Geoplanos y meccanos

MATEMATICAS: 1

Centros de Profesores

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE FORMACION DEL PROFESORADO

Geoplanos y meccanos

MENCHU BAS

JAVIER BRIHUEGA

Nivel: E.G.B. y EE.MM.

Colección: ***"Documentos y propuestas de trabajo"***

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE FORMACION DEL PROFESORADO
N.I.P.O. 176-87-003-5
I.S.B.N. 84-505-5340-7
Depósito Legal M- 9329 - 1987
Imprime MARIN ALVAREZ, Madrid

Cualquier acción que pretenda incidir en el pensamiento del profesor y su actividad en el aula precisa de la elaboración de materiales que la concreten y que sirvan de apoyo a su trabajo.

La necesaria coordinación que debe existir entre la distintas acciones de la Dirección General de Renovación Pedagógica aconseja la puesta en marcha de una colección que unifique los distintos materiales que se envían a los profesores que siguen alguno de los planes institucionales de experimentación y formación permanente.

La colección "Documentos y Propuestas de Trabajo" pretende cubrir esta función. Los títulos que la componen se organizan en torno a las áreas de conocimiento de los programas escolares, sobre aspectos y cuestiones de especial relevancia y necesidad para la enseñanza, que supongan innovaciones, introduzcan nuevos conocimientos y den respuesta a las necesidades sentidas como prioritarias por los profesores.

Estas publicaciones ofrecen al profesorado:

- Temas, cuestiones e ideas integradoras y cualitativamente significativas para la solución de los problemas de la enseñanza.

- Conocimientos, necesitados de actualización, sistematización o totalmente nuevos, productos de los últimos avances y desarrollos de la ciencia y la investigación.

- Desarrollo de unidades didácticas incluidas en los programas experimentales.

- Propuestas y ejemplificación de actividades, tanto grandes actividades como específicas, sugiriendo el valor y la potencialidad de las mismas.

- Planes de trabajo y aprovechamiento de recursos ejemplificadores capaces de ofrecer al profesorado ideas que propicien un aprendizaje ligado al medio y susceptibles de ser recreadas y desarrolladas en sus clases.

- Estrategias de evaluación y recuperación adecuadas a las cuestiones y conocimientos, así como a las actividades que se sugieren.

Los "Documentos y Propuestas de Trabajo" se destinan preferentemente a los grupos, talleres y seminarios permanentes de los diferentes Centros de Profesores con objeto de ofrecerles ideas, materiales e instrumentos útiles y atractivos para organizar y desarrollar sus actividades.

Por razones prácticas, la colección se presenta dividida por áreas o ciclos, identificables por el color y numerados de forma independiente para facilitar su clasificación.

Esperamos que esta iniciativa ayude a mantener la comunicación de la Dirección General de Renovación Pedagógica con los profesores y estimule la experimentación reflexiva de sus propias iniciativas.

INDICE

Página

Introducción

"La principal finalidad de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar ciertas facultades de la mente y, entre ellas, la intuición no es la menos preciada".

Poincaré.

Muchos de nosotros hemos observado la dificultad que se les presenta a muchos alumnos a la hora de hacer abstracciones. Esto es debido a que carecen todavía de ciertas estructuras mentales necesarias para la comprensión abstracta.

El aprendizaje de nuestros alumnos comienza por la observación del mundo que los rodea. Perciben objetos concretos. Este mundo está lleno de contenido matemático. Debemos enseñarles a descubrirlo: "la vida es una fuente inagotable de modelos preparados".

¿Qué entendemos por modelos matemáticos?

P. Puig Adam definía los modelos como "todo aquel material capaz de traducir o de sugerir ideas matemáticas".

Es un material que permite particularizar una idea más o menos abstracta, una imagen que concreta una idea abstracta.

El paso de lo concreto a lo abstracto resulta más natural, no a través de la observación del objeto, sino de las operaciones realizadas con él.

Si esta abstracción se realiza a través de modelos estáticos deberá haber una cantidad de éstos suficientes para que el alumno llegue a captar la idea subyacente común a todos ellos. Pero si los modelos son dinámicos (deformábles) el carácter abstracto común debe permanecer invariable en todas las transformaciones. Estos últimos, por su gran multiplicidad de construcciones, ofrecen una ventaja mayor que los estáticos y, más aún si las transformaciones pueden realizarse de un modo gradual.

La utilización de este material, en el aula, permite no solamente introducir conceptos, a través de la manipulación y observación de modelos, sino que, además, permite descubrir las aptitudes matemáticas naturales del niño, desarrollar destrezas y habilidades y fomentar la creatividad.

Aquí se proponen dos tipos de materiales: uno, individual, con el propósito de que el alumno "maneje y construya" y que llegue a sus propias conclusiones, y otro, colectivo, que manejará el profesor, sin ninguna explicación, con objeto de atraer la atención del alumno para que, mediante la observación, llegue al descubrimiento.

La atención del alumno no debe recaer sobre el material, como objeto, sino sobre las operaciones y transformaciones que se están realizando con él.

¿Cómo se deben construir los modelos?

El inconveniente mayor que casi todos los profesores ponemos a la confección de modelos por parte del alumno es el tiempo consumido en su fabricación. Pero este tiempo estará bien empleado si la actividad reflexiva y creadora domina sobre la estrictamente manual. Nosotros creemos que es más conveniente sacrificar la perfección del modelo frente a la conveniencia de multiplicar los modelos.

Los modelos encierran un inmenso mundo de posibilidades matemáticas. Es necesario seleccionarlos cuidadosamente, ya que la elaboración de ideas matemáticas debe ser intuitiva y la percepción es una gran ayuda.

Los modelos deben ser tan sencillos como sea posible, con objeto de que no se pierda lo esencial por culpa de los detalles.

Si el modelo va a utilizarse en diversas ocasiones, será mejor emplear material duradero. Pero, en otros casos, un simple cordón o una caja de cerillas serán tan útiles como un trozo de madera o una cadena.

La creación por parte de los alumnos de sus propios modelos los lleva a desarrollar, al mismo tiempo, la abstracción y la concreción, ya que el modelo debe expresar o sugerir a los demás sus propias ideas.

Tendrá que procurar que su modelo no presente singularidades que puedan sugerir caracteres no especificados en las hipótesis y, de igual modo, que no induzcan a conferirle propiedades no convenientes.

La creación de modelos queda enriquecida si sujetamos las hipótesis iniciales a condiciones capaces de traducirse matemáticamente por unas leyes, dando lugar a sencillos cálculos que determinarán los elementos característicos de la estructura que se quiere construir.

Por último, mencionaremos, muy brevemente, algunos inconvenientes del dibujo frente a este tipo de material, ya que creemos que, con lo dicho hasta ahora, quedan bastante claras las ventajas de éste último:

- el dibujo es un modelo estático, conduce menos a la observación. El niño se fija más en su contorno que en su interior,

- impide, en cierto modo, la libertad de pensamiento del niño, ya que el número finito de casos que se pueden exponer no permite sugerir problemas,

- no permite formar una idea de una situación real en el espacio.

El mayor valor del material consiste en que permite al alumno hacer experiencias mentales a su medida y desarrollar su capacidad en contraposición a la rigidez de una enseñanza dirigida.

¿Por qué un material de Geometría?

"El dibujo de una figura geométrica no marca el principio de la Geometría sino que corresponde a un estadio más desarrollado de la representación concreta. El origen de las Geometría no ha de buscarse en el dibujo sino en la primitivas construcciones y en las primeras técnicas".

(Emma Castelnuovo).

Como hemos indicado anteriormente, la Geometría debe comenzar con la observación y experimentación sobre objetos. Debe ser inicialmente intuitiva para después conseguir las bases de una geometría racional.

Para su estudio, podemos seguir dos caminos o métodos: el descriptivo y el constructivo.

Entendemos por método intuitivo descriptivo la exposición de los temas mediante figuras estáticas construidas de un modo determinado, indicando de antemano el uso que hay que hacer de ese material. Se obliga al alumno a moverse en un terreno donde está programado de antemano. Se guía a los alumnos como si no fueran capaces de descubrir por sí mismos conceptos y propiedades, como si la observación e investigación con el material fuera una pérdida de tiempo. Así, la Geometría aparece ante sus ojos como algo absoluto. De este modo, se le da una idea falsa de la investigación geométrica.

Por el contrario, en el método intuitivo constructivo, el niño participa activamente en la construcción de la Geometría, a través de los modelos dinámicos que él mismo crea. Aquí, la palabra intuición adquiere un significado de construcción.

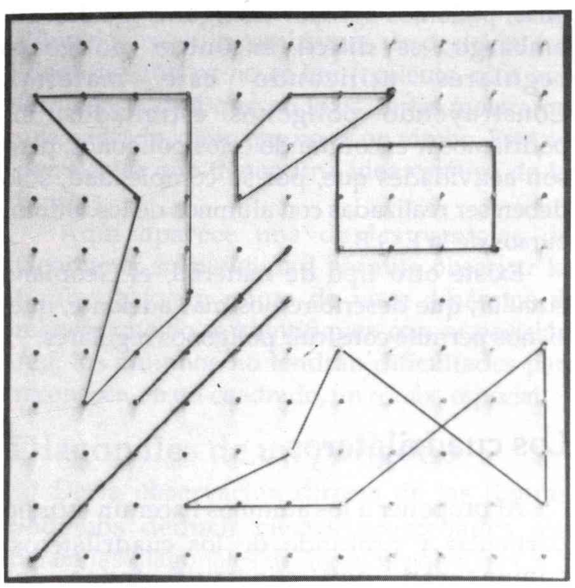
Este es el camino que nosotros hemos elegido.

En los siguientes epígrafes, detallaremos la construcción y utilización de modelos sencillos, proponiendo actividades que se pueden realizar con ellos, detallando algunas de ellas y sugiriendo otras aplicaciones y otras construcciones. En cualquier caso, debe ser el profesor el que decida cual es el material y actividades adecuadas para el nivel de sus alumnos.

El geoplano cuadriculado

Es un material multivalente, ideado por el profesor C. Gattegno.

Consta de un tablero cuadriculado, con puntas pequeñas clavadas en las intersecciones.



Es un material muy apropiado para trabajar con figuras planas que satisfagan determinadas propiedades y para descubrir multitud de otras propiedades en las figuras formadas.

Podríamos resumir las ventajas del Geoplano en:

- la rapidez de formación, transformación y anulación de figuras, con sólo modificar los puntos de apoyo de las gomas.

- se pueden ver las figuras desde distintos ángulos u orientaciones, sin más que girar el Geoplano. Esto permite reconocerlas independientemente de su posición. Este aspecto del Geoplano es fundamental para el alumno de los primeros cursos de E.G.B. ya que, en estos cursos, los alumnos tienen sus primeros contactos con la Geometría y el Geoplano les permite manejar las figuras planas en el espacio, desarrollando de esta manera su capacidad espacial. De este modo, evitamos la clásica identificación de las figuras con una determinada posición introduciendo al alumno en la idea de invarianza y transformación mediante el movimiento de las figuras.

Es también importante el hecho de que la formación de figuras no depende de la habilidad del que las construye, dato que no tenemos en cuenta a la hora de enseñar Geometría utilizando el encerado como único material.

El mayor inconveniente que se le puede achacar al Geoplano es que no permite pasar gradualmente de una figura a otra. En general, hay que deshacer una figura para formar otra.

Se utiliza uniendo los clavos con bandas elásticas logrando de esta forma diseñar figuras geométricas. Si las diferentes gomas son de colores distintos, ayudan a destacar el papel desempeñado por algunos segmentos.

Sería conveniente que cada alumno dispusiera de su propio Geoplano. En este caso, las medidas de cada tablero cuadrado no deben superar los 32 cm de lado para que sea fácilmente manejable sobre la mesa y en él se clavarán 121 clavos separados entre sí 3 cm.

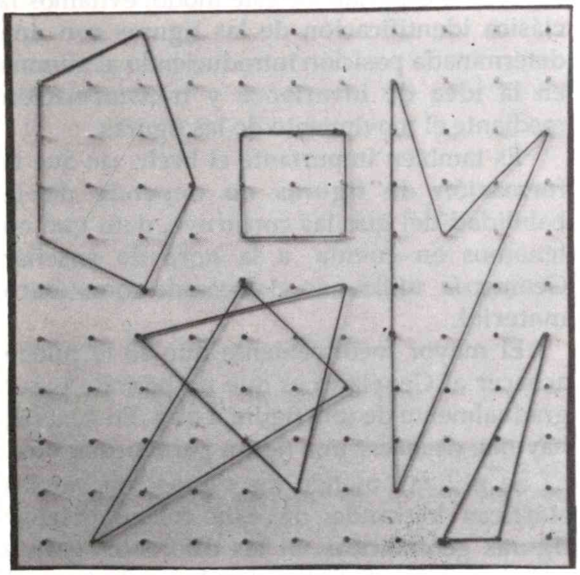
Si va a ser para uso exclusivo del profesor, lo cual no aconsejamos ya que así se pierde la verdadera función del material, sus medidas deben ser mayores, pero en ningún caso superar los 50 cm de lado, ya que un excesivo tamaño no permitiría que se manejara con facilidad.

A continuación, presentamos ideas para utilizar con provecho este material multivalente, iniciar caminos, procedimientos y formas de trabajo, presentándolo como un recurso más en la enseñanza activa y dinámica.

Además, la utilidad del Geoplano no termina en la Geometría; puede ser utilizado en otros campos de las Matemáticas, como, por ejemplo, en el estudio de las fracciones, haciendo que el área sea su soporte intuitivo.

Construcción y estudio de figuras planas

Utilizando gomas de colores, el alumno puede hacer un trabajo de investigación sobre los polígonos. Es un buen comienzo para la primera toma de contacto con este material y es un claro ejemplo de actividad que permite una organización del trabajo en fases:



- el alumno buscará y descubrirá toda una serie de figuras,
- las clasificará, pasando de lo más particular a lo general y viceversa, descubriendo un principio de trabajo que le permita una sistematización racional.

Se puede observar que ya en edades muy tempranas, hay alumnos que construyen las diferentes figuras según el orden creciente del número de lados. La observación de estos métodos, nos permite, como decíamos en la introducción, descubrir las tendencias naturales de los alumnos hacia las matemáticas.

Al intentar generar polígonos de una manera sistemática surgirá, de manera espontánea, el método interactivo que podrá ser utilizado como punto de partida hacia una generalización.

La noción de polígono se va aclarando, a medida que van surgiendo irregularidades en sus construcciones.

Al ir construyendo figuras aparecen de forma natural, los polígonos cóncavos, cosa que no sucede cuando se utiliza el encerado y, de manera espontánea, el alumno verá la diferencia entre unos y otros.

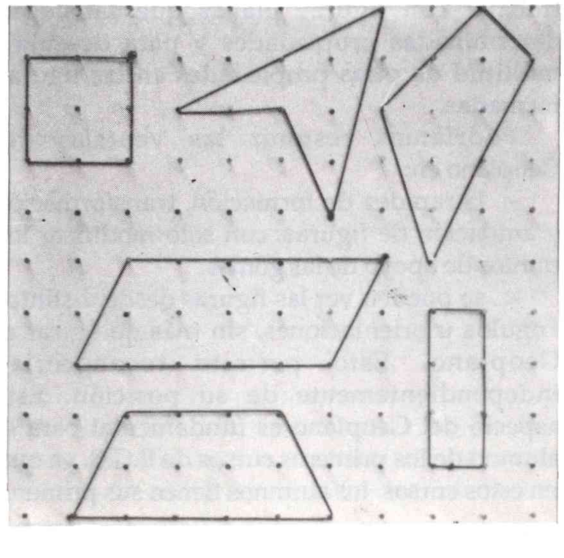
Asimismo, aparecen los polígonos estrellados cuyo estudio sugiere una cantidad infinita de posibilidades de formación.

El cambio de posición del Geoplano y la utilización de diferentes clavos para formar una misma figura, no anula la igualdad de las figuras de manera que, mediante giros, traslaciones, simetrías y combinaciones de ellas, podemos agrupar las figuras iguales. Sin embargo, es difícil encontrar polígonos regulares utilizando este material. Construyendo polígonos estrellados, sí podríamos ir encontrando estos polígonos, pero son actividades que, por su complejidad, sólo deben ser realizadas con alumnos de los últimos cursos de la E.G.B.

Existe otro tipo de material, el Geoplano circular, que describiremos más adelante, que sí nos permite construir polígonos regulares.

Los cuadriláteros

Al proponer a los alumnos hacer un estudio particular y profundo de los cuadriláteros, comenzarán por construir todos los cuadriláteros que sea posible en esa red.



Si no surgieran también cuadriláteros cóncavos se debería hacer observaciones al respecto.

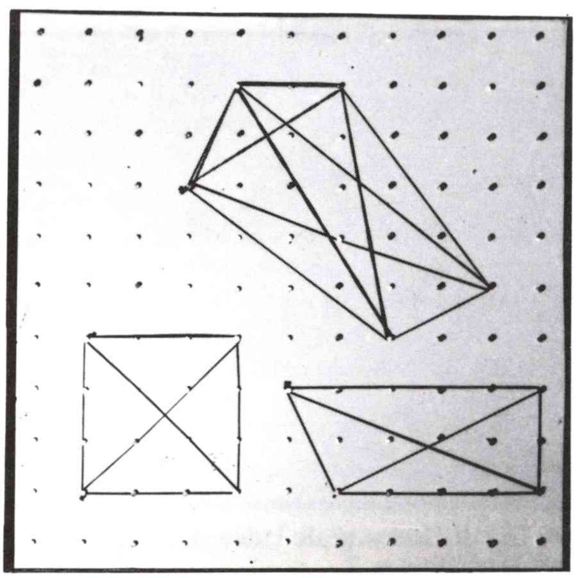
De la observación de sus ángulos y tamaño de sus lados, surgen los conceptos: regulares y no regulares, paralelogramos y no paralelogramos. De esta manera, se hace una clasificación de los cuadriláteros de lo general a lo particular. Al mismo tiempo, observarán que un cuadrado es un caso particular del rombo (observación muy importante) y que un rombo es también un paralelogramo consiguiendo una clasificación de lo particular a lo general.

En la mayoría de nuestras clases, hemos observado que los alumnos no tienen ninguna dificultad en identificar un rombo si está colocado con un vértice en la parte alta del dibujo; pero, si lo cambiamos de posición, esta identificación ya no es tan corriente, más aún, la mayoría dirá que no lo es. Si les mostramos un cuadrado, dirán que no es un rombo. Esto nos demuestra que tienen una idea estática de las figuras.

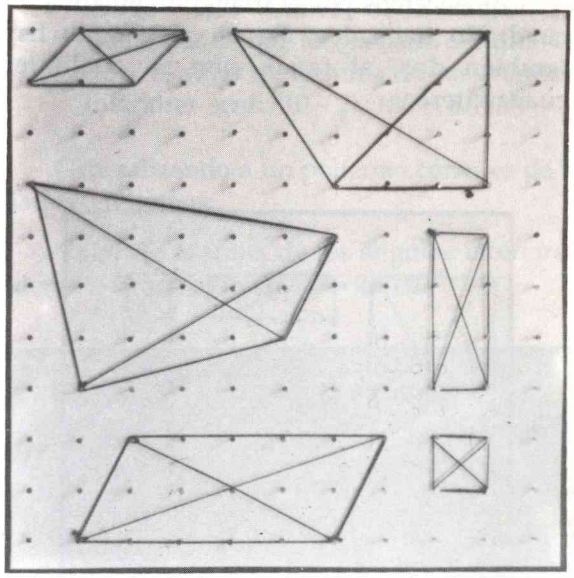
Aquí aparece una de las ventajas del Geoplano: su movilidad permite observar las figuras bajo un punto de vista dinámico de manera que no se identifiquen con su posición. Así, los alumnos no tendrán dificultades para reconocer, en un cuadrado, un rombo especial.

Diagonales de un polígono

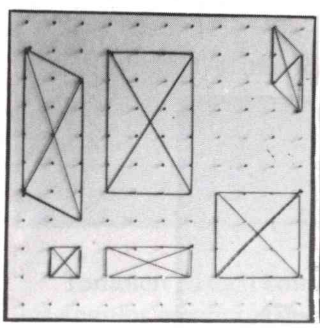
De la observación directa de las figuras, podemos deducir ciertas propiedades que tienen las diagonales de algunos polígonos.

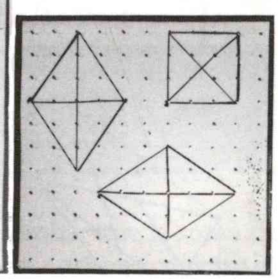


Fijémonos en los cuadriláteros:



En los paralelogramos, las diagonales se cortan en su punto medio y, en los rectángulos, además, son iguales.





Si las diagonales son perpendiculares entre sí aparecen los rombos y, como caso especial, aparece el cuadrado, cuyas diagonales son iguales y perpendiculares.

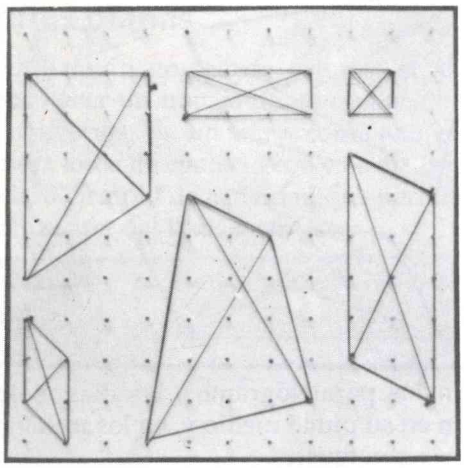
Se puede llegar a la conclusión de que las propiedades de las diagonales aumentan a medida que se especializa el cuadrilátero.

De análoga manera, se podría estudiar las diagonales de los trapecios o de otros polígonos.

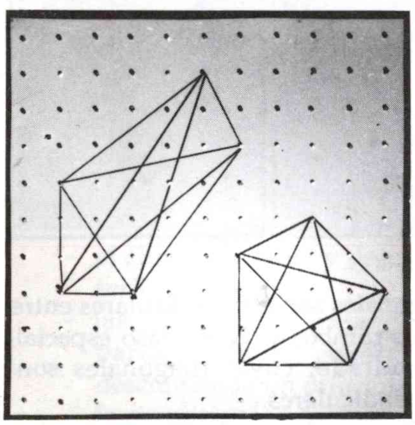
Podríamos haber seguido el proceso inverso, esto es, a partir de las propiedades o características que verifican cierta diagonales, encontrar los polígonos que las cumplen.

Ampliemos este estudio calculando el número de diagonales de cualquier polígono convexo:

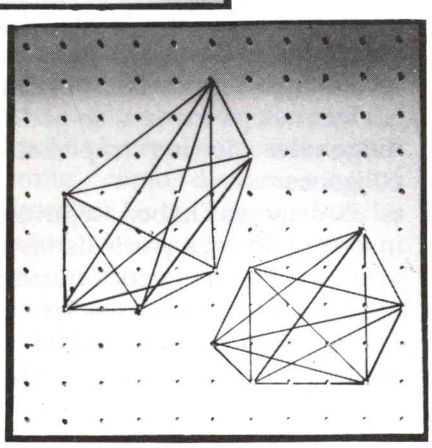
Comencemos por el triángulo: ninguna. El cuadrado tiene dos. En un rectángulo hay también dos, al igual que en cualquier cuadrilátero.



Aumentemos el número de lados:



- Pentágono:
5 lados,
5 diagónales.



- Hexágono:
6 lados,
9 diagonales.

Veamos si podemos calcular el número de diagonales de un decágono, sin necesidad de trazarlas todas: tiene 10 lados y 10 vértices. Desde cada vértice podemos trazar 9 segmentos que los une con los otros vértices pero, de estos 9 segmentos, 2 son adyacentes y, por lo tanto, no son diagonales, con lo que nos queda que cada vértice se puede unir con 10 - 3 vértices formando diagonales. Como hay 10 vértices en total tendríamos 10 x 7 = 70 diagonales. Como hay que tener en cuenta que cada diagonal une dos vértices las estamos contando dos veces. Así, el número de diagonales se reduce a la mitad: 35

Generalizando este cálculo, obtendríamos el número de diagonales de un polígono de n lados.

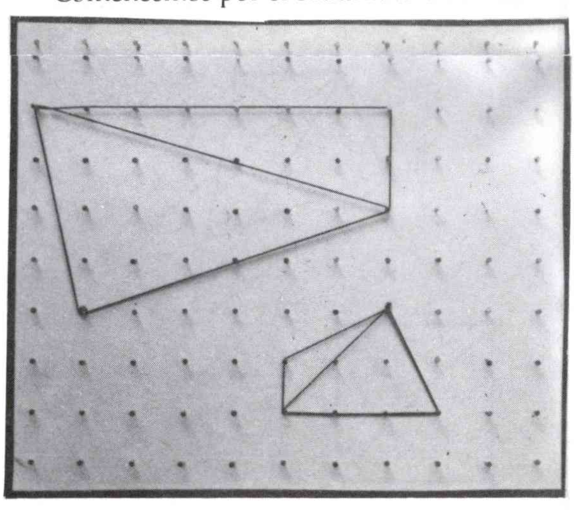
Número de diagonales de un n-ágono convexo: $\frac{n\,(n-3)}{2}$

Este ejercicio puede ser también planteado como un problema de Combinatoria y, en este caso, el problema debe ser resuelto por alumnos de EE.MM.

Angulos de un polígono

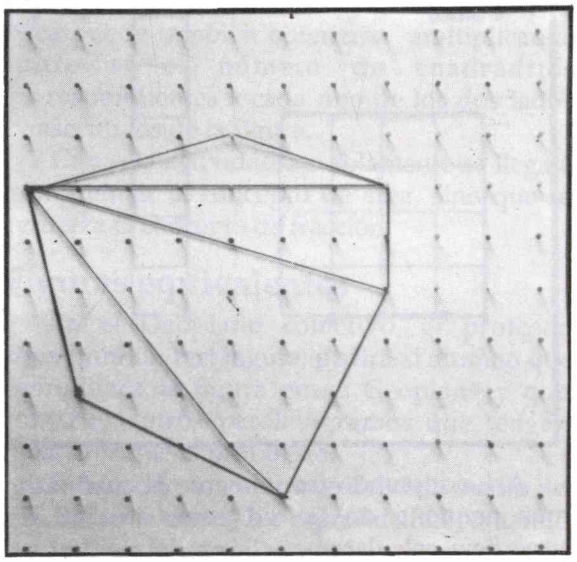
Un método muy sencillo para obtener el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono se basa en la propiedad de que dichos ángulos, en un triángulo, suman 180º. Para ello, no hay más que descomponer el polígono en triángulos, utilizando diagonales que no se corten.

Comencemos por el cuadrilátero:

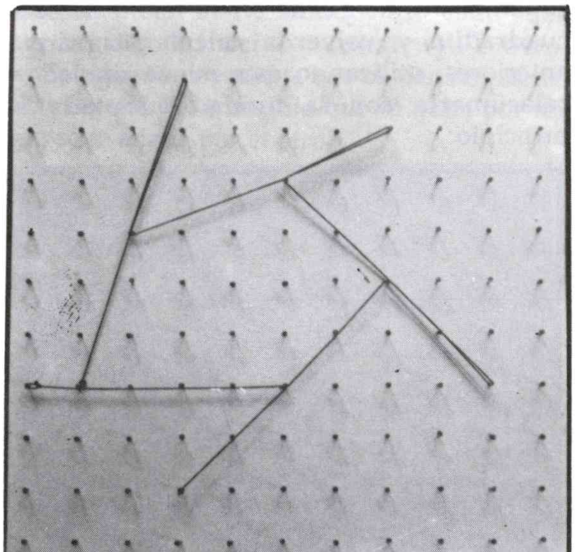


Cuadrilátero: nº de lados, 4; nº de triángulos, 2.

Como la suma de los ángulos de un triángulo es de 180º, la suma de los ángulos interiores del polígono será de 2 x 180º



Pentágono: nº de lados, 5; nº de triángulos, 3. Valor de la suma de los ángulos interiores: 3 x 180º



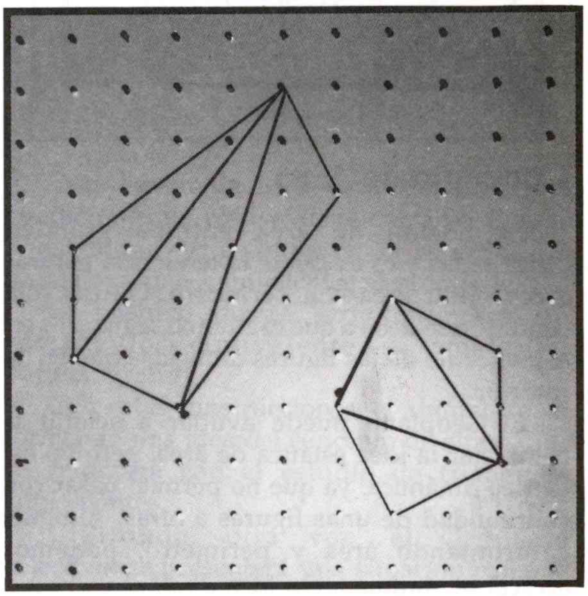
Hexágono: nº de lados, 6;nº de triángulos, 4. Valor de la suma de los ángulos interiores: 4 x 180º.

Siguiendo este método, calculemos el valor de la suma de los ángulos interiores de un decágono, sin necesidad de construirlo:

- Tiene 10 lados; como cada vértice se puede unir a todos los demás mediante una diagonal, descontando los dos vértices adyacentes obtenemos: 10 - 2 = 8 diagonales. Como el número de triángulos en que ha quedado dividido es de 8, el valor de la suma de sus ángulos interiores será: (10 - 2). 180º= 8.180º.

Generalizando a un polígono convexo de n lados tendremos:

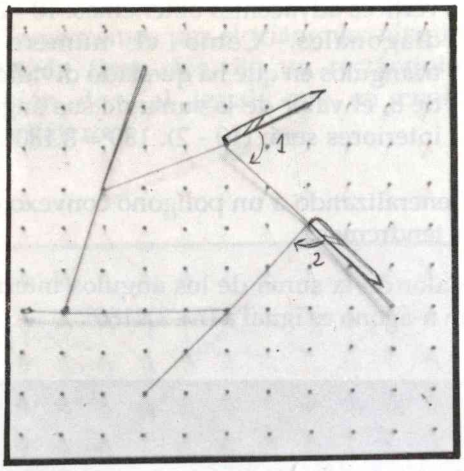
Valor de la suma de los ángulos interiores de un n-ágono es igual a (n - 2). 180º.



También es fácil comprobar que la suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es de 360º

Comencemos recorriendo el ángulo 1. El ángulo 2 empieza donde termina el 1. El ángulo 3 empieza donde termina el 2 y así sucesivamente de manera que el último ángulo termina donde empieza el primero. Está claro, hemos dado una vuelta completa. La suma de esos ángulos será de 360º.

Se podría también comprobar colocando un lápiz en el vértice 1 (como indica la figura) y haciéndolo girar ese ángulo, desplazarlo hasta el vértice 2; hacerlo girar ese ángulo, desplazarlo hasta el 3, y así sucesivamente, hasta llegar al vértice 1 y observando que el lápiz ocupa la misma posición que la de salida, por lo tanto ha dado una vuelta completa.



Concepto de Area

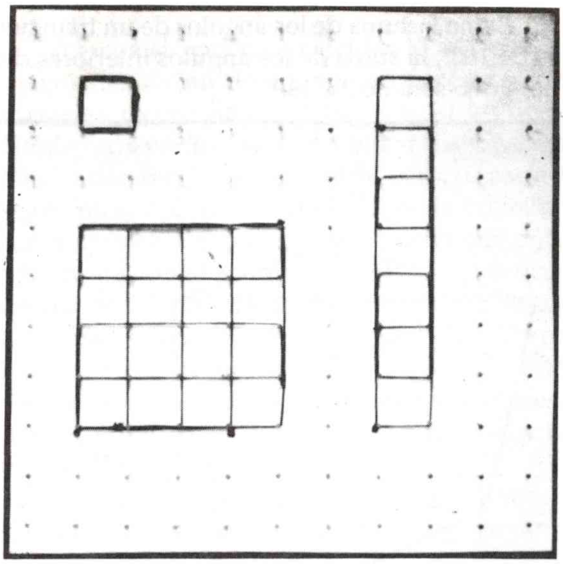
La noción de área entraña grandes dificultades y es evidente la tendencia natural a confundir área con perímetro. Quizas esta confusión se deba a que el alumno se fija más en el contormo de las figuras dibujadas que en su interior.

El Geoplano puede ayudar a aclarar o completar la idea estática de área, pero no así la idea dinámica, ya que no permite pasar con continuidad de unas figuras a otras. Aunque, confrontando área y perímetro, podemos acercar al alumno a esa idea dinámica.

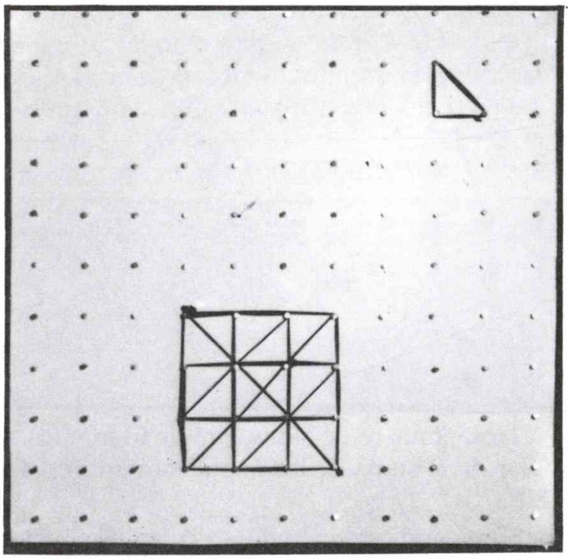
Por ese motivo, es conveniente utilizar también otros materiales, como pueden ser las varillas de meccano o, sencillamente, un cordel, ya que con ellos, sí, se puede trabajar esta idea dinámica.

Todos los alumnos conocen el área de un rectángulo: base por altura. Algunos habrán llegado a esta expresión a través de : "la base se va desplazando paralelamente a sí misma a lo largo de la longitud de la altura". Pero muy pocos dividirán el rectángulo en cuadritos unitarios, ya que la utilización de una unidad de medida no es espontánea. Supone ir construyendo el área a través de sumas de otras áreas, pero el alumno ve el rectángulo como un todo.

Al estar el Geoplano formado por una cuadrícula, se visualiza la unidad de medida de superficie, pudiendo calcularse áreas utilizando esta unidad y sin necesidad de medir con otros medios.



Así, adoptando inicialmente el cuadradito más pequeño de la red como unidad de superficie, calcularemos el área del cuadrado y del rectángulo, dividiéndolos en tantos cuadraditos unidad como sea posible. El paso siguiente sería adoptar distintas unidades de superficie, como puede ser la mitad de cada cuadradito y volver a calcular las áreas anteriores, utilizando esta nueva unidad, y relacionarla con la unidad adoptada al principio.



Para obtener el área de cualquier otra figura geométrica, adoptaremos, como unidades de superficie, el cuadrado, el rectángulo y el triángulo, llegando al concepto de área como la medida de una superficie cualquiera a partir de otra, considerada como unidad.

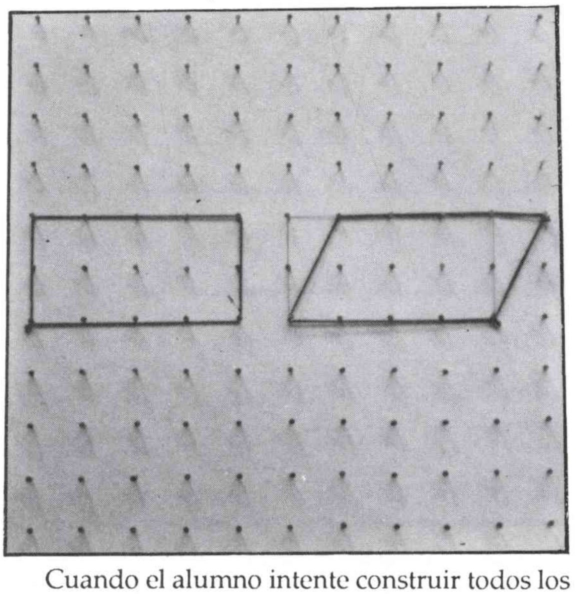
En este momento, se puede hacer observar que, en el caso del cuadrado y del rectángulo, el área puede también obtenerse multiplicando entre sí el número de cuadraditos correspondientes a cada uno de los dos lados consecutivos de la figura.

Con esta actividad, no solamente se llega a comprender el concepto de área, sino que se refuerza el concepto de fracción.

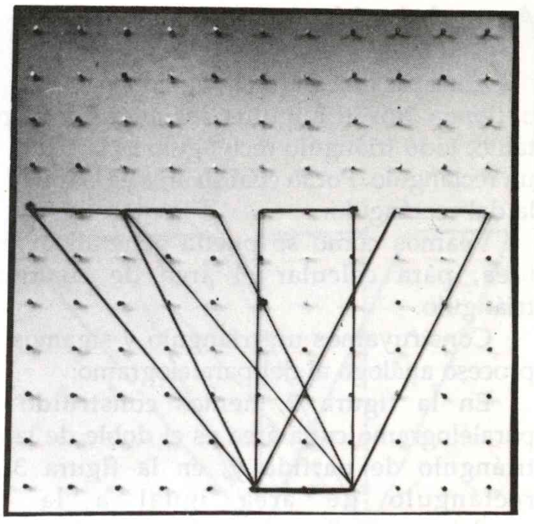
Figuras equivalentes

En el Geoplano colectivo, el profesor construirá un rectángulo, pedirá al alumno que reproduzca la figura en su Geoplano y que construya otros paralelogramos que tengan igual área que el propuesto.

Trabajando con alumnos del ciclo medio de E.G.B., inicialmente los reproducirán contando cuadraditos y sólo construirán rectángulos. En este caso, es necesario que el profesor, en su Geoplano, coloque otra goma sobre el rectángulo anterior y desplazándola lateralmente, manteniendo un lado del rectángulo, inicial construya otro paralelogramo de manera que el alumno pueda observar que "el triángulo que se quita por un lado se le añade por el otro".



Cuando el alumno intente construir todos los paralelogramos posibles, equivalentes a ese rectángulo inicial, surgirá la necesidad de buscar una estrategía que le permita construirlos todos, sin olvidarse de ninguno.

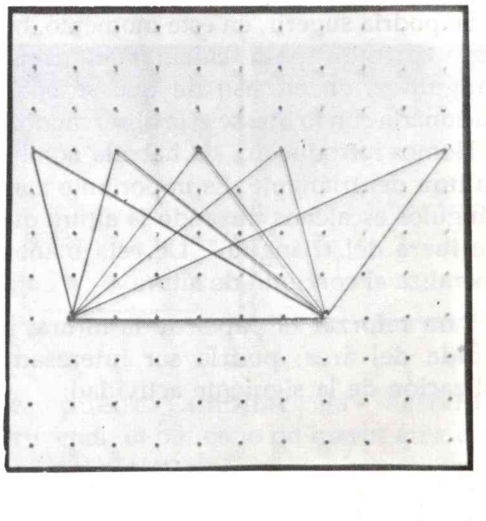


Esta búsqueda le llevará a deducir las condiciones de equivalencia entre las figuras construidas y a obtener la familia de paralelogramos equivalentes al propuesto.

El paso siguiente sería encontrar un rectángulo equivalente a cualquier paralelogramo.

Con estas construcciones, el alumno se va formando una idea del concepto de altura, que se reforzará con el estudio de triángulos equivalentes.

Utilizando, otra vez, el Geoplano colectivo, se presentará una situación como la indicada en la figura siguiente, de manera que el alumno pueda observar que esos triángulos tienen todos igual área, deduciendo las condiciones de equivalencia y obteniendo las familias de triángulos equivalentes.



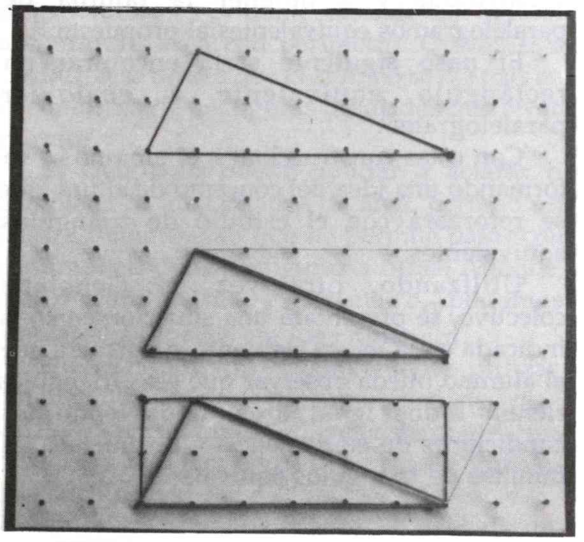
Area del triángulo

Al trazar una diagonal de un rectángulo, se obtienen dos triángulos rectángulos y, por tanto, todo triángulo rectángulo es la mitad de un rectángulo. Por lo cual su área es la mitad de la del rectángulo.

Veamos como se puede generalizar esta idea, para calcular el área de cualquier triángulo.

Construyamos un triángulo y sigamos un proceso análogo al del paralelogramo:

En la figura 2, hemos construido un paralelogramo cuya área es el doble de la del triángulo de partida y, en la figura 3, el rectángulo de área igual a la del paralelogramo. Esto nos indica que el área del triángulo es la mitad de la de este rectángulo (aparece con un trazo más grueso, en la foto).

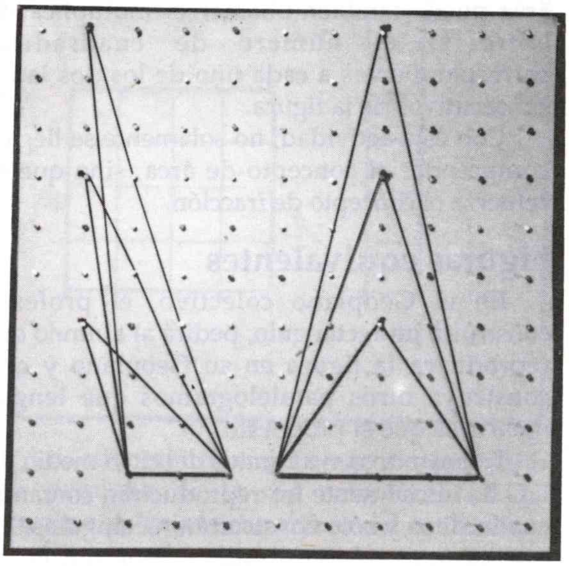


Se podría sugerir, en este momento, buscar una expresión para calcular el área del triángulo y, en el caso de que se conozca, relacionarla con lo que se está observando.

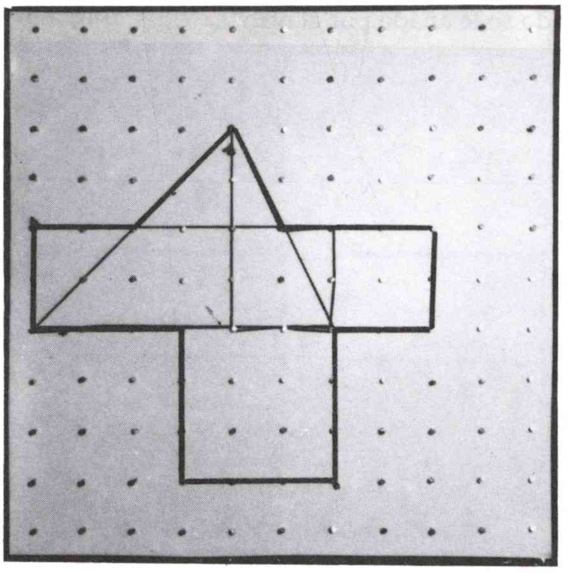
Hemos introducido, sin haberla nombrado, la altura del triángulo. Es importante manejar triángulos escalenos trazando la altura que "se sale fuera del triángulo". De esta manera se generaliza el concepto de altura.

Para reforzar el papel de la altura, en la medida del área, podría ser interesante la realización de la siguiente actividad:

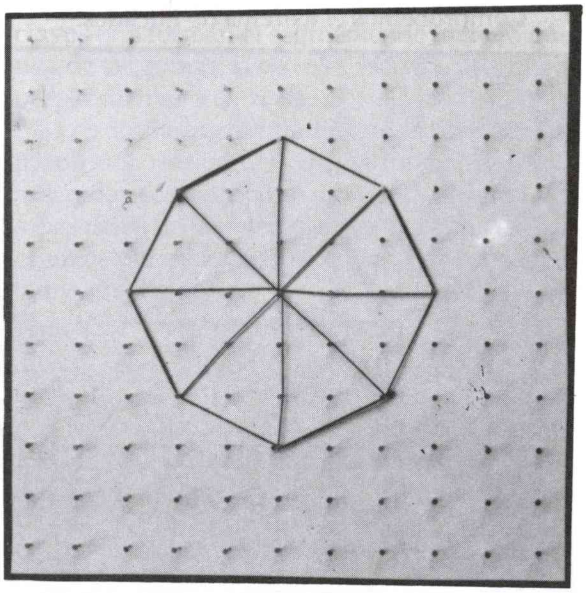
En el Geoplano colectivo, construyamos triángulos cuyas áreas estén en la relación 1:2:3. El alumno deberá explicar su porqué:

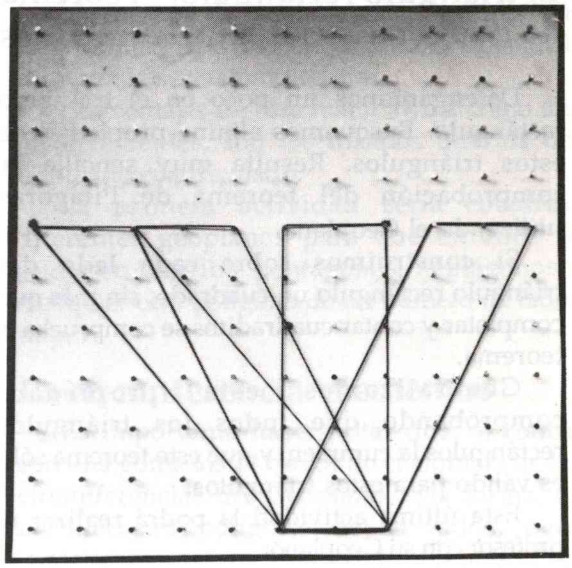


El área de cualquier polígono la podemos calcular utilizando únicamente triángulos o rectángulos. Para ello, no hay más que triangular el polígono y su área será la suma de las áreas de esos triángulos.



Si el polígono es regular estos cálculos se simplifican ya que se puede dividir en tríangulos iguales.

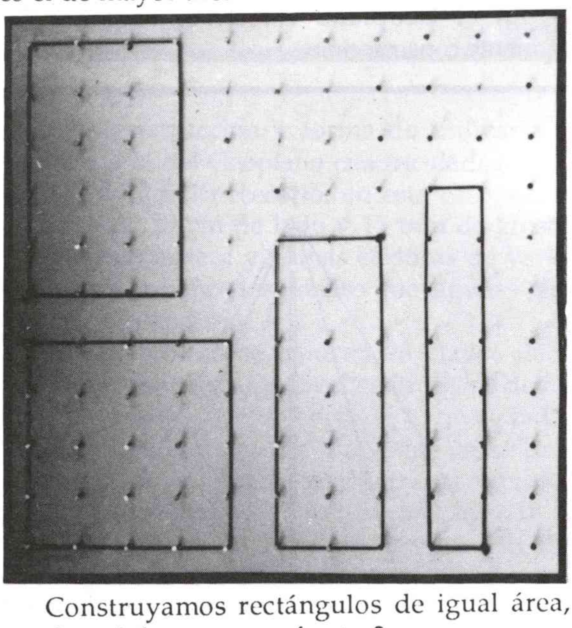




Relación área-perímetro

Estas actividades pretenden ayudar a comprender los conceptos de área y perímetro y a diferenciarlos.

Comencemos construyendo rectángulos de igual perímetro, ¿cuales son sus áreas?. ¿Cuál es el de mayor área?.



Construyamos rectángulos de igual área, ¿cual es el de mayor perímetro?.

De esta manera, se observa que podemos mantener constante una de las dos variables, y sobre la otra varía automáticamente.

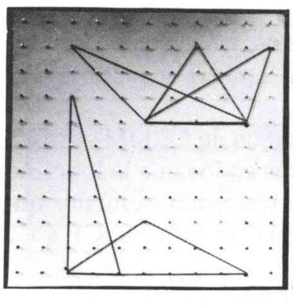
Completemos esta actividad trabajando con el Geoplano colectivo del profesor. En esta actividad, los alumnos deberán anotar sus observaciones contestando a las preguntas que se les formulen.

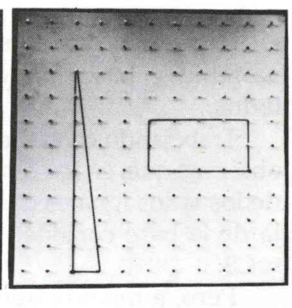
Se construirá, en el Geoplano, figuras de igual área, como indican los dibujos:

¿Tienen igual área los triángulos construídos?.

¿Cómo son sus perímetros?.

¿El área del triángulo y la del rectángulo son iguales?.





Se puede ampliar la actividad construyendo el polígono de mayor área entre los de igual perímetro?.

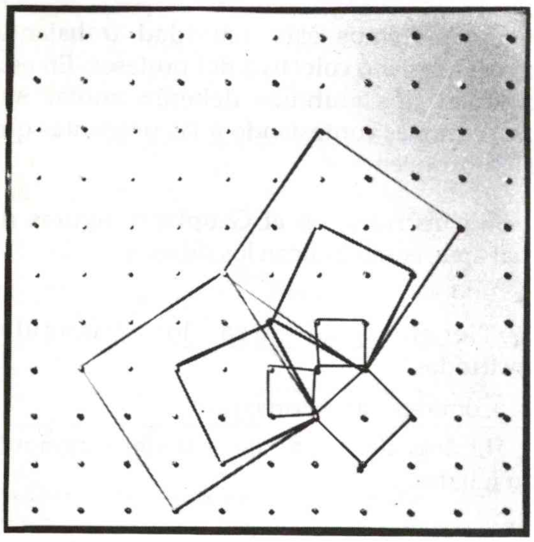
El triángulo rectángulo. Teorema de Pitágoras. Teorema de Euclides

Detengámonos un poco en el triángulo rectángulo. Busquemos alguna propiedad de estos triángulos. Resulta muy sencilla la comprobación del teorema de Pitágoras utilizando el Geoplano.

Si construimos sobre cada lado del triángulo rectángulo un cuadrado, sin más que completar y contar cuadraditos se comprueba el teorema.

Generalizamos esta propiedad, comprobando que todos los triángulos rectángulos la cumplen, y que este teorema sólo es válido para estos triángulos.

Esta última actividad la podrá realizar el profesor con su Geoplano:

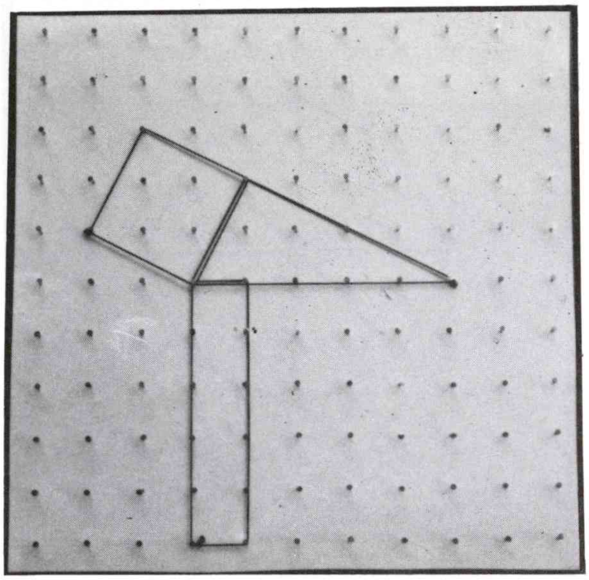


Formemos triángulos isósceles de altura variable y base fija y cuadrados sobre sus lados.

Trabajando con alumnos de EE.MM., es fácil observar que, en los casos en los que la longitud de los lados iguales del triángulo es menor que la de la base considerada, se cumple C1 + C2 <C3.

Pero, a medida que aumentamos la altura, comprobamos que: C1 + C2 >C3. Por tanto habrá un momento en que se cumpla: C1 + C2 = C3 y este caso es aquel en el que el triángulo es rectángulo.

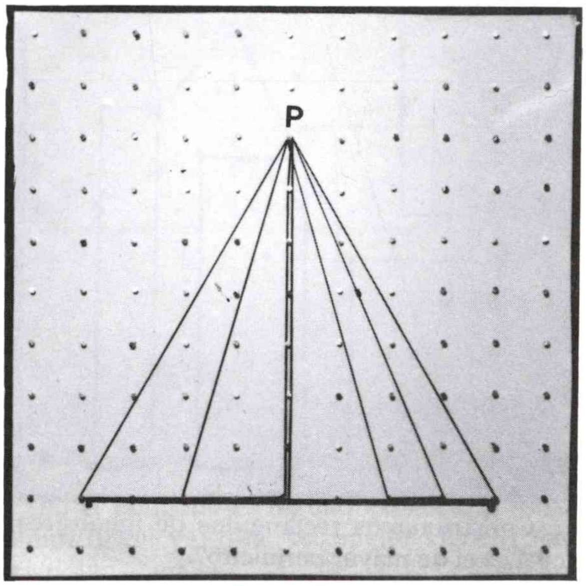
Comprobemos el teorema de Euclides:



En el Geoplano, se observa que "el cuadrado tiene la misma área que el rectángulo". Si esta actividad se realiza con alumnos de EE.MM., se debe ampliar con la generalización del teorema de Pitagóras.

Distancia de un punto a una recta

En el Geoplano colectivo, hagamos la siguiente construcción:

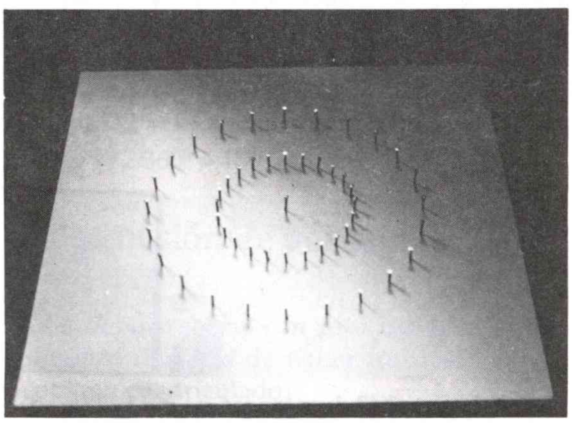


Con una goma, trazaremos un segmento (en la figura, con un trazo más grueso).

Elijamos cualquier otro clavo del Geoplano para hacer de punto P. Utilizando gomas de distintos colores, se unirá P con los distintos clavos que forman el segmento, de manera que, una de las gomas, la de color más intenso, quede perpendicular a la recta.

Los alumnos observarán que se han formado triángulos rectángulos y que todas las gomas utilizadas son la hipotenusa de esos triángulos a excepción de la goma de color más intenso que es un cateto de todos los demás. Por lo tanto es la menor distancia.

El geoplano circular



Su construcción y forma de utilizarlo es similar a la del Geoplano cuadriculado.

El material necesario, en este caso, es: un tablero de 25 cm de lado y 15 mm de grosor, clavos con cabeza y gomas elásticas de varios colores y tamaños (es preciso que algunas sean bastante grandes).

En el tablero se colocan 25 clavos de la siguiente manera: uno en el centro y los demás formando una circunferencia de 10 cm de radio, a igual distancia entre sí. Previamente, se debe dibujar sobre el tablero la trama circular, indicando el lugar exacto en el que deben ir los clavos. En este caso, hemos construido dos circunferencias concéntricas ya que lo requería una de las actividades propuestas.

Se podría trabajar con menos clavos y, si los alumnos son del ciclo medio de EGB, basta con un geoplano de 12 clavos, y además el del centro.

Es este un material adecuado para el estudio y construcción de algunos elementos importantes de la circunferencia, así como para la construcción de los polígonos regulares más importantes (salvo el pentágono) y el estudio de algunas de sus propiedades.

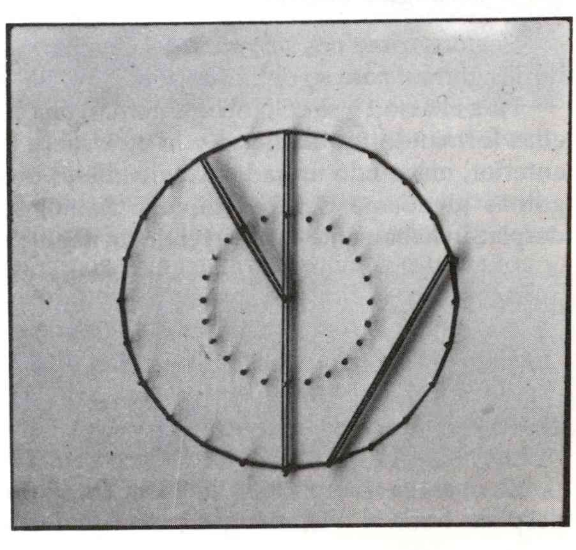
Las ventajas de este material, así como sus inconvenientes, son los mismos que los del Geoplano cuadriculado.

La primera actividad sería construir diferentes geoplanos para que en ellos se pudiesen inscribir pentágonos, heptágonos o cualquier otro polígono de un número de lados impar.

La circunferencia: elementos

Es importante hacer notar que, al rodear con una goma los 24 clavos de cualquiera de las circunferencias del Geoplano, ésta forma, en realidad un polígono de 24 lados, pero "prácticamente" es una circunferencia. Este hecho nos permite, por un lado, trabajar con la circunferencia marcada por una goma y, por otro, apuntar la idea de circunferencia como límite de polígonos de muchos lados, idea esta que será remarcada al estudiar la construcción de los polígonos regulares.

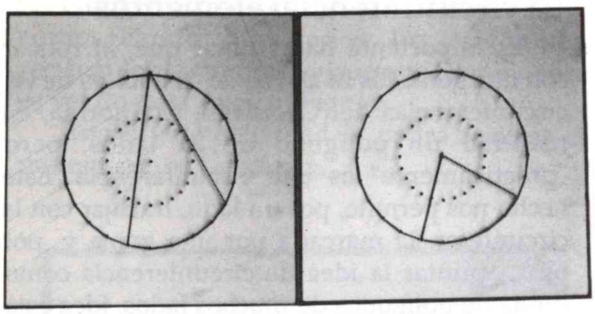
Utilizando gomas de colores, se puede identificar fácilmente todos los elementos geométricos de una circunferencia: cuerda, arco, radio, diámetro, segmento y sector circular, ángulo...., además de visualizar algunas de la propiedades de estos elementos como, por ejemplo, que la cuerda de mayor longitud en una circunferencia es su diámetro.



Angulos en una circunferencia

Para los alumnos de los cursos superiores de EGB o primeros de EE.MM. el uso del Geoplano circular en el estudio de los ángulos en una circunferencia sirve para visualizar ciertas propiedades; además, lo podemos utilizar como apoyo en una interesante demostración.

Los ángulos inscritos y centrales en una circunferencia quedan definidos tal como se observa en las fotos.



"En una circunferencia, un ángulo inscrito vale la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco". Se pueden presentar tres casos distintos de esta propiedad.

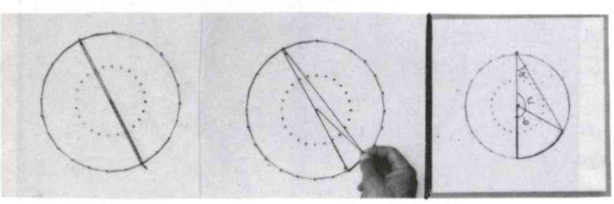
1.-Uno de los lados del ángulo inscrito pasa por el centro de la circunferencia, esto es, es un diámetro.

2.-El centro de la circunferencia queda dentro del ángulo inscrito.

3.-El centro de la circunferencia queda fuera del ángulo inscrito.

Veamos cómo nos servimos del Geoplano y de las gomas, para su demostración:

Para el **caso 1º**, se colocan dos gomas, una de ellas formando un diámetro y la otra sobre la anterior, marcando un radio. Cogiendo las dos gomas al mismo tiempo con una mano, se desplazan lentamente construyendo un ángulo.

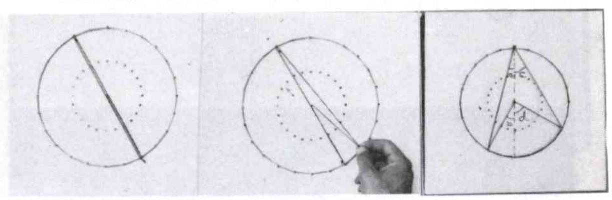


Se observa que un lado de cada ángulo se desplaza hacia el mismo lugar, pero uno desde el centro de la circunferencia y el otro desde un extremo del diámetro marcado. Es evidente que el ángulo central aumentó más que el inscrito. Veamos cuanto más:

El triángulo formado es isósceles luego se cumple: $2a + c = 180º$ de donde $a = 1/2\ (180º - c)$. Además $c + b = 180º$ y, por tanto, $b = 180º - c$ De ambas igualdades se deduce que $a = 1/2\ b$.

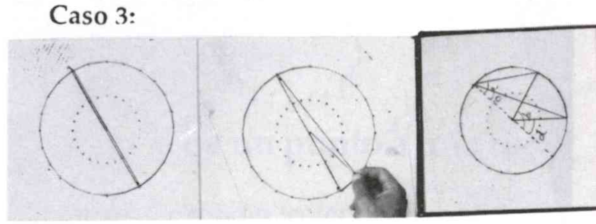
Para el segundo y tercer caso, marcaremos previamente el diámetro con otra goma y procederemos de manera análoga al primer caso pero desplazaremos la goma por ambos lados del ángulo.

Caso 2:



$a = 1/2\ b$ y $c = 1/2\ d$ por tanto, $a + c = 1/2\ (b + d)$

Caso 3:



$a = 1/2\ b$ y $c = 1/2\ d$, entonces, $a - c = 1/2\ (b - d)$

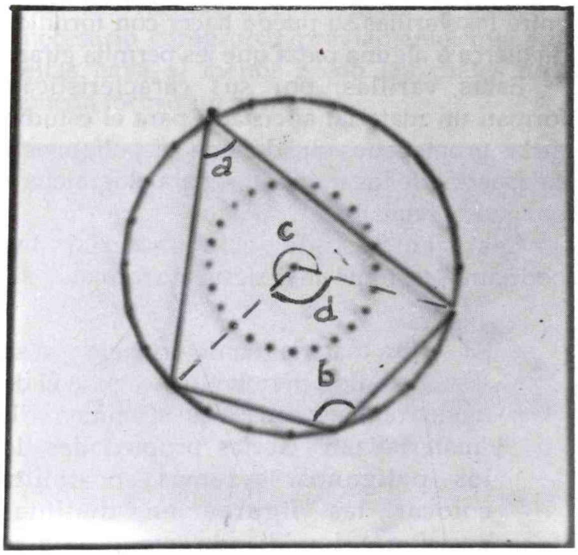
Es interesante la aplicación de esta propiedad al caso del ángulo inscrito que abarca media circunferencia. Como el ángulo central que abarca el mismo arco (media circunferencia) mide 180º, el ángulo inscrito medirá 90º. Además:

a) Todos los ángulos inscritos cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro son rectos.

b) Todos los ángulos inscritos cuyos lados pasan por los extremos de cuerdas iguales son iguales o suplementarios.

Relación entre los ángulos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia

Utilizando la propiedad de que un ángulo inscrito en una circunferencia vale la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco, es fácil observar que los ángulos opuestos de cualquier cuadrilátero son suplementarios.

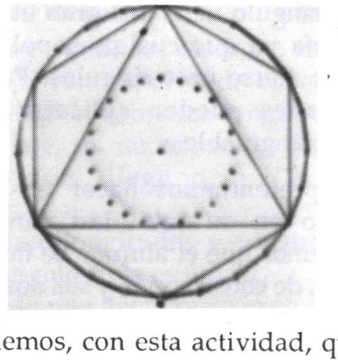


Como $a = 1/2\ d$ y $b = 1/2\ c$ y además $c + d = 360^{o}$ entonces
$a + b = 1/2\ 360^{o} = 180^{o}$.

Construcción de polígonos regulares

Se debe trabajar con este material en los polígonos después de haber trabajado con el Geoplano cuadriculado.

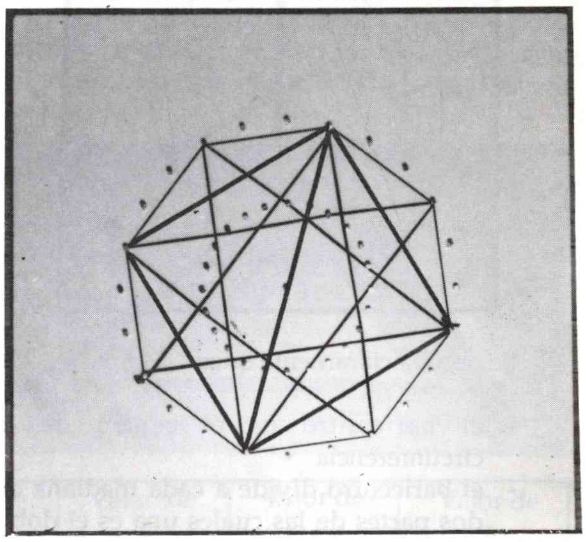
Construyamos polígonos regulares. Uniendo los clavos con una goma elástica, de 8 en 8 obtenemos el triángulo equilátero. De 6 en 6 obtenemos el cuadrado y siguiendo este procedimiento podemos obtener los polígonos de 6, 8, 12 y 24 lados inscritos en la circunferencia.



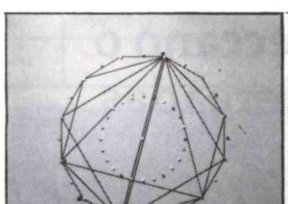
Pretendemos, con esta actividad, que sean los propios alumnos los que vayan descubriendo características generales de estos polígonos. Como cada polígono está construído con un color distinto se llega al concepto de circunferencia como límite de polígonos, al ir aumentando el número de lados.

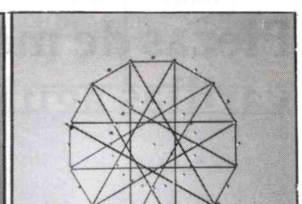
Veamos cómo se puede percibir una propiedad interesante de los polígonos de un nº par de lados:

Formemos un octógono regular. Uniendo los clavos del octógono de dos en dos, formamos un cuadrado, uniéndolas de tres en tres, un octógono estrellado. Y, si las unimos de cuatro en cuatro, obtenemos un diámetro.



Hagamos este mismo estudio con el dodecágono.





Podríamos continuar con el de 24 lados y generalizar.

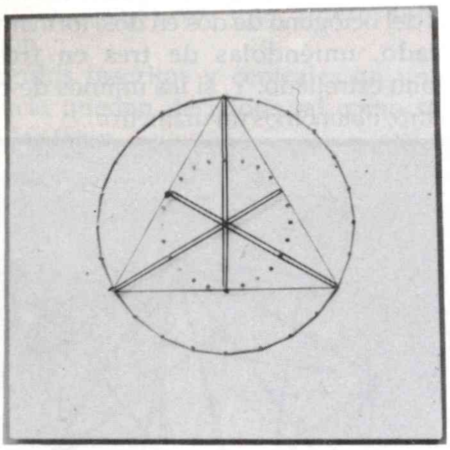
Este estudio, de por sí interesante, permite encontrar relaciones entre los lados de estos polígonos, sus correspondientes estrellados y sus apotemas, pero solamente se puede hacer con alumnos de EE.MM.

Una vez construído el polígono regular, se puede calcular su área, por triangulación.

El proceso inverso sería construir polígonos regulares conocido el valor del ángulo central ya que, al tener el Geoplano 24 clavos, éstos están separados 15º entre sí.

Baricentro de un triángulo uilátero. equilátero

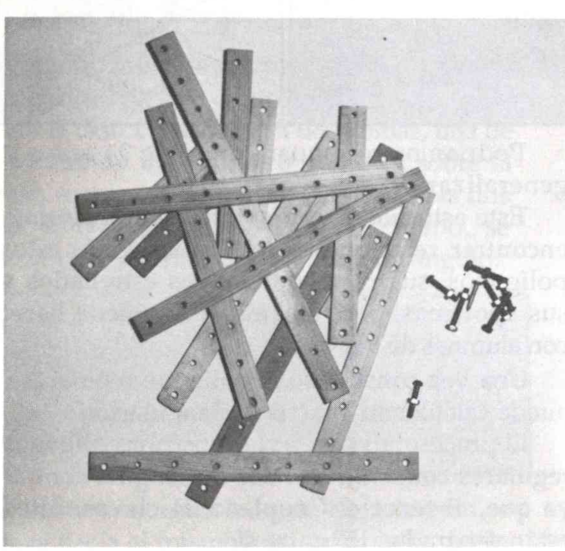
1. En esta actividad, utilizaremos el Geoplano de dos circunferencias concéntricas cuyos diámetros están en la relación 1 : 2. Sobre el círculo de mayor tamaño, construímos un triángulo equilátero y marcamos con gomas sus medianas.



Se obseva claramente que:

- el baricentro es el centro de la circunferencia
- el baricentro divide a cada mediana en dos partes de las cuales una es el doble de la otra.

Piezas de meccano o varillas agujereadas



Es un material que consta de múltiples varillas agujereadas de distintas longitudes. Los agujeros son equidistantes con un distancia de 2 cm entre agujeros. Utilizaremos dicha distancia como unidad de medida; la unión entre las varillas se puede hacer con tornillos de tuerca o alguna pieza que les permita girar.

Estas varillas, por sus características, forman un material adecuado para el estudio de las propiedades que definen los polígonos y en especial de los triángulos, paralelogramos y polígonos regulares.

Las ventajas de este material las podríamos resumir de la siguiente forma:

- Al ser un material no deformable y, a su vez, dinámico, permite trabajar con él de modo contínuo, con lo cual al alumno se le "materializan" ciertas propiedades de los polígonos. Además, posibilita colocar las figuras en distintas posiciones, impidiendo que el alumno identifique la forma de las figuras por la posición que tienen en un dibujo.
- Es un material multivalente que, por su fácil manipulación, permite al alumno crear sus propios modelos.

El mayor inconveniente de este material es la posibilidad de que el alumno inicialmente sólo se fije en el contorno de la figura, por lo cual es necesario formularle preguntas adecuadas para centrar su atención en los invariantes y propiedades de ellas.

El triangulo. Propiedades

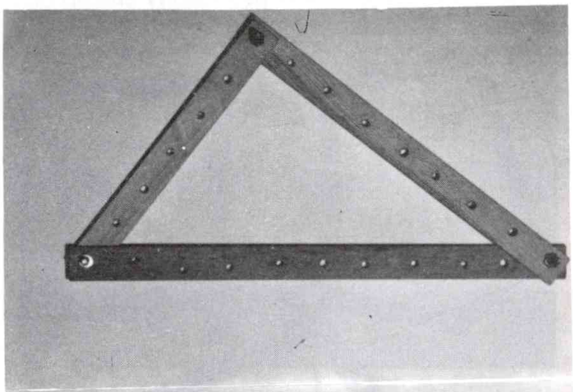
El triángulo tiene una gran importancia en Geometría ya que cualquier polígono puede descomponerse en triángulos. Por tanto, sus propiedades pueden aplicarse a cualquier figura triangulable.

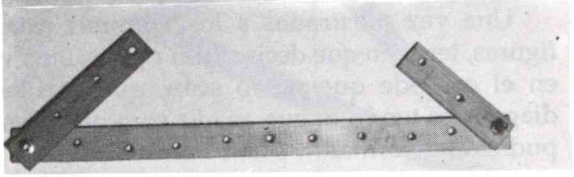
No pretendemos hacer un estudio del triángulo en su totalidad, sino más bien pretendemos que el alumno se familiarice con su forma, de construcción y sus dos propiedades más importantes:

- la relación entre sus lados
- la rigidez

Veamos la primera:

Al proponer al alumno un estudio del triángulo, comenzará construyendo triángulos con las varillas que están en su poder. Es necesario comprobar previamente, que entre ellas haya al menos 3 con las cuales no se pueda formar un triángulo.

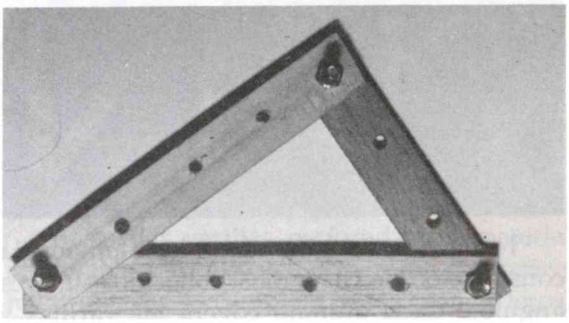




Descubrirá que no siempre va a ser posible construirlos. Esta observación inducirá en el alumno la certeza de que tiene que existir alguna relación entre las longitudes para que éstas formen triángulos.

Si trabajamos con alumnos de los últimos cursos de EGB, es conveniente que lleguemos a encontrar esa relación. Para ello se les puede proponer el siguiente trabajo:

Tomando, de las anteriores varillas, 3 que formen triángulo y otras tres que no lo formen, el alumno observará con las tres que no lo forman, que al hacer girar las más cortas sobre el tornillo que las une a la más larga, éstas no se juntan.



Al completar una tabla como la siguiente:

Varillas que forman el triángulo	Valor de a + b	Valor de c	Valor de a + c	Valor de b	Valor de c + b	Valor de a
Varillas que no lo forman	Valor de a' + b'	Valor de c'	Valor de a' + b'	Valor de b'	Valor de c' + b'	Valor de a'

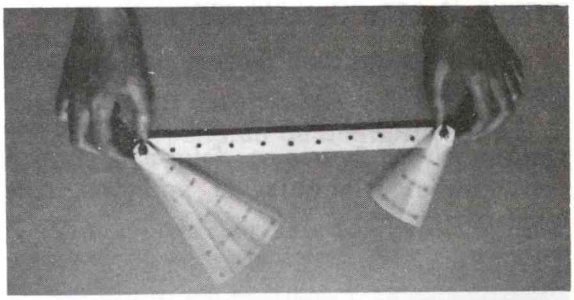
concluirá que las condiciones que deben cumplir, simultáneamente, las longitudes, para que formen triángulos son:

$a < b + c$ $b < a + c$ $c < a + b$ siendo a, b, y c, las longitudes de los lados.

En la mayoría de los casos, no es necesario dirigir tanto esta actividad, basta hacerles alguna indicación sobre las longitudes de los lados para que, sin necesidad de completar la tabla anterior, lleguen a las mismas conclusiones.

Dadas tres longitudes y construidos con ellas un triángulo ¿éste es único?.

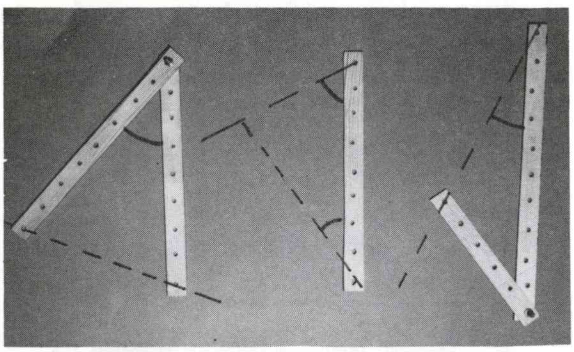
Ejerciendo una ligera presión en uno de sus vértices, el alumno intentará deformarla, observando que es rígido y por tanto sus ángulos han quedado determinados al dar las tres longitudes. Este triángulo es único.



En este momento, los alumnos habrán descubierto que, para formar triángulos iguales, tendrán que tomar varillas idénticas en ambos triángulos.

Pero no debe acabar aquí este estudio. Si continúan experimentando y observando, descubrirán otros casos de igualdad y diferentes posibilidades de construcción. Sin más que apoyarse en las 2 propiedades anteriores con dos varillas articuladas en un extremo comprobarán que éstas no quedan rígidas si no se conoce el ángulo comprendido entre ellas.

Y el tercer caso de igualdad lo descubrirán con una varilla a cuyos extremos fijarán dos varillas cualesquiera, para marcar la dirección de los otros dos lados. Esas direcciones, dadas por los ángulos entre la primera varilla y las otras dos, determinan un único triángulo.



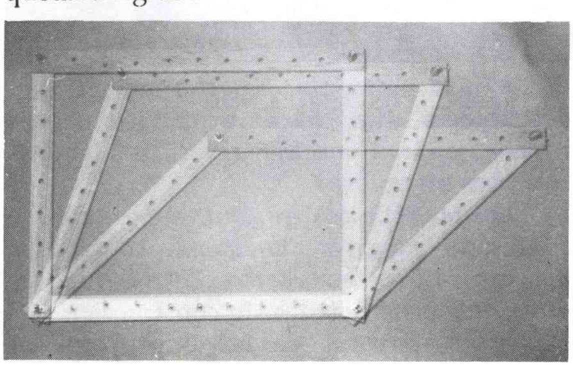
Terminemos sugiriendo, a los alumnos, la construcción de triángulos, conocidos sus tres ángulos. Cada alumno cogerá las varillas y formará un triángulo que cumpla la condición propuesta. De la unificación del trabajo común se desprenderá que, aunque todos esos triángulos formados no son iguales, sí tienen algo igual: la forma.

Se podría conectar, en este momento con el concepto de semejanza de figuras.

Triangulación de un polígono

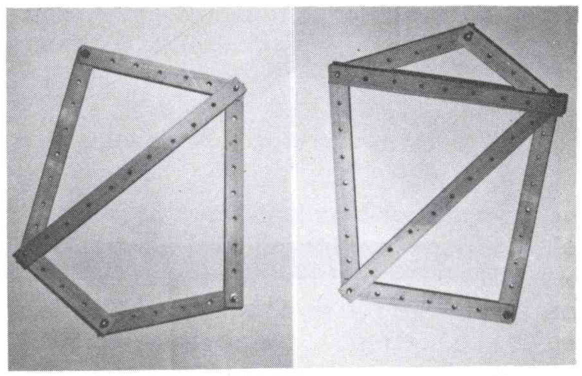
Construyamos cuadriláteros, pentágonos, u otros polígonos.

Ejerciendo una presión sobre uno de sus vértices, dichas figuras se deforman. Pero, si conseguimos triangular el polígono, éste quedará rígido.



Hagamos esta actividad con el material colectivo:

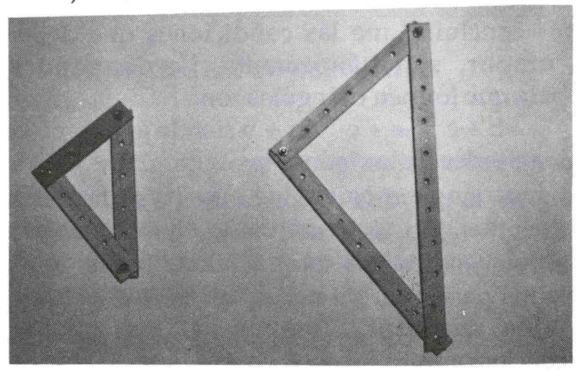
El profesor formará diferentes polígonos en los que habrá colocado algunas varillas diagonales de manera que, algunos de ellos, queden completamente triangulados y otros no.



Una vez mostradas a los alumnos estas figuras, tendrán que decir si son rígidas o no y, en el caso de que no lo sean, qué varillas diagonales tendrían que añadir para que no se pudieran deformar.

Polígonos semejantes.

En la construcción de triángulos semejantes, no es necesario tener en cuenta la medida de los ángulos, pues, al ser rígidos basta con comprobar que los lados son proporcionales para poder afirmar que los triángulos son semejantes.

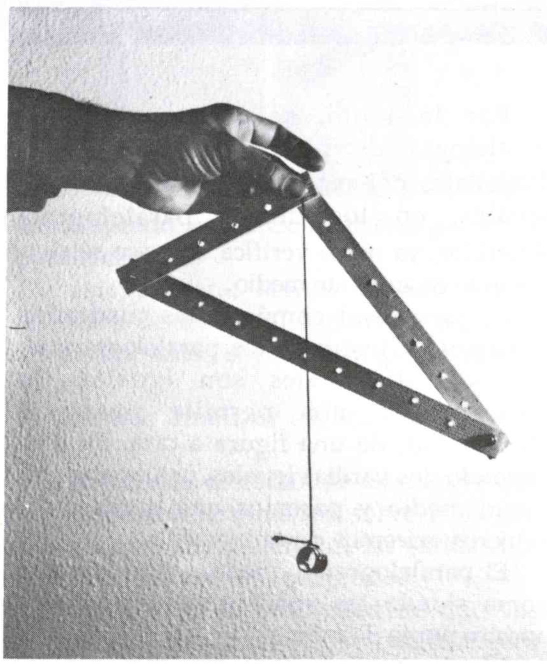


Esta observación es aplicable a la construcción de polígonos semejantes ya que al triangularlos, quedán rígidos.

Las varillas no permiten desarrollar cómodamente estas actividad, ya que las longitudes de las varillas vienen dadas en los espacios comprendidos entre los agujeros.

Medianas y alturas de triángulo. un triángulo

En uno de los triángulos que el alumno haya construído y que procuraremos, inicialmente, que no sea isósceles, colguemos un péndulo, en uno de sus vértices, aprovechando el tornillo de sujeción de las varillas. Tomando, suavemente, el conjunto, por ese mismo tornillo, dejémoslo pender libremente.

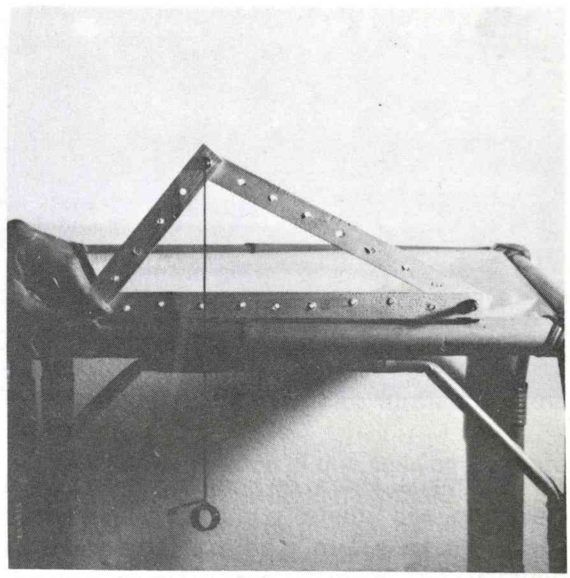


La cuerda del péndulo marcará la mediana del triángulo relativa a dicho vértice; además es fácilmente observable que pasa justamente por el punto medio del lado opuesto con independencia del elegido.

Es necesario hacer notar que la propiedad de que las tres medianas se cortan justo en el mismo punto (baricentro), no se puede comprobar con este tipo de triángulo y sí con otros de cartón o madera, ya que en ellos se pueden dibujar las medianas pero no en los construídos con las varillas.

Las alturas son fáciles de conseguir utilizando este mismo método pero apoyando uno de los lados del triángulo sobre una mesa de tablero horizontal.

Se observa que la cuerda del péndulo es perpendicular al lado, pero igual que pasaba con las medianas, no se puede visualizar el punto de corte de las tres alturas.



Los cuadriláteros

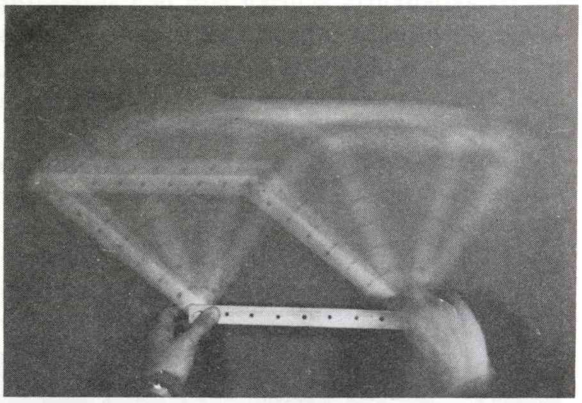
Al ser las varillas perforadas un material articulable y multivalente, permite al alumno hacer un estudio completo de los cuadriláteros, centrando su atención en los invariantes y en las transformaciones que sufren sus elementos.

Las ventajas de este material, en esta actividad, reside en que nos permite transformar de forma contínua una figura en otra y observar, a lo largo de la transformación, qué características se conservan y además verificar de inmediato la validez de ciertas hipótesis que el alumno pueda formular.

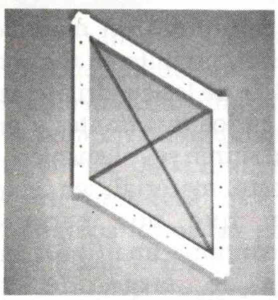
Se les propone a los alumnos hacer un estudio de los cuadriláteros y su propiedades. Para ello dispondrán de múltiples varillas de iguales longitudes y de otras con longitudes distintas.

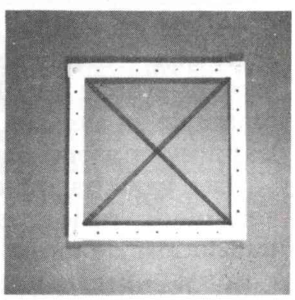
Con cuatro varillas de igual longitud, formarán un cuadrado.

Inicialmente, se fijarán en el contorno, observando que sus lados son iguales, paralelos dos a dos, y que sus ángulos también son iguales y valen 90º. Ejerciendo una presión en uno de sus vértices, el cuadrado se deforma, apareciendo un cuadrilátero con los lados opuestos paralelos y todos iguales pero cuyos ángulos ya no son iguales. La figura ha variado de forma. Hay dos ángulos agudos opuestos e iguales y dos obtusos, también opuestos e iguales.



Fijémonos, ahora, en sus diagonales: En el cuadrado, son iguales y perpendiculares y se cortan en su punto medio. Al deformar la figura, ya no son iguales pero se siguen cortando perpendicularmente en el punto medio.



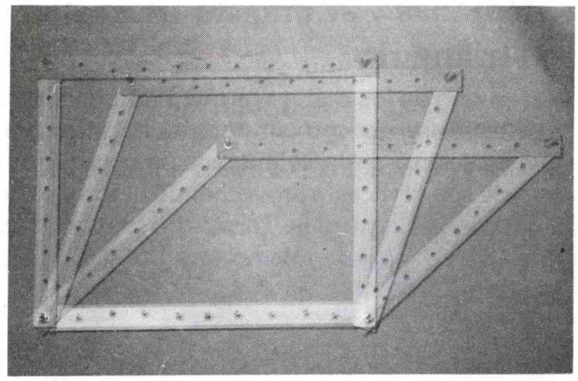


A esta nuevas figuras las llamaremos rombos.

Por lo tanto, el cuadrado, al deformarse, se transforma en un rombo, permaneciendo invariante su condición de paralelogramo; la longitud de sus lados no varía y sus diagonales siguen siendo perpendiculares en su punto medio. Pero su forma no es la misma.Se puede concluir que un cuadrado es un caso particular de un rombo.

El siguiente paso sería que el alumno construyese un rectángulo. Sus características son: lados opuestos paralelos e iguales. Sus ángulos, todos iguales, de 90º.

Deformémoslo: aparecen cuadriláteros en los cuáles sólo varían los ángulos y lo hacen exactamente igual que en la deformación del cuadrado.

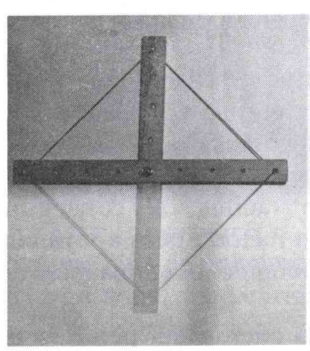


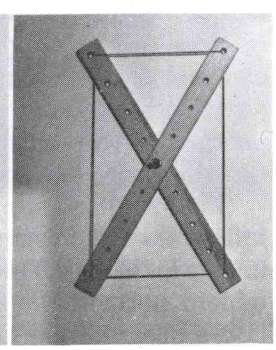
Por lo tanto, se siguen obteniendo paralelogramos, pero la propiedad de las diagonales del rectángulo, que es la de ser iguales, en los demás paralelogramos obtenidos, ya no se verifica, aunque se siguen cortando en su punto medio.

La propiedad común a los cuadrados y rectángulos, dentro de los paralelogramos, es que sus diagonales son iguales. Esta característica nos permite pasar, con continuidad, de una figura a otra. En efecto, tomando dos varillas iguales, unámoslas por su punto medio y pasemos una goma por los agujeros extremos de cada varilla.

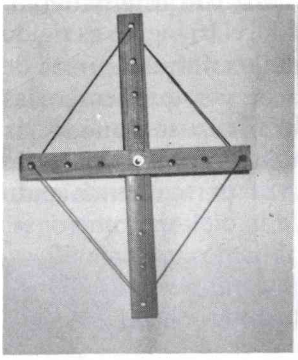
El paralelogramo quedará formado por la goma siendo las varillas sus diagonales y nuestro punto de mira.

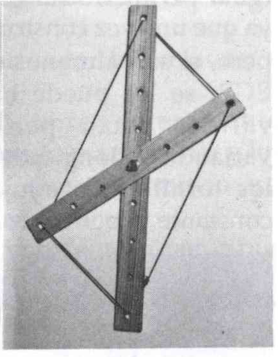
Manipulando esa figura, obtenemos el cuadrado, cuando sus diagonales son perpendiculares. Por lo tanto el cuadrado es un caso particular del rectángulo, como también era un caso particular del rombo. Esto significa que en la intersección de los rectángulos y rombos está el cuadrado.





Utilicemos ahora la propiedad del punto medio. Tomando dos varillas distintas, unámoslas por su punto medio y pasemos la goma como en el caso anterior. En cualquier posición de las varillas, aparece un paralelogramo de manera que, gradualmente, se puede obtener el rombo, en el caso en que las varillas queden perpendiculares.





Concluyendo: un rombo es un caso particular de paralelogramo.

De esta manera, hemos llegado a una clasificación de los paralelogramos, entre los cuales encontramos el cuadrado que es el más especial.

Podríamos finalizar el trabajo con los trapecios.

Sus diagonales se cortan de tal manera que los segmentos determinados sobre ellas son proporcionales. Los agujeros de las varillas nos permiten visualizar esta propiedad.

Aprovechando la propiedad de que sus lados opuestos son paralelos, se puede sugerir que los paralelogramos son un caso particular de los trapecios, concluyendo el estudio de los cuadriláteros con la siguiente clasificación:

cuadriláteros → trapecios →
paralelogramos → rectángulos
paralelogramos → rombos → cuadrados

Construcción de polígonos
Polígonos regulares

Ya hemos visto la construcción de triángulos y cuadriláteros, utilizando las varillas de agujeros.

Para la construcción de polígonos con un número determinado de lados, es necesario coger tantas varillas como lados, pero el alumno observará una vez formado, que tres vértices consecutivos no podrán estar alineados ya que quedaría eliminado un lado.

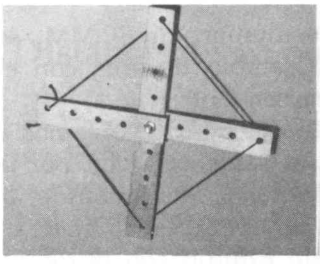
Una vez construído el polígono, si éste tiene más de tres lados, es deformable, pudiendo formarse, con la misma figura articulada, polígonos cóncavos y convexos, volviendo a aparecer el paso de unos a otros de forma gradual.

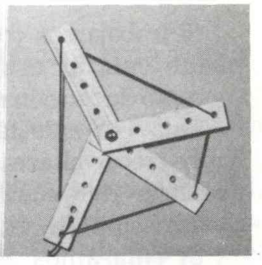
Detengámonos en los polígonos cuyos lados son iguales.

Cojamos, por ejemplo, 5 varillas iguales y formemos un pentágono. Al ser articulado, puede asumir varias formas. Todos los pentágonos posibles son equiláteros pero su forma depende de los ángulos formados entre las varillas.

Pero hay un caso en el que sus ángulos son todos iguales: es el pentágono regular.

Vamos a construir polígonos regulares. Tomemos varias varillas de igual longitud, unámoslas, todas juntas, por un extremo. Por el otro extremo, pasemos una goma elástica.





Habremos construído un polígono cuyos lados están formados por la goma: utilizando la propiedad de que los lados tienen que ser iguales para que el polígono sea regular, manipulemos las varillas hasta conseguirlo. En este momento se observa que los triángulos formados por las varillas y la goma son iguales.

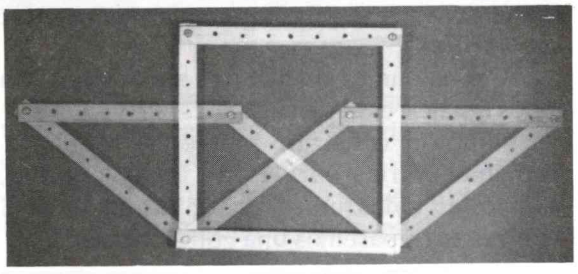
Por lo tanto, el polígono regular tendrá sus ángulos iguales.

Si los alumnos son del último ciclo de EGB se debe buscar la relación entre el nº de lados del polígono y el valor del ángulo central. Este material permite encontrar esta relación fácilmente ya que el nº de triángulos iguales en que ha quedado dividido el polígono es igual al nº de lados.

Relación área-perímetro

Al presentar esta actividad con el Geoplano, apuntábamos la necesidad de utilizar otros materiales complementarios, para desarrollar el concepto de área.

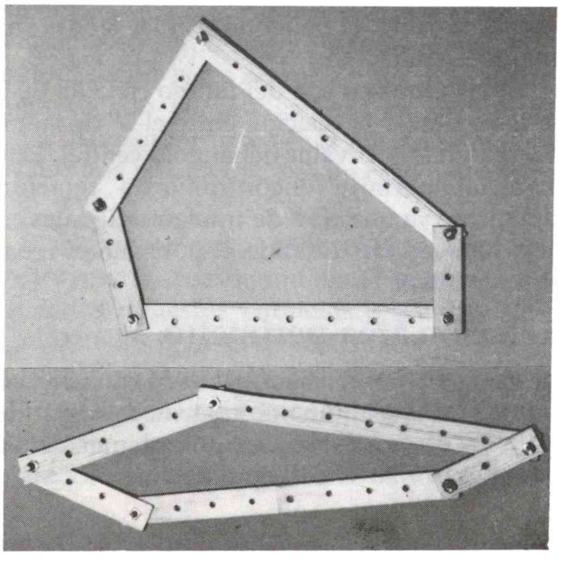
observaban que el hueco interior variaba pero, si les preguntásemos si pasaba lo mismo con el área, dirán que no, ya que el hueco sigue existiendo. Haciéndolos pasar al caso límite, aplastar la figura, todos dirán que, en este caso, el área ya no existe. Como habrán observado que el cambio se produce con continuidad, concluirán que el área va disminuyendo. Pero el perímetro permanece constante. Sólo cuando conozcan la forma de calcular el área podrán aclarar, ésta disminución de área.



Si trabajamos con alumnos de EE.MM., se puede enlazar este cambio de área con el concepto de función no constante.

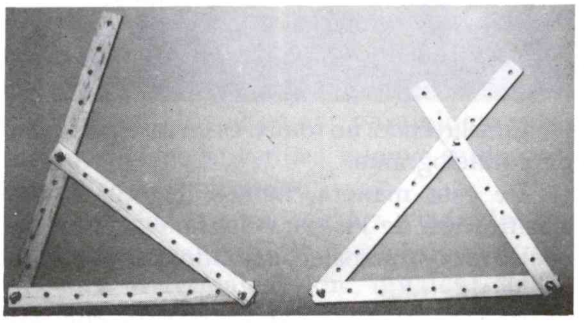
Una vez aplastada la figura, volvamos a hacer crecer el área, a pasar, otra vez, por la posición del cuadrado y, continuando la deformación, llegar, otra vez, al caso límite.

Si enlazamos este estudio con el de las funciones, estaremos materializando geométricamente el Teorema de Rolle, siendo el cuadrado el caso en el que se produce el máximo. El cuadrado es el rombo de mayor área, de entre los que tienen igual perímetro. Análogamente, se puede hacer este estudio con cualquier paralelogramo.



Es conveniente utilizar también polígonos de mayor número de lados, pues ayuda a generalizar la idea de "diferencia entre perímetro y área".

La variación del área en triángulos de igual perímetro no es fácil con este material, ya que una vez construído, el triángulo es rígido pero, si son alumnos de los últimos cursos de EGB, se les puede hacer ver que, como las varillas están perforadas, se puede ir variando la longitud de los lados cambiando los tornillos de agujeros pero manteniendo constante el perímetro.



El último paso será el de la construcción de polígonos con el mismo número de espacios entre agujeros, esto es, el mismo perímetro pero con distintas varillas.

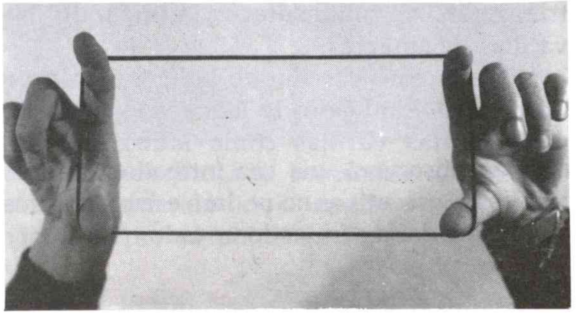
Actividades con otros materiales

Con este apartado pretendemos reforzar algunos de los conceptos desarrollados en los anteriores capítulos, utilizando un material no descrito anteriormente.

Relación área-perímetro

Desarrollaremos esta actividad con materiales distintos

a) Material: cordel y las manos.

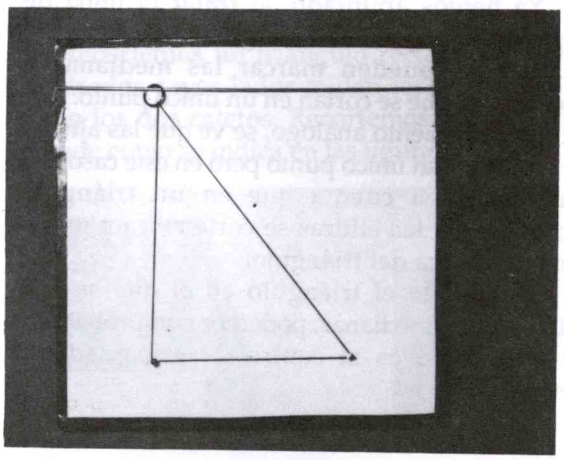


Sujetando el cordel entre el índice y el pulgar de cada mano, formaremos un rectángulo. Juntando los dedos y separando las manos, el rectángulo cambia de forma; el área va disminuyendo con continuídad mientras que el perímetro permanece constante.

b) Material: tablero, cordel, clavos y alambre duro.

Se coloca el alambre ligeramente despegado del tablero paralelo a su borde y los dos clavos de manera que determinen un segmento paralelo al alambre.

El alambre contendrá una argolla por la que se pasará una goma elástica cuyos extremos se fijarán a los dos clavos.

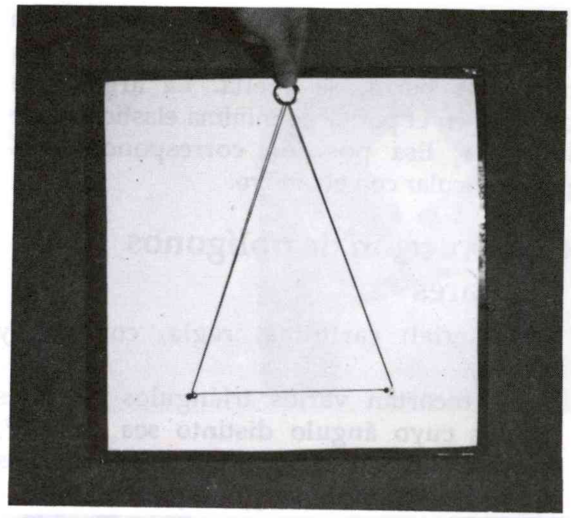


Desplazando la anilla a lo largo del alambre, se obtienen triángulos de igual área y diferente perímetro. Pero, además, si soltamos la argolla desde uno de los extremos del alambre ésta se colocará de manera que el triángulo formado sea isósceles. En esta posición, la tensión de la goma es mínima. Por lo tanto, en este montaje, hemos conseguido el triángulo de menor perímetro de entre todos los que tienen igual área.

Suma de los ángulos de un triángulo

Material: tablero, goma elástica y dos clavos.

Se estira la goma hasta el borde del tablero. Al irla aflojando, se obtienen, gradualmente, distintos triángulos isósceles de manera que se visualiza la variación que sufren los ángulos. En el caso límite, cuando se afloja

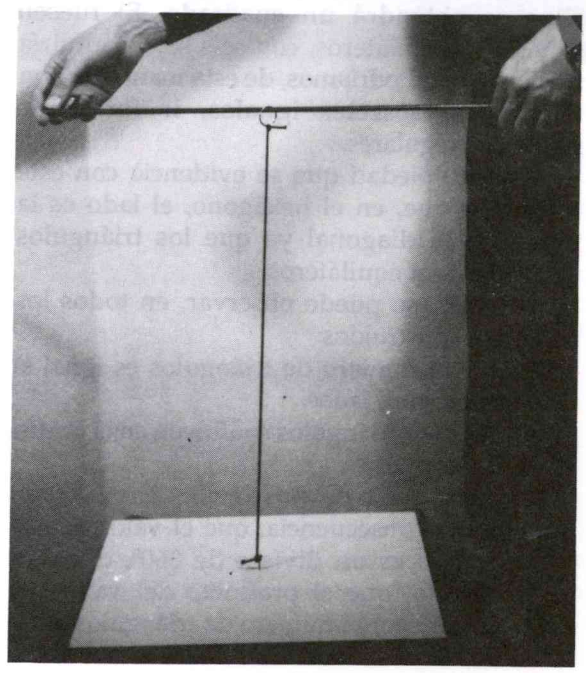


totalmente la goma, se evidencia la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo vale 180º.

Distancia de un punto a una recta

Material: tablero, goma elástica, barra metálica y argolla.

En un extremo de la goma, se ata la argolla, y el otro extremo se fija al tablero. Se pasa la argolla por la barra metálica (la barra y el tablero tienen que estar paralelos).

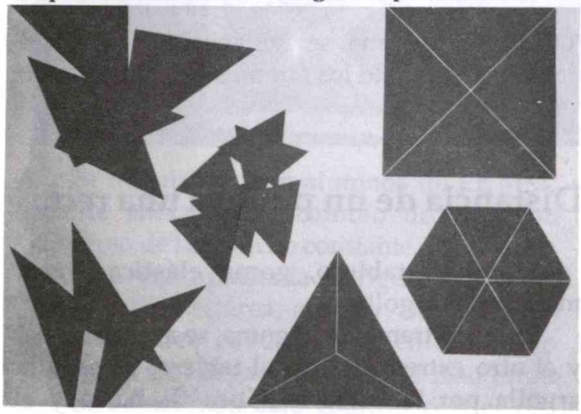


Se lleva la argolla hacia el extremo de la barra hasta que la goma quede muy tensa y, sin mover la barra, se suelta. La argolla se colocará en el punto de mínima elasticidad de la goma. Esa posición corresponde a la perpendicular con el tablero.

Construcción de polígonos regulares

Material: cartulina, regla, compás, y tijeras.

Se recortan varios triángulos isósceles iguales cuyo ángulo distinto sea de 120º; colocándolos adecuadamente, con tres de ellos se puede formar un triángulo equilátero.



De la misma manera, se recortan triángulos rectángulos isósceles iguales y, con cuatro de ellos se obtendrá un cuadrado. Si fuesen triángulos equiláteros, con seis se constituiría un hexágono. Podríamos, de esta manera, y con triángulos isósceles iguales, ir formando polígonos regulares.

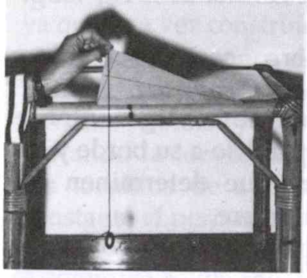
Una propiedad que se evidencia con este trabajo es que, en el hexágono, el lado es la mitad de la diagonal ya que los triángulos utilizados son equiláteros.

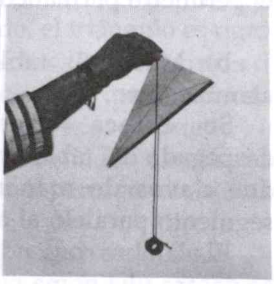
Además, se puede observar, en todos los polígonos construidos:

- que el número de triángulos es igual al número de lados.
- que esos triángulos confluyen en el centro de la figura.
- que la suma de esos ángulos es de 360º y, como consecuencia, que el valor de ese ángulo es un divisor de 360º, o, en su defecto, que el producto del valor del ángulo por el número de triángulos es de 360º.

Medianas y alturas en un triángulo

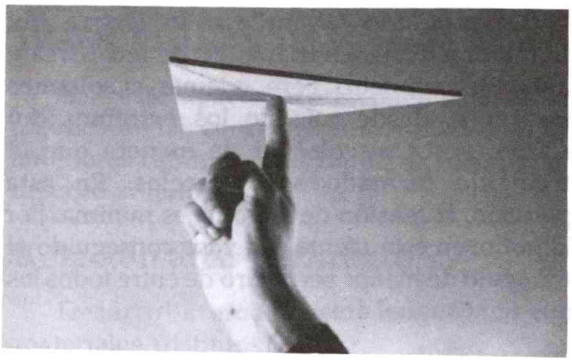
Material: madera o cartón duro, compás, regla y tijeras fuertes.





Ya hemos apuntado, al tratar el tema de las varillas, que en triángulos de cartón o madera se pueden marcar las medianas y comprobar que se cortan en un único punto. Con un procedimiento análogo, se ve que las alturas se cortan en un único punto pero en este caso hay que tener en cuenta que en un triángulo obtusángulo las alturas se cortan en un punto que está fuera del triángulo.

Utilizando el triángulo en el que se han dibujado las medianas, podemos comprobar que el baricentro es el centro de gravedad del triángulo.

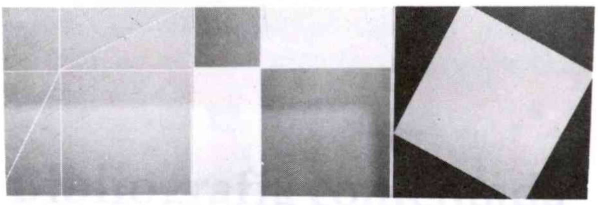


Comprobación del Teorema de Pitágoras

Material: cartulina, compás, regla graduada y tijeras.

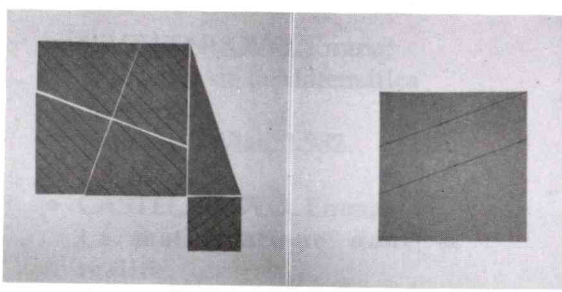
Hemos seleccionado dos maneras de comprobar el teorema de Pitágoras que se pueden realizar con cartulina.

En un cuadrado de cartulina, se realizan los cortes que aparecen en la 1ª figura. A continuación, se retiran los 4 triángulos, manteniendo los cuadrados en su posición, y se colocan como indica la figura.

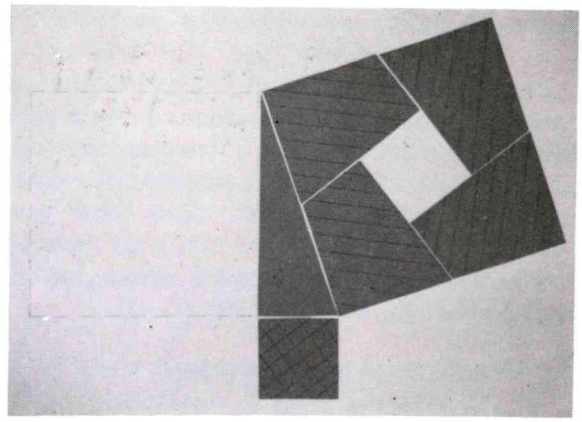


Midiendo y calculando las áreas de los cuadrados que han quedado, se comprueba que su suma es igual al área del cuadrado limitado por los triángulos que, evidentemente, corresponde al cuadrado de la hipotenusa.

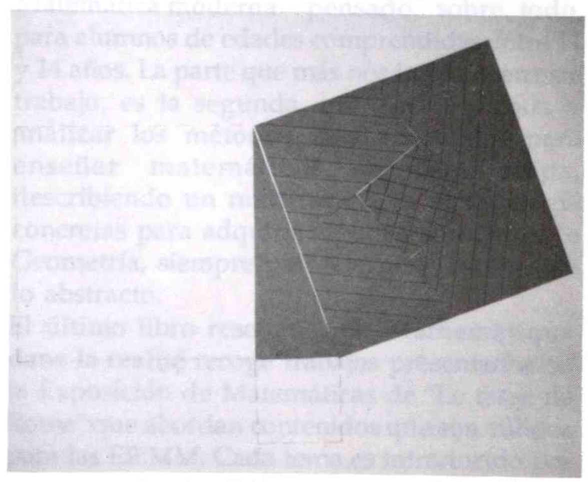
Recortemos un triángulo rectángulo y dos cuadrados cuyos lados midan respectivamente como los dos catetos. Recortemos el cuadrado grande como se indica en las figuras.



Coloquemos sobre la hipotenusa los trozos obtenidos de manera que formen un cuadrado.



Finalmente, la figura habrá quedado de la siguiente manera:



Bibliografía comentada

- CASTELNUOVO, Emma;
  Geometría intuitiva
  Barcelona, Labor, 1.966

- CASTELNUOVO, Emma;
  La Geometría
  Barcelona, Ed. Ketres, 1.981

- CASTELNUOVO, Emma;
  Didáctica de la Matemática Moderna
  México, Trillas, 1.982

- CASTELNUOVO, Emma;
  La mathematique dans la realitè
  Paris, Cedic.

Todos conocemos la labor de esta mujer en el campo de la didáctica. Entre sus trabajos, hemos seleccionado estos libros.

En 1949, apareció el libro **Geometría intuitiva** (actualmente, agotado) que constituyó una auténtica revolución en la enseñanza de las matemáticas: el alumno era el verdadero protagonista de su aprendizaje.

En él, propone trabajar en el aula con un material que el propio alumno se puede construir, de manera que, a través de su manipulación, llegue, por si mismo, a comprobar propiedades geométricas y a adquirir los conceptos geométricos.

En la línea metodológica, destaca la introducción de elementos históricos y culturales, al comienzo de los temas, partiendo de contextos, sugestivos para los alumnos, que enriquecen las nociones matemáticas.

Posteriormente, publicó **La Geometría**,libro que seguía la misma línea que el anterior.

En 1963, publica **Didáctica de la Matemática moderna** pensado, sobre todo, para alumnos de edades comprendidas entre 11 y 14 años. La parte que más nos interesa, en este trabajo, es la segunda, que está dedicada a analizar los métodos más adecuados para enseñar matemáticas en esta etapa, describiendo un material y una metodología concretas para adquirir algunos conceptos de Geometría, siempre pasando de lo intuitivo a lo abstracto.

El último libro reseñado, **La Mathemátique dans la realité** recoge trabajos presentados en la Exposición de Matemáticas de "Le tasse de Rome" que abordan contenidos que son válidos para las EE.MM. Cada tema es introducido por una presentación didáctica y, a continuación, se exponen los trabajos de los alumnos, tal y como han sido elaborados. En todos ellos, está presente la realidad, se habla de la realidad y se busca en la realidad.

En nuestro caso, lo que más interesa es la variedad de materiales que se manejan en cada tema.

- PUIG ADAM, Pedro;
  El material dídactico matématico actual
  Madrid, Revista Enseñanza Media,1.960

Es un documento sobre la Exposición Internacional de material didáctico celebrada en Madrid en Abril de 1957, en la cual se expusieron modelos y material didáctico de diferentes países. La gran cantidad de modelos presentada, imposibilitaba la descripción de cada uno de ellos, por lo cual el autor da una relación completa de lo expuesto, acompañándola de ilustraciones y fotografías, destacando lo más sobresaliente de cada país. La última parte la dedica a describir una serie de lecciones activas que se pueden desarrollar utilizando ese material. Este libro nos proporciona abundantes ejemplos de modelos matemáticos que, debidamente seleccionados, son un material muy útil para el aula.

- PUIG ADAM, Pedro y otros.
  El material para la enseñanza de las Matemáticas.
  Madrid, Aguilar, 1967

En este libro, diversos autores hacen un minucioso examen de las razones que abogan en favor de la introducción del material en la actividad del alumno. Este examen se basa en estudios especializados y ejemplos orientativos que se exponen con claridad. Una primera parte se dedica al filme matemático y a los dibujos animados. Otra, a los modelos geométricos preparados y realizados y, por último, hay un capítulo dedicado a los materiales polivalentes.

- SANCHEZ MARTINEZ, Concepción;
  Geometría intuitiva
  Madrid, A.U.L.A., 1965

Es un pequeño libro con estructura de fichas que contiene actividades para realizar en el aula con una serie de materiales como pueden ser los distintos Geoplanos, modelos geométricos espaciales y todo tipo de material que permita construcciones geométricas.

cada uno de ellos, por lo cual el autor da una relación completa de lo expuesto, acompañándola de ilustraciones y fotografías, destacando lo más sobresaliente de cada país. La última parte la dedica a describir una serie de lecciones activas que se pueden desarrollar utilizando ese material. Este libro nos proporciona abundantes ejemplos de modelos matemáticos que, debidamente seleccionados, son un material muy útil para el aula.

- PUIG ADAM, Pedro y otros.
  El material para la enseñanza de las Matemáticas.
  Madrid, Aguilar, [illegible]

En este libro, diversos autores [illegible] favor de la introducción del material en [illegible]

actividad del aula [illegible] base en estudios [illegible] especialmente [illegible] orientados [illegible] experiencia [illegible] Una primera parte [illegible] y a los [illegible] Otras [illegible] propuestas [illegible]

[illegible]