, 2007a).

Otras veces los errores están presentes en una escena, como ocurre de forma múltiple en *Factótum* (Bent Hamer, 2005). Este es un diálogo, en realidad casi todo él monólogo, que en un minuto de película incluye cuatro errores (en negrita):

> Jan.—¡Eh, quiero saber qué hora es! Dijiste que arreglarías el reloj.
> Hank (*para sí*).—Vale, vamos a ver... Pusimos el reloj en hora, con la tele, anoche a las 12. Sabemos que adelanta 35 minutos cada hora. Marca las 7 y media de la tarde, pero sabemos que no puede ser, porque apenas ha oscurecido. Vale. Son 7 horas y media.
> 7 veces 35 minutos son 245 minutos. La mitad de 35 son 17 y medio. Eso hace, 252 minutos y medio. Bien, entonces, restamos 4 horas y 42 minutos y medio. O sea, que hay que atrasar el reloj a las 5 y 47. ¡Eso es...!
> Hank (*en voz alta*).—¡Son las 5 y 47!

También hay gazapos en detalles puntuales. En los títulos de crédito de *Pi. Fe en el Caos* (*Pi. Faith in Chaos*. Darren Aronofsky, 1998) aparece una larga expresión del número *pi* donde sólo son correctas las ocho primeras cifras; error nada baladí en una película dedicada a ese número (según Población, 2006).

Y errónea puede ser la frase más famosa de una película, como ocurre con el grito de Buzz Lightyear en *Toy Story* (John Lasseter, 1995): "¡Hasta el infinito y más allá!" Como decimos en Bachillerato a los alumnos que plantean límites laterales por la derecha del infinito, ¡eso es imposible!

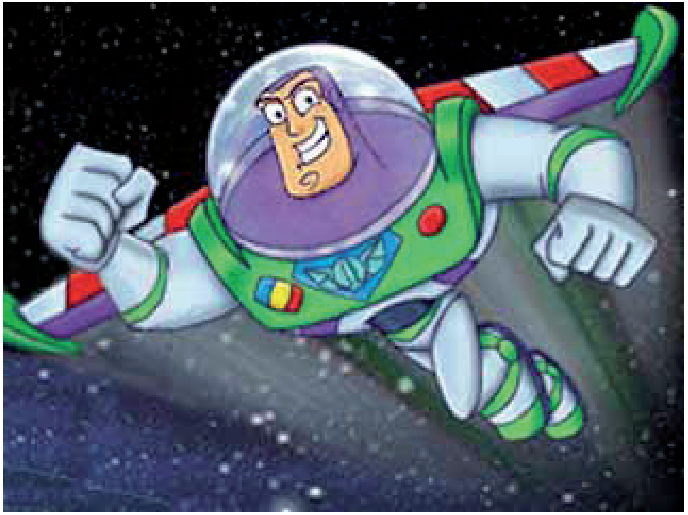


Figura 9. Fotograma de *Toy Story* (John Lasseter, 1995).

En general, cuando aparecen fórmulas suele buscarse transmitir una idea de complejidad, antes que el ajuste con la realidad del caso al que se refieren. En 2005, Jonathan Farley, profesor de Harvard, fundó la compañía Hollywood Math and Science Film Consulting, una asesoría para ayudar a corregir errores matemáticos en los guiones y para enfocarlos desde una cultura científica correcta.

Aunque en raras ocasiones, a veces los fallos son premeditados. Así ocurre, buscando la comicidad, con los cuatro ladrones de *Granujas de medio pelo* (Woody Allen, 2000) cuando discuten cómo hacer el reparto del botín:

– Que la chica (no incluida entre los cuatro) cobre una parte, pero no una parte entera.
– ¿Qué tal si todos cobramos un cuarto y ella, digamos, un tercio?
– ¡Tú estás "chinao"! Entonces cobraría más que nosotros.
– ¿Cómo lo sabes?
– Además, ¿de dónde sacas cuatro cuartos y un tercio? ¿No sabes sumar?
– Mira, yo en quebrados no me meto, ¿vale?

Por la razón ya comentada, la popular serie *Los Simpsons* contiene bastantes referencias matemáticas. Y no nos referimos sólo al conocido "¡Multiplícate por cero!" de Bart Simpson, sino a diálogos como éste:

> Bart y Martin en el autobús del colegio:
> Bart.– Sólo los "pringaos" se sientan delante. Desde ahora, te sentarás en la última fila. Y eso no sólo en el bus, también en el colegio y en la iglesia.
> Martin.– ¿Por qué?
> Bart [*bajito*].– Para que nadie vea lo que haces.
> Martin.– Oh, creo que ya entiendo... [*coge un lápiz y escribe*] el potencial de hacer el gamberro varía inversamente con la proximidad a la figura de autoridad [*muestra su ecuación*].
> Bart.– Bueno, sí, pero no lo digas así.

Y también hay en *Los Simpsons* otras alusiones para entendidos. Así ocurre en el episodio en que Homer Simpson pasa de su mundo plano a la 3D. Pasea sobre una trama cartesiana tridimensional y al fondo observamos esta igualdad:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$$

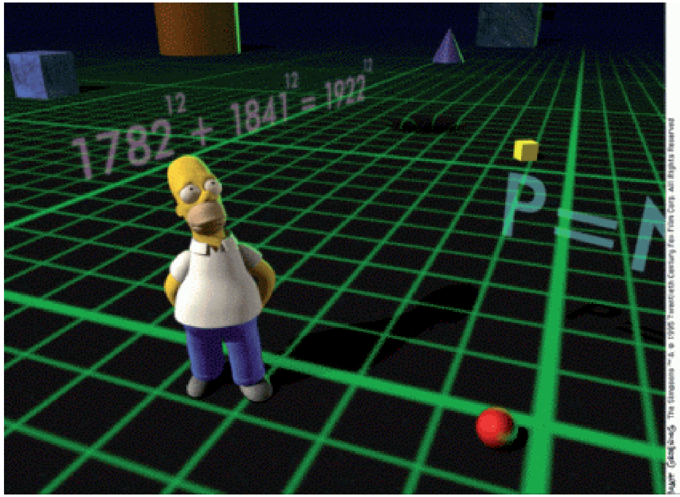


Figura 10. Fotograma de *Los Simpsons.*

¿Será posible que Homer Simpson refute el teorema de Fermat? En la comprobación en la calculadora, obtenemos:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 2.541210259 \cdot 10^{39}$$

$$1922^{12} = 2.541210259 \cdot 10^{39}$$

¡Parece que Homer tenga razón! Pero, hagamos los cálculos con todas las cifras:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 2.541.210.258.614.589.176.288.669.958.142.428.526.657$$

$$1922^{12} = 2.541.210.259.314.801.410.819.278.649.643.651.567.616$$

El redondeo de la calculadora en la 10ª cifra se produce en el primer caso por exceso y en el segundo por defecto, produciendo una engañosa apariencia de igualdad. Esta vez, se trata de un fallo intencionado, una ironía de alguien que sabe de Matemáticas.

De los mismos guionistas es la serie *Futurama*, donde, en un contexto futurista, se permiten más bromas matemáticas que exigen cierta complicidad del espectador

Figura 11. Fotograma de *Futurama.*

Figura 12. Fotograma de *Futurama.*

Figura 13. Fotograma de *Futurama.*

2.5. Las Matemáticas en el cine

"Usamos los números cada día: para predecir el tiempo, para decir la hora, al usar dinero. También los usamos para analizar el crimen, para buscar pautas, para predecir comportamientos. Con los números podemos resolver los mayores misterios que se nos plantean". Así comienza cada episodio de *Numb3rs*. Según sus creadores, Heuton y Falacci, "pensábamos que si podíamos mostrar lo que pueden hacer las Matemáticas y cómo también un matemático puede ser un héroe, inspiraríamos el interés de los jóvenes por estudiarlas". Es una visión positiva sobre las Matemáticas como ciencia socialmente útil.

Pero es más frecuente manejar en la pantalla el "tópico antipático" acerca de las Matemáticas. En *El crimen desorganizado* (Paddy Breatnatch, 1997), un hombre secuestrado yace maniatado frente a un televisor encendido. Se ve obligado, muy a su pesar, a ver un programa educativo donde un profesor con tono sádico explica el teorema fundamental del Álgebra. La víctima cabecea y se desespera… las Matemáticas parecen ser mayor tortura que el secuestro.

Cuando se elogian las Matemáticas en el cine, se suele hacer desde una visión pitagórica. Decía Filolao (s. v a.C.): "Todas las cosas cognoscibles tienen número; pues no se puede pensar ni conocer nada sin este". Apoyaba Galileo[2]: "El gran libro de la naturaleza está siempre abierto ante nuestros ojos... pero no lo podemos leer sin haber aprendido antes el lenguaje en que está escrito. Está escrito en el lenguaje de las Matemáticas". A esta corriente idealista se apuntan Tom Jerico (*Enigma*), Charlie Eppes (*Numb3rs*), el narrador de *Donald en el País de las Matemáticas* o Martin (*Los crímenes de Oxford*). Este es severamente refutado por el escéptico profesor Seldom (*Los crímenes de Oxford*), para quien no existe la verdad ni el orden en el mundo más allá de la lógica formal.

2 Galileo Galilei: *Il Saggiatore*, 1623.

A veces, el pitagorismo obsesivo deviene en numerología e incluso trastornos mentales, caso de los protagonistas de *El número 23* (Joel Schumacher, 2007) o de *Pi. Fe en el caos*.

2.6. Los matemáticos en el cine

Enlazando con lo anterior, se ha transformado la anécdota en categoría y hay en el cine una imagen recurrente de los matemáticos, que los presenta como personas dominadas por sus obsesiones intelectuales, en quienes se combinan genio y locura. Unas veces aparecen distraídos y apocados, como el protagonista de *Perros de paja* (Straw dogs. Sam Peckinpah, 1970), que luego se revela capaz de gran sadismo. Y otras veces, con serios problemas mentales que recorren todas las patologías: la paranoia y la migraña en *Pi. Fe en el Caos*; la esquizofrenia paranoica en *Una mente maravillosa* (Ron Howard, 2002); la demencia en *Proof* (John Madden, 2005); la depresión en *Enigma*; el autismo unido a la capacidad de cálculo en *Cube* y *Rain man* (Barry Levinson, 1988); la obsesión que lleva a la autodestrucción en el lógico autolobotomizado de *Los crímenes de Oxford* y en el final trágico de *Pi. Fe en el Caos*, cuando no conduce al manicomio y el electroshock, como en *Revolutionary road*.

Pero, afortunadamente, también aparecen como personas sujetas a las mismas pasiones y emociones que cualquier mortal: amorosas en *Enigma* o sociales en *Lecciones inolvidables* (*Stand and Deliver*. Ramón Menéndez, 1988). En la primera, hay una escena de amor que parte de una declaración puramente pitagórica del protagonista, Tom Jerico. En la segunda, el profesor Jaime Escalante es una persona vital y comprometida con sus alumnos de un barrio marginal de Los Ángeles. También es harto curioso el enfoque matemático que John F. Nash da al problema del emparejamiento en *Una mente maravillosa*. En *El indomable Will Hunting* un talento matemático silvestre plantea un conflicto entre el cultivo disciplinado del genio y la felicidad inmediata.

Si un matemático presentable y modélico nos ofrece la pantalla, ése es Charlie Eppes, protagonista de *Numb3rs*: joven, atractivo, exitoso y comprometido en la lucha contra el crimen.

De forma recurrente vemos en la pantalla a los matemáticos en relaciones difíciles con el poder: a John F. Nash, utilizado por el Pentágono en la Guerra Fría (*Una mente maravillosa*), se le niega cualquier explicación sobre el alcance de su intervención; el indomable Will Hunting hace honor a ese apelativo, rebelándose ante las tentadoras ofertas laborales de la Agencia Nacional de Seguridad (NSA). Tom Jerico intenta hacer entender al Almirantazgo británico la complejidad de un problema (*Enigma*), al igual que el topólogo Daniel Prat ante unos exasperados políticos locales de Buenos Aires (*Moebius*. Gustavo Mosquera, 1996); ambos reciben respuestas furibundas. La astrónoma Elly Arroway desaloja a los militares del observatorio espacial (*Contact*. Robert Zemeckis, 1997); y el profesor Escalante se enfrenta a la administración educativa (*Lecciones inolvidables*).

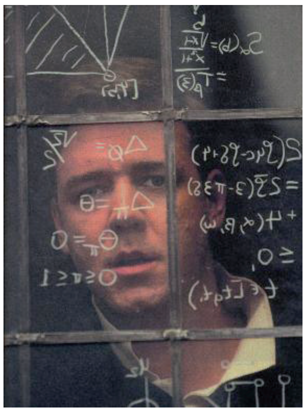


Figura 14. *Una mente maravillosa* (Ron Howard, 2002).

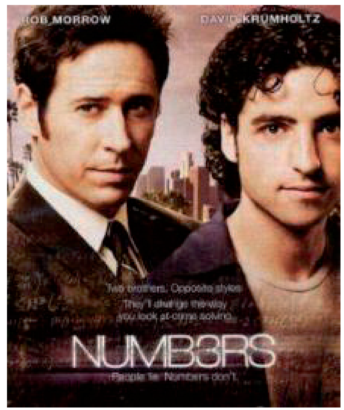


Figura 15. *Numb3rs.*

Matemáticos muy humanos, como vemos, pero siempre gente seria. Por ello, resulta curiosa la aparición de un matemático en situación trivial o hilarante. En *Extraños en un tren* (*Strangers on a train*, 1951) de Alfred Hitchcock, un viajero del tren es un profesor universitario que viene de impartir una conferencia sobre diferenciación. El hombre va bebido y en su borrachera pretende dar una pequeña clase.

2.7. Resolución de problemas

Como dice el profesor Ángel Ramírez, "la felicidad no consiste en la ausencia de problemas, sino en tener la oportunidad de resolver algunos de ellos". Y problemas de todo tipo tienen que resolver los personajes del cine. A veces, también problemas matemáticos. Por ejemplo, Emilio, el portero de la serie televisiva *Aquí no hay quien viva* llega a perder el sueño, obsesionado por los problemas de Matemáticas. Charlie, el matemático de *Numb3rs*, sabe que de su solución dependen vidas y se entrega a ella movido por sus principios éticos.

Y también los superhéroes de películas de acción tiene que resolver problemas; como el detective Mac Lane en *Jungla de cristal 3. La venganza*. Para desactivar una bomba deberá encontrar la solución a esta cuestión, clásica de los libros de texto en ESO: "Medir exactamente 4 litros de agua utilizando dos recipientes no graduados, de 3 litros y 5 litros de capacidad…" ¡qué difícil es ser un superhéroe!

En el caso ya citado de *Enigma*, los matemáticos que resolvieron el problema del descifrado del código de transmisiones nazis consiguieron con ello adelantar el final de la guerra considerablemente. Fueron "héroes de la inteligencia".

En *El día de la bestia* (Alex de la Iglesia, 1995), el diablo deja un mensaje de difícil reconstrucción, a partir de 15 letras donde dos se repiten tres veces y tres se repiten dos veces. Como bien dice el cura protagonista

(Alex Angulo), tras un cálculo de permutaciones con repetición, hay 4.540.336.000 posibilidades. Aunque Santiago Segura, en el papel de un *heavy* siempre "colocado", reconstruye el mensaje en un instante. En este caso, la intuición vence al método.

En *Una mente maravillosa* (*A beautiful mind*. Ron Howard, 2002), la idea clave de la aplicación de la teoría de juegos en procesos de negociación, que valdría al matemático John Forbes Nash el Premio Nobel de Economía en 1994, se explica mediante una situación-metáfora donde el grupo de estudiantes en un bar planea el abordaje a un grupo de chicas. En un contexto tan poco matemático, la idea es esbozada de forma eficaz.

Definitivamente, los problemas aparecen en cualquier situación. Ser capaces de resolverlos es el legado principal que puede dejar al individuo su formación matemática. También el cine nos lo recuerda.

3. Usemos el cine en clase de matemáticas

Pensamos que, especialmente en la enseñanza obligatoria, hay que presentar a los alumnos unas Matemáticas a la vez atractivas y útiles; hacerles experimentar que con ellas es posible vivir interesantes aventuras intelectuales y, a la vez, estar mejor preparados para encarar los hechos cotidianos. Para dar ese sentido a su aprendizaje, conviene limitar y graduar la exigencia de rigor. Utilizarlo para canalizar la intuición, pero no convertirlo en una losa de formalismo abstracto. Sin ideas vivas, los símbolos quedan vacíos.

En esa vinculación de las Matemáticas con lo sugerente y lo vital, puede ser de utilidad el cine. Podemos aprovechar su prestigio entre los adolescentes, transformado en credibilidad. Paradójicamente, ante ellos, una ficción puede dar a las Matemáticas realidad.

Con el cine podemos reforzar conceptos (por ejemplo, las Matemáticas como lenguaje universal en *Contact*) e incluso introducirlos (por ejemplo, las superficies de Moebius con *Moebius*). También, puede servirnos para estimular la reflexión ética [por ejemplo las relaciones entre ciencia y poder en las versiones de *Galileo* por Liliana Cavani (1968) y Joseph Losey (1974)] y abordar la educación en valores (por ejemplo, la superación por el esfuerzo en *Lecciones inolvidables*). Y de la mano del cine, pueden entrar en clase el humor (por ejemplo la resolución de problemas en contextos de cortejo en *Una mente maravillosa*) y la acción trepidante (por ejemplo, el problema de los bidones resuelto por el héroe de *Jungla de cristal 3*); en definitiva, la sorpresa.

Pero, si no hacemos una cuidadosa selección previa, podemos lograr efectos negativos. Pretendemos que los alumnos se apropien de las Matemáticas como algo útil, divertido y valioso. Para conseguirlo, son contraproducentes las películas donde las Matemáticas conviven con el agobio y la locura (*Cube, Pi. Fe en el Caos*, etc.). Sin embargo, en esas mismas películas podemos encontrar escenas válidas para nuestros fines; limitémonos a ellas. Se trata de superar prejuicios antimatemáticos, no de cultivarlos.

El docente que decida usar el cine en clase de Matemáticas tendrá que dar su particular respuesta a las clásicas preguntas del confesor: ¿con quién?, ¿cuándo?, ¿cuántas veces? y ¿cómo? Las contestaremos desde nuestra práctica:

- **¿Con quién?** Con los alumnos de cualquier edad, siempre que haya concordancia entre su capacidad de comprensión y el nivel de lectura que requiere la película. Si son necesarias muchas explicaciones complementarias, no es una película adecuada para ese nivel.

- **¿Cuándo?** El comienzo o el final de la clase son momentos idóneos para la visión de las escenas escogidas. Al comienzo, centran la atención y motivan para el resto de la clase. Al final, sirven como colofón o resumen.

- **¿Cuántas veces?** Hay poco material utilizable y con los criterios de exigencia comentados su número aun se reduce. Por ello, diríamos que conviene utilizarlo siempre que sea posible y adecuado. En nuestra experiencia docente, hemos llegado a un máximo de seis pases de secuencias de cine con los alumnos de un mismo grupo a lo largo de un curso académico, con una duración total de 1 hora y 10 minutos; un tiempo total inferior a dos periodos lectivos.

- **¿Cómo?** El tiempo de una clase no permite el pase de una película completa. Además, pensamos que tampoco sería conveniente. En una misma película suele haber varias tramas, de las cuales solo una suele relacionarse con aspectos matemáticos. Proponemos hacer pequeños montajes con esas escenas y que sean solo esos fragmentos los que se vean en clase, siempre que sean comprensibles por sí mismos. De esta forma, obtendremos de cada película tal vez menos de cinco minutos. Pero para sacar el mayor partido a la situación, convendrá recoger y debatir los comentarios de los alumnos, desarrollando un pequeño fórum. Poner palabras a las impresiones hace objetivar y depurar el conocimiento.

Finalmente, aún quedarán por resolver cuestiones prácticas cuya imprevisión puede dar al traste con las mejores intenciones. Sería deseable disponer de un aula-materia de Matemáticas donde el uso de los recursos fuera inmediato, pero no es lo habitual. La masiva dotación a los centros de algunas comunidades autónomas (no en todas) de las llamadas pizarras electrónicas (PC portátil conectado a un proyector) facilita mucho la situación. Y siempre, hagamos antes un ensayo general, en previsión de que falte el fusible, haya un problema de conexiones o los duendes de la tecnología nos sean adversos.

Si sabemos para qué y cómo, utilicemos también el cine en la clase, como un recurso más de los muchos que nos pueden ayudar para darle vivacidad y atractivo. Demos entrada en nuestras aulas como nuestros *secundarios* a Russell Crowe, Kate Winslett, Bruce Willis o Jodie Foster. Nadie tema con ello una subversión del orden académico. Los profesores seguimos siendo los actores principales (según Sorando, 2007a).

Bibliografía

Población, A.J. (2006). *Las Matemáticas en el Cine*. Granada: Proyecto Sur-Real Sociedad Matemática Española.

Sorando, J.Mª (2004). "Matemáticas... de cine". *Suma* nº 47, págs. 125-131.

— (2005a). "Entre el amor y el humor". *Suma* nº 48, págs. 117-124.

— (2005b). "Matemáticas e Historia". *Suma* nº 49, págs. 125-137.

— (2005c). "Primer". *Suma* nº 50, págs. 131-132.

— (2006). "Proof y Numb3rs". *Suma* nº 52, págs. 129-134.

— (2007a). "Cine y rigor matemático". En *Cine y aprendizajes*, 103-119. Zaragoza: Tierra Ediciones.

— (2007b). "Gazapos matemáticos en el cine y en la televisión". *Suma* nº 55, págs. 117-125.

— (2008). "Intriga y matemáticas". *Suma* nº 59, págs. 121-127.

— (2009). "Escenas". *Suma* nº 61, págs. 119-124.

Internet

Sección de Cine en la web "Matemáticas en tu mundo", por José Mª Sorando:
http://catedu.es/matematicas_mundo/CINE/cine.htm.

Sección de Cine en el portal Divulgamat, por Alfonso J. Población:
http://www.divulgamat.net/.

Literatura en clase de Matemáticas

Constantino de la Fuente Martínez

1. Origen de la propuesta

La realidad cotidiana del aula nos enfrenta con frecuencia a algunas situaciones que requieren una seria y serena reflexión por nuestra parte. Una de ellas puede ser cuando planteamos en clase las preguntas siguientes:

- Explica el significado y la importancia histórica de la ecuación $x^n + y^n = z^n$, siendo x, y, z números enteros y n un número natural.
- Si hay infinitos números primos, ¿cómo podríamos demostrarlo?
- ¿Conoces algún matemático de la escuela de Alejandría?
- ¿Qué sabes de la vida de Pitágoras? ¿Conoces alguna demostración de su famoso teorema?
- ¿Puedes decir algún resultado matemático debido a Arquímedes?

La falta de respuesta podríamos explicarla si lo que preguntásemos fuera la identidad del personaje que acompaña a Einstein en la figura 1; pero estamos hablando de cuestiones similares a: ¿cuál es el arco característico del estilo románico? ¿Quién fue Picasso? ¿Conoces alguna obra de Cervantes?[1]

Figura 1. Einstein, conocido por casi todo el mundo, junto al matemático Kurt Gödel, el autor del famoso teorema sobre la completitud de los sistemas axiomáticos.

1 Así como la ignorancia en estas preguntas es calificada normalmente como una grave carencia cultural, no ocurre lo mismo con los interrogantes matemáticos anteriores, o en general con la ignorancia o la incultura de tipo científico; en algunos ambientes está bien vista y se hace alarde de ella, lo que resulta penoso.

La ausencia de respuestas a las anteriores preguntas de Matemáticas, asumida como normal por la mayoría del profesorado, demuestra la incultura matemática del alumnado en general y requiere una respuesta por nuestra parte. En este contexto se sitúa este artículo, presentando una propuesta didáctica que, creemos, contribuye a paliar la situación que hemos detectado.

Además, no podemos permanecer impasibles si, además, nosotros hemos disfrutado con diálogos como el que sigue:

> —¿Cuál es el problema más difícil de las matemáticas, profesor? –preguntó a Carathedoris en su siguiente reunión, fingiendo simple interés académico.
> —Te mencionaré los tres que se disputan el primer puesto –respondió el sabio después de unos instantes de vacilación–: la hipótesis de Riemann, el último teorema de Fermat y finalmente, aunque no menos importante, la conjetura de Goldbach, de acuerdo con cuyo enunciado todo número par es suma de dos primos, que también es uno de los grandes problemas irresolutos de la teoría de números[2].

Bastantes de nuestros alumnos/as también pueden llegar a disfrutar con ese mismo diálogo si nosotros cultivamos y hacemos crecer en ellos esas buenas actitudes iniciales hacia las Matemáticas, que muchos albergan en su interior.

O, para el alumnado que no tenga un espíritu de matemático en ciernes, como Christopher, el protagonista de *El curioso incidente del perro a medianoche*, se puede quedar extrañado y asombrado con el siguiente pasaje del libro:

2 Extraído de *El tío Petrus y la conjetura de Goldbach*, pág. 69.

> Al día siguiente hice el Examen 3, y el reverendo Peters leyó el diario *Daily Mail* y se fumó tres cigarrillos.
> Y ésta era mi pregunta favorita:
> Demuestra el siguiente resultado:
> "Un triángulo cuyos lados pueden escribirse en la forma n^2+1, n^2-1 y $2n$ (donde $n>1$) es rectángulo".
> Demuestra, mediante un ejemplo opuesto, que el caso inverso es falso[3].

En fin, como último ejemplo, las Matemáticas no sólo son útiles, sino que también nos transmiten la belleza que queda patente en este párrafo de *El Número de Dios*, en el que dos personajes hablan sobre algunos conocimientos del gremio de los constructores, al que pertenecen los dos, a propósito de la catedral de Burgos:

> Esta obra no es sólo un edificio de piedra y argamasa, es un homenaje a la belleza, el símbolo más sabio y más sagrado de la hermosura de la luz de Dios. Por eso, querido sobrino, es tan importante saber determinar la armonía en las proporciones de nuestras obras, porque a través de ellas vamos a mostrar la armonía de Dios, su número divino. Ese es el secreto de esta catedral: está construida siguiendo las proporciones del número áureo, el que Dios eligió para construir el universo. Sólo nosotros, los maestros de obra, lo conocemos, y no debemos confiarlo a nadie que no sea capaz de guardar la confianza que en cada uno de nosotros deposita nuestra hermandad[4].

La literatura nos puede servir para despertar el interés del alumnado por las Matemáticas, adentrándolo en los conocimientos y en los procedimientos propios del quehacer matemático, de una manera distinta a la que habitualmente utilizamos en clase.

3 *El curioso incidente del perro a medianoche*, pág. 257.

4 *El Número de Dios*, pág. 134.

2. Fundamentación didáctica

En el punto anterior hemos hablado de la cultura o incultura matemática de nuestro alumnado y, antes de proseguir, vamos a aclarar el término, que va a jugar un papel importante a lo largo de todo el documento.

Entendemos por cultura matemática un conjunto de saberes constituidos por:

1. Los conocimientos matemáticos indispensables para entender y reflexionar sobre el mundo que nos rodea (conceptos, teoremas, algoritmos, estrategias, lenguajes, actitudes...).
2. El contexto en el que los conocimientos anteriores se generan (historia de las Matemáticas con sus personajes y obras, momentos cruciales, génesis de los conocimientos, proceso de creación y/o descubrimiento, pensamiento matemático a lo largo de la historia, formas del quehacer matemático, etcétera).

Por otra parte, toda actividad didáctica se plantea con la intención de conseguir unos objetivos, que pueden estar más o menos explícitos. Estos son los más relevantes que nos proponemos:

- Aumentar la cultura matemática de nuestros alumnos y alumnas, desechando creencias erróneas sobre la naturaleza de esta ciencia[5].
- Acercar a los alumnos y alumnas a conocimientos matemáticos diferentes a los del currículo, con un enfoque basado en el planteamiento y resolución de retos, la búsqueda de informaciones, la indagación, la resolución de problemas y el descubrimiento de nuevas ideas.

5 Son numerosas las evidencias sobre las falsas creencias que nuestro alumnado tiene sobre el conocimiento matemático. Lo peor del caso es que ha sido el sistema educativo, con nosotros a la cabeza, los que hemos contribuido a la construcción mental de esas creencias erróneas.

- Fomentar el trabajo autónomo del alumnado en unas facetas del conocimiento matemático, que, en la mayoría de las ocasiones, son desconocidas en el contexto escolar.
- Favorecer la comprensión y la reflexión de los alumnos y alumnas sobre la naturaleza del quehacer matemático, sus formas de trabajo más eficaces y sus resultados.
- Conocer algunos métodos específicos de trabajo e investigación en matemáticas, experimentando y reviviendo el proceso de creación y/o descubrimiento[6].

Una vez planteados los objetivos, debemos seleccionar las obras con las que vamos a trabajar y planificar el proceso de trabajo previo a la puesta en práctica en el aula. Ahondando en este aspecto, debemos tener claro que, llevarlo a cabo satisfactoriamente, es de capital importancia si queremos asegurarnos el éxito en esta empresa. En este sentido, los pasos que hemos dado son los siguientes:

1. Lectura anotada y comentada de las obras, comprobando personalmente su utilidad en relación con los objetivos planteados.
2. Selección de temas matemáticos de trabajo.
3. Búsqueda de información sobre los temas elegidos.
4. Relectura de la obra, eligiendo los pasajes que sirvan para la introducción de los temas matemáticos.
5. Elaboración de un guión de trabajo con cuestiones y preguntas para el alumnado.
6. Puesta en práctica en el aula.
7. Revisión, evaluación y modificaciones de mejora de los guiones.

6 Este aspecto, que resulta crucial para tener un buen conocimiento de lo que en realidad son las matemáticas, apenas se trabaja en el transcurrir cotidiano de la clase.

Ni que decir tiene que, a la hora de llevar a la práctica las propuestas que vamos a presentar, es necesario tomar algunas decisiones sobre el contexto en el que las vamos desarrollar y la metodología específica con la que se van a plasmar, sin olvidarnos de la importancia de disponer de una buena bibliografía, que debemos acompañar a cada propuesta de trabajo, para su uso por el alumnado. Por tanto, debemos elegir adecuadamente el nivel educativo en el que vamos a trabajarlas y la forma concreta en que vamos a plantearlas al alumnado, de manera que quede claro el papel del alumnado y el nuestro.

3. Las obras literarias

La selección de las obras literarias debe ser refrendada en el proceso de lectura, que nos permitirá comprobar su utilidad didáctica, su adecuación para los niveles educativos en los que nos movemos, ESO y Bachillerato, la riqueza de temas matemáticos que se pueden tratar, etc.

En nuestro caso, teniendo en cuenta que la literatura contemporánea suele ser más atractiva para nuestros alumnos y alumnas, hemos seleccionado varias obras, algunas de las cuales han sido verdaderos éxitos editoriales. Pero cualquier profesor/a puede, siguiendo un proceso similar al nuestro, elaborar trabajos similares a partir de otras obras que sean de su gusto.

Pasamos a hacer una pequeña presentación de cada una de ellas, con el fin de que el lector tenga suficientes elementos de juicio a la hora de plantearse la utilización didáctica de alguna de ellas:

- *El número de Dios*, de José L. Corral. Una historia de amor en el proceso de construcción de las catedrales de Burgos y León.
- *La incógnita Newton*, de Catherine Shaw. El concurso convocado por el rey de Suecia a finales del siglo

XIX sobre el problema de los *n* cuerpos de Newton y la resolución del caso de las muertes, en extrañas circunstancias, de tres matemáticos.

- *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*, de Apostolos Doxiadis. La vida de un matemático griego que dedica su vida a la resolución de la conjetura de Goldbach.
- *Los crímenes de Oxford*, de Guillermo Martínez. La estancia de un joven matemático argentino en Oxford se ve animada por las muertes de varias personas y por la presentación histórica, en Cambridge, de la demostración de la conjetura de Fermat, por el matemático Andrew Wiles. Existe una adaptación cinematográfica con el mismo título.
- *El curioso incidente del perro a medianoche*, de Mark Haddon. La vida de un adolescente con síndrome de Asperger, con capacidades especiales para las Matemáticas, se ve alterada por la muerte del perro de una vecina. El incidente le llevará a profundizar en su propia vida, su psicología y su forma de ver el mundo que le rodea.
- *La ciudad rosa y roja*, de Carlo Frabetti. Relatos cortos, algunos de ellos con claras influencias borgianas, donde se llevan al límite el razonamiento lógico y la deducción de consecuencias a partir de unas premisas iniciales. Recorrido por algunos matemáticos de renombre.
- *El teorema*, de Adam Fawer. La experimentación con cobayas humanas para conseguir hacer realidad la idea del demonio de Laplace, provoca multitud de aventuras a varios personajes, algunos de ellos con graves problemas neurológicos. *Thriller* psicológico con mucha acción y personajes típicos.
- *Cuentos del cero*, de Luis Balbuena. Colección de cuentos sobre temas de contenido matemático: números, geometría, derivada, etc.

Después de esta sucinta presentación argumental, vamos a continuar con la enumeración de los posibles temas de contenido matemático que podemos desarrollar en cada una de las obras. Para ello utilizaremos la tabla siguiente, aprovechándola para mostrar los niveles educativos en los que, de forma prioritaria, puede trabajarse cada una:

TÍTULO	TEMAS MATEMÁTICOS	NIVEL EDUCATIVO ADECUADO
El número de Dios	La proporción áurea. Medidas tradicionales. Simetrías. Los laberintos. Números dinámicos. Proporcionalidad y escalas. Modelos matemáticos.	3°, 4° ESO Bachillerato
La incógnita Newton	El problema de los *n* cuerpos de Newton. Nudos de Lewis Carroll. Los concursos y torneos matemáticos.	4° ESO Bachillerato
El tío Petros…	La conjetura de Goldbach. Otras conjeturas famosas. Fundamentos de las Matemáticas. Los números primos. Historia de las Matemáticas.	Bachillerato

TÍTULO	TEMAS MATEMÁTICOS	NIVEL EDUCATIVO ADECUADO
Los crímenes de Oxford	El teorema de Fermat. Sucesiones y secuencias lógicas. Los pitagóricos.	3°, 4° ESO Bachillerato
El curioso incidente…	Los números primos. Ecuaciones de 2° grado. La teoría del caos. Potencias de 2. Probabilidades. Mosaicos. Razonamiento y lógica. El proceso de resolución de problemas. Cálculo mental. Juegos matemáticos.	Cualquier curso de ESO o Bachillerato
La ciudad rosa y roja	La lógica. La proporcionalidad y la semejanza. Historia de las Matemáticas. Números grandes. Los laberintos.	Cualquier curso de ESO o Bachillerato

TÍTULO	TEMAS MATEMÁTICOS	NIVEL EDUCATIVO ADECUADO
El teorema	Orígenes de la teoría de la probabilidad. Juegos de azar y probabilidad. El demonio de Laplace. Historia de las Matemáticas. Criptografía. Esperanza matemática. Porcentajes e interés. Ley de los grandes números.	4° ESO y Bachillerato
Cuentos del cero	Origen del número cero Euclides, Pitágoras Números irracionales El triángulo Fórmula de Herón Geometrías no euclídeas La derivada Funciones	Todos los cursos de ESO y Bachillerato (en función del tema)

Las obras anteriores constituyen unos buenos ejemplos, pero, como el lector puede suponer, no son los únicos que pueden ser utilizados en clase. Actualmente hay un amplio muestrario de libros en el mercado editorial, muy útiles para nuestros propósitos. Algunos ejemplos más figuran en la bibliografía del final del documento.

4. Ejemplos de actividades

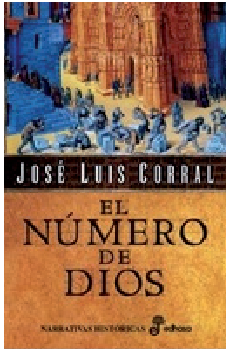
La lectura de la obra se completa con la realización de un trabajo, por el alumno o la alumna, consistente en la búsqueda de respuestas a unas cuestiones matemáticas de muy diferente índole, siguiendo las pautas y orientaciones contenidas en un guión elaborado al efecto por el profesor.

Estas cuestiones siempre parten de alguna cita textual del libro y se adentran enseguida en algún campo de las Matemáticas. En cuanto a su nivel de dificultad, podemos decir que es muy variado y que pueden plantearse, según el caso, desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato, pudiendo escoger el profesor el planteamiento más adecuado en cada contexto de clase y nivel educativo. También se acompañan de imágenes y figuras, que atraen el interés inicial del alumno/a.

Como muestra de la variedad de actividades, presentamos alguna de ellas, para mostrar sus posibilidades didácticas, siempre que escojamos el contexto adecuado.

4.1. *El número de Dios*

En el caso de esta novela histórica, las actividades tienen una fuerte conexión con el estudio del patrimonio artístico desde un punto de vista matemático. El centro de la obra es el número de oro, esto es obvio; por eso hemos seleccionado unas actividades en las que la proporción divina no aparece como tal o tiene un papel secundario, siendo una más de las proporciones dinámicas posibles. He aquí dos ejemplos en los que se puede observar tal hecho:



La lectura de ese tratado le hizo reflexionar sobre la perfección de las figuras geométricas y la presunta irracionalidad y contradicción de que las medidas más perfectas, como el círculo, la diagonal de un cuadrado o la extensión infinita de la proporción áurea, eran precisamente las más fáciles de dibujar[7].

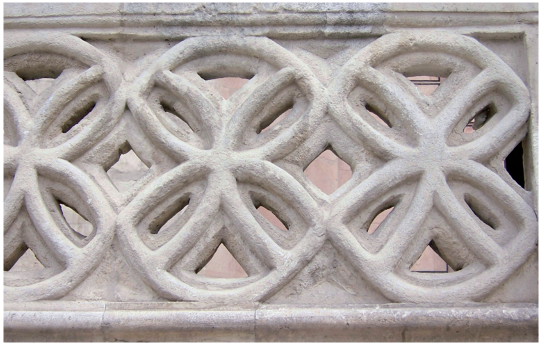
Figura 2. Portada de *El número de Dios*, de José Luis Corral.

1. Vamos a buscar la relación entre figuras matemáticas y números dinámicos. Para ello debes describir la situación que da lugar a esa relación:

   a) La circunferencia y el número π.
   b) El cuadrado y $\sqrt{2}$.
   c) El triángulo equilátero y $\sqrt{3}$.
   d) ¿Qué rectángulo sencillo nos puede dar lugar a $\sqrt{5}$?

2. Como continuación de la actividad anterior, vamos a estudiar la balaustrada de la fachada principal de la catedral de Burgos, porque en ella aparecen algunos de los números anteriores, como longitudes de determinados segmentos o arcos.

7 *El número de Dios*, pág. 368.

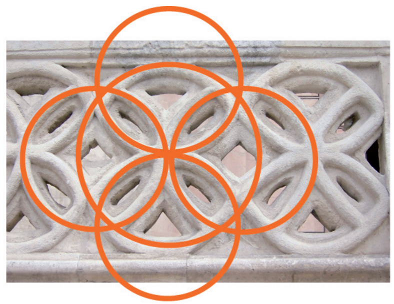


a) Encuentra las proporciones $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π y $\sqrt{5}$ en la figura de la balaustrada.

b) Elabora un dibujo con las figuras geométricas que pudieron servir como modelo para llevar a cabo la construcción de esta balaustrada de piedra.

Figura 3. Detalle de la balaustrada de la fachada principal de la catedral de Burgos.

La idea es que lleguen a desarrollar algún modelo geométrico como los de las figuras 4 y 5; en la primera de ellas se pueden observar los números arriba indicados como razones de algunas longitudes, y en la segunda el modelo que ha podido servir de base para la construcción de la barandilla:

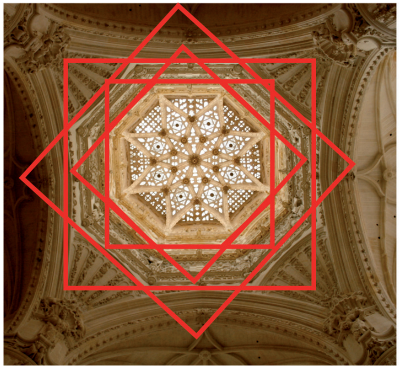


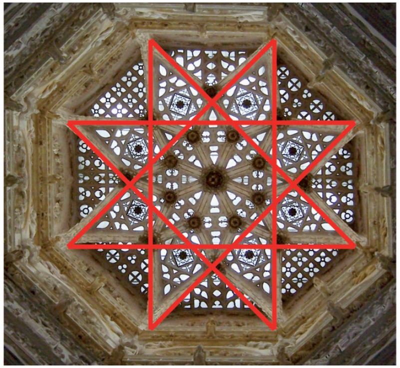
Figuras 4 y 5. Desarrollo de modelos geometricos de la balaustrada de la catedral de Burgos.

"La belleza... está en la proporción"[8].

8 *Op. cit.*, pág. 207.

1. Las siguientes imágenes del cimborrio de la catedral de Burgos son un ejemplo de belleza y armonía en las proporciones. Por eso vamos estudiar algunos aspectos matemáticos que, precisamente, son unas de las causas por las que percibimos esas sensaciones estéticas.





Figuras 6 y 7. Cimborrio de la catedral de Burgos.

Desde el punto de vista matemático, el cimborrio es un octógono regular que, a su vez, contiene varios octógonos regulares y estrellados, e incluso varios cuadrados.

Leonardo da Vinci estudió cómo variaban las longitudes de los lados de estos polígonos, y en todos los casos encontró que el número $\theta = 1 + \sqrt{2}$, llamado número de plata, formaba parte de las proporciones que subyacen en todas las medidas. Por ejemplo, los lados de los octógonos regulares siguen la sucesión $\sqrt{2},\ \theta\sqrt{2},\ \theta^2\sqrt{2}, \ldots$, una progresión geométrica de razón θ y primer término $\sqrt{2}$.

a) Demuestra que los lados de los cuadrados y los de los octógonos estrellados siguen, respectivamente, las sucesiones:

$\theta+1,\ \theta^2+\theta,\ \theta^3+\theta^2, \ldots \qquad 3\theta+1,\ 3\theta^2+\theta,\ 3\theta^3+\theta^2,\ \ldots$

b) Calcula el área de los octógonos estrellados y regulares en función del lado. Haz lo mismo con los cuadrados.

c) En número de plata θ pertenece a la clase de los números denominados metálicos. Averigua qué otros números metálicos hay y cómo se pueden obtener todos ellos.

2. Si ahora calculamos el cociente entre el radio de la circunferencia circunscrita al octógono regular del cimborrio y el lado del octógono, obtenemos una razón denominada proporción cordobesa o, también, proporción humana, en contraposición a la proporción divina, dada por el número de oro ϕ.

a) Averigua el valor de la proporción cordobesa.

b) Si dividimos el lado de un cuadrado entre el radio de su circunferencia circunscrita obtenemos otro número. ¿Cuál es?

c) Hacer lo mismo para un triángulo equilátero.

d) Demuestra que los datos que aparecen en la tabla son correctos. En ella, los polígonos son regulares, la razón es el cociente entre el lado del polígono y el radio de la circunferencia circunscrita (siempre se divide el mayor de los dos entre el menor) y el tipo de rectángulo es aquel que tiene por lado menor la unidad y por lado mayor la razón calculada:

POLÍGONO	RAZÓN	TIPO DE RECTÁNGULO
TRIÁNGULO	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
CUADRADO	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
PENTÁGONO	$\sqrt{\dfrac{\phi^2+1}{\phi^2}}$	$\sqrt{\dfrac{\phi^2+1}{\phi^2}}$
HEXÁGONO	1	CUADRADO
OCTÓGONO	$\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$	CORDOBÉS
DECÁGONO	ϕ	ÁUREO

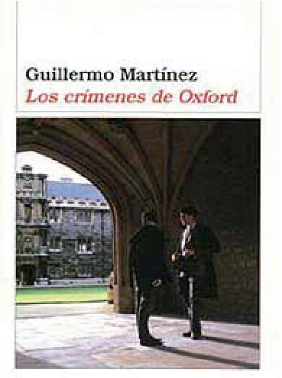
e) Dado un polígono regular de *n* lados, calcular la razón anterior, es decir, el cociente entre el lado y el radio de la circunferencia circunscrita, en función de *n*.

3. Como puedes ver en la tabla, los polígonos con un número impar de lados no dan lugar a rectángulos interesantes, excepto el triángulo, por ello solo ponemos los de un número par de lados, a partir del pentágono, en el que resulta un valor muy cercano a 1.

En la tabla aparecen los principales patrones estéticos utilizados en el arte, arquitectura, escultura y pintura, a través de la historia.

a) Localiza rectángulos tipo $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, áureos y cordobeses en algún monumento artístico.

4.2. Los crímenes de Oxford



En esta obra tienen un papel fundamental las sucesiones y el problema de la búsqueda del patrón que las origina, junto con el episodio de la resolución positiva de la conjetura de Fermat. Aunque en el guión de trabajo se hace un recorrido histórico por las vicisitudes por las que pasó la conjetura a lo largo de más de tres siglos, hemos elegido un tema particular relacionado con ella:

> Usted sabe, por supuesto, que el teorema de Fermat no es más que una generalización del problema de las ternas pitagóricas, el secreto mejor guardado de la secta[9].

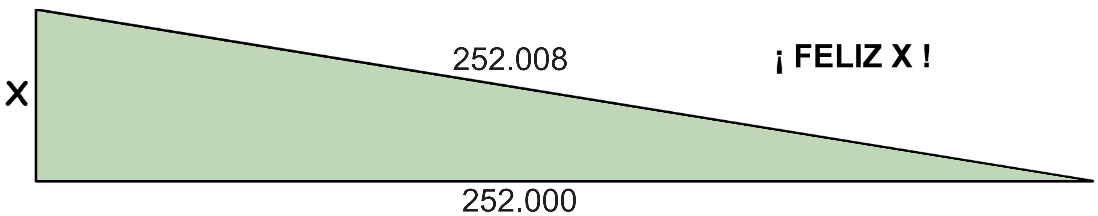
Figura 8. Cubierta de la novela Los crímenes de Oxford, de Guillermo Martínez.

9 Los Crímenes de Oxford, pág. 143

1. En este comentario del libro, referido a los pitagóricos, se habla de las ternas pitagóricas, que son números enteros positivos *x, y, z,* que cumplen la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$; es decir, que podrían ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

   a) Encuentra varias ternas pitagóricas.
   b) Demuestra que si *a, b* y *c* son una terna pitagórica, entonces *n.a*, *n.b*, *n.c*, siendo *n* un número entero positivo, también lo son.
   c) Comprobar que las ternas de números de la forma $2n + 1$, $2n^2 + 2n$, $2n^2 + 2n + 1$, siendo *n* un número entero positivo, forman una terna pitagórica para cualquier valor de *n*.
   d) Hacer lo mismo con la terna $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$, siendo *a* y *b* enteros positivos, con *a* mayor que *b*.
   e) Encontrar otras ternas pitagóricas.

2. En unas fiestas de Navidad recibí una tarjeta cuyo mensaje era el siguiente:



   a) Calcular el valor de x. ¿De qué año se trataba?
   b) La terna pitagórica de la tarjeta de felicitación, ¿a qué tipo de los anteriores pertenece?
   c) Inventate otra tarjeta para felicitar el mismo año. ¿Cuántas tarjetas te podrías inventar? ¿De qué depende el número de posibles tarjetas?

d) Averigua cuántas tarjetas podríamos construir para felicitar el año 2010. Escribe las ternas que componen cada una.
e) ¿Cómo podrías hacerlo para felicitar el año 2009?

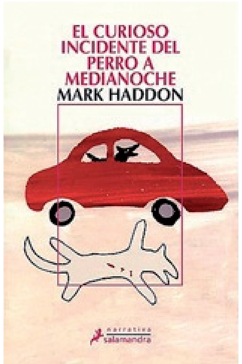
3. Fermat demostró que el área de un triángulo pitagórico (es decir, cuyos lados forman una terna pitagórica) no puede ser un número cuadrado perfecto. Lo consiguió utilizando un método de demostración del que él fue su creador y que se denomina del descenso infinito.

a) ¿En qué consiste este método de demostración?
b) ¿Cómo se aplica en este caso?

4. Para acabar, resuelve estas cuestiones relacionadas con ternas pitagóricas:

a) Demostrar que, en un triángulo rectángulo, las medidas de los tres lados no pueden ser números impares simultáneamente. Estudiar los casos que se pueden presentar.
b) Si a un cuadrado perfecto le sumamos cierto número impar podemos obtener otro cuadrado perfecto. Analizar la veracidad o no de la frase anterior. Estudiar la relación existente entre los dos cuadrados.
c) ¿Puede haber ternas pitagóricas en las que dos de los números se diferencien en una unidad? ¿Qué expresión tienen?

4.3. EL CURIOSO INCIDENTE DEL PERRO A MEDIANOCHE



Esta obra es la que más aprovechamiento didáctico puede tener, ya que toca muchos temas y son casi todos ellos de fácil acceso para el alumnado de ESO o Bachillerato. El guión de trabajo de ella tiene una extensión de alrededor de quince páginas, por lo que es indispensable seleccionar las actividades que se deseen trabajar con los alumnos y alumnas. Presentamos una de ellas, sobre algunas características de las potencias de un número, con la intención de que el lector se haga una idea de cómo están estructuradas

> Calculé potencias de 2 en mi cabeza porque me tranquilizaba. Logré llegar hasta 33.554.432 que es 2^{35}, lo cual no era mucho porque en otra ocasión he llegado hasta 2^{45}...[10].

Figura 9. Cubierta de El curioso incidente del perro a medianoche, de M. Haddon (2004).

1. Como podemos ver, Christopher era capaz de llegar hasta el resultado de 2^{45} mentalmente. ¡Casi nada...!

   a) Sinceramente, ¿hasta qué potencia de 2 eres capaz de calcular mentalmente? Hazlo y contesta después.

2. Para compensar que no somos capaces de llegar ni a 2^{35}, vamos a estudiar otras cuestiones interesantes de estos números. Por ejemplo:

   a) ¿Cuáles son las posibles cifras de las unidades de los números que son potencias de 2? Aprovecha el resultado para calcular la cifra de las unidades de 2^{45}.

10 *El curioso incidente del perro a medianoche*, pág. 153.

b) Si en vez de operar con potencias de base 2, lo hiciéramos con potencias de base otro número (menor que 10), ¿qué ocurriría? Completa la tabla siguiente teniendo en cuenta las indicaciones que te damos más abajo y lo podrás deducir razonadamente:

BASES DE LAS POTENCIAS

EXPONENTES

	2	3	4	5	6	7	8	9
1								
2								
3						3		
4							6	
5		3						
6								
7								
8								

En esta tabla, los números de la primera fila son las bases de las potencias, los números de la primera columna son los exponentes de las mismas y los demás, que debes calcular, son las cifras de las unidades de las potencias; por ejemplo, la cifra de las unidades de 3^5 es un 3, que hemos puesto en su correspondiente lugar de la tabla. Análogamente hemos calculado las unidades de las potencias 8^4 y 7^3, que son 6 y 3 respectivamente.

c) Con la tabla anterior no tendrás ninguna dificultad para calcular las terminaciones de los siguientes números:
7^{1000}; 4^{457}; 8^{743}; 3^{4130}; 2^{7047}; 9^{8132}.

3. Hay varios problemas famosos en los que intervienen potencias de 2. Vamos a presentarte algunos para que investigues y los resuelvas.

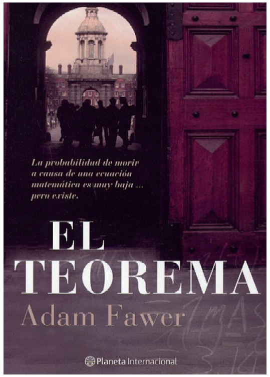
   a) Uno de ellos es el del problema del inventor del ajedrez. Investiga su legendario enunciado y la resolución del mismo. Redacta aquí todo lo que averigües: enunciado, proceso de resolución, etc.
   b) Otro problema interesante es el siguiente: averiguar qué números naturales se pueden escribir como suma de números naturales consecutivos. Intenta resolverlo y no des por concluido el proceso de resolución al encontrar el enunciado de una conjetura a la que puedes llegar. Demuestra la veracidad de la conjetura, si realmente quieres dar el problema por resuelto.

4.4. *El teorema*

El tema central de esta obra es el campo de las probabilidades: su origen, los personajes que originaron esta teoría y algunos de sus principales conceptos e ideas. Una de estas es el demonio de Laplace, que da lugar a las atractivas y frenéticas aventuras que viven algunos de sus personajes.

En este caso hemos elegido la actividad que recorre el origen y nacimiento de las probabilidades:

¿Alguien conoce de dónde viene la teoría de las probabilidades?



De Meré era un jugador compulsivo y sus preguntas se referían a un juego de dados muy popular donde el jugador tira cuatro dados. Si lo hacía sin sacar un seis cobraba la apuesta, pero si sacaba un seis, entonces ganaba la casa[11].

1. La última de las citas continúa en la página 42, donde se muestra que si un jugador hace 100 tiradas, probablemente ganaría 48 y perdería 52 veces.

a) Demuestra que es cierto el resultado anterior.
b) Estudiar la probabilidad de ganar en este juego, en función del número de dados que se puedan lanzar.

Figura 10. Cubierta de *El teorema*, de A. Fawer (2005).

2. El Caballero de Meré, que realmente se llamaba Antoine Gombaud, proporcionó a la historia de las Matemáticas algunos problemas que se recordarán siempre. Este jugador escribía a Pascal y le proponía problemas que a él le hubiera gustado tener resueltos, con el fin de tener ventaja en sus partidas. El primero de ellos, que Pascal denominaba el problema de los partidos, dice así:

   a) Después de iniciado un juego en el que participan dos jugadores de igual destreza, donde se requiere conseguir un cierto número de puntos para ganar, es interrumpido antes de que esto ocurra. ¿Cómo se han de dividir los premios, sabiendo el número de puntos de cada jugador en el momento de la interrupción?

11 *El teorema*, págs. 40-41.

Está claro que las partes en que se reparten los premios deben ser proporcionales a sus probabilidades respectivas de ganar la partida. Por tanto habrá que calcular esas probabilidades.

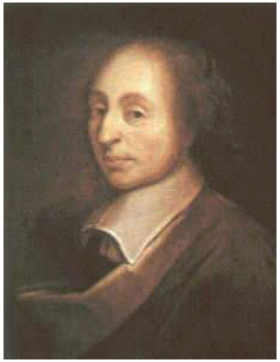


Figura 11.
Retrato de Pascal.

b) Resuelve el problema si el número de puntos necesarios para ganar fuera de 5 y los puntos obtenidos por los jugadores al dejar la partida fueran 4 y 3 respectivamente. Haz lo mismo si ahora lo hubieran dejado después de conseguir 2 y 3 puntos respectivamente.

Este problema, en su enunciado original, fue propuesto por el Caballero de Meré a Pascal, y este, a su vez, se lo envió a Fermat. Cuenta Laplace que lo resolvieron los dos por caminos diferentes y entablaron una discusión entre ellos sobre cuál de los dos métodos era mejor. Al final uno reconoció la generalidad del método del otro.

Figura 11.
Retrato de Pascal.

c) ¿Quién fue el ganador de esta amigable disputa, Fermat o Pascal?

3. El segundo problema del Caballero de Meré a Pascal iba acompañado con el comentario en el que decía que "había hallado falsedad en los números por la siguiente razón. Si uno se propone obtener un seis con un dado, hay una ventaja como de 671 a 625 en intentarlo en cuatro jugadas. Si uno se propone obtenerlo con dos dados, es desventajoso intentarlo en 24 jugadas. Sin embargo, 24 es a 36, número de caras de dos dados, como 4 es a 6, número de casos en un dado. He aquí un gran escándalo", que le hacía decir que las proporciones no eran constantes y que la aritmética "se desmentía".

¿Qué ocurría? Pues ni más ni menos que el Caballero de Meré creía que el número de jugadas debía aumentar proporcionalmente al número de oportunidades totales, cosa que no es exacta, pero está cada vez más próxima a serlo a medida que aumenta el número de oportunidades.

Lee de nuevo el segundo problema del Caballero de Meré y contesta a las siguientes cuestiones:

a) Calcula la probabilidad de obtener un seis al tirar un dado hasta cuatro veces. ¿Por qué dice De Meré que hay una ventaja de 671 a 625?
b) Calcula la probabilidad de obtener dos seises al tirar dos dados hasta 24 veces. ¿Es desventajoso, es decir, la probabilidad es menor que 0,5? Si nos dejan tirar más de 24 veces, ¿entonces la probabilidad es mayor que 0,5?

4.5. CUENTOS DEL CERO

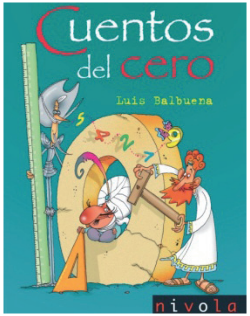


Figura 13. Cubierta de Cuentos del cero, de L. Balbuena Catellano (2006).

Los cuentos que contiene el libro pueden ser fácilmente clasificados y ubicados dentro de alguno de los cursos de ESO o Bachillerato, en función de su temática y de los conocimientos matemáticos que aparecen en cada narración.

Como ejemplo de las posibilidades que puede ofrecer esta obra, hemos escogido las actividades surgidas a partir del *Romance de la Derivada y el Arco Tangente*:

Cuando llegó a la edad adecuada y se convirtió en una moza de espléndida presencia, sucedió lo que tenía que suceder. Un buen día conoció a un muchacho que, aunque algo más viejo que ella, había adquirido hacía poco un magnífica representación gráfica que le daba una belleza tal, que atrajo la mirada curiosa de la Derivada. Tan buena moza tampoco le pasó desapercibida al Arco Tangente, que así se llamaba el galán[12].

12 *Cuentos del cero*, pág. 74

1. Como puedes ver, las ideas matemáticas adquieren vida y personalidad como en cualquier novela.

a) Haz la representación gráfica de la función $y = arc\,tgx$, explicando sus principales características. ¿Te parece tan bella como le pareció a la Derivada? ¿Qué aspectos de la gráfica podrían atraer a la Derivada? En el *Romance de la Derivada y el Arco Tangente* se narra la historia amorosa de estos dos entes matemáticos, dándose varias pruebas de este amor.

b) Como se cuenta en el libro, cuando se citaron en el punto (x_0, y_0) de la curva $y = f(x)$ comprobaron su sintonía. ¿De qué sintonía se trata? Explícala con tus palabras y exprésala también mediante ecuaciones algebraicas.

c) También se cumple que los dos (la Derivada y el Arco Tangente) se anulan en unos puntos particulares de la función. ¿En qué puntos acurre eso? Justifícalo.

2. El amor hace estragos y vamos a ver varias pruebas y demostraciones de ello:

… cuando Derivada crecía al pasar de algunos puntos a otros, entonces Arco Tangente experimentaba así mismo un evidente crecimiento[13].

a) Explica razonadamente la cita anterior. ¿Siempre se cumple? Pon ejemplos y haz algún dibujo ilustrándolo.

En los paseos asintóticos, nos cuenta el autor (pág. 76) que "mientras la Derivada sufría un exagerado crecimiento, Arco Tangente lo hacía acercándose a 90°".

b) Explica por qué ocurría eso cuando daban un paseo asintótico acercándose a una asíntota vertical.

13 *Op. cit.*, pág. 75.

c) Si la asíntota fuera horizontal u oblicua, ¿qué ocurriría? Analiza los posibles casos.

3. Decididamente, el amor puede hacer perder… ¡más que el equilibrio!

… al llegar a cierto punto x_0, perdieron el equilibrio y quedaron totalmente desorientados. Se llevaron un susto de muerte pues, solo fue en un punto, a ellos, enamorados como estaban, les pareció una eternidad[14].

a) Explica, con el ejemplo siguiente, lo que ocurre en un punto de una función en el que es continua pero no derivable. Ayúdate de su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x \leq 2 \\ -x^2 + 9 & si\ x > 2 \end{cases}$$

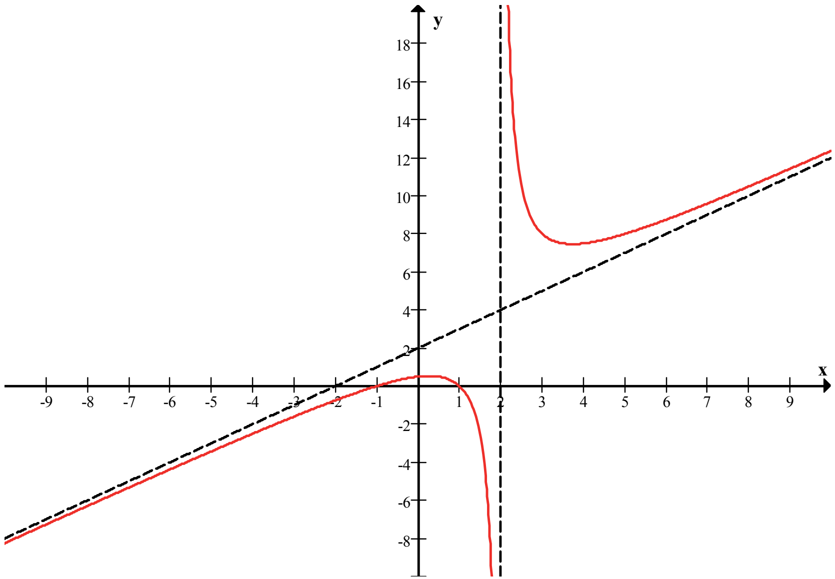
4. Vamos a analizar ahora una familia de funciones, que el autor califica de altaneras:

… la altanera familia de las Racionales, que más de un susto proporcionó a nuestros enamorados[15].

a) ¿Qué son las funciones racionales? Pon ejemplos de funciones racionales junto con sus gráficas.
b) ¿A qué crees que pueden deberse los sustos que daban a nuestra pareja de enamorados?
c) Haz un estudio y averigua cuándo una función racional tiene asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
d) A partir de la gráfica siguiente, averigua la expresión algebraica de la función que está representada, así como las ecuaciones de sus asíntotas:

14 *Op. cit.*, pág. 77.

15 *Op. cit.*, pág. 78.



5. Y llegaron los preparativos de la boda…

No pusieron lista de bodas pero las distintas familias les ofrecieron originales regalos. Así, la función *y = senx*, pariente del novio, se ofreció a llevarles hasta el lugar elegido a través de un recorrido lleno de suaves ondulaciones. También lo ofrecieron sus hermanas *y = sen(x/2)* e *y = sen(x/3)*. Con ellas las ondulaciones serían aún más suaves[16].

16 *Op. cit.*, págs. 79-80.

a) Explica por qué las ondulaciones de *y = sen(x/2)* e *y = sen(x/3)* son más suaves que las de *y = senx*. ¿Qué consecuencias tiene el sustituir, en *y = senx*, la *x* por *x/c*, siendo *c* un número entero distinto de cero.

b) Estudia el efecto que tiene, en la gráfica de *y = senx*, sustituir la *x* por: a) *x+c*; b) *c.x*, siendo *c* un número entero no nulo.

c) Analiza qué ocurre en la gráfica de *y = senx* cuando la cambiamos por: a) *y = senx +c*; b) *y = c.senx*, siendo *c* un número real.

6. Y, por fin, llegó. ¡La boda del siglo!

Los Ejes Cartesianos actuaron en esta historia como organizadores del evento. Enviaron sendas tarjetas de boda a los padres de la novia, Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton. No podían faltar. Los hermanos no pudieron evitar la tentación de invitar también a René Descartes, su padre; al fin y al cabo, gracias a él fue como se conoció la pareja[17].

a) ¿Cómo es eso de que la Derivada tiene dos padres? Explica el asunto acudiendo a la historia de las Matemáticas. Elabora unas biografías básicas de cada uno de ellos.

b) ¿Qué relación hay entre Descartes y los ejes de coordenadas?

El problema de espacio hace que nos detengamos en esta descripción de actividades, aunque el deseo de los profesores/as lectores fuera otro. Para tener una visión más amplia y completa de los guiones de trabajo, puede accederse a la página web www.lopezdemendoza.es, y dentro de ella en *otros materiales* del departamento de Matemáticas. Desde allí se pueden bajar casi todos los guiones, con su bibliografía correspondiente. Como decía nuestro recordado y admirado Miguel de Guzmán sobre los materiales que él regalaba

17 *Op. cit.*, pág. 80.

en su página web: no hay que pagar por ellos, pero si crees que tienen algún valor, da ese importe a alguna organización no gubernamental que conozcas. De esa forma nos damos por bien pagados.

5. Algunas conclusiones

Después de observar esta pequeña muestra de actividades, en la que únicamente hemos presentado una o dos de ellas, de cuatro de los libros, creemos que hay suficientes datos como para convenir que hay muchos conocimientos matemáticos que pueden presentarse y trabajarse de otra manera con el alumnado.

Como cierre de este artículo, no podemos dejar pasar esta oportunidad sin reflexionar y profundizar en lo que hay más allá de los enunciados y planteamientos de las actividades anteriores:

- Cualesquiera conocimientos matemáticos a los que tenemos acceso la mayoría de los profesores de Matemáticas se puede trabajar, con nuestros alumnos y alumnas, con una metodología como la anterior, siempre que se elija un grupo de alumnos y un nivel de profundidad adecuados.
- La cultura matemática contenida en los conocimientos escolares de la Matemática elemental puede y debe ser conocida por todos nuestros alumnos y alumnas. En caso contrario estaremos perpetuando en ellos el analfabetismo cultural matemático y, por extensión, en los ciudadanos y la sociedad en general, o quizás, y esto es mucho más grave para un profesor/a y profesional de la educación, estaremos ocultando nuestra propia incultura matemática.
- La herramienta principal para llevar a cabo todo lo anterior es la historia de las Matemáticas. Este recurso, que siempre ha sido tan magnífico como desaprovechado, es el que mejor nos puede ayudar para que nuestro alumnado vea que “las Matemáticas son ante todo”, tomando palabras prestadas de nuestro querido y recordado Miguel de Guzmán, “el resultado del enfrentamiento de la humanidad, a

lo largo de la historia, a diferentes tipos de complejidades", de retos, enigmas y problemas, para cuya resolución ha tenido que descubrir y crear nuevos conocimientos.

- El planteamiento de las actividades anteriores conlleva que el alumnado debe ponerse en el papel de un matemático (no en el de un profesor de Matemáticas) haciendo Matemáticas: que investiga la historia de su disciplina, que analiza los conocimientos o ideas ya conocidas para él desde otra perspectiva, que desentraña y resuelve pequeños misterios que nunca antes se había planteado.
- Conseguir que el alumnado *visualice* en su mente lo que de verdad son las Matemáticas nos puede recompensar con el disfrute de la *emoción*. En el caso de nuestros alumnos y alumnas (entre los 12 y los 18 años), esa emoción se manifestará de diferentes maneras:

  a) Satisfacción personal por conseguir adentrarse con éxito en temas diferentes o con enfoques distintos a los tradicionales. En este punto, es muy importante la vivencia del *estado contemplativo*[18] que se siente al resolver un problema.
  b) Aumento de la autoestima y seguridad personal en sus propias capacidades.
  c) Admiración ante la potencia de las ideas y conocimientos trabajados.
  d) Disfrute estético por la belleza de las ideas manejadas[19].

- Los profesores y profesoras de Matemáticas de ESO y Bachillerato somos responsables, junto con los de los niveles anteriores y posteriores, de que nuestro alumnado acabe con un nivel adecuado de cul-

18 Uno de los estados emocionales que se describen en la obra de Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: MEC y Edit. Labor, pág. 140.

19 Esto no está al alcance de todo el alumnado, pues requiere muchas experiencias y aprendizajes previos, mediante los cuales el estudiante llega a conseguir la necesaria sensibilidad para poder apreciarla y disfrutar de ella.

tura matemática o, dicho con otras palabras, sea culto matemáticamente hablando. Para ello debemos plantearnos como objetivos del proceso de enseñanza y aprendizaje, no sólo los referidos a los contenidos del currículo, sino también todos los relacionados con el disfrute estético que llevan implícitos los conocimientos matemáticos.

- La propuesta presentada, además de creer que es innovadora, puede ser una aportación muy interesante del departamento de Matemáticas para llevar a la práctica algunas de las ideas que se plantean en los planes de fomento de la lectura y la mejora de la comprensión lectora, que, en las mayoría de las comunidades autónomas, es un programa de desarrollo obligado para todos los centros educativos.

Bibliografía

Esta bibliografía, un tanto especial, se ciñe a una selección de novelas que son susceptibles de usarse en clase según los planteamientos presentados en el presente artículo. La lectura de todas ellas ha contrastado su validez y sólo nos falta que el tiempo nos dé la anhelada oportunidad de su puesta en práctica. Hemos huido de presentar una lista de títulos sin comprobar previamente que responden a los objetivos planteados.

Balbuena castellano, L. (2006). *Cuentos del cero*. Tres Cantos (Madrid): Nivola.

Bradshaw, G. (2006). *El contador de arena*. Barcelona: Salamandra.

Calvo, M. (2002). *Azarquiel, el astrónomo de Toledo*. Toledo: Antonio Pareja Editor.

Corral, J. L. (2004). *El número de Dios*. Barcelona: Edhasa.

Doxiadis, A. (2000). *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*. Barcelona: Ediciones B, S.A.

Enzensberger, H. M. (1997). *El diablo de los números*. Madrid: Siruela.

Fawer, A. (2005). *El Teorema*. Barcelona: Planeta Internacional.

Frabetti, C. (1999). *La ciudad rosa y roja*. Madrid: Lengua de Trapo.

Guedj, D. (2000). *El Teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*. Barcelona: Anagrama.

Haddon, M. (2004). *El curioso incidente del perro a medianoche*. Barcelona: Salamandra.

KEHLMANN, D. (2006). *La medición del mundo. Un fascinante encuentro entre la literatura y la ciencia*. Madrid: Maeva.

MARTÍNEZ, G. (2003). *Los crímenes de Oxford*. Barcelona: Destino.

MORELLA, B. (2004). *Pitágoras. El hijo del silencio*. Madrid: MR ediciones.

SHAW, C. (2005). *La incógnita Newton*. Madrid: Roca Editorial.

Cómo contar el mundo: un experimento con la ficción

David Blanco Laserna

1. Motivación y propósito

Marquemos el punto de partida con una pregunta fácil de enunciar, cuya respuesta quizá se muestre más elusiva de lo que aparenta: al divulgar, ¿qué pretendemos? ¿Enseñar Matemáticas o despertar el amor hacia esta Ciencia?

Desde luego, ambos esfuerzos no tendrían por qué resultar incompatibles y el gusto didáctico de nuestro tiempo tiende a considerar casi inevitable su coincidencia, algo que no siempre sucede en la práctica.

Si nuestro objetivo fuera la mera transmisión de conocimientos, contamos ya con un mecanismo institucional, mejor o peor engrasado: la escolarización obligatoria y el plan de estudios que dicta el Ministerio de Educación. El problema radica en que, a menudo, el proceso se agota sin que llegue a consolidarse ningún vínculo emocional entre el alumno y la asignatura, un desencuentro que muchos aceptan como inevitable.

Así, la seducción matemática de los inocentes no ha servido de abono para una literatura didáctica más robusta y exuberante que en el caso de la Historia o las Ciencias Naturales, por poner dos ejemplos. Los niños adquieren un gusto inmediato por los animales y las historias, que soporta un tratamiento posterior riguroso o simplemente más arduo. ¿Por qué no sucede lo mismo con los números?

No es la supervivencia de la asignatura lo que está en juego. Ningún alumno despertará para ver cumplido su sueño de encontrarla en el sótano de los trastos viejos, arrumbada junto al latín o el griego. A lo largo de su dilatada historia, la Matemática jamás halló comprometido su lugar entre los saberes imprescindibles, aunque se aventurase a quedar encasillada en el papel de sargento inflexible a quien nadie quiere y sin embargo todos respetan.

Hay muchos chicos que vadean las aguas del sistema educativo, se las arreglan para adquirir competencias elementales, en su momento resuelven ecuaciones de segundo grado, calculan derivadas, conquistan máximos y mínimos, para a cambio acabar detestando cordialmente la materia, que contemplan como una carga de la que se desprenderán tan pronto crucen por última vez las puertas del instituto. Lo único que se llevarán entonces será la sensación de que aprendieron de álgebra o cálculo más de la cuenta, con cualquier curiosidad futura hacia ellas muerta.

Por supuesto, también hay niños que disfrutan a fondo de la asignatura. Pero aquí uno cae en la tentación de recoger la cita de Gibbon que Richard Feynman sacaba a colación en la introducción a sus famosas lecciones de Física: "El poder de la instrucción es, en general, poco eficaz, excepto en aquellas felices disposiciones en que resulta casi superfluo"[1].

Antes de internarnos en el bosque de la divulgación, cruzamos una verja adornada con el viejo adagio de instruir deleitando. Traspasado ese umbral, ¿hacia dónde encaminar nuestros pasos? ¿Nos conformamos con una audiencia de convencidos? ¿Buscamos prolongar el placer de las Matemáticas en quienes ya mostraron una inclinación hacia ellas o, por el contrario, hemos de fijar nuestra atención en los reticentes?

Esta encrucijada proyecta su sombra en el aula. Si no prende la llama de la curiosidad, no surgirá apego hacia el aprendizaje y se corre el riesgo de que los conocimientos adquiridos se terminen desprendiendo con el paso del tiempo como hojas caducas.

1 Véase el prólogo de Feyman, Richard; Leighton, Robert B. y Sands, Matthew (1998). *Física. Vol. I, Mecánica, radiación y calor*. México: Addison Wesley Longman.

Por supuesto, esto no tendría por qué suponer ninguna tragedia. O podría encerrar el gran drama de las sociedades modernas, según dónde prefiramos situar los límites de nuestra exigencia. Porque entre el bagaje intelectual que cabría exigir a cualquier ciudadano responsable no debería faltar un conocimiento científico que nos coloque a todos a salvo de supercherías, por no hablar de las nociones económicas suficientes que nos permitan adoptar medidas domésticas y políticas razonables (y, por tanto, razonadas).

Un aspecto de la cuestión que, afortunadamente, cae por completo fuera del alcance de este artículo.

2. La matemática como cultura

Hoy nos conformaremos con una meta menos ambiciosa: que quizá, entre el centenar de responsabilidades que agobian al educador, quepa añadir la de ofrecer a sus estudiantes la oportunidad de enamorarse de la materia que enseña.

No se trata de competir con otras disciplinas en una carrera por ganar adeptos. A cualquiera que haya experimentado el placer intenso que se desprende del ejercicio de las Matemáticas le parece natural poner la experiencia al alcance de otras personas, un impulso proselitista que no sería necesario justificar si estuviéramos hablando de arte o literatura. Otra cosa es que, una vez se haya facilitado su apreciación, se decida o no seguir cultivándola.

Alguien que jamás haya pisado un conservatorio y se reconozca incapaz de descifrar una partitura o componer un quinteto de cuerda, acude de buen grado a un concierto de música clásica, y quien jamás plantó el caballete en una escuela de Bellas Artes paga sin rechistar la entrada a un gran museo. El matemático de formación podría argüir entonces que la música o el arte son más fáciles de apreciar para el lego, punto que podría debatir enconadamente con el musicólogo o el comisario de turno de una exposición.

De entrada, existe un salto cualitativo entre la emoción del artista al ejecutar una obra o examinar la técnica de otro pintor, y la que experimenta el espectador común.

La expresión musical es vasta y, como en el caso del arte contemporáneo, ha sabido protagonizar una epidemia de divorcios con el gran público. Del mismo modo que no es lo mismo una ópera atonal que una canción de Bruce Springsteen, las Matemáticas también componen un cuerpo de conocimientos amplísimo donde el disfrute popular no tiene por qué coincidir con el de los especialistas. Se trata más bien de fundar una determinada sensibilidad científica o matemática, que de descargar el aparato técnico de una disciplina que ha contado con una suma de siglos para urdir su trama con todos los hilos de la complejidad.

Quizá el ciudadano de a pie no esté dispuesto a sacrificar sus horas de ocio para desentrañar la conjetura de Erdos y Turan, pero podrá ampliar su apreciación de tal o cual detalle arquitectónico si profundiza en su construcción geométrica. A su alrededor, la naturaleza elabora conspiraciones matemáticas de mayor calado que las que podrían fraguar cien sociedades secretas al servicio del código Da Vinci. Basta con los cimientos de la Educación Secundaria para enriquecer nuestra visión y comprensión del mundo, sin necesidad de sacar del armero la artillería pesada que hipnotiza a los especialistas.

Qué límite estructural acota la altura de los árboles, hasta qué punto es justo nuestro sistema electoral, qué podemos esperar del funcionamiento de los juegos de azar, qué algoritmos garantizan la seguridad de nuestro correo electrónico, qué resortes apuntalan la trampa de un préstamo hipotecario, cómo brotan las notas musicales de una flauta o al pulsar la cuerda de un contrabajo...

Entre el despacho universitario del investigador y el aula del instituto se extiende una llanura sin cultivar que, para dar frutos, no precisa de más herramientas que la curiosidad y la mirada transfiguradora que proporciona la Ciencia.

3. Estrategias de seducción

3.1. Juegos y Matemática cotidiana

Para estimular la fascinación por las Matemáticas, el camino más corto pasa por mostrar de qué modo reinterpretan algún aspecto de la vida cotidiana (entendida esta en un sentido amplio, que abarque desde el arte a la economía o las Ciencias Naturales).

Las recreaciones matemáticas han pavimentado una segunda vía de acceso igual de transitada.

Desde luego, para un niño, el punto de entrada a una mansión imponente y desconocida se sitúa en el cuarto de los juegos. Uno de los más firmes valedores de la introducción de juguetes en clase fue Martin Gardner:

> Un profesor de Matemáticas, por grande que sea su amor hacia la materia y fuerte su deseo de comunicación, se enfrenta constantemente con una dificultad que lo agobia: ¿cómo mantener despiertos a sus alumnos? [...] Siempre he creído que el mejor camino para hacer las Matemáticas interesantes a alumnos y profanos es acercarse a ellas mediante juegos. [...] Nadie dice que un educador deba limitarse a proponer pasatiempos a sus alumnos. [...] Lo que se tiene que plantear es un juego recíproco entre seriedad y frivolidad. La frivolidad mantiene alerta al lector. La seriedad hace que el juego merezca la pena[2].

2 Véase la introducción de Gardner, Martin (1988). *Mathematical Carnival*. Londres: Penguin Books.

3.2. El señuelo de la ficción

Como apuntamos al principio, estos dos rostros de las Matemáticas: el lúdico y el cotidiano, han sido retratados con primor casi puntillista en una literatura que pone a disposición del docente infinidad de recursos. Aquí me gustaría esbozar una tercera vía, más sutil o indirecta, que carga su acento en la vertiente emocional del aprendizaje, esa anguila frágil y escurridiza, cuyas erráticas evoluciones a menudo pasan inadvertidas.

El señuelo que propondremos para su pesca y captura será la ficción. O más bien, un cierto uso de ella.

El interés por un tema puede alcanzarse a través del tema mismo, o situando un drama humano en su centro. Las ficciones alimentan la caldera de la imaginación y en ella fraguan deseos que ni siquiera albergábamos. ¿En qué momento caímos en la cuenta de que queríamos ser espías, magos o cazadores de vampiros? La ficción discurre en un plano que no corta al rigor científico, a cambio se maneja con soltura en las arenas movedizas de la persuasión y los sentimientos.

Cuando un montador recibe el encargo de confeccionar el tráiler de una película, una ley no escrita guiará su selección de las imágenes: seducir con la urgencia y desfachatez de un Don Juan. Más concisamente: se espera de él que atraiga clientes. Nada más lejos de su intención que transmitir una idea exacta del argumento: lo que está en juego es la venta de una entrada. Qué suceda cuando dejemos atrás la taquilla y nos sumerjamos en la penumbra del patio de butacas, si nos dieron gato por liebre y la traca de explosiones prometida en el avance se reduce ahora a la única que allí se mostraba... el montador se lavará las manos.

Como en el caso de los anuncios, nuestro propósito será inducir una expectación, disponer un clima sugerente, incitador, que invite al consumo de... las Matemáticas.

El principal reparo ante esta estrategia es que, como descubre cualquiera que haya sido expuesto a una dosis mínima de publicidad, sus mecanismos de atracción funcionan perfectamente al margen del producto que se procure vender. Con el tiempo, el trabajo del publicista ha ido derivando hacia una farsa ligera: asociar al producto de turno una serie de sensaciones apetecibles, con las que puede perfectamente no guardar relación alguna. Lo que se vende llega a intervenir a veces sólo como un elemento secundario del decorado.

En nuestro caso podemos alegar una nómina aceptable de atenuantes. El de mayor peso es que, con o sin publicidad, la entrada ya está comprada. El niño se someterá a diez cursos de Matemáticas donde no se descuidará el rigor de la disciplina. No nos proponemos por tanto colar una mercancía, que está vendida de antemano, sino promover una cierta empatía hacia ella. Más teniendo en cuenta que su exigencia insoslayable repartirá espinas por el camino. La cuestión es: ¿puede la ficción engatusar al alumno, plantar la semilla de ese vínculo afectivo que a menudo no cuaja por medios tradicionales?

3.3. Usos matemáticos de la literatura

La literatura, y la ficción en general, han logrado teñir de romanticismo actividades mucho más desapacibles a primera vista que aquellas propias del matemático, como la piratería o el envenenamiento paulatino inhalando canutos de plomo y alquitrán. ¿Quién no soñó alguna vez con perpetrar un crimen perfecto, desvalijar un banco o acribillar a un pistolero?

Sin pedir permiso a los catedráticos de universidad, la propia ficción ha recurrido a las Matemáticas cuantas veces le ha venido en gana, sobre todo para rematar caracterizaciones poco halagüeñas.

Para señalar ejemplos no hace falta encerrarse en una librería de viejo a desempolvar volúmenes descatalogados. Uno de los villanos con más pedigrí en la historia de la literatura, Moriarty, el Napoleón del crimen, fue descrito por Sherlock Holmes como "dotado por la naturaleza con un talento matemático extraordinario". Responsable a los 21 años de un tratado sobre el teorema del binomio, "¿acaso no es el autor de *La dinámica de un asteroide*? Un libro que asciende hasta alturas tan enrarecidas de Matemáticas puras que se dice que no había persona en la comunidad científica capaz de criticarlo"[3].

El arte analítico del detective podría hermanarlo con las rutinas del matemático, pero nada más lejos de la realidad. En *Estudio en escarlata*, Watson se escandalizaba ante la ignorancia científica de Holmes. Otro icono de la etapa dorada de la novela policial, Philo Vance, llega a establecer en *Los crímenes del obispo* un nexo entre la dedicación a las Matemáticas y el desprecio hacia la vida ajena:

> Para comprender estos crímenes debemos considerar la materia que trata el matemático, y que todos sus cálculos y especulaciones tienden a revelar la insignificancia de nuestro planeta y la intrascendencia de la vida humana... Maneja especulaciones abstrusas y en apariencia contradictorias que una mente normal no puede aspirar a comprender. ¿Resulta sorprendente que un hombre que se ocupa de conceptos tan colosales e inconmensurables perdiese con el tiempo todo sentido del bien y del mal? En su corazón se burla de todos los valores humanos y desprecia la pequeñez del mundo material que lo rodea[4].

No era el único gran detective que ponía las Matemáticas en cuarentena. En *La carta robada* de Edgar Allan Poe, un brillante Dupin cuestiona incluso su alcance deductivo.

> —El ministro, me parece, ha escrito con erudición sobre cálculo diferencial. Es un matemático, no un poeta.
> —Ahí te equivocas. Le conozco bien y es ambas cosas. Como poeta y matemático razonaría perfectamente. Como mero matemático se vería incapaz de razonamiento alguno [...].

3 Conan Doyle, Arthur (1981). *The valley of fear*. Harmondsworth: Penguin Books.

4 Van Dine, S.S. (1983). *Los crímenes del obispo*. Barcelona: Círculo de Lectores.

—Me sorprendes con unas opiniones –dije–, que contradicen la voz de la experiencia. No pretenderás borrar de un plumazo una convicción tan bien establecida a lo largo de los siglos. Siempre se ha considerado a la razón matemática como la razón *par excellence*.

—[...] Te garantizo que los propios matemáticos han sido los primeros en promover ese error tan común al que te refieres, y que no es menos falso ni más cierto por mucho que se divulgue[5].

Sin llegar tan lejos, las matemáticas se han visto reducidas a un pigmento exótico, una suerte de púrpura imperial, que los autores incorporaban a su paleta sólo cuando les urgía retratar de un brochazo a un personaje excéntrico o simplemente desequilibrado. De hecho, los personajes matemáticos, sin ser muy abundantes, cubren prácticamente el espectro de las enfermedades mentales: esquizofrenia, autismo, síndrome de Asperger, toda suerte de trastornos obsesivo-compulsivos...

Estos ejemplos explotan con descaro un estereotipo negativo. Nuestro propósito sería explorar el envés de esa trama. Por suerte, el color matemático también ha sido aprovechado para incorporar otro atributo en la caracterización dramática: la inteligencia. En los capítulos de José María Sorando y Constantino de la Fuente se cartografió el terreno a una escala más detallada, y no quisiera incurrir aquí en demasiadas redundancias.

3.4. El personaje matemático

La literatura nos ofrece un muestrario rico, un *tótum revolútum* de calidades, géneros y épocas, que va desde Virgilio a Dan Brown: el episodio de la fundación de Cartago narrado en la *Eneida*, *El curioso incidente del perro a medianoche* de Mark Haddon, *Ojalá no hubiera números* de Esteban Serrano, *Cómo se volvió loco el número 7* de Bram Stoker, *Los crímenes de Oxford* de Guillermo Martínez, *Parque Jurásico* de Michael

5 Allan Poe, Edgar (1982). *Complete Tales and Poems*. Harmondsworth: Penguin Books.

Crichton, *El fantasma que odiaba las matemáticas* de Rafael Ortega, *Cronopaisaje* de Gregory Benford, los *Matecuentos* de Joaquín Collantes y Antonio Pérez, *La prueba* de David Auburn, *Arcadia* de Tom Stoppard, *El código Da Vinci*...

Hasta contamos con un relato de Conan Doyle: *El ritual de los Musgrave*, como desagravio por la caracterización de Moriarty, que además impugna el fondo de armario científico de Holmes, ya que descubre el paradero de un tesoro echando mano de la geometría.

Tampoco faltan los ejemplos en el cine y la televisión: *El indomable Will Hunting*, *Cuento de verano*, *La habitación de Fermat*, *Ágora*, *Enigma*, *Numb3rs*...

Cualquiera de estas ficciones garantiza su buena dosis de diversión. Con una particularidad: las Matemáticas intervienen en ellas como un personaje atractivo, contra el telón de fondo de un misterio o una aventura. Una vez sorprendidas en este contexto, quizá nos acerquemos a ellas de mejor grado al reencontrarlas en otros escenarios menos exóticos.

Thomasina Coverly, Ian Malcolm, Christopher Boone, Lucía y Bruno, Gregory Markham, Charlie Eppes, Sophie Neveu... encarnan el apetito por las Matemáticas, que en ellos respiran, laten, adquieren una piel, un rostro humano. Se trata de hombres y mujeres que se sirven de su inteligencia y sus conocimientos para cazar dinosaurios, resolver crímenes, desentrañar conspiraciones, superar traumas infantiles o decidir la Segunda Guerra Mundial... Sus personalidades resultan atractivas y pueden despertar el deseo de emulación o al menos la curiosidad y la simpatía hacia sus inquietudes.

¿Cuántos arqueólogos soñaron por primera vez con serlo al ver a Indiana Jones corriendo delante de una tribu de caníbales, una situación en la que jamás se vieron comprometidos, ni por asomo, más adelante en el ejercicio de su profesión? ¿En cuántas personas nació el gusto por la novela histórica después de imaginarse embutidos en la armadura de un caballero o entre los tules de una princesa?

4. La impronta matemática

No se trata de suscitar un espejismo, sino de tejer algo igual de frágil y tornadizo: el amor hacia una forma particular de conocimiento. Un sentimiento que quizá se conquiste imitando el mecanismo de la impronta. Igual que los pollitos escogen a su madre a bote pronto, nada más abrir los ojos, la primera impresión sobre una materia puede suponer un flechazo a prueba de desencuentros o dificultades posteriores. Porque, una vez que se entra en contacto con ellas con una buena disposición, las Matemáticas en sí albergan el poder de fascinar. La ficción puede ayudar a revestirlas de un aura que sirva de talismán cuando sobrevenga el roce áspero del rigor y el esfuerzo.

Para terminar, quisiera hacer hincapié en que este enfoque no busca ofrecer materiales matemáticos con los que trabajar en clase, servidos a través de la ficción, una estrategia perfectamente válida. Los libros o las películas deberían elegirse no en virtud de sus posibilidades didácticas, sino atendiendo a la capacidad de seducción de sus personajes, para aupar las Matemáticas sobre ese escenario desde el que crear modelos de identificación.

Por supuesto, también es una invitación a que los propios maestros y profesores se animen a construir esas ficciones.

Si la impronta termina cuajando lo hará al modo de las metáforas, porque el álgebra, la topología, la estadística... embarcan en verdad en aventuras que desafían los límites de la imaginación.

Los complejos laberintos del clima y el cerebro, la hilatura en múltiples dimensiones de las cuerdas y los *quarks*, la propia arquitectura y creación del universo... ¿quién osaría internarse en esos colosales jardines sin la guía de las Matemáticas?

Bibliografía

Allan poe, Edgar (1982). *Complete Tales and Poems*. Harmondsworth: Penguin Books.

Auburn, David (2001). *Proof*. Nueva York: Faber and Faber.

Benford, Gregory (1992). *Timescape*. Nueva York: Bantham.

Brown, Dan (2003). *El código Da Vinci*. Barcelona: Umbriel Editores.

Collantes, Joaquín y Pérez, Antonio (2005). *Matecuentos: cuentos con problemas*. Madrid: Nivola.

Conan doyle, Arthur (1950). *The memoirs of Sherlock Holmes*. Londres: Penguin.

— (1981). *The valley of fear*. Harmondsworth: Penguin Books.

Crichton, Michael (1990). *Jurassic Park*. Nueva York: Ballantine Books.

Feyman, Richard; Leighton, Robert B. y Sands, Matthew (1998). *Física. Vol. I, Mecánica, radiación y calor*. México: Addison Wesley Longman.

Gardner, Martin (1988). *Mathematical carnival*. Londres: Penguin Books.

Haddon, Mark (2004). *The curious incident of the dog in the night-time*. Londres: Random House.

Martínez, Guillermo (2007). *Los crímenes de Oxford*. Barcelona: Destino.

ORTEGA, Rafael (2008). *El fantasma que odiaba las matemáticas*. Madrid: Nivola.

SERRANO, Esteban (2002). *Ojalá no hubiera números*. Madrid: Nivola.

STOKER, Bram (2002). *Under the Sunset*. Borgo Press.

STOPPARD, Tom (1993). *Arcadia*. Londres: Faber and Faber.

VAN DINE, S.S. (1983). *Los crímenes del obispo*. Barcelona: Círculo de Lectores.

VIRGILIO, Publio (2006). *Obras completas*. Madrid: Cátedra.

El reto de divulgar las Matemáticas más allá de la escuela... para llegar mejor

Anton Aubanell Pou

Introducción[1]

El CREAMAT, Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques, es una unidad del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya cuyo objetivo esencial consiste en facilitar recursos con el fin de conseguir un mejor desarrollo de las competencias del alumnado en el ámbito matemático. En este caso entendemos por recursos no sólo objetos de carácter material, bibliográfico o digital, sino también la generación, recogida y difusión de ideas y conocimientos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Se trata de un centro de reciente creación que ha ido desarrollando diversas acciones en el campo de la innovación aplicada a la educación matemática. Para ello ha contado con un equipo de personas que, en diversos niveles, han trabajado para conseguir poner en marcha distintos proyectos. En esta ponencia se describirán algunos de estos proyectos que "viven" en este territorio tan inexplorado, sugerente y, por fortuna, sin fronteras, que se abre entre el mundo de la educación y el de la divulgación.

1. Matemáticas en familia

La idea surge a raíz de la demanda de una asociación de padres interesados en explorar qué podían hacer desde las familias para ayudar a sus hijos/as en el aprendizaje de las Matemáticas. El equipo del CREAMAT trabajó en dos campos:

1 En la elaboración de este capítulo han participado: Jorge Sánchez Pedraza y Montserrat Torra Bitlloch de CREAMAT, Departament d'Educació (Generalitat de Catalunya), Carme Aymerich Padilla de CEIP Rocafonda (Mataró) y Manuel Barrios Lucena de Televisió de Catalunya.

- En el terreno más conceptual, elaboración de un pequeño listado de consideraciones dirigidas a padres y madres para invitarles a colaborar en la educación matemática de sus hijos/as: "Veinticinco ideas para contribuir, desde la familia, a la educación matemática de hijos e hijas".

- En el terreno de las propuestas concretas, elaboración de un documento con ejemplos de actividades matemáticas que pueden realizarse en el marco familiar: "Veinte propuestas de actividades de la vida cotidiana que pueden realizarse en familia y que pueden ayudar a la educación matemática de los hijos e hijas".

Posteriormente Xisca Sorell, de Onomatopeyaka Photo Studio, seleccionó imágenes para ilustrar las ideas y se confeccionó una presentación con sus fotos y los textos elaborados por el CREAMAT. Este material puede ser consultado en el apartado *Famílies* de la web del CREAMAT: http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/.

2. Página web

La página web del CREAMAT es muy activa ya que constituye el canal más importante de comunicación entre el centro y los docentes de Cataluña. Todos los apartados de la web son de acceso libre, aunque el profesorado puede registrarse como usuario. De esta manera se da de alta para recibir periódicamente correos electrónicos con informaciones útiles sobre actividades y novedades relacionadas con la enseñanza de las matemáticas.

Entre los diferentes apartados de que se compone la web del CREAMAT, cabe destacar aquellos que tienen una relación directa con la divulgación matemática:

- *Matemáticas en familia*, comentado en el apartado anterior.
- *Apoyo curricular*. En este apartado se encuentran documentos para ayudar a los docentes a entender mejor el currículum desde Educación Infantil hasta ESO, se encuentran tablas con los bloques de contenidos, los criterios de evaluación, los procesos y las conexiones, organizadas por cursos y por ciclos, y sobre las relaciones entre objetivos y competencias. En otros documentos hay ejemplos de actividades que siguen los enfoques del currículum y un documento sobre indicadores de la riqueza competencial de una actividad en el que, a través de una serie de preguntas, se pretende orientar a los docentes sobre el grado con el que se cultivan las competencias del alumnado en una actividad concreta.
- En el apartado *Hemos visto* se comentan artículos de periódicos, programas de televisión, blogs de escuelas o trabajos del alumnado que, de una manera específica, están relacionados con la divulgación matemática.
- Un apartado de libros recomendados de divulgación matemática en el que se incluyen las novedades editoriales así como otros libros de especial interés para la enseñanza de las Matemáticas.

3. Colaboración con programas de televisión

Los medios de comunicación ejercen una influencia importante en la configuración de la imagen social de las Matemáticas y pueden jugar un buen papel como aliados de la enseñanza de las Matemáticas a nivel escolar. En este sentido se han realizado diversos proyectos de colaboración con operadores de televisión:

- Primera colaboración con la Televisió de Catalunya, TV3: Programa *Àlia*, trece capítulos de una serie con una protagonista joven que, en cada episodio, ejerce un oficio distinto que siempre le lleva a cuestiones relacionadas con las Matemáticas. Se participó en la revisión de guiones, la post-producción y la confección de propuestas didácticas que se pusieron a disposición del profesorado en la web del CREAMAT.

- Colaboración más reciente: Programa *Una mà de contes*, consistente en adaptaciones de cuentos, explicados por una voz en *off* mientras se proyecta la realización en directo de la ilustración. Son piezas de siete minutos. Existe además una web que recoge los cuentos que se han proyectado. Se ha participado en la selección de cinco cuentos con contenido matemático y en la revisión de guiones e ilustraciones. Este bloque de cinco cuentos se emitió consecutivamente desde el lunes 2 de noviembre de 2009 hasta el viernes 5 de noviembre de 2009. También se han analizado los cuentos de la web de *Una mà de contes* (http://www.unamadecontes.cat/), seleccionando los que pueden servir para trabajar conceptos matemáticos y se están introduciendo en el programa ARC.
- Colaboraciones puntuales:
  - En el diseño de un programa llamado *Historias de la vida cotidiana* que está pendiente de desarrollo.
  - En temas concretos de un programa de divulgación de la ciencia para jóvenes llamado *Quequicom*.
  - En un programa de BTV, televisión municipal de Barcelona, con una entrevista al director del CREAMAT y el establecimiento de contactos con experiencias interesantes desde el punto de vista matemático realizadas en centros docentes.
  - Con la emisora en pruebas Think1.tv que explora la posibilidad de ser la primera emisora de televisión por internet dedicada exclusivamente a temas educativos.

4. Presencia matemática en museos y exposiciones no estrictamente matemáticas

Las diversas iniciativas culturales que se producen en nuestro espacio social son oportunidades para la escuela. Las visitas a museos y exposiciones, por ejemplo, pueden ser muy fecundas para potenciar el trabajo escolar. Por desgracia, no es frecuente disponer de manifestaciones de este tipo en las que se presenten aspectos matemáticos explícitos. Por esta razón nos parece importante generar lecturas matemáticas de museos y exposiciones aparentemente alejadas de nuestro ámbito. Así las visitas escolares podrán incluir itinerarios o talleres donde las Matemáticas jueguen un papel significativo. En este sentido se han llevado a cabo diversas actuaciones como las siguientes:

- Diseño de itinerarios y talleres en el Museo de Historia de la Ciudad de Barcelona resaltando aspectos matemáticos presentes en el material expuesto y sugiriendo actividades al profesorado.
- Diseño de talleres matemáticos para el Museo de la Ciencia y la Técnica de Catalunya, en Terrassa.
- Propuesta de guía sobre los aspectos matemáticos destacables en una exposición que, con el título "Los príncipes etruscos", se presentó en el CaixaForum de Barcelona.
- Guía sobre las matemáticas observables en una exposición de Ròdxenco realizada en la Pedrera de Barcelona.

Consideramos importante que, cuando las escuelas e institutos realicen visitas a museos o exposiciones, no se pierda la oportunidad de integrar en ellas aspectos matemáticos. Aun sin decirlo explícitamente, se está comunicando al alumnado que las Matemáticas están presentes en ámbitos muy distintos y se intenta hacerlas más visibles. Fernando Corbalán, en su artículo "Exposiciones matemáticas"[2] plantea muy claramente el reto de la visibilidad: "Las Matemáticas, omnipresentes en el sistema educativo (...) siguen teniendo pendiente la asignatura de la visibilidad a cuya superación pueden y deben contribuir todos los instrumentos sociales...". Las actuaciones descritas van encaminadas a responder a este reto.

2 Corbalán, Fernando. "Exposiciones matemáticas". *Revista Uno*, nº 52, pág. 5.

5. Conferencias

Desde la creación del CREAMAT, una de las actividades que fomentamos con gran intensidad para llegar a los docentes de una forma directa es la organización de conferencias impartidas por expertos en diferentes campos de las Matemáticas y también de otros ámbitos que puedan relacionarse con la educación matemática en todos los niveles educativos, desde Educación Infantil hasta la Universidad. Así, hemos intentado explorar dos aspectos que pueden ser muy interesantes y educativamente eficientes. Por un lado, ofrecemos conferencias de contenido no estrictamente matemático, como la del periodista Jaume Vilalta sobre cómo comunicar ciencia, u otras que subrayan aspectos aplicados o estéticos de la Matemática como la del lingüista y escritor Màrius Serra sobre literatura y Matemáticas, la de David Juher sobre música y Matemáticas, la de Rafael Pérez sobre la estética y las Matemáticas o la de Fernando Blasco sobre magia matemática. Por otro lado, las conferencias se ofrecen a través de videoconferencia a tiempo real para conseguir que lleguen al máximo número de docentes interesados en el tema; además se ofrece la posibilidad de que los docentes que siguen las conferencias por internet puedan hacer preguntas a través del correo electrónico durante su emisión. Estas preguntas se plantean al conferenciante al final de la conferencia conjuntamente con las preguntas que formulan los asistentes en la sala. Las conferencias se graban durante su emisión y posteriormente se enlazan, en formato de vídeo, en un apartado de la web del CREAMAT llamado *Formació (creamat)*, junto con la presentación del conferenciante y el enlace a alguna página web que complemente la información.

6. Colaboración con *Problemes a l'esprint*

El concurso *Problemes a l'esprint* (http://www.xtec.cat/actimates/index.htm) está organizado por la Societat Catalana de Matemàtiques y cuenta con la colaboración de la Federació d´Entitats per a l´ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT), entidad asociada a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), y del CREAMAT. Permite la participación de centros muy dispersos en el territorio.

Se trata de una actividad de resolución de problemas *on line* para equipos de centro y que se creó en el año 2000, Año Mundial de las Matemáticas, como una actividad complementaria al *Cangur* de la Societat Catalana de Matemàtiques. Se realiza simultáneamente en muchos centros que reciben los enunciados y envían las soluciones a través de internet. Cada centro participante dispone de un equipo que, con frecuencia, agrupa alumnado de distintos niveles. La resolución de los problemas propuestos requiere trabajo colaborativo ya que se plantean como trayectos deductivos que encadenan pequeños retos para conseguir la resolución final. Presenta un componente de relevos ya que la solución de un problema resuelto por una parte del equipo del centro es requerida por otro grupo para resolver otro problema que forma parte del itinerario. Las soluciones se envían a través de un formulario y se comprueba de inmediato la corrección de la respuesta. Los equipos ganadores son aquellos que consiguen solucionar los problemas correctamente en el menor tiempo posible.

Existen cuatro convocatorias durante el curso diferenciadas por niveles educativos. Una vez realizadas todas las fases del concurso, se entregan los premios a los centros ganadores en un acto presencial. La conjunción de trabajo en equipo, el uso de las nuevas tecnologías, la simultaneidad en la resolución de los problemas entre muchos centros distintos y distantes, el ambiente de concurso… hacen que este formato sea especialmente interesante para motivar al alumnado. El uso de las nuevas tecnologías en esta actividad no se reduce a la recepción de los problemas y al envío de las soluciones, el alumnado puede utilizar las herramientas informáticas que crea oportunas y que le faciliten la resolución de los problemas. El alumnado no se encuentra solo en el proceso de la resolución de problemas, el papel del profesorado es muy importante para ofrecerles ayuda, orientaciones, etc., sobre todo por lo que se refiere al uso de herramientas informáticas. En este sentido, el apartado dedicado al *principio tecnológico* de los *Principios y estándares para la educación matemática* del NCTM (National Council of teaches of Mathematics) considera que "El uso eficaz de la tecnología en las clases de matemáticas depende del profesor. La tecnología no es una panacea. Como cualquier herramienta, puede ser usada bien o deficientemente. Los profesores debería utilizar la tecnología para enriquecer las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos…"[3].

7. Colaboraciones puntuales

La sociedad que nos rodea tiene una enorme vitalidad: se organizan encuentros en torno a temas concretos, se establecen años conmemorativos a nivel internacional, se producen continuos contactos entre ámbitos diversos… La educación matemática no debería desaprovechar estas ocasiones para impulsar la visualización de la Matemática. En este sentido, desde el CREAMAT hemos colaborado o estamos colaborando en diversos ámbitos. A título de ejemplo citamos cuatro:

- Año Internacional de la Astronomía, Año Cerdà, Año Monturiol… Se trata de oportunidades que son impulsadas desde distintos ámbitos de la sociedad y que la educación, y en particular la educación matemática, no puede ignorar. En cada caso, desde el CREAMAT, se realizan acciones para facilitar la celebración de estas efemérides en la escuela, aportando materiales relacionados con las Matemáticas.
- Proyecto ILI, *Investiga la Investigació* y *European Science Open Forum*. La primera edición del concurso "Investiga la Investigación" formó parte de las actividades que se enmarcaron en el "ESOF 2008, EuroScience Open Forum", que se celebró en Barcelona en julio de ese año. Grupos de alumnos de

3 NCTM. *Principios y estándares para la educación matemàtica*, pág. 27.

centros de Cataluña, bajo la supervisión de sus profesores, analizaron y explicaron, en clave de investigación periodística y en formato de reportaje televisivo, la investigación que realizan hoy científicos de prestigio internacional. Los reportajes trataron sobre las bases científicas y los rasgos fundamentales de la investigación, y profundizaron también en la dimensión social del trabajo y en las figuras personales de los científicos investigadores. Se trata de una experiencia pionera cuyo reto va más allá de publicar un vídeo en Internet, es realizar reportajes con estructura narrativa en equipo, trabajando a distancia y utilizando Internet como herramienta de trabajo. Además cada grupo de alumnos/as contó con la ayuda de un estudiante del Máster en Innovación y Calidad Televisivas que aportó su experiencia en el mundo audiovisual, facilitando los aspectos logísticos y organizativos del trabajo y dinamizando la colaboración. El vídeo ganador fue *Els nombres primers i Marcus du Sautoy*.

- Colaboración con la empresa de Transportes Metropolitanos de Barcelona, TMB. En este caso, el CREAMAT ha realizado una labor de asesoramiento para diseñar bloques de actividades destinadas a alumnado de los últimos cursos de la ESO que conjuguen contenidos matemáticos con visitas a las instalaciones de los diversos servicios (control de la circulación, limpieza, conducción…) y talleres (mecánica, cristalería, electricidad…). La colaboración con empresas representa una oportunidad potente que no debería desaprovecharse.
- Colaboración con el Institut d'Estudis Financers. La situación de crisis económica, entre otras cosas, ha provocado una reflexión sobre los conocimientos económicos y financieros de la población y la presencia que tienen estos contenidos en la Educación Secundaria. A través de una iniciativa conjunta del Departament d'Educació y del Departament d'Economia i Finances, se ha iniciado un camino en la dirección de potenciar este tipo de contenidos y de aportar al profesorado formación adicional para que puedan ser tratados desde las diferentes materias. Naturalmente las Matemáticas, en este campo, juegan un papel destacado y las conexiones entre nuestra materia y la economía son vías de doble

sentido que, por un lado, permiten tratar ideas matemáticas a partir de contextos económicos y, por el otro, trabajar aspectos económicos con instrumentos matemáticos.

8. ARC: APLICATIVO DE RECUBRIMIENTO CURRICULAR

El llamado ARC es un entorno informático que permite indexar sobre el currículum recursos de tipos diversos que puedan ser útiles para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Se trata de un instrumento dirigido a docentes de todos los niveles, desde la Educación Infantil hasta el Bachillerato.

Su objetivo es recubrir el currículum con recursos concretos, propuestas didácticas, ideas más o menos amplias… para que cuando un/a profesional de la educación se plantee trabajar un concepto matemático pueda buscar en él y encontrar propuestas que le ayuden en su labor de aula. La tipología de estas propuestas puede ser muy diversa: un cuento o relato, un contexto general o de la vida cotidiana, un material manipulable, un recursos vinculado a las TIC, una referencia histórica, una grabación de vídeo o de sonido, un juego o recreación matemática, una representación gráfica, un enlace…

Actualmente el proyecto ya ha pasado por una primera fase de diseño y una segunda fase de implementación informática y se encuentra en una tercera fase de introducción de elementos. Se trata de una etapa laboriosa. Cada elemento que se introduce en la aplicación tiene unos campos de identificación, unos de relación curricular, un análisis de las competencias y procesos que se ponen en juego y una descripción del recurso mediante un documento de un par de páginas con los enlaces y archivos adjuntos que sean necesarios. Esto permite hacer búsquedas curriculares o generales. Nos parece especialmente importante el hecho de que, para cada recurso, se haga un pequeño análisis competencial.

Se trata de un proyecto muy amplio que pretende ser un instrumento de recogida y difusión de experiencias de aula aportadas por el propio profesorado desde la convicción que pueden ser útiles a otros docentes y que compartirlas representa uno de los caminos más claros para la mejora de la calidad educativa. Como dice Claudi Alsina en su artículo “La vuelta al mundo buscando las ocho competencias”: “Muchas son las experiencias innovadoras que se hacen en nuestras aulas. Todos somos investigadores de nuestra labor y deberíamos compartir con los demás la práctica reflexiva, de que tanto se habla, ya sea en nuestros centros o a través de las actividades de nuestras asociaciones”[4]. El proyecto ARC quiere ser un instrumento en este propósito de crear flujos de intercambio de información.

9. Proyecto de *Museu de Matemàtiques a Catalunya*. Exposición *Experiències matemàtiques*

El proyecto de creación de un Museu de Matemàtiques a Catalunya (MMACA) nació hace tres años en el seno de la FEEMCAT y, de inmediato, contó con el apoyo de la SCM (Societat Catalana de Matemàtiques), del Departament d’Educació de la Generalitat de Catalunya a través del CREAMAT y del ICE de la UPC (Universitat Politècnica de Catalunya). Se constituyó un grupo de trabajo con miembros de las cuatro asociaciones de profesores de Matemáticas de Cataluña que forman la FEEMCAT. Paulatinamente también se han ido incorporando representantes de facultades de Matemáticas y departamentos de didáctica de las Matemáticas de la mayoría de universidades catalanas.

Con el fin de impulsar este proyecto, hace unos meses, se constituyó la Associació per promoure y crear un Museu de Matemàtiques a Catalunya (MMACA) que tiene su sede en el CREAMAT y que persigue aunar esfuerzos en torno a tres objetivos:

4 Alsina, C. “La vuelta al mundo buscando las ocho competencias”. En *Competencia matemática e interpretación de la realidad*, pág. 18.

1. Promover y crear un museo de Matemáticas en Cataluña.
2. Divulgar y estimular una imagen social positiva de las Matemáticas: acercarlas a las personas mediante experiencias interactivas y actividades de manipulación, y poner de manifiesto su presencia y el papel que juegan en nuestra cultura y en el progreso social.
3. Apoyar el trabajo de los centros educativos, desde Infantil, Primaria y Secundaria hasta la Universidad, complementándolo con propuestas que sobrepasan sus posibilidades o su función institucional.

La exposición *Experiències Matemàtiques* es la primera realidad de este proyecto. Se ha podido ver en las XIV Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas de Girona, jornadas de ámbito estatal, y en diversas poblaciones que sucesivamente van acogiendo la exposición.

Se ha optado por una museología manipulativa, donde los visitantes deben utilizar todos sus sentidos. No sólo deben mirar o tocar botones, sino que deben actuar, experimentar, interactuar con otros visitantes y también, claro está, pensar, reflexionar, hacerse preguntas, etc. Recordemos las palabras de Pedro Puig Adam en su libro *El material didáctico matemático actual* (1958), refiriéndose al material manipulable: "Este material, estructurado en forma de modelos, tiene no sólo la función de traducir ocasionalmente ideas matemáticas, sino también de originarlas, de sugerirlas".

La museología manipulativa que se ha adoptado puede hacer del museo y de las exposiciones instrumentos muy potentes de ayuda a la educación matemática escolar. George Pólya, en un artículo titulado "On Learning, Teaching and Learning Teaching"[5], después de citar la frase de Kant "Todo conocimiento humano

5 Pólya, G. (1963). "On Learning, Teaching and Learning Teaching". En *American Mathematical*, 70, págs. 605-619.

empieza por intuiciones, continúa con concepciones, y finaliza con ideas" (Kant: *Crítica de la Razón Pura*), propone la siguiente lectura didáctica en la misma dirección que la idea adoptada en el proyecto de museo y en las exposiciones: "El aprendizaje empieza con acción y percepción, continúa con palabras y conceptos, y ha de finalizar con hábitos mentales deseables. (...) 'acción y percepción' os ha de sugerir manipular y observar cosas concretas como piedras o manzanas, o regletas de Cuisenaire; o regla y compás; o instrumentos en un laboratorio". Las palabras de estos maestros avalan con fuerza el interés que, para la educación matemática escolar, pueda tener la visita a exposiciones matemáticas que inviten al alumnado a la participación, la manipulación, la experimentación…

10. Conclusión

En los apartados anteriores se han descrito diversos proyectos que se desarrollan entre el territorio estrictamente escolar y el mundo de los medios de comunicación, de la empresa, de los museos… Se trata tan solo de ejemplos a los que se podrían añadir muchísimas otras actividades que surgen de numerosas escuelas e institutos. Son iniciativas que parten del convencimiento de que puede ofrecerse un buen servicio a la escuela desde los diversos ámbitos de la sociedad y la educación matemática debería estar atenta para aprovechar todas las oportunidades que se nos ofrecen en este campo.

A modo de conclusiones, permítannos resumir algunas de las ideas que hemos ido aprendiendo a lo largo de nuestra vida profesional y, en concreto, en la realización de los mencionados proyectos:

- No mejoraremos mucho la enseñanza de las Matemáticas si no intentamos mejorar simultáneamente su imagen social. Con frecuencia el miedo injustificado hacia las Matemáticas se pasa de padres a hijos y, en la escuela, pagamos facturas que fueron contraídas muchos años atrás.

- Como consecuencia del comentario anterior, la divulgación matemática se presenta como un instrumento esencial no tan solo en el ámbito social sino también en el estrictamente escolar.
- La mejora de la metodología escolar en la enseñanza de las Matemáticas es muy importante, pero también lo es el conseguir que los alumnos y las alumnas reciban mensajes desde fuera de la escuela que impulsen su esfuerzo y motivación.
- Hemos de buscar oportunidades para servir a la educación matemática escolar desde fuera de la escuela, desde formatos no académicos, desde ámbitos aparentemente alejados del aula…
- Ante este reto tenemos la suerte de que el profesorado de Matemáticas es enormemente activo en sus iniciativas, somos muy "militantes" de nuestra materia, nos gusta y nos gusta que guste a nuestro alumnado, ponemos entusiasmo e ilusión…

Algunas de las acciones que hemos mostrado en este artículo intentan servir a la educación matemática escolar desde el exterior de la escuela, desde la divulgación, desde diversos ámbitos de la sociedad. Afortunadamente hay muchas otras iniciativas aunque en conjunto no son suficientes. ¡Hay mucho camino por recorrer!

Bibliografía

Alsina, C. (2008). "La vuelta al mundo buscando las ocho competencias". En *Competencia matemática e interpretación de la realidad*. Madrid: Colección Aulas de Verano. Serie: Principios. Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.

Corbalán, F. (2009). "Exposiciones matemáticas". En *Uno*, 52, pág. 5.

DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ. Direcció General d'Educació Bàsica i el Batxillerat. *Currículum i Organització*. http://phobos.xtec.cat/edubib/intranet/

NCTM. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. EE.UU.: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales-National Council of Teachers of Mathematics.

Pólya, G. (1963). "On Learning, Teaching and Learning Teaching". En *American Mathematical* 70, págs. 605-619.

Puig Adam, P. (1958). *El material didáctico actual, presentado en la XI reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y la Enseñanza Matemática y Exposición Internacional simultánea (Madrid, 21-27 de abril de 1957)*. Madrid: Publicaciones de la revista Enseñanza Media.

Páginas web

CREAMAT: http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/

Els nombres primers i Marcus du Sautoy: http://www.youtube.com/watch?v=z29q4s4moiU

FEEMCAT: http://www.xtec.cat/entitats/feemcat/

Problemes a l'esprint: http://www.xtec.cat/actimates/index.htm

Investiga la investigació: http://www.investigalainvestigacio.cat/

Una mà de contes: http://www.unamadecontes.cat/

Ediciones del Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa

El Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa tiene como objetivo impulsar, incentivar, financiar, apoyar y promover acciones formativas realizadas por las instituciones, universidades y entidades sin ánimo de lucro, de interés para los docentes de todo el Estado español que ejercen sus funciones en las distintas comunidades y ciudades autónomas. Pero, tan importante como ello, es difundir, extender y dar a conocer, en el mayor número de foros posible, y al mayor número de profesores, el desarrollo de estas acciones. Para cumplir este objetivo, este Instituto pondrá a disposición del profesorado español, con destino a las bibliotecas de centros y departamentos, dos colecciones, divididas cada una en cuatro series.

Con estas colecciones, como acabamos de señalar, se pretende difundir los contenidos de los cursos, congresos, investigaciones y actividades que se impulsan desde este Instituto, con el fin de que su penetración difusora en el mundo educativo llegue al máximo posible, estableciéndose así una fructífera intercomunicación dentro de todo el territorio del Estado.

La primera de nuestras colecciones se denomina **Aulas de Verano**, y pretende que todo el profesorado pueda acceder al contenido de las actividades profesionales docentes que se desarrollan durante los veranos en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander, en los cursos de la Universidad Complutense en El Escorial, en los de la Universidad Nacional de Educación a Distancia en Ávila y en los de la Fundación Universidades de Castilla y León en Segovia. En general, esta colección pretende dar a conocer todas aquellas actividades que desarrollamos durante el periodo estival.

Se divide en cuatro series, dedicadas las tres primeras a la Educación Secundaria (la tercera a F.P.), y la cuarta a Infantil y Primaria, identificadas por los colores de las páginas internas:

• Serie "Ciencias"	Color verde
• Serie "Humanidades"	Color azul
• Serie "Técnicas"	Color naranja
• Serie "Principios"	Color amarillo

La segunda colección se denomina **Conocimiento Educativo**. Con ella pretendemos difundir investigaciones realizadas por el profesorado o grupos de profesores, el contenido de los cursos de verano de carácter más general y dar a conocer aquellas acciones educativas que desarrolla el Instituto durante el año académico.

La primera serie está dedicada fundamentalmente a investigación didáctica y, en particular, a las didácticas específicas de cada disciplina; la segunda serie se dirige al análisis de la situación educativa y estudios generales, en ella se darán a conocer nuestros congresos, y la tercera serie, **Aula Permanente**, da a conocer los distintos cursos de carácter general que realizamos durante el periodo estival.

Los colores de las páginas internas que identifican cada serie son:

• Serie "Didáctica"	Color azul claro
• Serie "Situación"	Color verde claro
• Serie "Aula Permanente"	Color rojo

Estas colecciones, como hemos señalado, tienen un carácter de difusión y extensión educativa, que prestará un servicio a la intercomunicación, como hemos dicho también, entre los docentes que desarrollan sus tareas en las distintas comunidades y ciudades autónomas de nuestro Estado. Pero, también, se pretende con ellas establecer un vehículo del máximo rigor científico y académico en el que encuentren su lugar el trabajo, el estudio, la reflexión y la investigación de todo el profesorado español, de todos los niveles, sobre la problemática educativa.

Esta segunda función es singularmente importante, porque incentiva en los docentes el imprescindible objetivo investigador sobre la propia función, lo que constituye la única vía científica y, por tanto, con garantías de eficacia, para el más positivo desarrollo de la formación personal y los aprendizajes de calidad en los niños y los jóvenes españoles.

NORMAS DE EDICIÓN DEL INSTITUTO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO, INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA

- Los artículos han de ser inéditos.
- Se entregarán en papel y se añadirá una copia en disquete o CD con formato Word.
- Los autores deben dar los datos personales siguientes: referencia profesional, dirección y teléfono personal y del trabajo y correo electrónico.
- Se deben evitar los textos corridos y utilizar epígrafes y subepígrafes, con la frecuencia adecuada
- Debe haber, al principio de cada artículo, un recuadro con un índice de los temas que va a tratar, y que debe coincidir con los epígrafes y subepígrafes del apartado anterior.
- Cuando se reproduzcan textos de autores, se entrecomillarán.
- Al citar un libro, siempre debe aparecer la página de la que se toma la cita, excepto si se trata de un comentario general.
- Se deben adjuntar fotografías, esquemas, trabajos de alumnos..., que ilustren o expliquen el contenido del texto.
- Al final de cada artículo, se adjuntará la lista de la bibliografía utilizada.
- La bibliografía se citará siguiendo la normativa APA.

Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa

c/ General Oraa, 55. 28006 Madrid.
Teléfono: 917459412/18.

• Puntos de venta:

Ministerio de Educación C/ Alcalá, 36. Madrid.
Subdirección General de Documentación y Publicaciones del Ministerio de Educación.
c/ San Agustín, 5. Madrid.

Títulos editados

Colección: Aulas de verano

Serie: Humanidades

La iconografía en la enseñanza de la Historia del Arte

La dimensión artística y social de la ciudad

La lengua, vehículo cultural multidisciplinar

El entorno de Segovia en la historia de la dinastía de Borbón

Aprendizaje de las lenguas extranjeras en el marco europeo

El impacto social de la cultura científica y técnica

Lenguas extranjeras: hacia un nuevo marco de referencia en su aprendizaje

Habilidades comunicativas en las lenguas extranjeras

Didáctica de la Filosofía

Nuevas formas de aprendizaje en las lenguas extranjeras

Serie: Ciencias

La enseñanza de las matemáticas a debate: referentes europeos

El lenguaje de las matemáticas en sus aplicaciones

Globalización, crisis ambiental y educación

La Física y la Química: del descubrimiento a la intervención

El número, agente integrador del conocimiento

De la aritmética al análisis: historia y desarrollo recientes en matemáticas

Los sistemas terrestres y sus implicaciones medioambientales

Metodología y aplicaciones de las matemáticas en la ESO

Últimas investigaciones en Biología: células madres y células embrionarias

Ramón y Cajal y la ciencia española

Usos matemáticos de internet

Química y sociedad, un binomio positivo

La empresa y el espíritu emprendedor de los jóvenes

Nuevos enfoques para la enseñanza de la Física

Del punto a los espacios multidimensionales

Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas

Las matemáticas y sus aplicaciones en el mundo social y económico

La bioética en la educación secundaria

Fuentes de energía para el futuro

Dibujo técnico y matemáticas: una consideración interdisciplinar

Serie: Técnicas

Grandes avances de la ciencia y la tecnología

Nuevas profesiones para el servicio a la sociedad

Servicios socioculturales: la cultura del ocio

La transformación industrial en la producción agropecuaria

La formación profesional como vía para el autoempleo: promoción del espíritu emprendedor

Actualización de las competencias profesionales: Sanidad y Formación Profesional

Las competencias profesionales relacionadas con las TIC y el espíritu emprendedor

Serie: Principios

La Educación Artística, clave para el desarrollo de la creatividad

La experimentación en la enseñanza de las ciencias

Metodología en la enseñanza del Inglés

Destrezas comunicativas en la Lengua Española

Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas

La Geografía y la Historia, elementos del medio

La seducción de la lectura en edades tempranas

Lenguas para abrir camino

Los lenguajes de la expresión

La comunicación literaria en las primeras edades

Los lenguajes de las ciencias

Perspectivas para las ciencias en la Educación Primaria

Leer y escribir desde la Educación Infantil y Primaria

Números, formas y volúmenes en el entorno del niño

El lenguaje de las artes plásticas: sensibilidad, creatividad y cultura

Andersen, Ala de Cisne: actualización de un mito (1805-2005)

Aplicaciones educativas de las Tecnologías de la Información y la Comunicación

Aplicaciones de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de la Lengua Castellana

Juego y deporte en el ámbito escolar: aspectos curriculares y actuaciones prácticas

Descubrir, investigar, experimentar: iniciación a las ciencias

El cuento como instrumento para el desarrollo de la creatividad artística

Introducción temprana a las TIC: estrategias. Estrategias para educar en un uso responsable en educación infantil y primaria

Enseñar a pensar: sentando las bases para aprender a lo largo de la vida

La magia de las letras. El desarrollo de la lectura y la escritura en educación infantil y primaria

Aprender matemáticas. Metodología y modelos europeos

La competencia en comunicación lingüística en las áreas del currículo

Competencia matemática e interpretación de la realidad

El desarrollo del pensamiento científico-técnico en la educación primaria

La competencia artística: creatividad y apreciación crítica

La biblioteca escolar como espacio de aprendizaje

Autonomía e iniciativa personal en educación primaria

La música como medio de integración y trabajo solidario

Colección: Conocimiento educativo

Serie: Situación

EN CLAVE DE CALID@D: La Dirección Escolar

Investigaciones sobre el inicio de la lectoescritura en edades tempranas

EN CLAVE DE CALID@D: Hacia el éxito escolar

La convivencia en las aulas: problemas y soluciones

La disrupción en las aulas: problemas y soluciones

De la educación socioemocional a la educación en valores

Formación del magisterio en España. La legislación normalista como instrumento de poder y control (1834-2007)

Serie: Didáctica

Didáctica de la poesía en la Educación Secundaria

Los fundamentos teórico-didácticos de la Educación Física

La estadística y la probabilidad en el Bachillerato

La estadística y la probabilidad en la Educación Secundaria Obligatoria

Orientaciones para el desarrollo del currículo integrado hispano-británico en Educación Infantil

Orientaciones para el desarrollo del currículo integrado hispano-británico en Educación Primaria

Bases para un debate sobre investigación artística

Serie: Aula Permanente

Contextos educativos y acción tutorial

Imagen y personalización de los centros educativos

Nuevos núcleos dinamizadores en los centros de Educación Secundaria: los Departamentos Didácticos

Diagnóstico y educación de los alumnos con necesidades educativas específicas: alumnos intelectualmente superdotados

Gestión de calidad en la organización y dirección de centros escolares

La orientación escolar en los centros educativos

El profesorado y los retos del sistema educativo actual

El tratamiento de la diversidad en los centros escolares

Participación de las familias en la vida escolar: acciones y estrategias

La acción tutorial: su concepción y su práctica

Equipos directivos y autonomía de centros

Coeducación y prevención temprana de la violencia de género

El desarrollo de las competencias docentes en la formación del profesorado

La evaluación como instrumento de aprendizaje. Técnicas y estrategias

Funciones del departamento de orientación

Autonomía de los centros educativos

Educación emocional y convivencia en el aula

Títulos en coedición

Internet en el aula: Abecedario para la Educación Primaria

Educación Intercultural en el aula de Ciencias Sociales

Prensa y educación: acciones para la desaparición de un gueto

Diagnóstico y educación de los más capaces

Colección Los Reales Sitios:

Palacio Real de Aranjuez
Palacio Real de Madrid
Real Monasterio de La Encarnación
Real Monasterio de Santa Clara de Tordesillas
Palacio Real de La Granja de San Ildefonso
Monasterio de San Lorenzo de El Escorial

TÍTULOS EN EL AÑO		
	COLECCIÓN	**SERIE**
Inmersión temprana en lenguas extranjeras	AULAS DE VERANO	Principios
Nuevas funciones de la evaluación	AULAS DE VERANO	Humanidades
Agua y sostenibilidad: recursos, riesgos y remedios	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Aula Permanente
Las lenguas extranjeras como medio de comunicación intercultural	AULAS DE VERANO	Humanidades
Educación científica ahora: el informe Rocard	AULAS DE VERANO	Principios
La web 2.0 como recurso para la enseñanza del francés como lengua extranjera	AULAS DE VERANO	Humanidades
La pluralidad lingüística: aportaciones formativas, sociales y culturales	AULAS DE VERANO	Humanidades
Las escuelas oficiales de idiomas en el desarrollo de las políticas lingüísticas del Consejo de Europa	AULAS DE VERANO	Humanidades
Hacia un mundo sin fronteras. La inserción de España en la Unión Europea. Aspectos económicos y culturales	AULAS DE VERANO	Humanidades
Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas	AULAS DE VERANO	Ciencias
La estructura colegiada en los centros educativos. Trabajo coordinado y trabajo en equipo	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Aula Permanente
Principales aspectos normativos para una escuela pública de calidad	CONOCIMIENTO EDUCATIVO	Aula Permanente
Desarrollo de competencias básicas a través de las matemáticas	AULAS DE VERANO	Ciencias

Este volumen tiene su origen en el CURSO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO:

"Escuela de Educación Matemática 'Miguel de Guzmán': enseñar divulgando (V Edición)", que se celebró en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo, en Santander, el verano de 2009.

ISBN: 978-84-369-4937-7

GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN