Ministerio de Educación y Ciencia
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA

GEOMETRIA EN LA NATURALEZA

MATEMATICAS: 5

Centros de Profesores

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE FORMACION DEL PROFESORADO

GEOMETRIA EN LA NATURALEZA

LAS FORMAS ENROLLADAS

Mª JESUS LUELMO

Nivel: EE.MM.

Colección: *"Documentos y propuestas de trabajo"*

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE FORMACION DEL PROFESORADO
N.I.P.O. 176-87-153-2
I.S.B.N. 84-505-6435-2
Depósito Legal M - 28447 - 1987
Imprime: MARIN ALVAREZ HNOS.

INDICE

PRESENTACION

El nuevo currículo que introducen las Reformas de Básica y Medias, dan a la Geometría una importancia superior en EGB y la introducen en las EEMM, haciendo hincapié en un enfoque nuevo en el que se tenga en cuenta la manipulación y la posibilidad de creación del alumno.

Este documento se apoyo de Geometría en la Naturaleza se refiere exclusivamente a las formas enrolladas: espiral de Arquímedes, espiral equiangular, hélice y helicoide. Los cuatro apartados de este trabajo son ejemplos ideales para desarrollar aquellos aspectos.

Las cuatro formas enrolladas nos las encontramos en multitud de ocasiones en la naturaleza, el arte y la técnica, por lo que pueden servir para desarrollar la capacidad de observación de los alumnos, enlazando además la Geometría con la realidad.

Cada curva se construye de forma estática y de forma dinámica, con lo que se potencia la capacidad manipulativa y de construcción, unas veces utilizando aparatos clásicos como el compás (en las falsas espirales), y otras veces algunos más raros en Matemáticas, como el plato de un tocadiscos. Las cuatro formas son además ejemplos claros para estudiar los giros, traslaciones y homotecias desde un punto de vista dinámico.

Hay que señalar también la posibilidad de utilizarlas, para estudiar con los alumnos, el paso de lo discreto a lo continuo, mediante aproximaciones sucesivas.

Cada apartado tiene diversos grados de dificultad, por lo que el profesor debe elegir aquellos aspectos que le parezcan más idóneos para sus alumnos. Por ejemplo, la construcción de ambas espirales puede hacerse en EGB mientras que el estudio de sus ecuaciones está pensado, para la Enseñanza Media, donde además se puede relacionar con las coordenadas polares, la espiral de Arquímedes, y en el caso de la equiangular, con las progresiones. También las espirales son idóneas para estudiar la semejanza y la proporcionalidad en general, la equiangular como ejemplo y la arquimediana como medio para comparar proporcionalidad frente a no proporcionalidad.

El cilindro y el cono, cuerpos que se estudian en EGB de forma estática, encuentran inesperadas posibilidades al ser deformados para obtener las espirales y la hélice.

Por otra parte, el uso del LOGO, afortunadamente, cada vez con más presencia en nuestras escuelas, demuestra sus posibilidades recursivas, permitiendo de una manera natural y sencilla el paso al límite, el ir de lo discreto a lo continuo del que antes hablábamos, al construir las dos espirales.

La discusión sobre la conveniencia o no del estudio del plano y el espacio al mismo tiempo, constituye, en los primeros niveles en la enseñanza un elemento de reflexión en la construcción de la hélice y el helicoide, curvas que el alumno encuentra a su alrededor (sacacorchos, escaleras, "gusanillo" de los cuadernos, caracolas, etc...).

Aunque el estudio detallado de estas curvas, es evidente que está reservado para niveles más superiores de enseñanza, creemos que, dada su fuerte carga intuitiva y su continua presencia en la realidad cercana, son adecuados para ser trabajadas de forma intuitiva, lo mismo que otras curvas "no usuales" como la cicloide.

La función de este documento es doble. Una informativa, en este caso reforzada por la novedad del tema, y otra de reflexión, en la idea de que el profesor elija aquellos apartados que más se ajusten a sus intereses o necesidades y elabore posteriormente materiales para sus clases. Es un documento dirigido al profesor, no al alumno. No pretende estar terminado, sino muy al contrario, constituir un flujo de ideas para los grupos o seminarios que quieran experimentarlos en sus clases o elaborar sus propios materiales.

Geometría en la Naturaleza: Las formas enrolladas.

INTRODUCCION

M. C. Escher

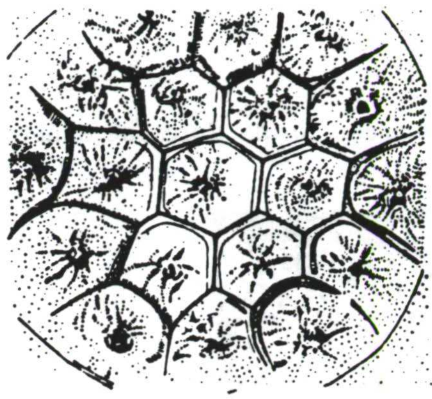
Las formas: algunos ejemplos

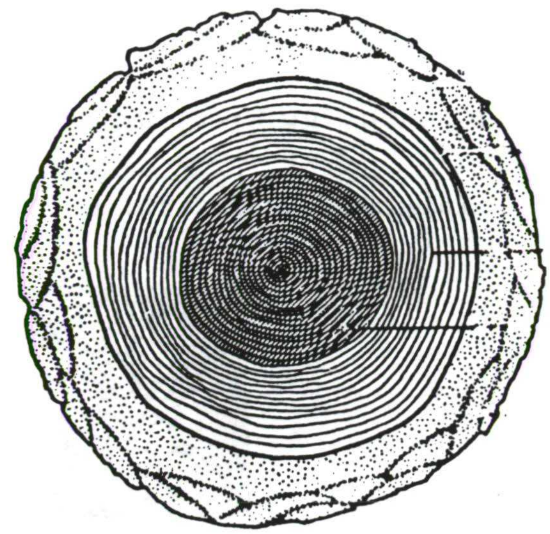
La escarcha, acumulación de diminutos cristales de hielo, forma flores de simetría hexagonal.

La simetría pentagonal es muy frecuente en las flores, así como la simetría axial, en las hojas de las plantas.

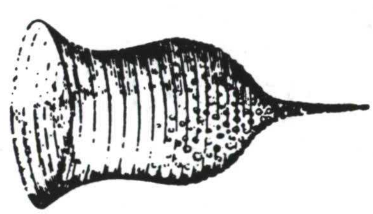
Casi todos los animales son simétricos respecto de un plano.

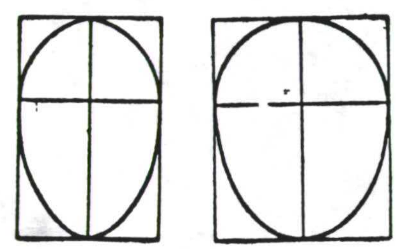
Las células de muchos organismos forman un embaldosado hexagonal y la edad de un árbol se mide por los anillos de su tronco.



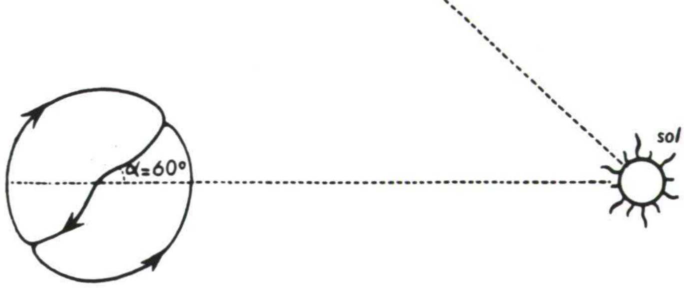


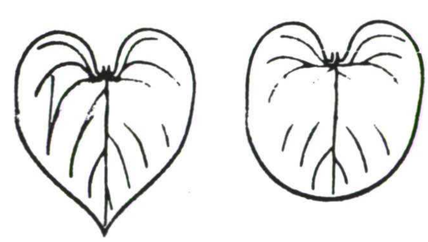
Las superficies de revolución se reconocen en muchos organismos microscópicos y el perfil de los huevos de las aves se asemeja a una curva llamada catenaria. Este perfil puede inscribirse en un rectángulo cuyas proporciones oscilan entre ø (el de la izquierda) y $\sqrt{ø}$ (el de la derecha), siendo ø el famoso número áureo $(1+\sqrt{5}/2)$.



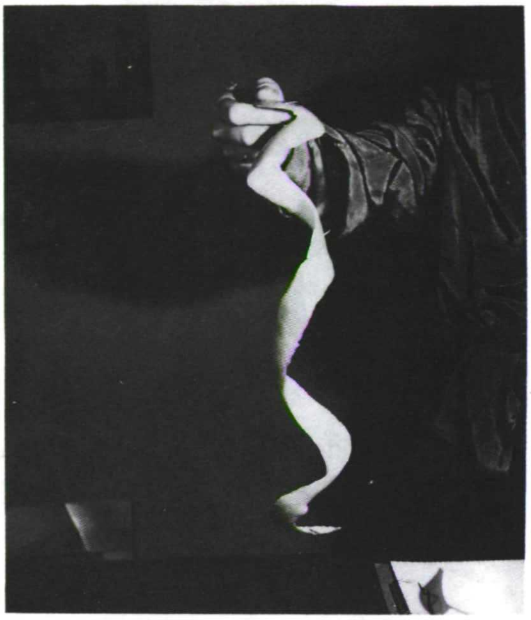


Cuando una abeja descubre alimento se lo comunica al resto del enjambre en coordenadas polares, mediante una "danza", y de las dos hojas que hay a continuación, la de la derecha tiene un contorno de ecuación polar r= sen ø/2.

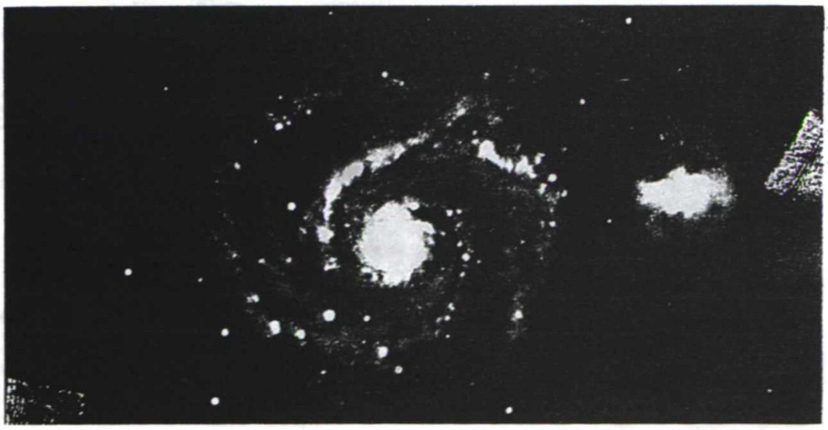


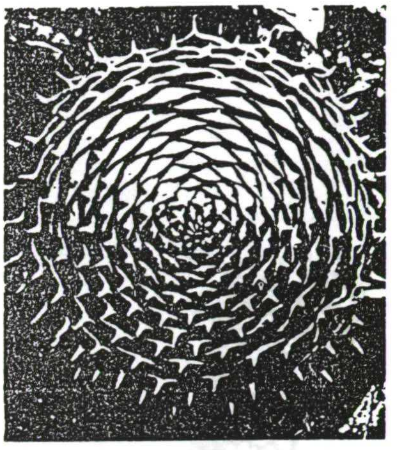


Las escamas de las piñas y otros frutos se disponen helicoidalmente, figura que también obtenemos cuando soltamos la peladura de una naranja.

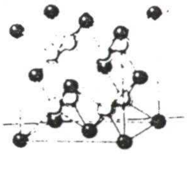


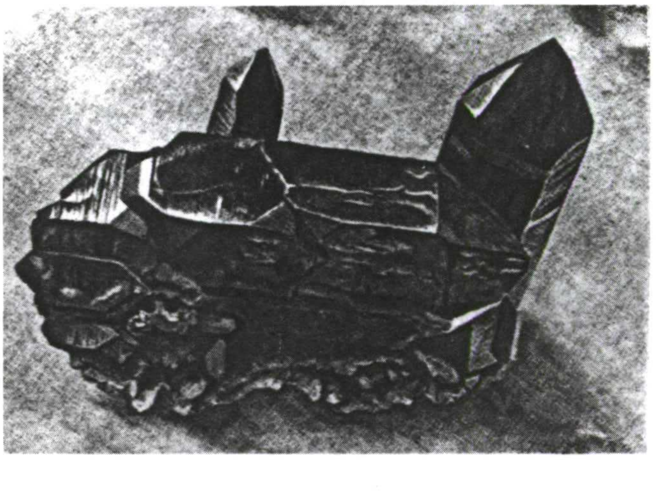
Ejemplos de espirales tenemos en las galaxias, en los caracoles como el "aster" o en la distribución de las hojas en una siempreviva.

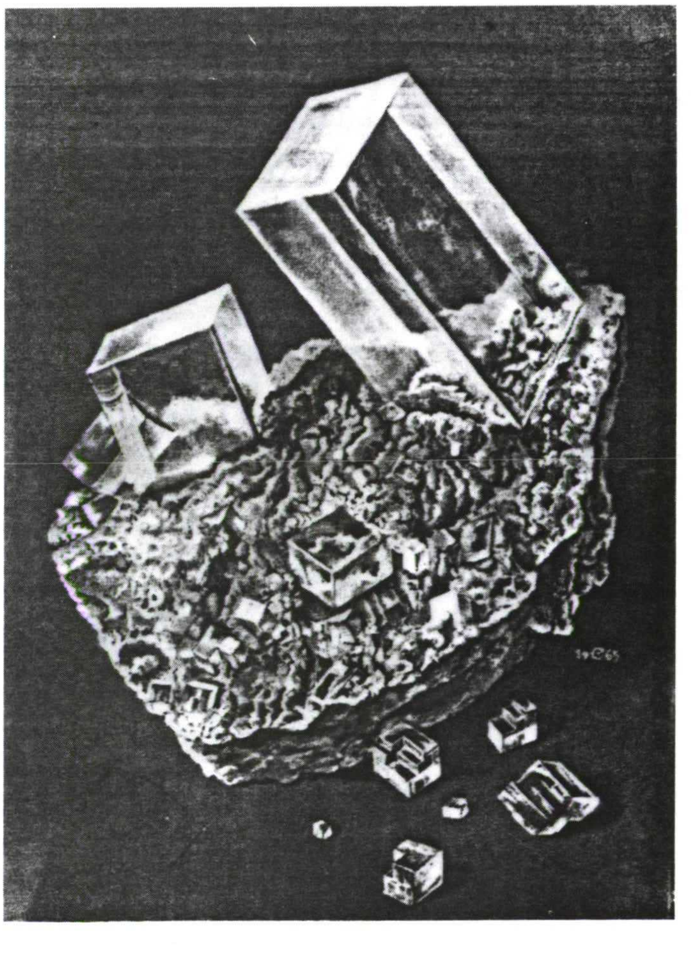




Los modelos poliédricos aparecen en las estructuras de las moléculas, en minerales como el cuarzo o en cristales de sal común.



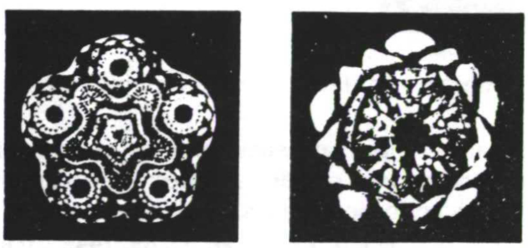




El porqué de las formas ...

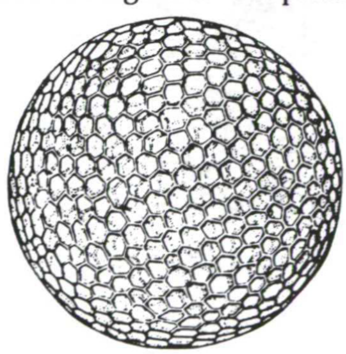
Las ilustraciones anteriores, y otras muchas que irán apareciendo, ponen de relieve cuánto se parecen las formas naturales a nuestros áridos objetos geométricos. Pasando revista, no deja de extrañarnos la presencia de similitudes, regularidades y relaciones. Y empezamos a preguntarnos cosas. **Los tamaños,** por ejemplo. ¿Hay alguna razón para que la talla de una persona adulta sea muy similar a la de otra? ¿O para que los insectos, que tienen un régimen de vida paredico, no superen unas ciertas dimensiones? ¿Por qué una célula cuando llega a su "tamaño crítico" se divide en dos? ¿Y por qué en dos? ¿Es posible, como dice Jhonathan Swift en Gulliver, que haya un mundo de gigantes exactamente igual al nuestro, pero con todas las dimensiones multiplicadas por doce? ¿Y otro de enanos doce veces menores?

Otro hecho llamativo es la presencia de **simetrías** de todo tipo en los seres vivos y minerales.



Crinoideos, animales marinos de la misma familia que estrellas y erizos.

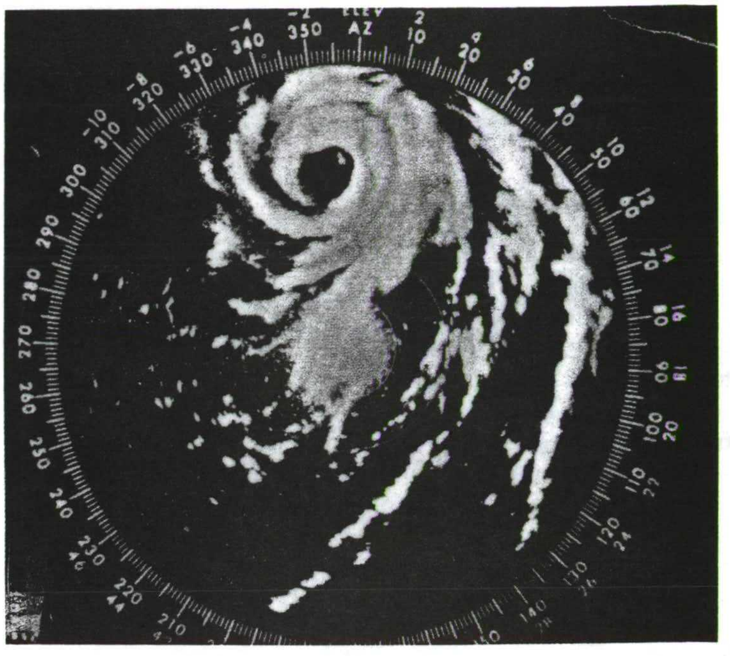
Y resulta que las estrellas de mar, pequeños organismos acuáticos y muchas flores poseen una disposición **pentagonal,** mientras que la simetría **hexagonal** es más propia de cosas fabricadas por los seres vivos, como las celdillas de un panal de abejas y los orificios del esqueleto de un radiolario. Casi siempre estas formas hexagonales no se presentan aisladas, sino en bloques o paquetes.



Esqueleto de radiolario, protozoo unicelular.

Las espirales, como caracoles y cuernos, se encuentran con frecuencia en organismos que crecen fundamentalmente por un sólo extremo, conservando sin modificar los estadios anteriores.

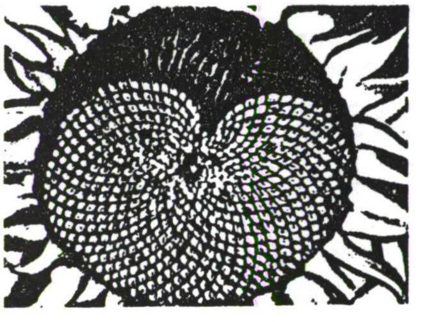
Y también se forman en fenómenos tipo "turbulencias": algo que gira y expande a la vez, como los huracanes o ciertas galaxias.



Fotografía de un huracán tomada desde un satélite.

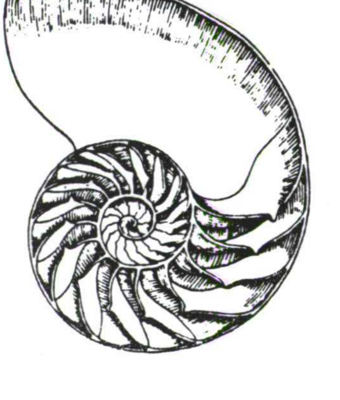
¿Qué relación puede haber entre el crecimiento acumulativo y estos movimientos?.

Nos sorprende el que aparezcan ligadas casi siempre las estructuras en caracol o hélice y los **números de Fibonacci;** así las semillas de girasol forman una red de espirales: unas van en el sentido de giro de las agujas del reloj y otras en el contrario, siendo siempre las cantidades de unas y otras dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,... (cada término es la suma de los dos anteriores).

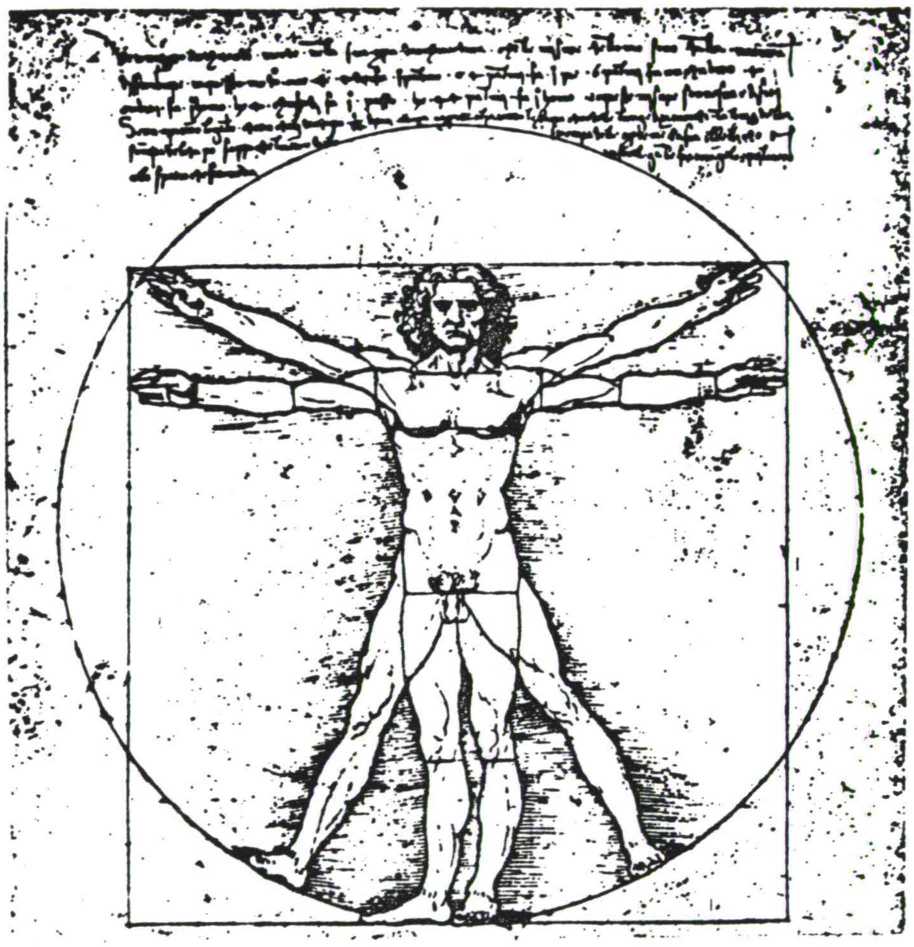


Los términos más frecuentes son los pares: 21 - 34, 34 - 55 y 89 - 144.

La concha del Nautilus, la más hermosa de todas, crece en proporción con el **número áureo** de valor $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1.62$



El número áureo aparece también en casi todos los cánones de belleza para el cuerpo humano. En el hombre ideal de Leonardo da Vinci, su ombligo está en el centro de la circunferencia. El radio de ésta y el lado del cuadrado están en proporción áurea.



Si cogemos puñados de trigo o arroz y los vamos dejando caer poco a poco desde la misma posición, el montón que se forma se va asemejando a un **cono.** Y tambien son cónicas las copas de muchos árboles. ¿Qué propiedades del cono podrían explicar ambos fenómenos?.

... y su explicación.

La respuesta a estas preguntas es unas veces sencilla y otras tremendamente complicada. Y cuando se habla de respuestas no es pensando en un gran principio que haga explicables todas y cada una de las formas; basta con mucho menos: encontrar alguna razón plausible que haga ver las ventajas o justifique parcialmente dicha estructura. Y así, en cada una de las preguntas planteadas, la respuesta será de tipo distinto.

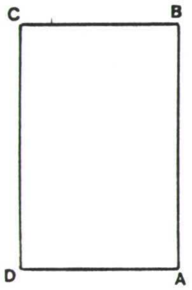
En el problema de las celdas de las abejas descubriremos que el hexágono permite "teselar" el plano, es decir, embaldosarlo sin dejar huecos. También podemos hacerlo con cuadrados o triángulos equiláteros, pero, frente a éstos, el hexágono tiene la ventaja de tener, para una superficie dada, el perímetro mínimo (así la abeja necesita hacer menos tabiques para la misma capacidad de miel).

En el país de gigantes de Gulliver, el hueso fémur de uno de ellos es 12 veces más largo que el nuestro, una sección transversal 144 veces mayor y el volumen 1. 728. Por tanto, la presión que soporta (peso por unidad de superficie) es 12 veces superior a la de nuestro fémur y forzosamente se quebraría si estuviera hecho del mismo material que el de un hombre común.

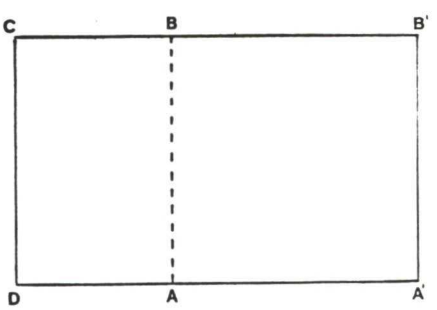
La proporción áurea explica muchos fenómenos. En efecto, las figuras con elementos en proporción áurea se "reproducen" con mucha facilidad por adjunción o sustracción de elementos sencillos.

Este rectángulo es áureo, porque sus lados están en razón

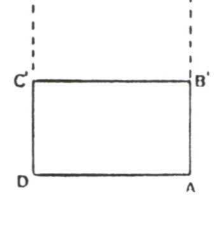
$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1,62$$



el que resulta de añadirle un cuadrado de lado AB tambien lo es



y asímismo el que sale al quitarle un cuadrado del lado BC



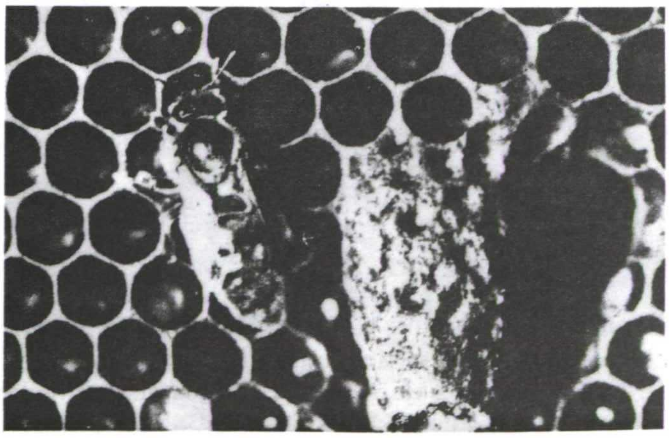
Los tres rectángulos anteriores guardan la misma proporción entre sus lados, son semejantes. En el terreno de las formas vivas, un organismo puede ir creciendo por adjunción de una misma estructura simple, sin perder por ello su forma global.

Y resulta que las sucesiones de Fibonacci son una buena aproximación a la proporción áurea. Concretamente, si a partir de la sucesión fundamental 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... hallamos los cocientes de dos términos consecutivos $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{1}$ ... éstos se van pareciendo cada vez más al valor de la razón áurea $\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$ Una forma de acercarse al crecimiento armonioso áureo es hacerlo según los números de Fibonacci.

Las formas de la Naturaleza en el aprendizaje de la Geometría

Ante todo hay que reconocer que el uso de modelos reales, al alcance de la mano los más sencillos o si no, mediante fotos aquellos que como las galaxias o los microorganismos no son directamente observables, supone de entrada un factor de motivación y justificación del porqué se estudian precisamente unas formas y otras no. Y con esto no pretendo cerrar el camino al estudio de formas arbitrarias; al contrario, el contraste entre éstas y las "standard" reforzará aún más el convencimiento de las buenas propiedades de que gozan las formas regulares.

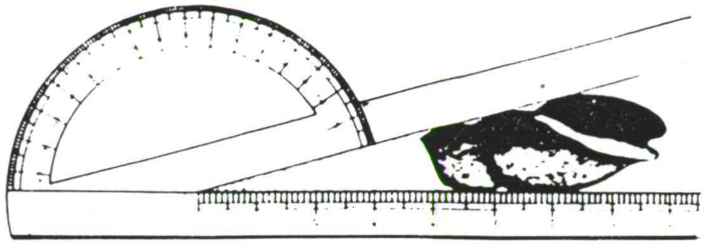
¿Qué partido didáctico se le puede sacar a una actividad sobre formas reales?. Volvamos al caso de las abejas. Cuando se observa el panal se reconoce una similitud entre todas las celdillas. Algunas, desde luego, presetan irregularidades, o son de tamaño ligeramente distinto. Pero las mejores palabras para describirlas globalmente son "hexágono regular".



Si el alumno construye un pequeño modelo, eliminando aquellos factores que parecen irrelevantes, se produce una tarea de abstracción en el reconocimiento de una estructura general.

Aparece después la fase de la medida. En este caso quizás lo más oportuno sea medir varios lados y efectuar un promedio. En otros puede ser una actividad de mayor envergadura: elegir qué parámetros son relevantes y cómo hacerlo.

Por ejemplo, en un caracol de los alargados habría que medir el ángulo del cono y la altura, o una generatriz, o la anchura de la boca.



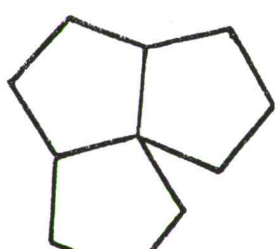
Con estas actividades se crea un modelo matemático sencillo, que se puede dibujar, reproducir en materiales adecuados y manipular. El dibujo y la reproducción van a necesitar, a su vez la puesta en juego de habilidades manuales y técnicas específicas, como el uso de la regla y el compás, o la representación del espacio en un plano. El empleo de plantillas planas para la confección de volúmenes es un buen ejercicio de interrelación entre dos y tres dimensiones.

Para objetos sencillos, esta fase descriptiva es asequible a todos los alumnos, incluso de Ciclo Medio e Inicial. Pero podemos, y debemos, continuar ya que, generalmente, los aspectos geométricos más interesantes van a aparecer en la fase de los porqués que se apuntaban en el epígrafe anterior. Es donde nos vamos a encontrar con problemas dinámicos, con formas que se mueven o que se dilatan. Y aquí está la esencia de la Geometría: como dicen Klein, una geometría es un conjunto de transformaciones. Esta frase resume una buena parte de nuestros objetivos como enseñantes: las ideas de invariancia, transformación, movimiento son estructuras conceptuales básicas de la mente humana, que debemos reforzar y desarrollar.

Volviendo al problema de las celdas de abeja, ya se ha adelantado un interpretación posible al porqué de su forma. Pero a un alumno no se le debe dar soluciones, sino medios y actividades para llegar a ellas. Y aquí se plantearían dos problemas complementarios:

1. De todos los polígonos regulares ¿con cuáles de ellos podemos embaldosar un plano sin dejar huecos? (a la abeja le interesa aprovechar el espacio). En una primera fase manipulativa pueden hacerse pruebas, con polígonos recortados en cartulina.

Rápidamente se desechan algunos, como el pentágono,



No se puede cerrar el hueco con otro pentágono

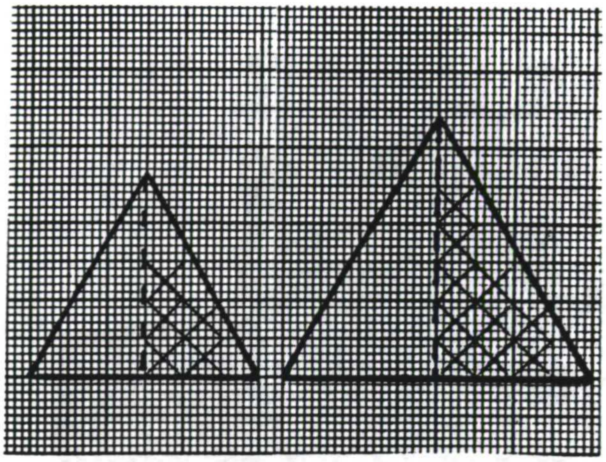
y se encuentran los más sencillos. Los alumnos aventajados de Ciclo Superior, o los de Polivalente, pueden llegar a establecer las condiciones teóricas que tienen que cumplir los polígonos buscados. Y da la casualidad de que, en éste caso, van a coincidir con los determinados experimentalmente: triángulo equilátero, cuadrado y hexágono. Pero se ha producido un salto cualitativo: no sólo entiende por qué unos sí y otros no, sino que está seguro de que únicamente son esos tres. Este salto requiere, desde luego, la puesta en juego de varios mecanismos conceptuales y la recopilación o aprendizaje, si es preciso, de otros hechos que no detallo pero que no pasarán inadvertidos al lector.

La otra rama de la Y:

2. ¿Cuáles de estos polígonos encierran la misma superficie con el menor perímetro posible? (la abeja pretende tener un hueco suficiente para maniobrar, y que la construcción le salga "barata").

Partiendo de una situación concreta, por ejemplo, construir un triángulo, un cuadrado de área 5 cm^2 y repitiéndola, si es necesario, para otros polígonos el alumno podrá enunciar su conjetura.

Esta actividad es sencilla si se conocen y manejan las fórmulas que relacionan lados y áreas. Para un alumno de Ciclo Medio constituye un interesante problema de tanteo.



El triángulo pequeño, de 3 cm. de lado, encierra 380 cuadraditos de un mm^2, es decir 3,8 cm^2. Se han contado la mitad, agrupando todos los que se pueden en bloques de 5x5 (25 mm^2) y uno a uno el resto. El resultado difiere poco del teórico, 3.9 cm^2. En el triángulo grande, de 4 cm de lado, el conteo da unos 670 cuadritos (67 cm^2). El que se busca, de 5 cm^2, tendría el lado entre 3 y 4 cm.

En este caso es más complicado demostrar una "teoría general". No obstante, los alumnos pueden aproximarse al hecho importante de que disminuye el perímetro al ir aumentando el número de lados, hasta llegar a la situación límite de la circunferencia (polígono con un número infinito de lados) como línea que encierra un área dada utilizando un cerco mínimo. Se está trabajando un concepto fundamental: una superficie se puede "reorganizar" de muchas maneras adoptando formas diferentes.

Las dos situaciones planteadas son especialmente buenas, porque no se agotan en sí mismas y permiten continuar con problemas parecidos, ¿qué figuras puedo hacer con esta cuerda? ¿cuál será la de mayor área?, o más generales: ¿cómo embaldosar un plano utilizando dos o tres o más tipos de baldosas diferentes?, y también trasladarlos al espacio.

Es cierto que no todos los interrogantes que nos hemos planteado tienen un tratamiento asequible y tan rico como el esbozado. Pero me atrevo a decir que en casi todos hay algún aspecto aprovechable y es tarea del profesor encontrarlo y diseñar el camino apropiado a las necesidades y conocimientos de sus alumnos.

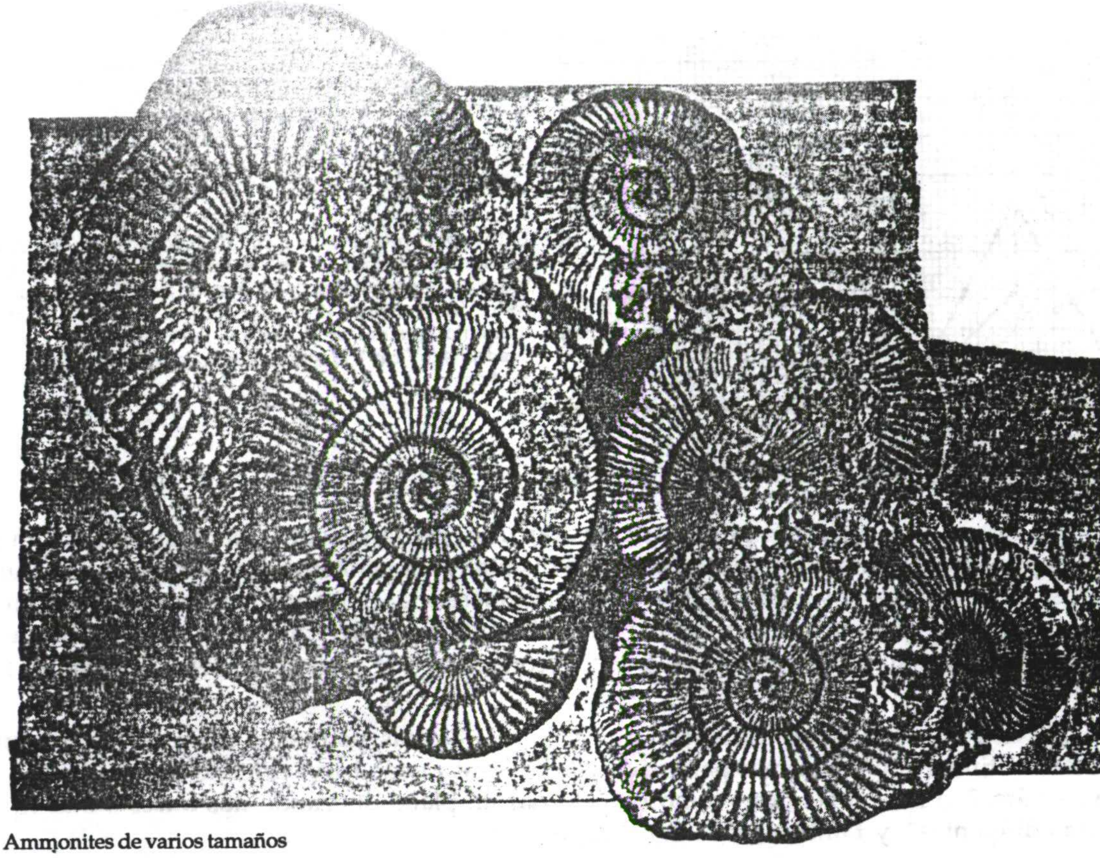
En resumen, el estudio de las formas en la Naturaleza no sólo es interesante como anécdota motivadora, ya que además pone en juego todas los resortes propios de la actividad matemática, y muchas veces requiere el aporte de otras disciplinas, Física y Biología en particular, para poder dar cabal repuesta al problema planteado.

Aprovechamiento didáctico de las formas enrolladas.

Cuando comencé a pensar en el tema central de este trabajo sobre "Geometría de la Naturaleza", y después de echar una ojeada a la bibliografía que tenía más a mano, no pude quejarme, desde luego, de la falta de alternativa. Por ejemplo, pensé en las hojas de los árboles: su forma y crecimiento. Pero el otoño me dejó sin material de trabajo. Así es que, un poco al azar, elegí el de las formas enrolladas. Conocía los textos de Emma Castelnuevo y el Grupo Cero, y yo misma había desarrollado actividades similares en el aula. Pero quedaban facetas por diseñar con detalle. Ahora, una vez terminado, me convezco cada vez más del acierto de esa elección azarosa; y no por el resultado final, que no me corresponde juzgar, sino por la cantidad de cosas que he aprendido, tanto de Geometría como de su didáctica. Debo decir que no soy especialmente experta en Geometría, pero llevo trabajando en ella con los alumnos de 1º de BUP desde hace cuatro años.

Los aspectos más interesantes han aparecido precisamente al responder a los porqués que he comentado en epígrafes anteriores.

Los enrollamientos nos dan la impresión de formas que crecen siempre de la misma manera, repitiendo continuamente un movimiento: ¿qué movimientos son estos?. Si comparamos dos caracoles de la misma especie, uno grande y otro pequeño, éste es un trocito interior del grande y también su reproducción a escala reducida, es decir, conserva la forma con el crecimiento.



Ammonites de varios tamaños

A la hora de desarrollar didácticamente las justificaciones de estos hechos, no encontramos conceptos fundamentales en la formación matemática de los escolares, que pueden ser tratados intuitivamente en una primera etapa y formalizarse con posterioridad. Resumo los más importantes:

- Las formas enrolladas pueden generarse mediante movimientos, giros en todos los casos, traslaciones en las hélices y hélicoides, y dilataciones en las espirales equiangulares y helicoides.

- En cada una de ellas se dan al menos dos movimientos simultáneos. Algunos pueden generarse por medios mecánicos sencillos y en general, se puede considerar que se producen alternativamente e irse acercando por "pasos" cada vez menores a la simultaneidad, es decir, pasar de un proceso discreto a uno continuo, como hacemos tantas veces para llegar de los polígonos a la circunferencia.

- Las mismas estructuras conceptuales anteriores se desarrollan en el plano con las espirales y, en el espacio, con hélices y helicoides. Y es importante desarrollar la intuición espacial junto con la plana desde las primeras etapas de EGB.

- Los movimientos uniformes, lineales y circulares, se trabajan al generar mecánicamente las espirales y hélices.

- Puede reforzarse la intuición de semejanza como "igualdad de forma". Cualquier trocito de caracol, colocado en distinta posición y ampliado, es igual a otro trocito.

Aplicación en el aula

No es mi intención, con este trabajo, ofrecer un material de aula cerrado y completo. Como se verá durante su lectura, se proponen una serie de actividades y reflexiones de muy distinto grado de dificultad. He intentado poner de manifiesto, en cada una de ellas, cuáles con los aspectos conceptuales que se ponen en juego y las habilidades técnicas que pueden desarrollarse al modelizar o imitar las formas. Es tarea de cada profesor el decidir cuáles con las más adecuadas al nivel y necesidades de sus alumnos.

El reconocimiento de las formas enrolladas puede iniciarse muy pronto. La fabricación de modelos en plastilina y el uso de plantillas parece adecuado a partir del Ciclo Medio. Esta actividad supone ya una aproximación intuitiva a los movimientos fundamentales. Puede seguir la cuantificación de estos movimientos, midiendo ángulos y distancias hasta llegar a una expresión más formal en el Ciclo Superior y en la Enseñanza Media.

Casi todas las actividades pueden trabajarse aisladamente, como una más de las que proponemos a los alumnos para reforzar el aprendizaje de un determinado concepto o técnica: las espirales poligonales en giros y semejanzas, la equiangular para progresiones geométricas, la ecuación de la de Arquímedes para proprocionalidad y coordenadas polares, las falsas espirales para uso del compás.

Los textos de Castelnuovo y Grupo Cero que se incluyen son magnífico ejemplo de utilización de estos recursos.

No creo que el seguimiento completo del problema sea adecuado pora los alumnos, pero sí para el profesor, en cuanto que sólo una visión global del mismo y de los procesos implícitos en cada uno de los pasos nos permiten valorar el alcance e interés real de las actividades que proponemos a nuestros estudiantes.

Por último quiero añadir que la mayor antención dedicada a la espiral de Arquímedes y a la hélice no debe interpretarse como una prioridad en el interés que ofrecen. Las razones son otras. La espiral de Arquímedes se trata con menos frecuencia que la equiangular en textos didácticos y de divulgación, por lo que me ha parecido conveniente desarrollarla más detenidamente. Por otra parte, un buen número de estrategias y actividades son muy parecidas en ambos casos; creo que es suficiente tratarlas con detalle una sola vez.

Para cada una de las curvas describo, en primer lugar,los movimientos que las generan, desde las aproximaciones por pasos discretos a la continua.

Los siguientes epígrafes están dedicados a la construcción de modelos sencillos y al estudio de algunas propiedades, finalizando con las características propias de algunas formas enrolladas.

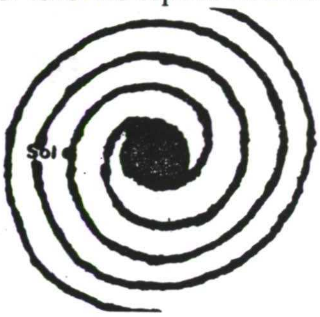
LA ESPIRAL DE ARQUIMEDES

Mosaico de H. VODERBERG

La espiral de Arquímedes en la Naturaleza y el Arte

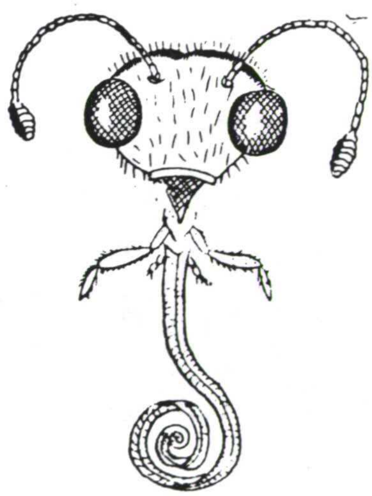
Es una de las formas enrolladas planas más simples. Debe su nombre al matemático griego Arquímedes de Siracusa (S.III a. de C.), quien la estudió exhaustivamente en su tratado "Sobre espirales" enlazando con el resto de los análisis sobre "Curvas mecánicas" o generadas por movimientos.

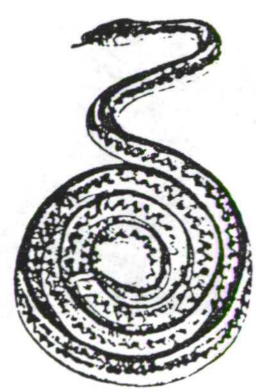
Se reconoce fácilmente por tener las espiras de anchura constante.

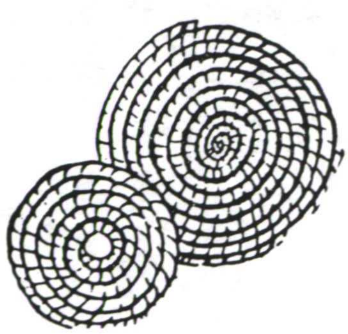


La espiral de dos brazos de nuestra galaxia.

En la Naturaleza se presenta, salvo algunas excepciones, de manera "artificial": no forma parte de los seres vivos, sino que es creada esporádica y reversiblemente por ellos.





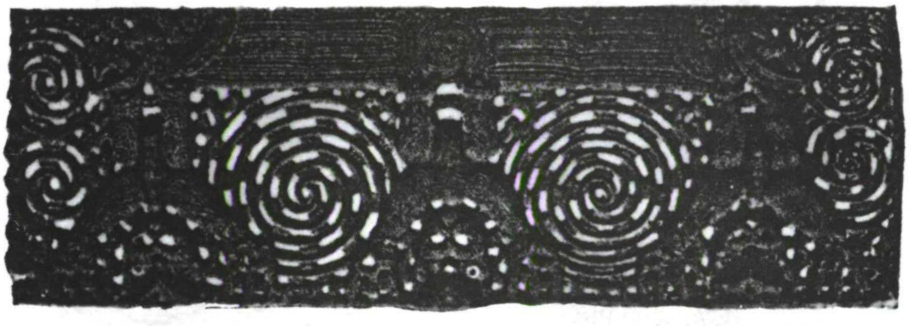


Nunmulites fósiles

Su construcción es muy sencilla; quizá por eso aparece dibujada o tallada en numerosas obras de arte, incluso las más primitivas.

Piedra esculpida de un túmulo fechada en la Edad de Bronce.

Dos espirales unidas en una vasija etrusca.

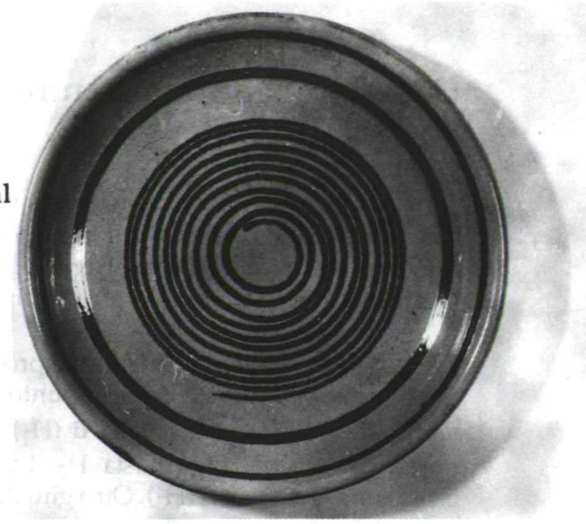


Dintel de una puerta en Nueva Zelanda.

Adorno barroco en espiral.

El método del alfarero

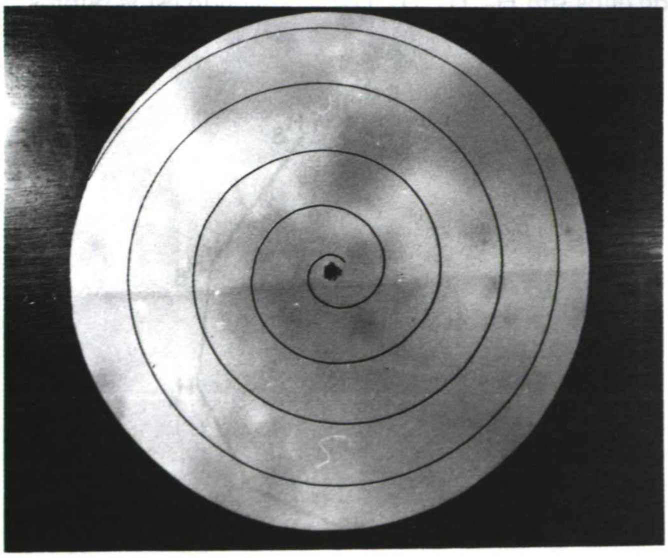
Con frecuencia encontramos como motivo ornamental en la cerámica popular espirales arquimedianas.



Su construcción se hace así: el alfarero centra el plato a decorar en el torno y lo pone a girar. Coloca su dedo en el centro del plato y lo desliza hacia afuera siguiendo una dirección fija (hacia él, por ejemplo) y a velocidad constante.

Se puede simular este movimiento con cualquier aparato que gire; a nuestro alcance tenemos el plato de un tocadiscos.

Pinchamos un papel en el pivote central y a partir del mismo se coloca una regla que hay que mantener fija. Solo queda deslizar un lápiz desde el pivote hacia afuera, apoyándolo en la regla y procurando que lleve una velocidad constante.



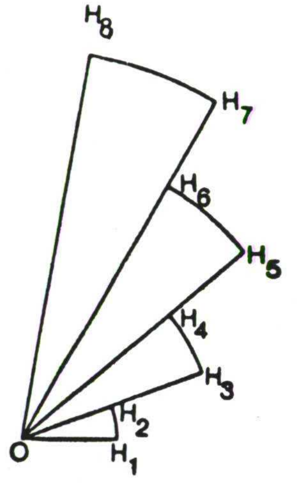
Se puede cambiar la velocidad de giro del tocadiscos (16, 33 y 45 r. p. m.) y combinarla con desplazamientos más o menos rápidos, para obtener espirales de distinta anchura entre las espiras.

Un buen ejercicio es formular una hipótesis acerca de la relación entre los parámetros del movimiento (las dos velocidades) y el resultado final.

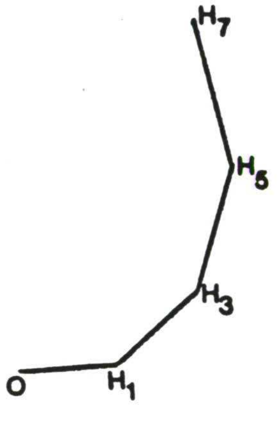
Girar alrededor del centro y alejarse de él.

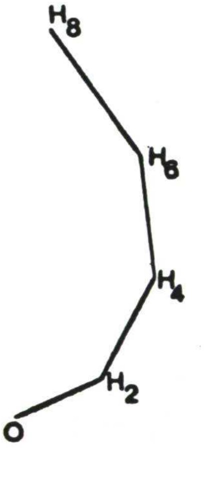
La construcción anterior es sencilla, pero encierra conceptos difíciles para los alumnos, ya que intervienen dos movimientos continuos y uniformes (giro y desplazamiento) que, además, se realizan simultáneamente. Sería el recorrido que realiza una hormiga deslizándose sobre una varilla, la cual a su vez gira alrededor de uno de sus extremos.

Se puede desmenuzar este proceso trabajando dos conceptos: giro alrededor de un punto y alejamiento respecto de ese mismo punto. Continuando con el símil anterior, la hormiga avanza sobre la varilla desde O una distancia d (H_1). Ahora la hormiga se para y la varilla gira un ángulo α, transportando a la hormiga hasta H_2. La varilla se para y la hormiga avanza sobre ella alejándose del centro otra distancia d (H_3). Otro giro de varilla y la hormiga queda en H_4, etc, etc...



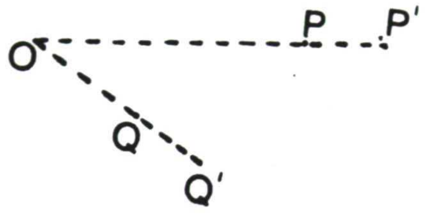
Así un movimiento completo lo constituye un giro G (O, α) y un desplazamiento d. Las posiciones de la hormiga después de cada uno de ellos son H_0, H_2, H_4, H_6, ... Uniendo estos puntos obtenemos una espiral poligonal.





Una nueva transformación: alejarse una distancia fija de un punto.

¿Por qué no llamarla A (O, d)?.



A (O,d) transforma P en P' y Q en Q'.

Esta transformación no es una traslación, puesto que mueve cada punto en una dirección distinta, aunque siempre en una misma longitud. Tampoco es una homotecia, porque el alargamiento no es proporcional a la distancia al origen, sino constante.

Nos encontramos pues ante una transformación distinta de las estudiadas convencionalmente y que tiene unas reglas de juego muy sencillas.

Un buen trabajo para alumnos aventajados puede ser estudiarla a fondo, ¿conserva las distancias?, ¿los ángulos?, ¿cómo se compone con ella misma y con las transformaciones standard?.

LOGO para espirales

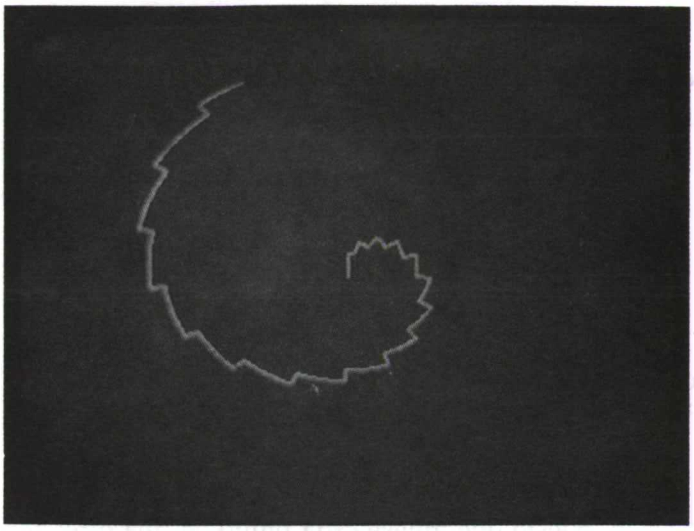
El tipo de trayectorias que se han descrito, avances y giros, resulta familiar para los alumnos de EEMM, Ciclo Superior e incluso Medio que trabajan con el lenguaje LOGO como instrumento de aprendizaje de la Geometría.

El proyecto "HORMIGA" requiere diseñar previamente un procedimiento que dibuje un arco de cincurferencia, de radio y ángulo variables.

```
ES ARCO :RADIO :ANGULO
 REPITE  :RADIO * 6. 28 * :ANGULO / 360 [ADELANTE 1 DERECHA 180/ ( :RADIO*3. 14)]
FIN
```

```
ES HORMIGA  :LONGITUD :AVANCE :GIRO
  ADELANTE :AVANCE
  DERECHA 90
  ARCO :LONGITUD :GIRO
  IZQUIERDA 90
  HORMIGA :LONGITUD + :AVANCE :AVANCE :GIRO
FIN
```

La hormiga de nuestro procedimiento se mueve igual que la de la varilla.



Hormiga O, 8,20
El primer valor, 0, inicializa el recorrido en el centro de la pantalla. El segundo, 8, marca la distancia que se aleja cada vez y 20 es el ángulo de giro.

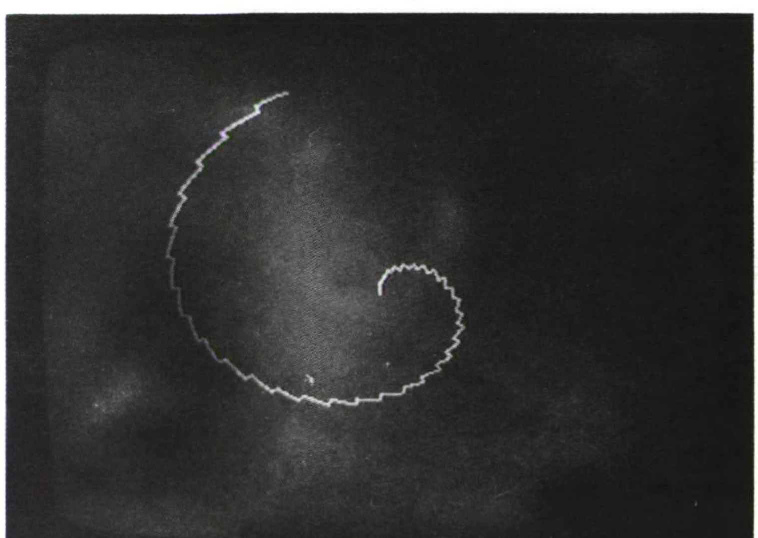
El lector poco familiarizado con el LOGO puede sorprenderse ante la aparente farragosidad de este procedimiento. Más adelante encontrará otros bastantes más legibles.

La versión de LOGO que se ha empleado es la española de la casa COMMODORE.

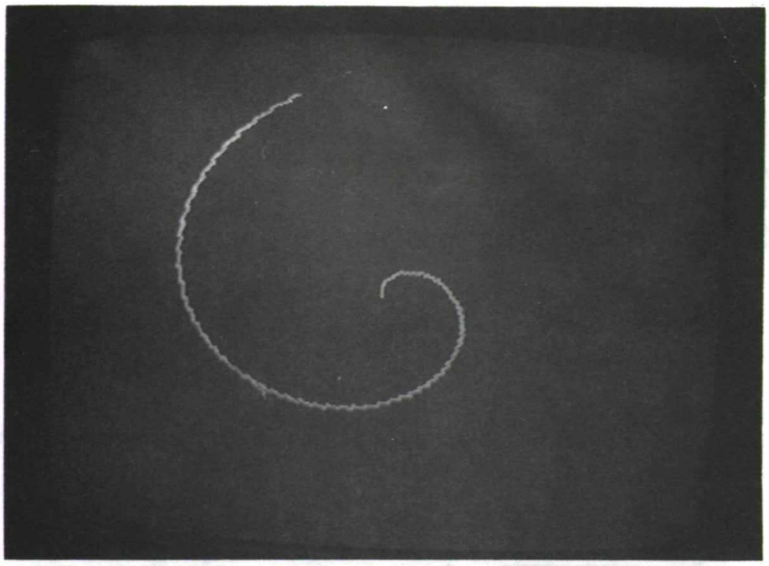
El salto al continuo

Supongamos que la distancia anterior **d** recorrida por la hormiga en cada paso es de 1 cm, y el ángulo girado cada vez por la varilla es de 10º. El primer tramo recorrido (de O a H_2) podría descomponerse en dos más pequeñitos: avanzar 0'5 cm, girar 5º, avanzar 0'5 cm, y girar 5º, y cada uno de éstos en otros dos: avanzar 0,25 cm., girar 2º 30', avanzar 0,25 cm. y girar otros 2º 30' y cada uno de éstos en otros más pequeño, ... de forma que el giro y el desplazamiento se den "casi" a la vez.

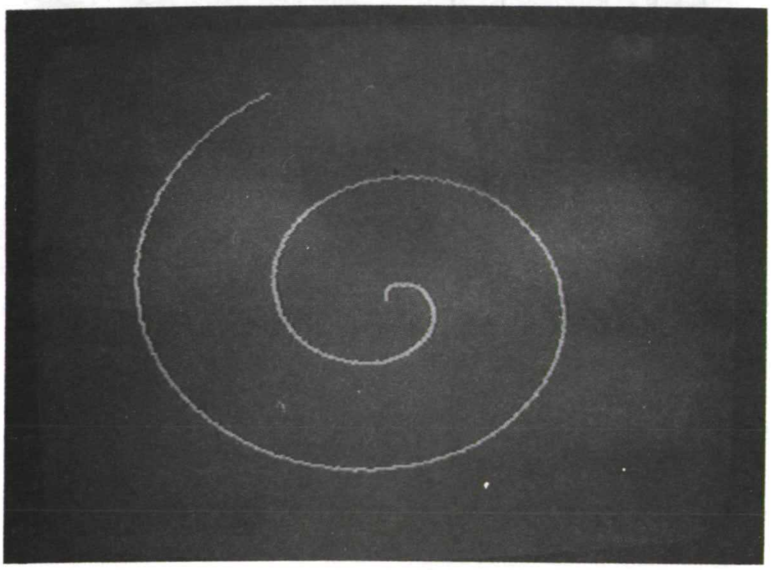
Podemos hacer lo mismo con la hormiga del ordenador, sin más que cambiar las variables de entrada.



Hormiga 0, 4, 10



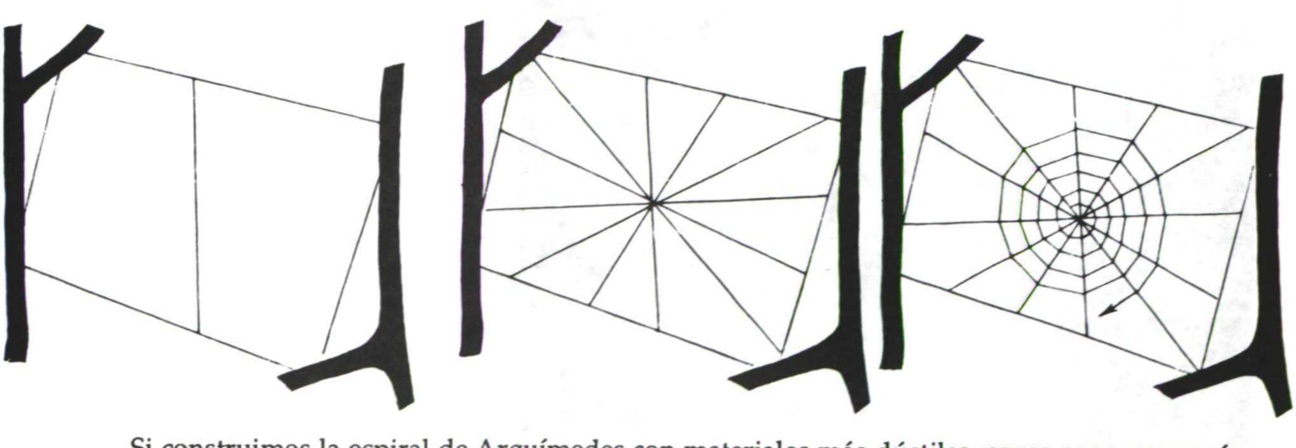
Hormiga 0, 2, 5,



En HORMIGA 0, 1, 5 se reconoce muy bien la forma espiral.

El método del cestero y de la araña

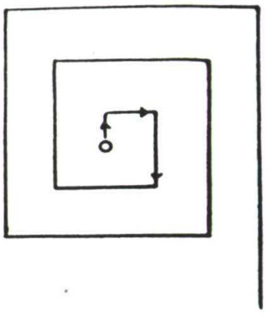
Muchas arañas construyen sus telas con una estructura de espiral arquimediana, y es la misma que utilizan los cesteros de mimbre para hacer los fondos de sus vasijas.



Si construimos la espiral de Arquímedes con materiales más dúctiles, como anea, macarrón, tubo de goma o simplemente plastilina, podemos prescindir del armazón radial.

Se construye un rollo largo
de plastilina y se enrolla.
Al irlo haciendo sobre
un papel, se pueden dibujar
los bordes.

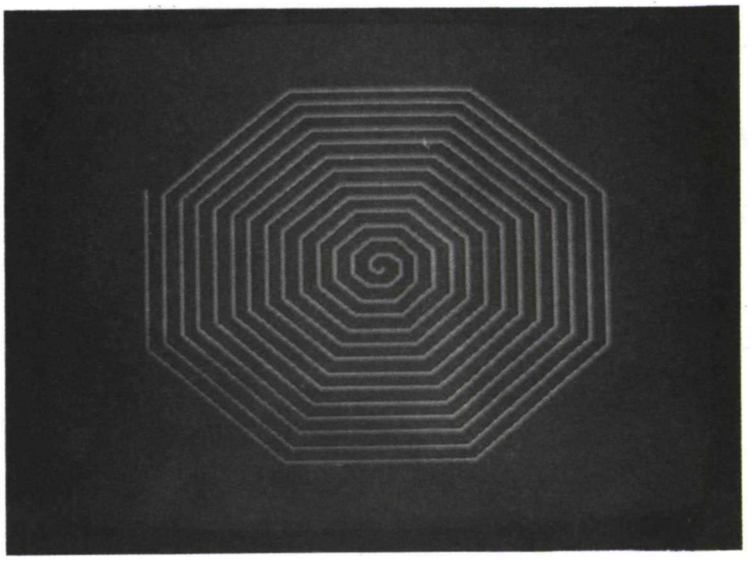
Siguiendo con las telas de araña, una manera muy sencilla de dibujarlas, es aumentando una cantidad fija la longitud de la vuelta anterior.



Los conceptos que se trabajan en este dibujo son diferentes a los de métodos anteriores: el giro no se hace sobre un mismo punto y los avances crecen en progresión aritmética.

Con LOGO se pueden construir estas espirales poligonales:

```
ES POLIESPIRAL . ARQUIMEDIANA :LADO :ANGULO :AUMENTO
  ADELANTE :LADO
  DERECHA :ANGULO
  POLIESPIRAL . ARQUIMEDIANA :LADO + :AUMENTO :ANGULO :AUMENTO
FIN
```

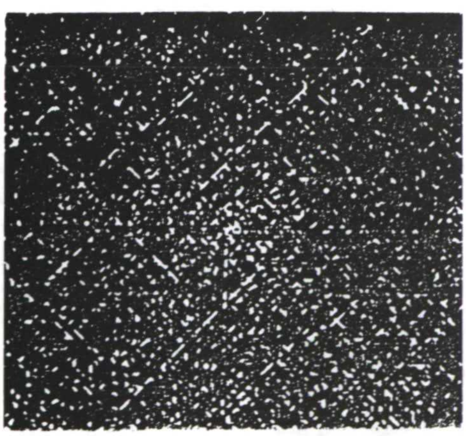


POLIESPIRAL. ARQUIMEDIANA
1, 45, 1.
Aumentamos un paso en cada
vuelta. Los giros son de 45°.

Martin Gardner comenta en uno de sus artículos la estructura en espiral cuadrada de los números primos. No es exactamente igual a las anteriores, ya que sus lados siguen la secuencia.

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ... aunque visualmente presenta un aspecto similar.

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82



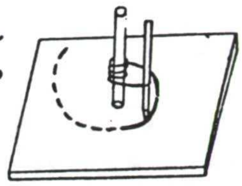
Distribución de los números primos (hasta el 65.000) en la pantalla de un ordenador.

Otro procedimiento dinámico: desenrollar un hilo

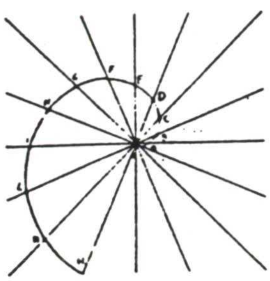
Traduzco un fragmento del texto "Matematica Nella Realtà" de Emma Castelnuovo, correspondiente al trabajo hecho por un alumno (entre 12 y 16 años).

SPIRALE UNIFORME O DI ARCHIMEDE

Lo spago per ogni $\frac{1}{16}$ di giro si srotola di 1 cm.



dopo $\frac{1}{16}$ di giro lo spago è cm 1
" $\frac{2}{16}$ " " " " " cm 2
" $\frac{3}{16}$ " " " " " cm 3



La spirale è uniforme, cioè cresce uniformemente, ossia il "passo" è sempre lo stesso. Ogni punto è caratterizzato da due numeri:

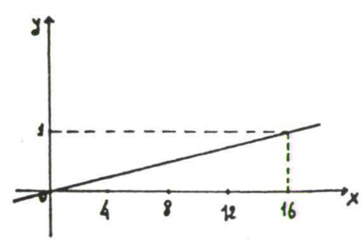
$A(1; \frac{1}{16}), B(2; \frac{2}{16}), C(3; \frac{3}{16}), \ldots$

Se indico con y il numero degli angoli e con x la distanza del punto da O, si ha sempre:

$$y = \frac{1}{16} x$$

Questa è l'equazione della nostra spirale. Sul piano cartesiano è rappresentata da una retta per O.

Spirale e retta hanno la stessa equazione nei due sistemi di riferimento.

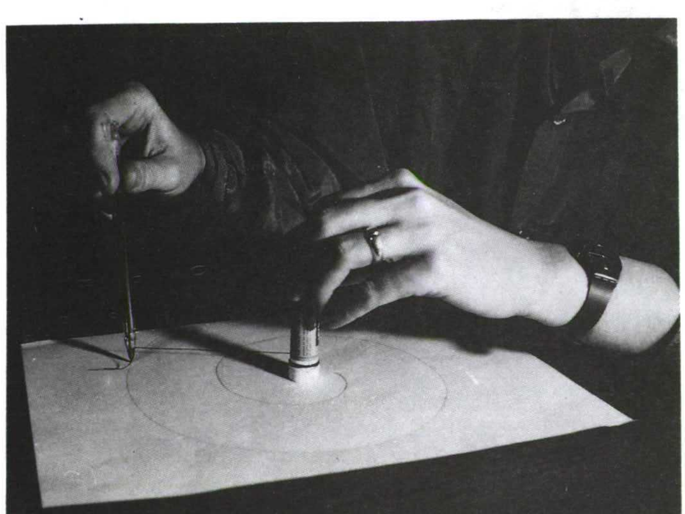


El cordel, para cada 1/16 de vuelta, se desenrolla 1 cm. La espiral ≃ uniforme, es decir, crece uniformemente, siendo el "paso" siempre el mismo. Cada punto se caracteriza por dos números

Si llamo **y** al número de sectores y **x** la distancia del punto a 0, se tiene siempre:

Es la ecuación de nuestra espiral. Sobre el plano cartesiano está representada por una recta que pasa por 0. Espiral y recta tienen la misma ecuación en dos sistemas de referencia.

Al poner en práctica este método se deben tomar una serie de precauciones: el pivote sobre el que se enrolla el hilo ha de ser rígido y mantenerse en todo momento perpendicular al apoyo (mejor si puede clavarse al mismo). De su anchura dependerá la anchura entre espiras: ésta va a ser exactamente el perímetro del pivote.



El hilo ha de ser fino, enrollado con firmeza en la parte de abajo del pivote y por el extremo libre a un bolígrafo tipo BIC, a la misma altura que el anterior. Para que no se deslice puede hacerse el enrollamiento en la parte de la punta que queda dentro de la funda dura, de modo que el hilo esté pillado por ella. Por la misma razón es útil tomar como pivote un tubo de pastillas, como en la foto. Un último consejo: mantener tenso el hilo y girar suavemente el bolígrafo alrededor de sí mismo para que el hilo no se enrosque.

También puede hacerse a gran escala sobre un suelo de tierra, usando como pivote un poste de la luz y como "bolígrafo" un palo.

La ecuación de la espiral de Arquímedes: proporcionalidad entre radio y ángulo.

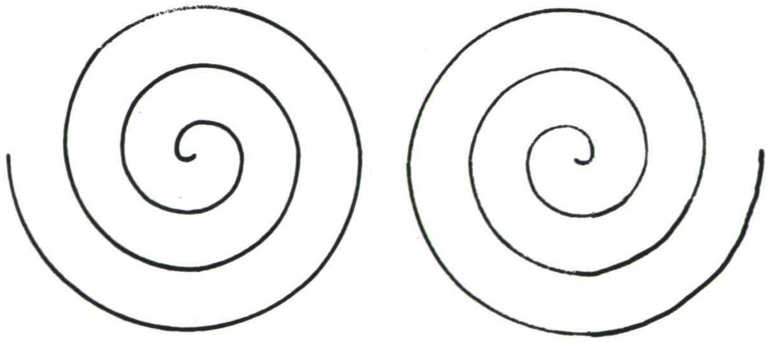
El trabajo expuesto en el epígrafe anterior ofrece una manera simple de caracterizar los puntos de una espiral mediante dos coordenadas: (2, 2/16).

- La primera, 2, mide la distancia al origen o polo.
- La segunda, 2/16 de vuelta, nos da el ángulo descrito con respecto a la posición inicial.

Es un auténtico sistema de coordenadas polares, aunque la unidad angular empleada (dieciseisavos de vuelta, es decir, 22º 30') no sea la más usual. Las coordenadas polares aparecen en el curriculum del nuevo Bachillerato como tema de ampliación, pero no es difícil trabajar con ellas en el Ciclo Superior, pues se basan en los simples conceptos de ángulo y distancia y, además, se utilizan con profusión en juegos de barcos y aviones.

No quiero pasar por alto la interesante comparación que nos ofrece Emma Castelnuovo entre la forma de las ecuaciones de la recta y la espiral de Arquímedes, ya que ambas son la expresión de la proporcionalidad directa: abscisa y ordenada en la recta; ángulo y radio en la espiral.

Por último, una actividad similar a ésta puede propiciar la introducción de ángulos mayores de 360º. Incluso el sentido de giro (como las agujas de un reloj o al revés), pues, según contemos de un modo u otro, obtendremos espirales diferentes.



Si cambiamos el sentido de giro, sale otra espiral simétrica de la primera.

Otra forma de obtener la ecuación

Los alumnos -pocos en el Ciclo Superior, y casi todos al finalizar el Polivalente- que dominen las fórmulas del movimiento uniforme, pueden obtener de otro modo la ecuación de la espiral de Arquímedes. Y volvemos al concepto dinámico inicial: resultado de un giro con velocidad angular constante (v_a) que modifica el ángulo:

$\alpha = V_a \ t$

α = ángulo recorrido

t = tiempo

y un desplazamiento lineal con velocidad V_l que alarga el radio:

$r = V_l\, t$

r = distancia recorrida (desde el origen)

t = tiempo

Para un instante t, un punto ocupará la posición (r, α) que vienen relacionadas de la forma:

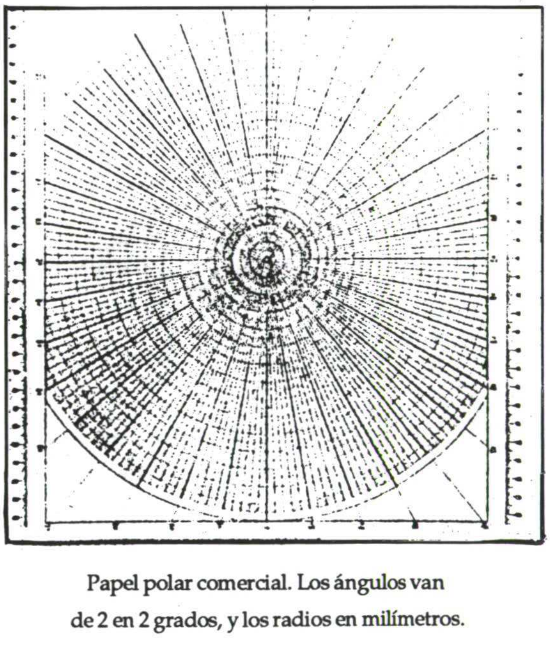
$$t = \frac{\alpha}{\sqrt{a}}\,, \qquad t = \frac{r}{\sqrt{e}} \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{a}} = \frac{r}{\sqrt{e}}$$

$$r = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{a}}\,\alpha = K\,\alpha$$

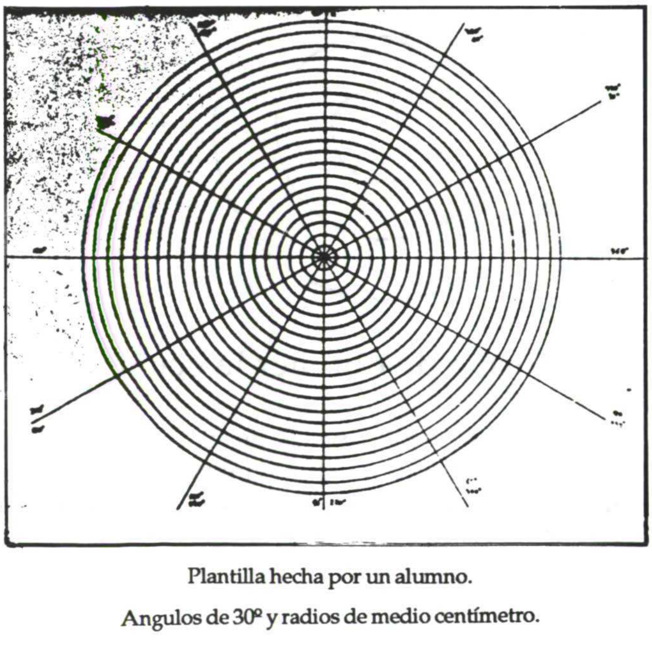
El coeficiente K de la ecuación de la espira adquiere ahora un significado dinámico, como razón entre las dos velocidades.

El papel polar

Hay en el mercado diversos tipos de papel gráfico que no se utilizan apenas en la escuela por su alto precio y mala distribución, pero que nos sugieren modelos caseros asequibles a todos. Uno de ellos es el papel polar, sin duda alguna el más adecuado para dibujar espirales.

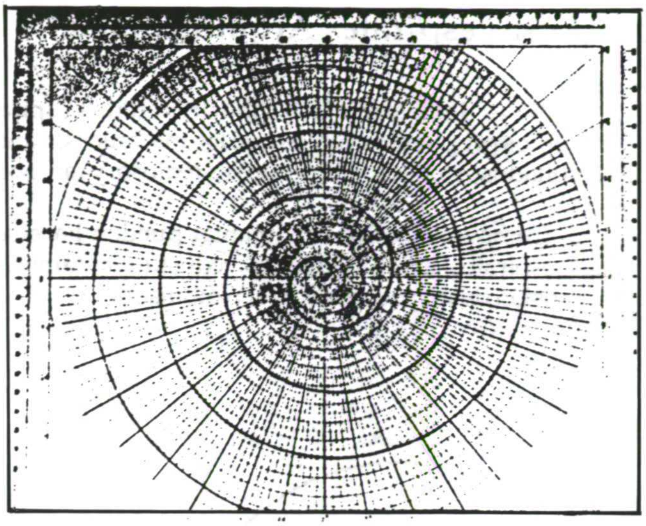


Papel polar comercial. Los ángulos van de 2 en 2 grados, y los radios en milímetros.



Plantilla hecha por un alumno. Angulos de 30º y radios de medio centímetro.

¿Qué ecuación tiene esta espiral?



Se ha hecho primero "por puntos", saliendo del centro y avanzando 1 mm cada 10º. Para el trazo continuo se han utilizado plantillas de las de uso común en Dibujo. La llamada regla "blanda" puede emplearse también para las espiras exteriores.

Los puntos que hemos dibujado tienen por coordenadas polares (r en mm y α en grados).

(0, 0) (1, 10) (2, 20) (3,30) ......

La relación entre radio y ángulo es: $r = 0'1\,\alpha$

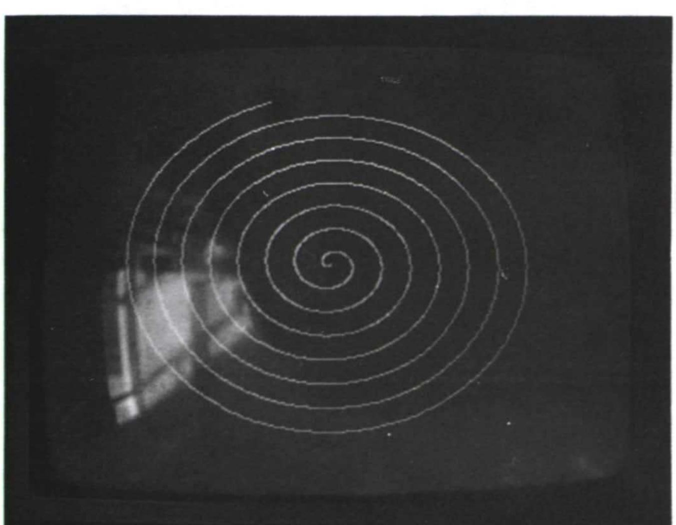
Si utilizamos otro tipo de medida angular (radianes por ejemplo), sería: $r = (18/\pi)\,\alpha \simeq 5'7\,\alpha$

El significado del coeficiente de proporcionalidad es similar al de la pendiente en una recta:

r aumenta 0'1 mm. por cada grado que aumenta α

Para estudiar la distancia entre espiras o anchura de la espiral basta con aplicar el coeficiente anterior a una variación de 360º en el ángulo, o calcular los radios correspondientes a un punto y el obtenido una vuelta después.

En ésta es 0'1 x 360 = 36 mm.

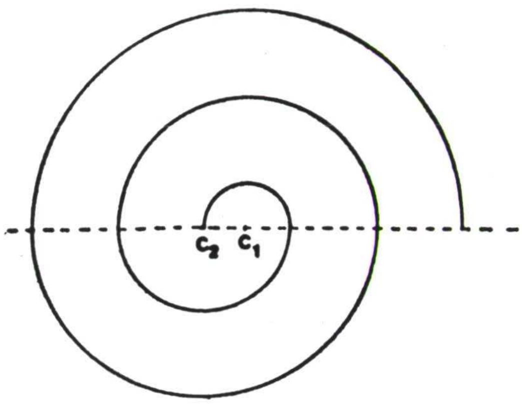


Esta espiral se ha dibujado con un procedimiento en LOGO a partir de su ecuación $r = 0'05\,\alpha$. El procedimiento requiere conocer las coordenadas polares y su paso a cartesianas.

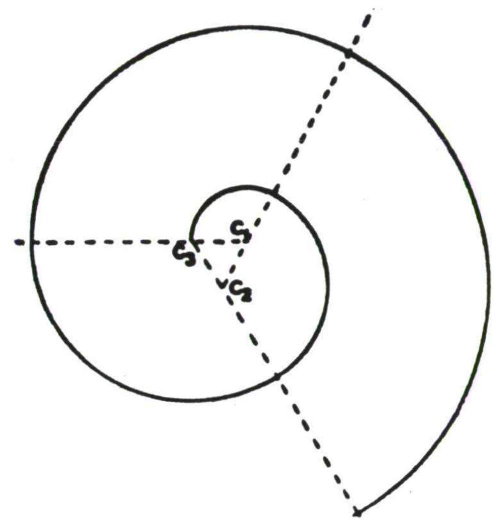
La "falsas espirales Arquimedianas"

No es demasiado fácil dibujar bien una espiral de Arquímedes: si se hace un repaso a los procedimientos propuestos vemos que los mecánicos, aunque de valor didáctico, no dan muchas veces grandes resultados estéticos. Por puntos es tedioso, y tampoco es fácil el manejo correcto de plantillas.

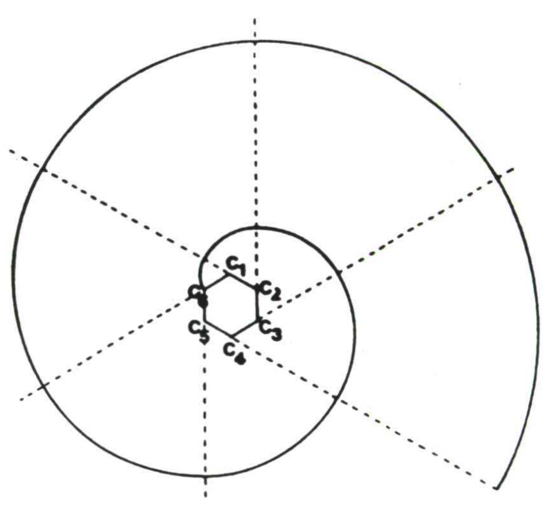
Como sustitutivo ornamental pueden hacerse, con la ayuda de regla y compás, las llamadas "falsas espirales arquimedianas"; constituye también un buen ejercicio de destreza técnica y de comprensión de un proceso verbal o dibujado.



Falsa espiral de dos centros.



Falsa espiral de tres centros.

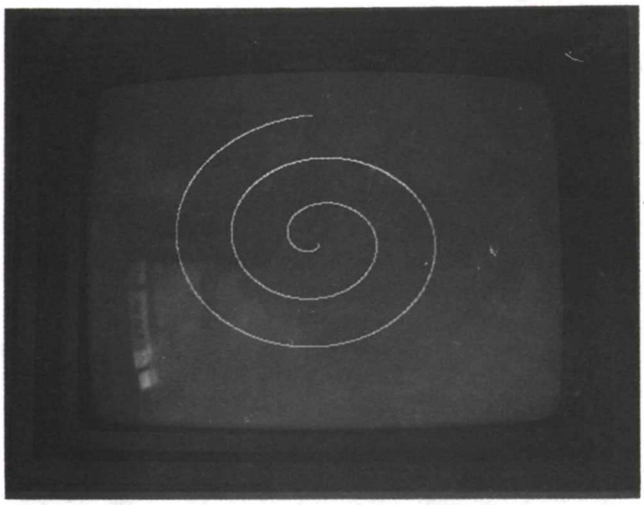


Falsa espiral de seis centros.

El alumno puede descubrir, una vez dibujadas varias, qué relación hay entre la anchura de las espiras y el polígono regular elegido como "base". Si éste es de n lados y cada uno de ellos mide l, la anchura será: $a = n \times l$

Para aproximarse a este descubrimiento es útil, una vez más, el empleo del LOGO, ya que permite visualizar rápida y simultáneamente varias espirales con, por ejemplo, tres centros, a distinta distancia entre ellos o bien distinto número de centros.

```
ES FALSA.ESPIRAL :NUM. CENTROS :DISTANCIA :AUMENTO
  ASIGNA "ANGULO 360 / :NUM. CENTROS
  ARCO :DISTANCIA :ANGULO
  FALSA.ESPIRAL :NUM. CENTROS :DISTANCIA + :AUMENTO :AUMENTO
FIN
```

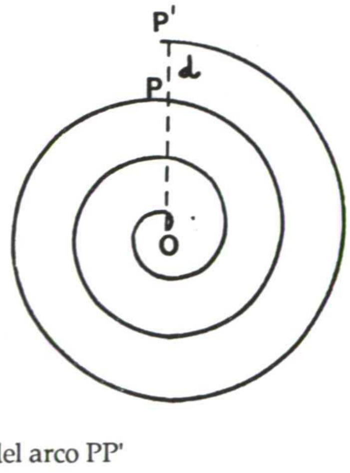


Falsa espiral de cinco centros.

Las espirales de Arquímedes se parecen a las circunferencias

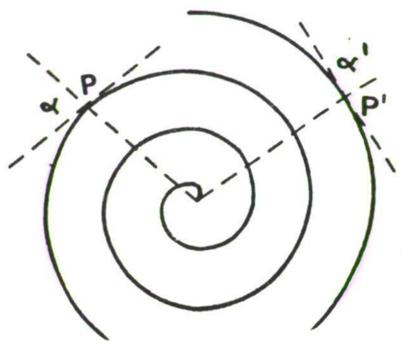
No es una casualidad que las construcciones circulares anteriores parezcan espirales. El borde de una espiral "muy grande" es casi una circunferencia. Y lo veremos con dos propiedades interesantes , aunque una de ellas es difícil de comprobar experimentalmente pues requiere un dibujo muy bueno.

La caracterización fundamental de los puntos de una circunferencia es que están a la misma distancia del centro, pues bien, en esta espira, P y P ' están casi a la misma distancia de O: como OP ' = OP + d y d es pequeño comparado con OP y OP ' (hablamos de una espira muy exterior) podemos decir $OP \simeq OP'$



Y lo mismo del resto de los puntos del arco PP'

Otra propiedad exclusiva de la circunferencia es que, en todos sus puntos, el radio y la tangente son perpendiculares. En la espiral, según nos vamos alejando del centro, el ángulo formado por el radio OP y la tangente a la espira en P se va aproximando a 90º.



$\alpha < \alpha' < 90^{\circ}$

La dificultad de comprobar esta propiedad no está sólo en el dibujo de la espiral sino en el concepto y trazado de tangentes, por lo que no parece conveniente su trabajo en el aula.

Una cuestión inquietante

No hemos hablado de propiedades métricas de la espiral: longitud y área. La primera se puede medir experimentalmente superponiendo un hilo a la misma y el área trazando sobre papel milimetrado y contando cuadraditos (método largo y pesado).

Pero vamos a otra cuestión relacionada con la longitud. Si dibujamos una espiral utilizando el plato de un tocadiscos, nuestro trazo ha sido "recto", exactamente desde el pivote central hasta que se acaba el papel. Sin embargo, la longitud de la línea que aparece en el dibujo es ¡muchísimo mayor!.

Este hecho resultará paradójico para los alumnos y, casi seguro, para muchos profesores que no estén familiarizados con ciertas cuestiones de Física, en particular con las relaciones entre varios sistemas de referencia.

Todos nos hemos enfrentado alguna vez con el problema académico de la gota de lluvia que resbala sobre la ventanilla de un tren en movimiento. Para un viajero, la trayectoria de la gota es rectilínea, mientras que para un observador exterior es un arco de parábola. El problema que nos ocupa es de naturaleza similar, pero más sorprendente, si cabe, porque disponemos de medios sencillos para medir ambas trayectorias: la rectilínea y la espiral.

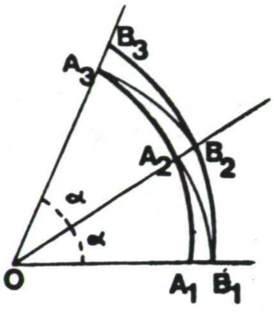
La característica de las formas enrolladas: un arco de espiral se parece mucho a otro.

Hasta aquí hemos visto, por una parte, los movimientos que generan una espiral de Arquímedes y procedimientos sencillos para imitarlos.

Tambien se ha obtenido su expresión analítica y se ha puesto de manifiesto su parecido con la circunferencia.

Es el momento de abordar la característica fundamental de las formas enrolladas: al crecer, la parte "nueva" se parece mucho a lo que ya hay.

Este dibujo representa dos trozos de dos arcos de espira consecutivos.



Dividamos el ángulo que determinan en dos partes inguales de medida α . Si giramos el arco B_1 B_2 con respecto al origen un ángulo

$$G(0, \alpha): \qquad B_1 B_2 \longrightarrow A2\ A_3$$

es decir, el trozo B_1 B_2 se transforma en un trozo de la espira anterior.

Supongamos los puntos de A_2 A_3 unidos al origen mediante gomas elásticas. Si las estiramos hacia afuera una distancia d, el arco A_2 A_3 se convierte en el B_2 B_3. Usando la transformación "alejarse"

$$A(O, d): A_2 A_3 \longrightarrow B_2 B_3$$

Recapitulando todo el proceso

$$B_1 B_2 \xrightarrow{G(O\alpha)} A_2 \quad A_3 \qquad \xrightarrow{A(Od)} B_2 \quad B_3$$

el trozo B_1 B_2 "genera" al B_2 B_3 y éste al siguiente, etc .....

Hay que hacer notar que en esta transformación no hay una conservación estricta de la forma, tal y como la entendemos comúnmente: sí en el primer paso (giro) pero no en el segundo, ya que no es una homotecia ni un movimiento (giro, traslación, simetría).

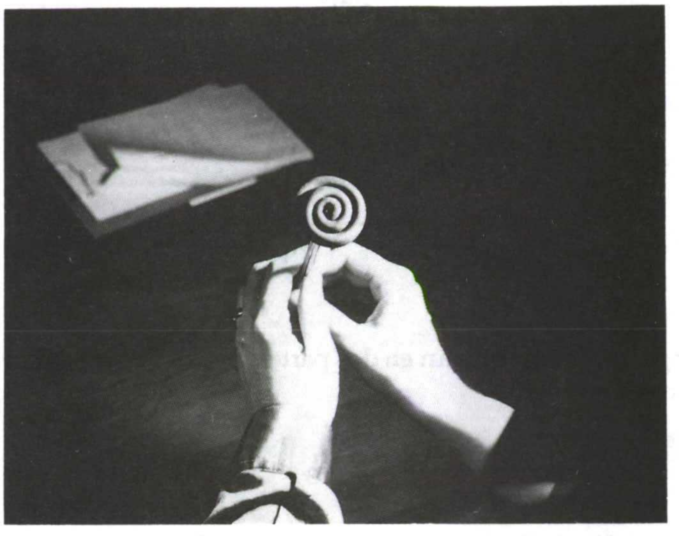
Pero sí aparece claramente que un arco cualquiera de espiral es un "movimiento mínimo" que genera toda ella mediante trasformaciones sucesivas.

Por último, la sensación de movimiento

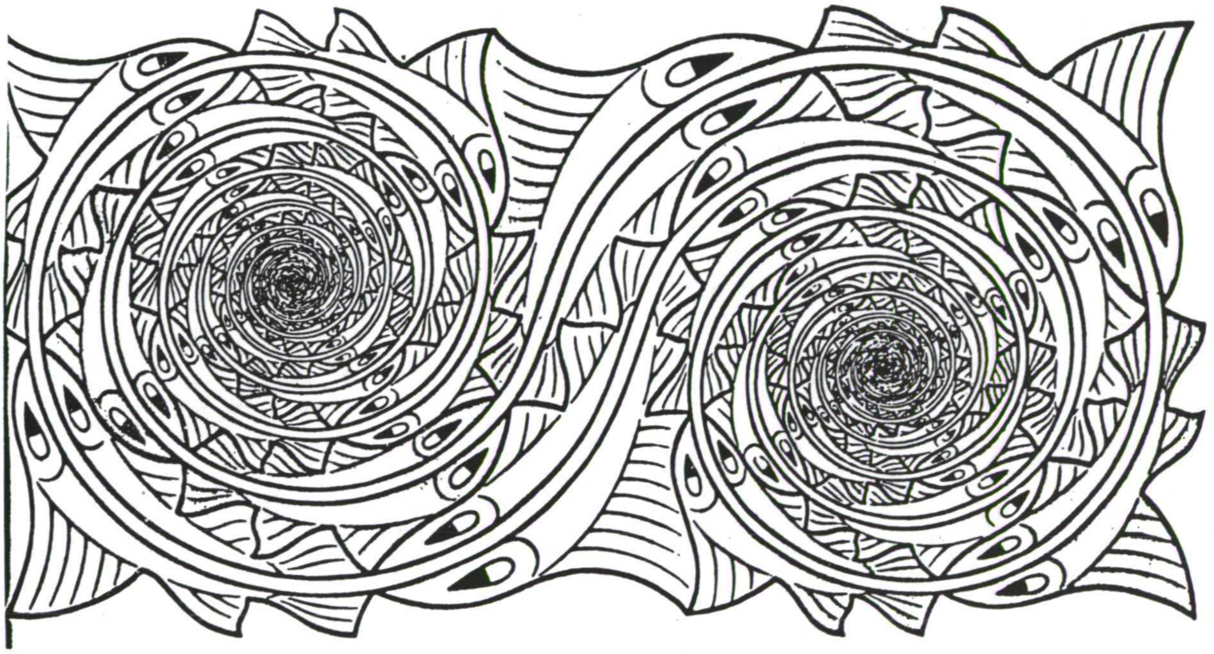
Haciendo girar rápidamente una espiral hecha con plastilina y pinchada en un bolígrafo, parece que ésta se transforma, ensanchándose si el giro se hace en sentido contrario al de la espiral, y encogiéndose si es en el mismo.

Para que el efecto sea más apreciable, la dirección de nuestra vista ha de ser perpendicular al plano de la espiral. Este fenómeno tiene su explicación en la propiedad de "girar y crecer" dentro de la misma forma o decrecer si se gira en sentido contrario.

¿Quién no se ha percatado de ello en los adornos móviles y en los juegos?.



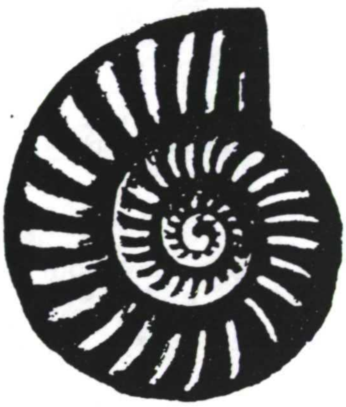
LA ESPIRAL EQUIANGULAR

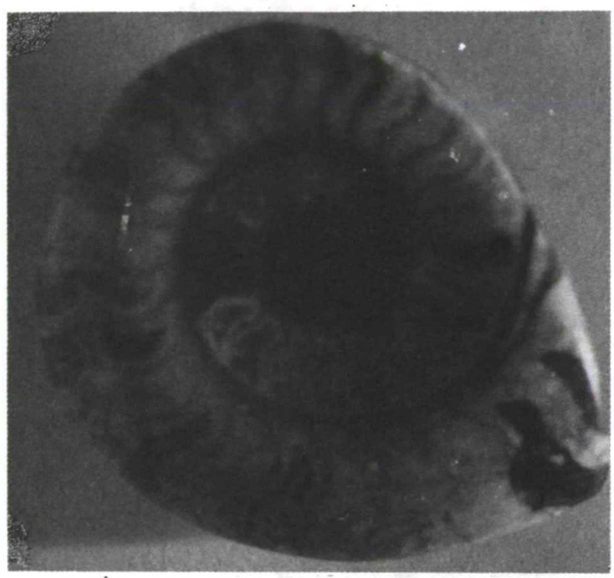


M. C. Escher

La espiral equiangular en la Naturaleza y el Arte

Es la forma típica de los caracoles planos, en que la espira se va ensanchando a la vez que da vueltas, y aparece también en los movimientos de turbulencia con velocidad de expansión creciente.

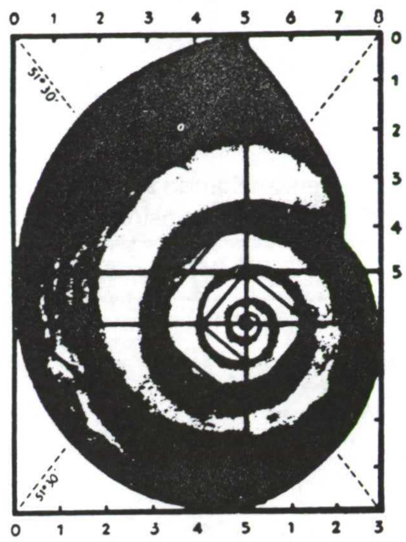




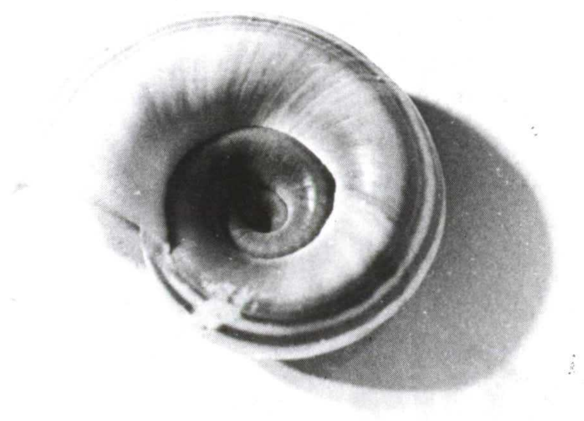
Amonites

La proyección plana de cualquier caracol (una foto tomada desde arriba) también adopta esa forma. Esto es útil para el trabajo en el aula, pues los caracoles planos (planispirales) son rarísimos.

Dos fotos del mismo caracol, tomadas desde posiciones distintas.



Un Nautilus preparado para entrar en clase.



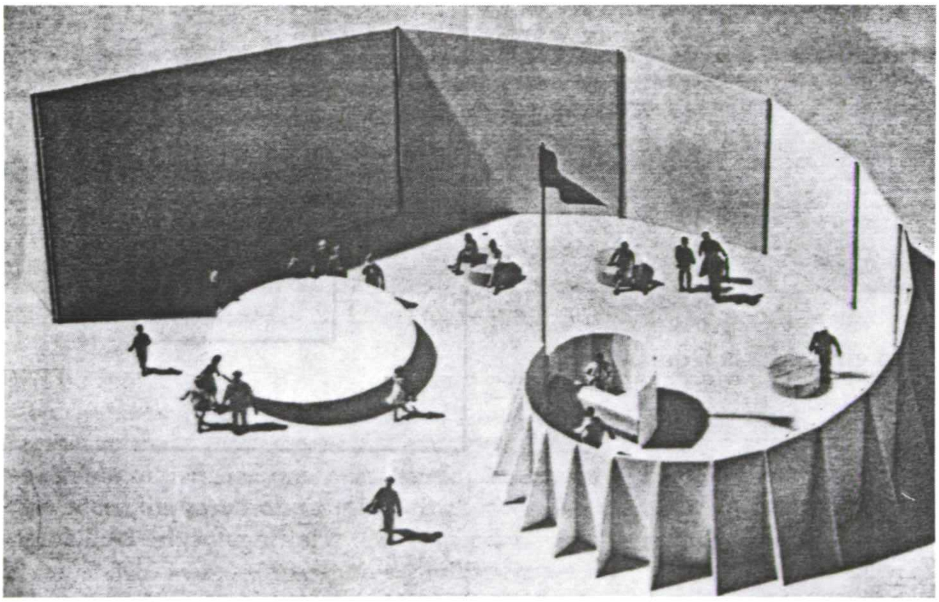
La espiral interna de este caracol es prácticamente plana.

Aunque con mucha menos frecuencia que las arquimedianas, encontramos espirales equiangulares en adornos y construcciones.

Detalle de una fachada francesa del siglo XV.

Testero de un violín.

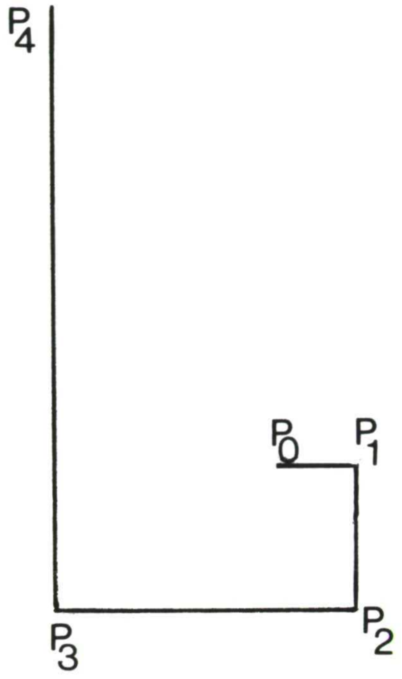
Cabeza de mujer de Leonardo da Vinci.



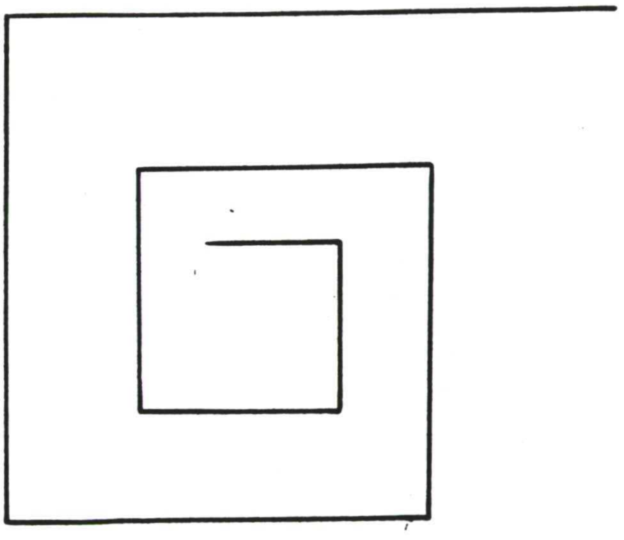
Construcción moderna en espiral.

Un extraño paseo

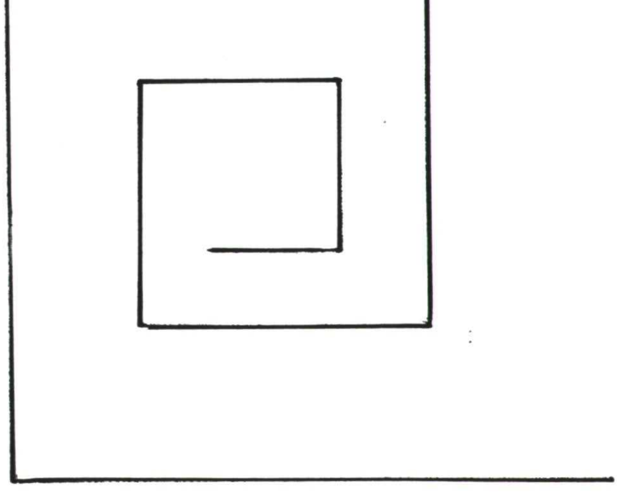
Las reglas de juego son éstas: salimos de un punto P_0, avanzamos un cierto número de pasos (uno, por ejemplo) y giramos sobre nosotros mismos 90° a la derecha. En esa dirección avanzamos el doble de pasos; volvemos a girar, avanzamos el doble de pasos que la vez anterior y así sucesivamente.



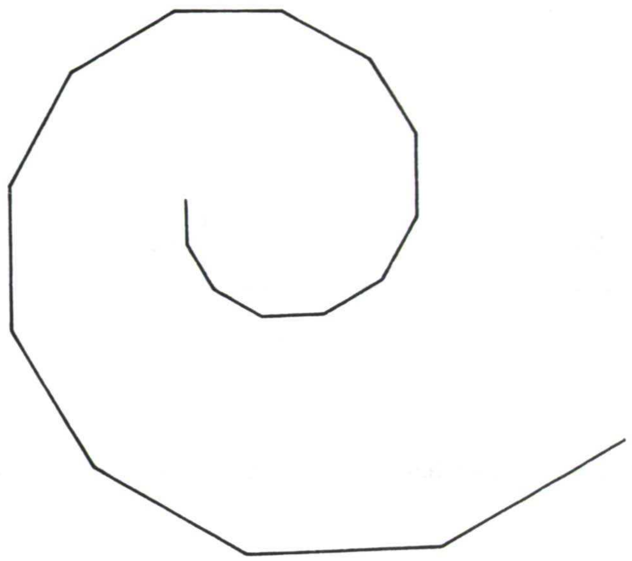
Las reglas pueden cambiarse: incrementando cada tramo un 20% sobre el anterior.



o girando a la izquierda

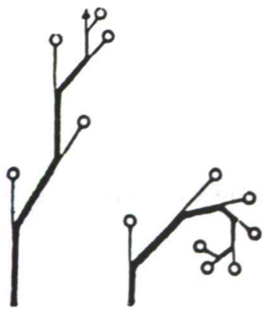


o variando al ángulo de giro.



La primera de las figuras dibujadas es una espiral equiangular poligonal de razón de crecimiento 2 y ángulo 90º. La última tiene como razón de crecimiento 1'1 (aumentamos un 10% en cada vuelta) y ángulo de giro -30º (el signo de los ángulos depende del convenio elegido).

Algunas plantas siguen en su desarrollo esta ley.

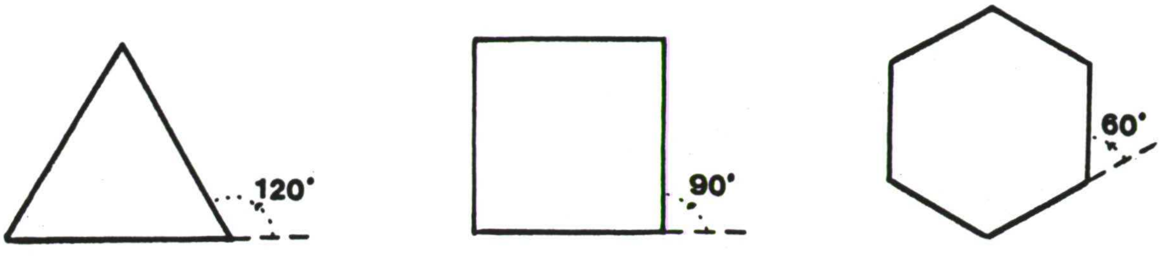


Como los tramos son cada vez más pequeños, su razón de crecimiento es menor que 1. En la Cincinia (derecha) vale 0'5 (disminuye un 50% cada vez) y el ángulo unos 40º.

El dibujo de estas espiras poligonales permite trabajar con muchos conceptos: giro alrededor de uno mismo, ángulo, tanto por ciento y tanto por uno, tasa de crecimiento, proporcionalidad entre segmentos y semejanza entre figuras, además de las destrezas técnicas auxiliares.

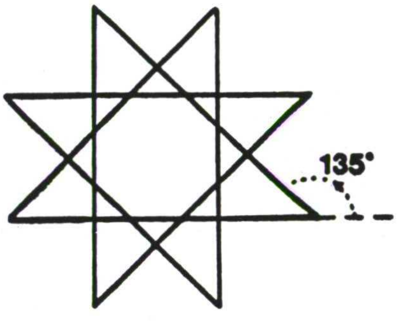
Los polígonos como caso particular.

Si decidimos mantener el avance constante (razón de crecimiento 1) se pueden describir polígonos regulares



Triángulo Cuadrado Hexágono

como en estos casos, o polígonos estrellados si el ángulo de giro no es divisor de 360º.

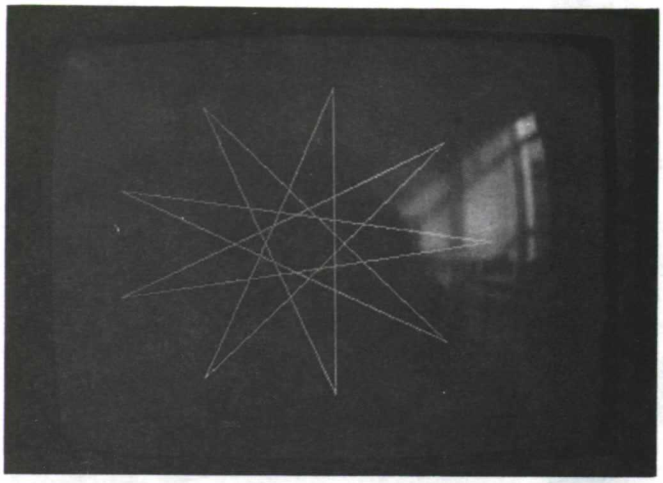


LOGO para espirales

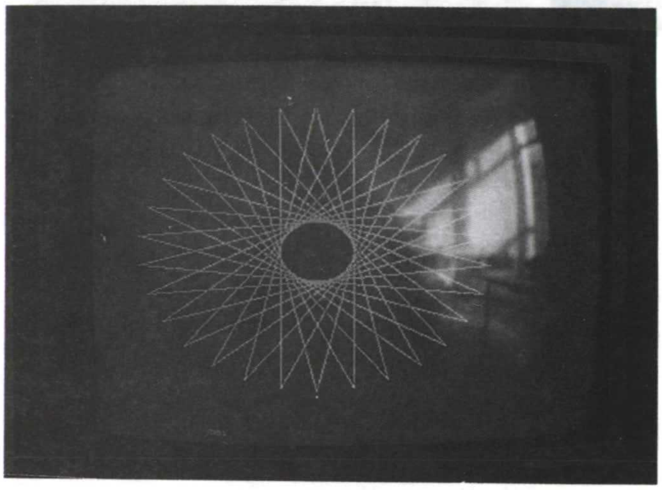
Una vez más aparece el lenguaje LOGO como el más apropiado para simular las estrategias de avanzar y girar.

El procedimiento ESTRELLA dibuja polígonos o estrellas según el valor que demos a la variable. ANGULO.

```
ES ESTRELLA :LADO :ANGULO
  ADELANTE :LADO
  IZQUIERDA :ANGULO
  ESTRELLA: LADO: ANGULO
FIN
```



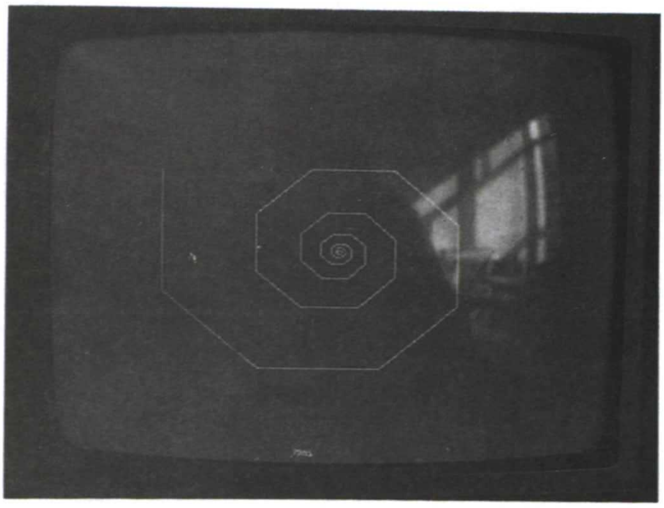
ESTRELLA 250, 160, de nueve puntas.



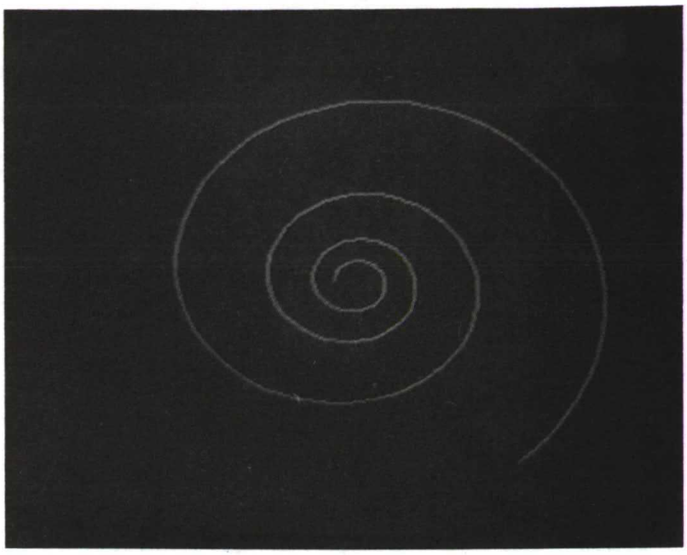
ESTRELLA 250, 156, de treinta puntas.

Para las formas abiertas, como las de los primeros dibujos, vale el siguiente programa

```
ES POLIESPIRAL. EQUIANGULAR :LADO :ANGULO :RAZON
  ADELANTE :LADO
  DERECHA :ANGULO
  POLIESPIRAL . EQUIANGULAR :LADO * :RAZON :ANGULO :RAZON
FIN
```



POLIESPIRAL EQUIANGULAR 1, 45, 1.1
El giro es de 45º, y la tasa de crecimiento de 1.1



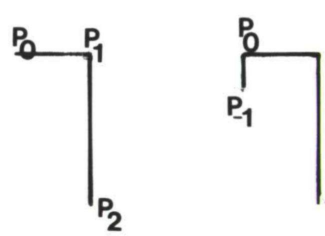
Esta, de giro 5º y tasa 1,01 parece ya una auténtica espiral.

En las fotos anteriores vemos cómo LOGO permite pasar de formas angulosas (poligonales) a formas curvas sin más que ir atomizando los giros y los desplazamientos, según vimos con detalle en el caso de la espiral de Arqímedes.

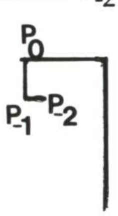
Volviendo hacia atrás: el polo

Retomemos el primero de los caminos poligonales dibujados. ¿Por qué suponer que el paseo ha empezado en el punto P_0?.

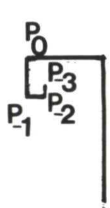
Podríamos haber salido, sin saltarnos las reglas, de un punto P_{-1} situado a una distancia de 1/2 paso de P_0 y en su vertical.



ó de otro P_{-2}



ó de otro P_{-3}



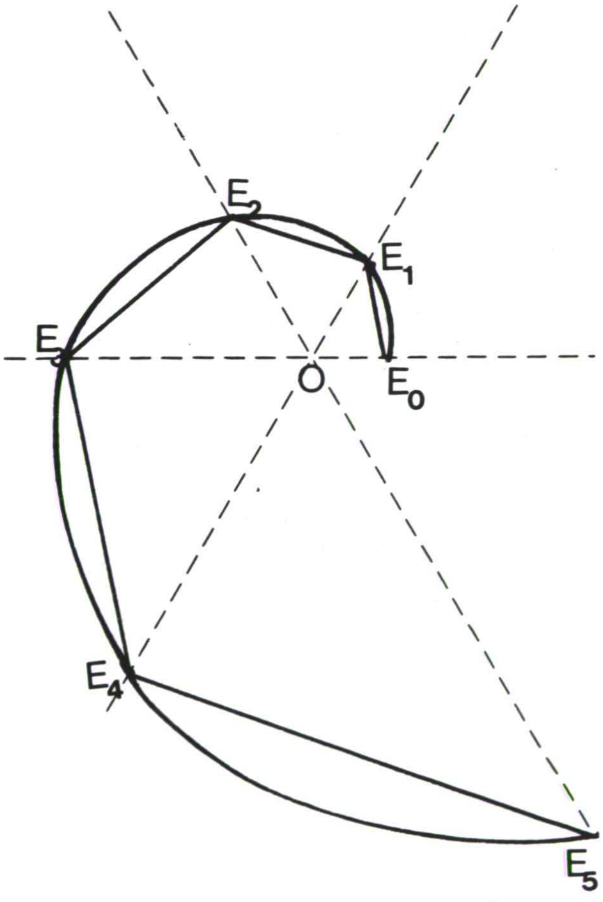
Así pues, la poligonal se enrolla "hacia adentro" acercándose cada vez más a un punto O que se llama polo de la espiral.

Las longitudes de los pasos son cada vez menores y, en teoría, el proceso se podría repetir indefinidamente.

En una misma figura nos encontramos con lo "infinitamente pequeño" y lo "infinitamente grande" (las vueltas que se expanden).

Creo que el primer concepto es mucho más difícil de intuir para el alumno que el segundo. Esta es una buena manera de iniciarlo al final del Ciclo Superior y Enseñanza Media.

Otro enfoque del dibujo: las coordenadas polares



Sobre esta plantilla en que se ha dividido un ángulo de 360º en 6 partes iguales, hemos ido tomando radios OE_0, OE_1, OE_2, ... de tal forma que cada uno mida un 50% más que el anterior. Así, si OE_0 es la unidad

$OE_1 = 1'5 = 3/2$

$OE_2 = 1'5 \times 1'5 = (3/2)^2$

$OE_3 = (3/2)^3$

Los triángulos $OE_0\,E_1$ y $OE_1\ E_2$ son semejantes entre sí, por tener un ángulo igual (60º) y dos de sus lados proporcionales ($OE_0 / OE_1 = OE_1 / OE_2$).

Por tanto los terceros lados, $E_0\,E_1$ y $E_1\,E_2$ están también en razón 1'5, y los ángulos girados en E_0 y en E_1 son iguales.

La figura es pues una espiral equiangular poligonal.

Cada vertice viene caracterizado por dos números: sus coordenadas polares (1, 0º); (3/2, 60º); ($(3/2)^2$, 120º); ($(3/2)^3$, 180º) o, si tomamos como unidad de ángulos el de 60º, (1,0); (3/2, 1); ($(3/2)^2$,2); ($(3/2)^3$, 3)....

La ecuación de una espiral

Mientras los ángulos aumentan en progresión aritmética (0, 1, 2, 3, ...), los radios lo hacen en progresión geométrica (1, 3/2, $(3/2)^2$, $(3/2)^3$,...). Para cualquier vértice de nuestra espiral la relación entre ambos viene dada por

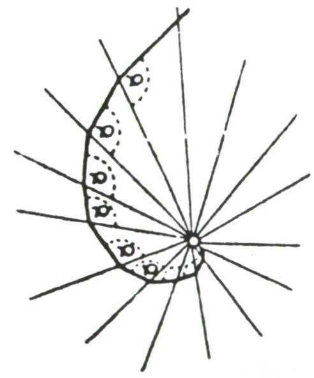
$E_n = (r,\quad) = ((3/2)^n, n)$

$r = (3/2)^{\alpha}$

NOTA: frecuentemente, la espiral equiangular recibe el nombre de "logrítmica", ya que la relación radio $\longrightarrow$ ángulo es una función logaritmo.

La trayectoria de una mosca

Cuando un insecto se acerca atraído por un punto luminoso, lo hace orientándose en cada momento por la dirección de los rayos que recibe, girando respecto de ellos un ángulo constante.



Su trayectoria es una auténtica espiral equiangular.

El paso a la forma curva: giros más pequeños

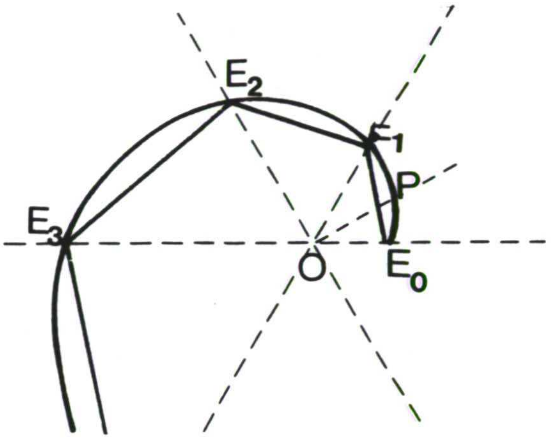
¿Cómo podemos suavizar la espiral poligonal mediante una línea curva cuyos puntos conserven las mismas reglas del juego?.

En un epígrafe anterior se abordó este problema mediante el uso de LOGO, accesible en la última etapa de EGB.

Esta actividad persigue lo mismo desde una óptica más algebraica. Es una manera más de familiarizar a los alumnos de Enseñanza Media con la idea y notación de exponentes fraccionarios, o alternativamente, con el problema de interpolar términos en una progresión geométrica.

Busquemos el punto P de nuestra espiral correspondiente a 30º. En la unidad elegida (60º) este ángulo se expresa con 1/2

P (r, 1/2)



Antes, tres radios consecutivos cumplían: $OE_2/OE_1 = OE_1/OE_0$

Obliguemos a que con los tres radios OE_1 OP y OE_0 pase lo mismo:

$$3/2/r = r/1 \qquad r^2 = 3/2 \qquad r = \sqrt{3/2}$$

y volviendo a sus coordenadas:

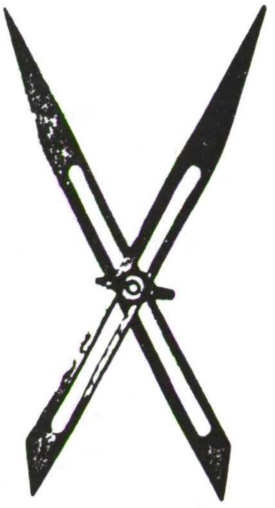
$$r = (3/2)^{1/2}$$

El dibujo de espirales equiangulares

En esta ocasión no es sencillo obtener espirales curvas mediante movimientos físicos continuos. Necesitamos, además de un giro uniforme, un desplazamiento horizontal cuya velocidad creciera exponencialmente.

Se pueden hacer dibujos por puntos, con la única precaución de tomar la razón de crecimiento no mucho mayor que uno, pues los radios se "disparan" exponecialmente. Si, por ejemplo, decidimos aumentar el 10% cada 10º, al cabo de una vuelta completa el radio sería $r = 1'1^{36} \simeq 31$, que ya se sal del papel.

Un instrumento adecuado para el dibujo de los puntos y que evita todo cálculo, es el llamado "compás reductor", pantógrafo manejable con forma de compás.



Compás reductor fabricado en los talleres de metal de I.F.P. "Virgen de la Paloma" de Madrid.

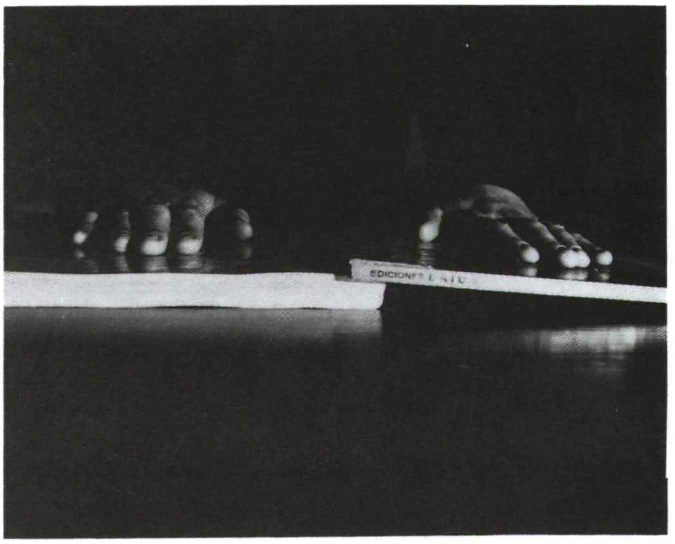
El tornillo central se fija de acuerdo con la razón de crecimiento elegida, de modo que mientras las puntas de un extremo marcan una longitud, las otras determinan su proporcional.

Un único inconveniente es su alto precio en el mercado, pero puede fabricarse, como el de la foto, en aquellos Centros que dispongan de talleres de metal. Su diseño, construcción y uso constituyen una actividad muy interesante para los alumnos.

Un modelo en plastilina

Más asequible es hacer un modelo en plastilina: basta con fabricar un cono y enrollarlo

También es conveniente, de la misma forma que lo hacíamos en la espiral de Arquímedes, ir dibujando el contorno en un papel, mientras se está enrollando el cono.



Para hacer un cono aceptable se pueden utilizar el siguiente artilugio: una superficie plana y rígida (madera) que apoya sus dos estremos en dos alturas distintas (la mesa y un libro, por ejemplo). Se coloca un rollo de plastilina debajo y se somete la madera a un suave movimiento de vaivén presionado a la vez. .

Una experiencia en el aula

A continuación, se transcribe el trabajo de dos alumnas de edades comprendidas entre 15 y 16 años, consideradas entre el 50% de las mejores de su clase, presentado en el libro "de 12 a 16 años: un proyecto de curriculum de Matemáticas", del Grupo Cero de Valencia; precedido de un comentario de los autores.

"Una vez construida la espiral de Durero, el profesor llevó a clase una mitad de una concha de Nautilus y expuso su opinión de que, comparada con aquélla, esta espiral es mucho más "regular" y estéticamente más armoniosa y bella. La espiral de Durero, a pesar de estar compuesta exclusivamente con arcos de circunferencia es una curva "a trozos", mientras que la espiral de Nautilus llama la atención por ser "siempre igual a si misma". El profesor preguntó si alguien quería hacer un trabajo sobre esta espiral. Para este trabajo solamente proporcionaría una ayuda como punto de partida: hay ángulos que son iguales (o casi iguales, habida cuenta de que la concha no es más que una aproximación de la espiral ideal o matemática).

Una alumna quiso hacer el trabajo. Se llevó la concha a su casa y trajo el primero de los dos estudios que siguen (empleó en ello poco más de tres horas).

Dias más tarde, otras dos compañeras se llevaron también la concha para hacer el trabajo conjuntamente (desconociendo por completo lo que la anterior había hecho). Presentaron tras cerca de 10 horas de dedicación el segundo de los estudios que incluimos.

Sobra todo comentario acerca del extraordinario interés de ambos trabajos (incluso los obvios errores contenidos en el segundo son esclarecedores). Dos maneras completamente diversas y perfectamente acertadas de exponer el concepto y la construcción de espirales logarítmicas".

A continuación, el trabajo que aquí se califica de "segundo":

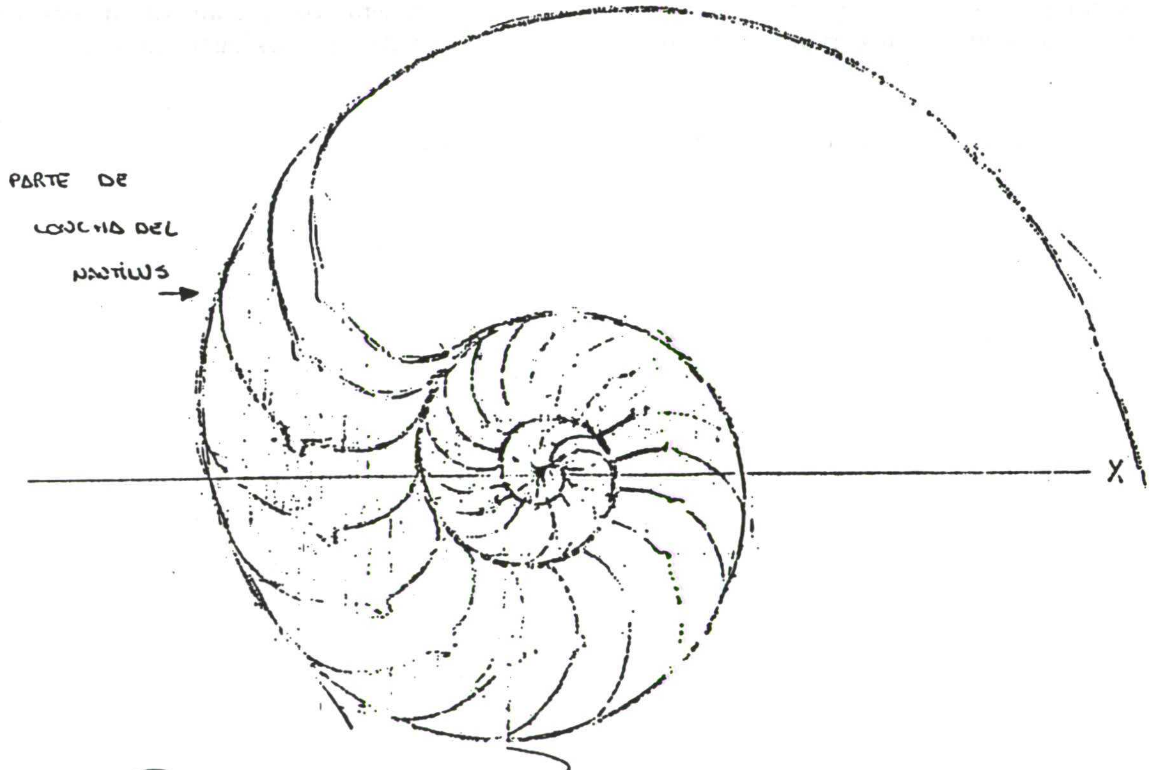
Mª Carmen
Rosario

LA ESPIRAL

1º que todo hemos observado esta bella curva, y hemos tratado de encontrar propiedades que tuviera.

Parece ser (hemos llegado ha esta conclusión) de que la Espiral, surge a partir de un punto O, que parece ser que da vueltas y además sobre una recta de referencia que hemos cogido = x.

Aquí presentamos la plantilla de la Concha de Nautilus, sobre la que hemos trabajado:



2º Hemos empezado la estudiarla, a hacer pruebas, a tratar de encontrar los ángulos que nos habían dicho que habían en la espiral.

Después de muchos muchos ~~prácticas~~ hemos encontrado unos ángulos centrales.

A partir del centro O, hemos empezado a construir ángulos, por ejemplo de 20 cada uno.

Nos han salido 18 ángulos, → centrales que están formados por $AOB = 20$; $AOC = 40$; $AOD = 60$, . . .

Es decir, que estos ángulos centrales están en progresión aritmética; a razón de 20, ya que $AOB = BOC = COD . . . = 20$.

Según la progresión aritmética de diferencia $d = 20$: aquí incremento.

• $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Para hallar el ángulo que ocupa el lugar 5:

$a_5 = 20 + (4) \cdot 20 = 100$

Al dar el punto O vueltas, para formar la espiral, necesitamos de radios, que al moverse, dar vueltas, y formar los ángulos dará una curva. .

Así que hemos buscado radios. . .

Por ejemplo. , y teniendo como ángulos centrales un incremento de 20, vamos a iniciar el radio 1º, tomando OA, como 1 cm.

Y hemos observado que los radios aumentan a razón r, por ejemplo $r = 0'2$.

Pero ese aumento no lo hace como la progresión aritmética de los ángulos, sino:

$OA = 1 cm$. $OB = 1'2 cm$ . . .

Parecer, que los radios están en esta progresión:

$r = 0'2$ $OA = 1 cm$

$OB = 1 + 0'2$

$OC = 1 + 0'2 \cdot 0'2 = 1 + 0'2^2$

$OD = 1 + 0'2^3$

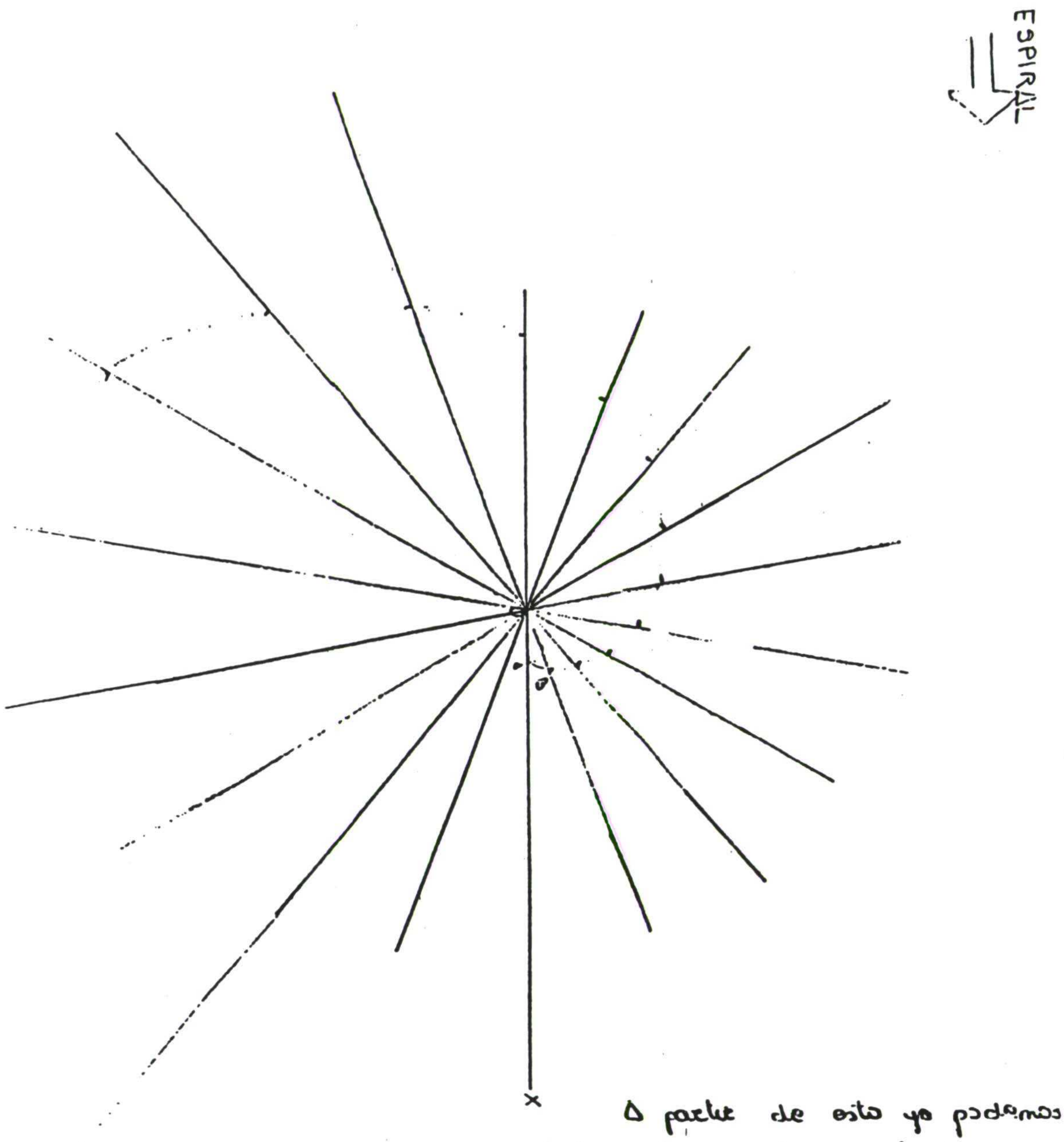
$OE = 1'2^4$

$OF = 1'2^5$ . . . O sea que cada radio aumenta aumenta en 0'2 lo que era el radio anterior.

Según esto, el radio que pertenece al ángulo $\int$, sea $1 + 0'2^{\int}$.

Si $\int = 40 = 2_{ángulo}$ radio $= 1 + 0'2^2 = 1'2^2 = 1'44$.

3 Construimos una espiral, del tipo de la concha del Nautilus teniendo los datos de la explicación, nos da los puntos que uniendolos da la espiral.



A partir de esto ya podemos construir más espirales sabiendo que los angulos centrales estan en progresión aritmetica y los radios de estos en geometrica.

RADIOS	
1	5'1
1'2	6'1
1'4	7'4
1'7	9
2'07	10'7
2'5	12'8
3	15'4
3'6	[illegible]
4'2	[illegible]

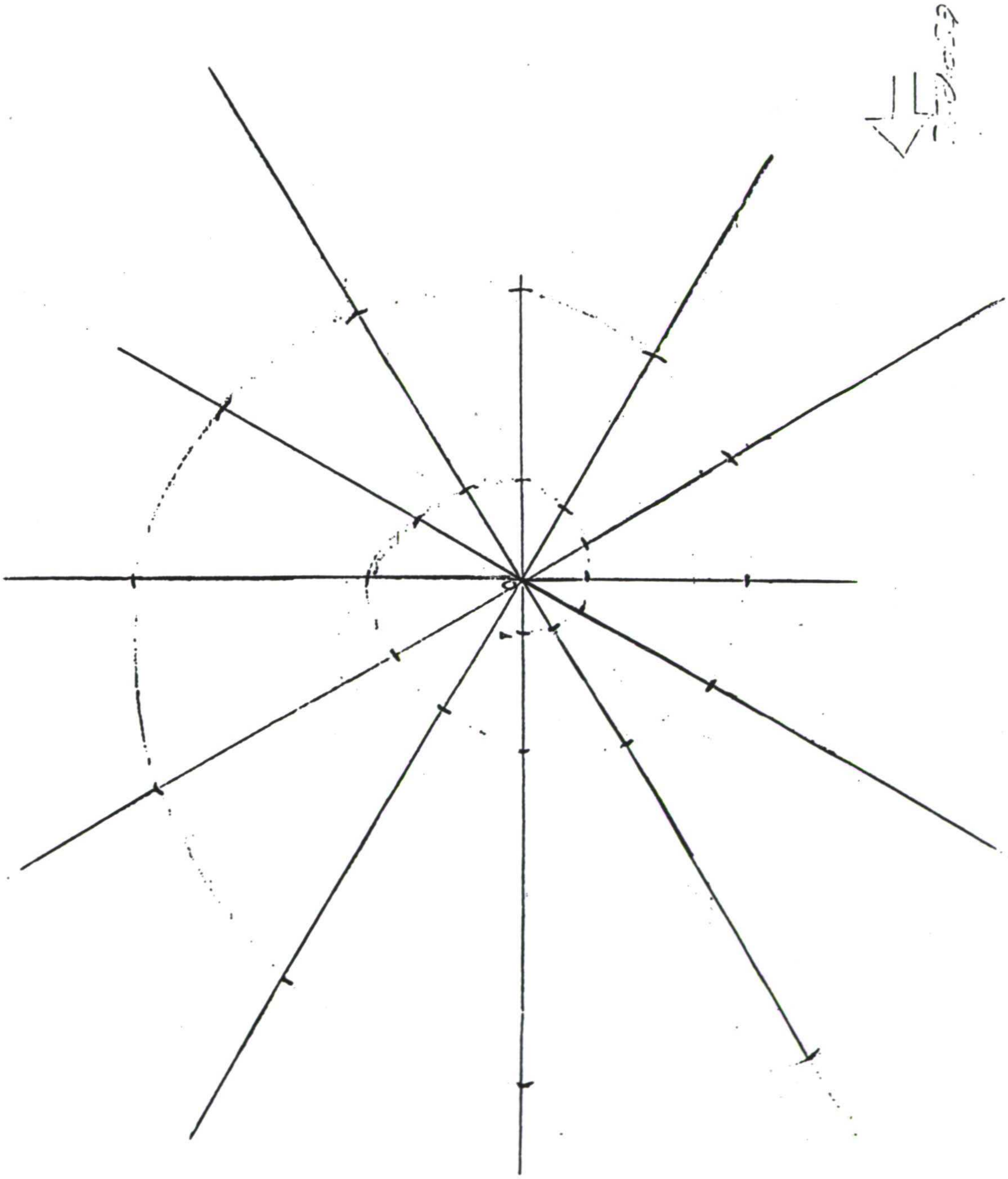
4ª OTRA PRÁCTICA.

Vamos a construir otra espiral, pero variando los datos:

OA = 1 cm.

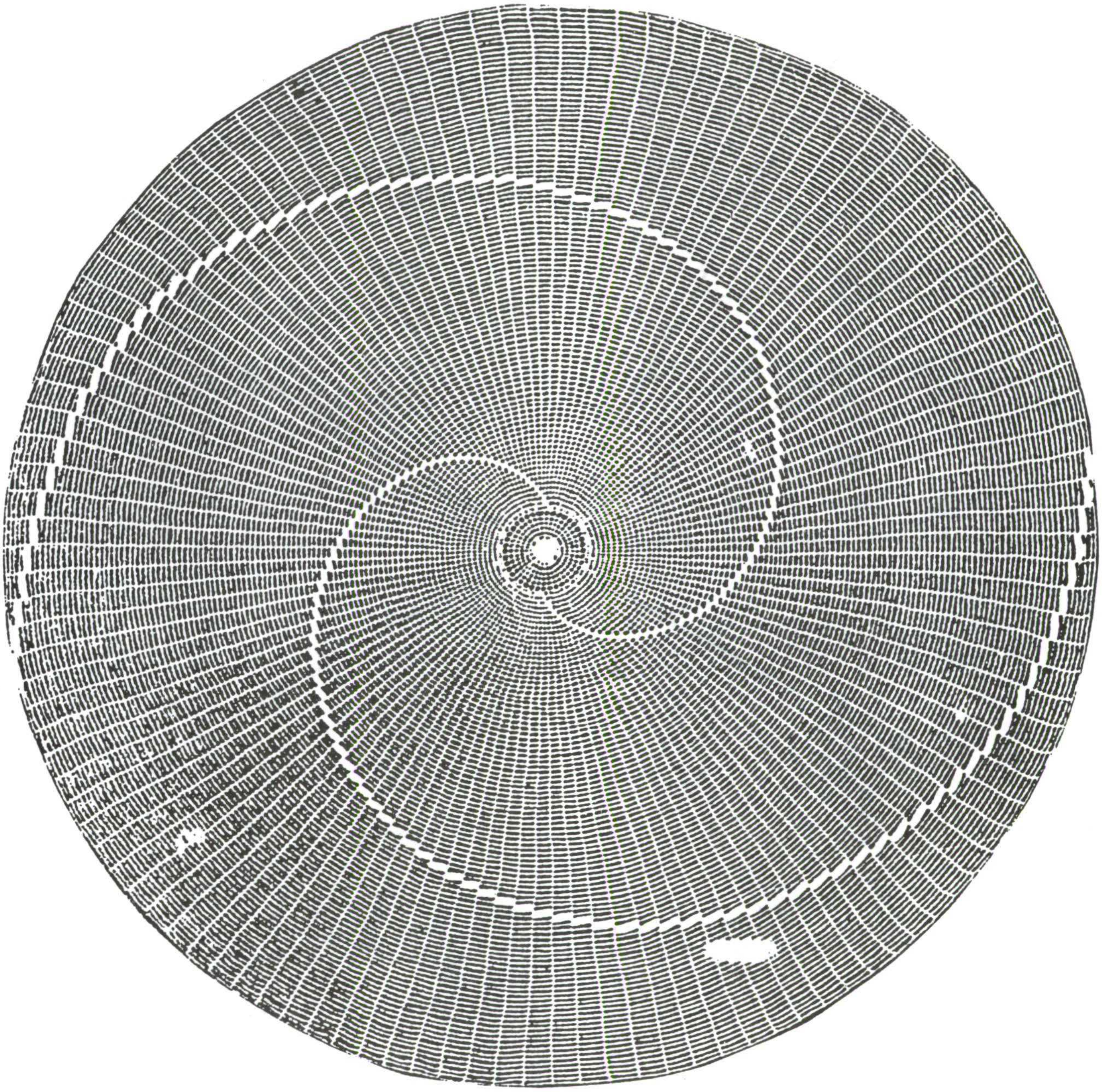
Ángulos centrales = AOB = 30, AOC = 60, AOD = 90 ... incremento +30

Radios =, cada uno aumenta en 0'1 el anterior $\Rightarrow$ $(1+0'1)^{\text{ángulo}}$



Transcribimos por último un comentario del Grupo Cero:

"Una continuación que sería chocante para Mª. José y que no lo sería en absoluto para Mª. Carmen y Rosario es esta otra espiral formada con dos sucesiones aritméticas y que es una fotografía de un trabajo de encaje".



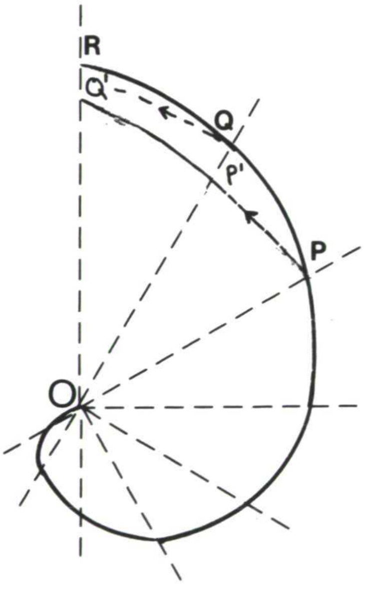
La espiral reproduce su forma creciendo

Muchos autores se refieren a las espirales equiangulares denominándolas "curvas del crecimiento armonioso". Cuando un caracol crece, no sólo respeta la parte de concha anterior, que permanece invariable: el trozo nuevo que segrega es una repetición, ampliada, de la anterior. Y en este caso la repetición es una semejanza: tiene la misma forma en el sentido matemático de la palabra.

Recordemos que no ocurría así en la espiral de Arquímedes.

En este dibujo, QR representa el trozo nuevo, correspondiente a un ángulo α, PQ y el anterior. Recordamos

$$OR / OQ = OQ / OP = r$$



Si giramos el arco $\widehat{PQ}$ un ángulo α, ocupa la posición $\widehat{P'Q'}$. Pues bien, $\widehat{P'Q'}$ y $\widehat{QR}$ son homotéticos respecto del origen.

$$\widehat{PQ} \xrightarrow{G(O;\alpha)} \widehat{P'Q'} \xrightarrow{H(O,K)} \widehat{QR}$$

Dicho de otro modo, $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ son semejantes, tienen la misma forma.

Apuntes finales.

El tema no se acaba aquí. Puede profundizarse y prolongarse con otras cuestiones: espiral de Durero, proporción áurea, números de Fibonacci.

El profesor interesado los encontrará tratados en la Bibliografía que se recoge al final de este trabajo y apuntados en la introducción.

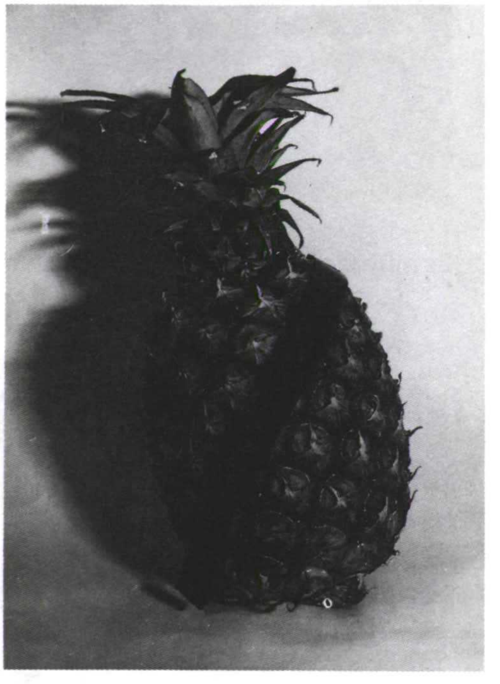
LA HÉLICE

Faro de Favaritx entrando la niebla.
Acrílico de Eduardo Sanz.

La hélice en la Naturaleza y el Arte

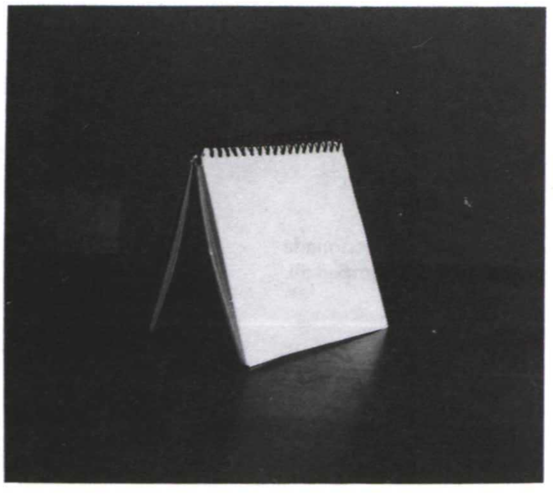
Es una forma muy abundante en la Naturaleza, unas veces visible con facilidad y, otras, por ser su tamaño muy grande o muy pequeño, resulta inaccesible por medios ordinarios.

En muchas algas, la clorofila se dispone en forma de doble hélice.



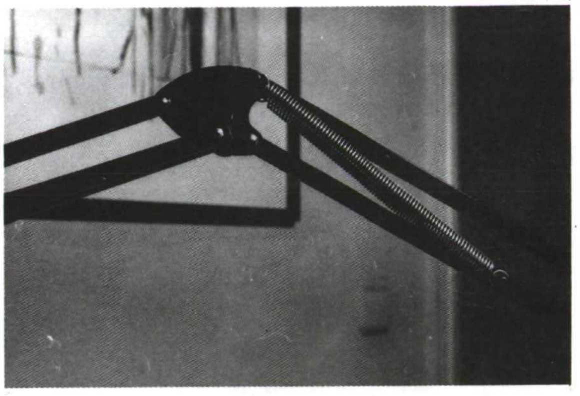
Las brácteas de una piña suben en hélice.

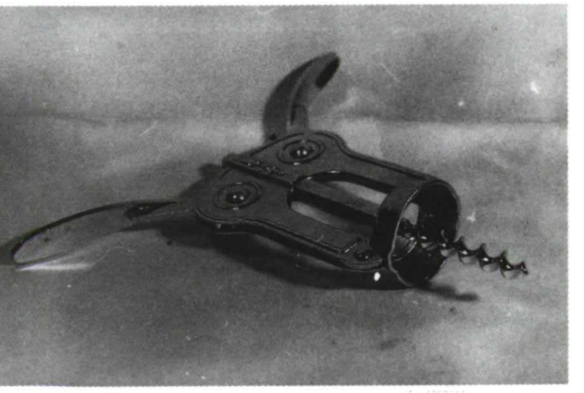
Por sus propiedades y sencillez de fabricación, aparece con mucha frecuencia en objetos hechos por el hombre.



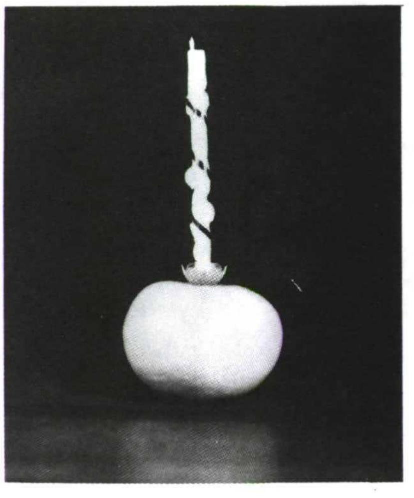
Los cuadernos "de espiral" son en realidad "de hélice".

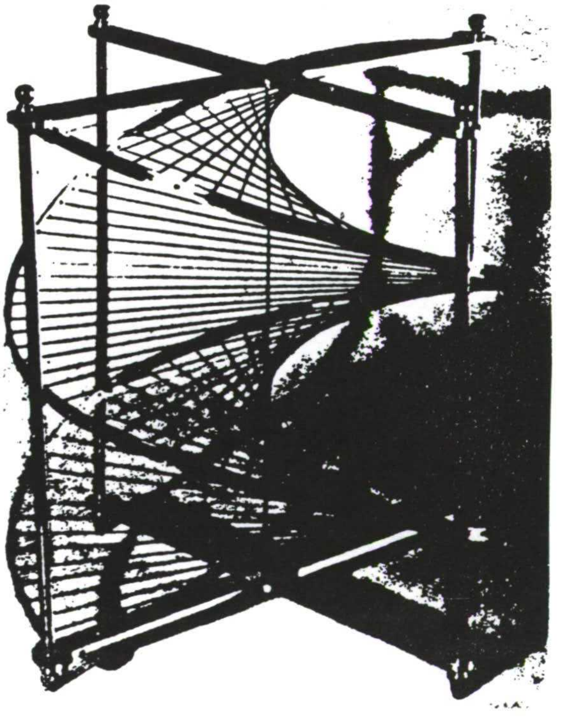
Muelles y sacacorchos utilizan las propiedades de la hélice.





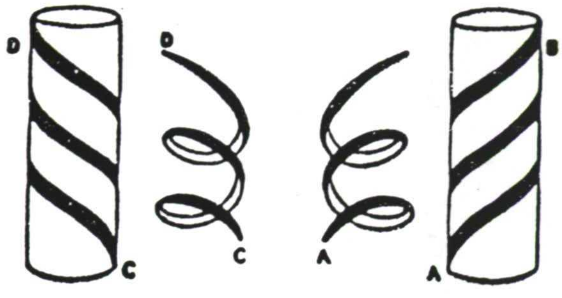
Es muy fácil de hacer y figura en muchos objetos de adorno, como en esta vela de cumpleaños.

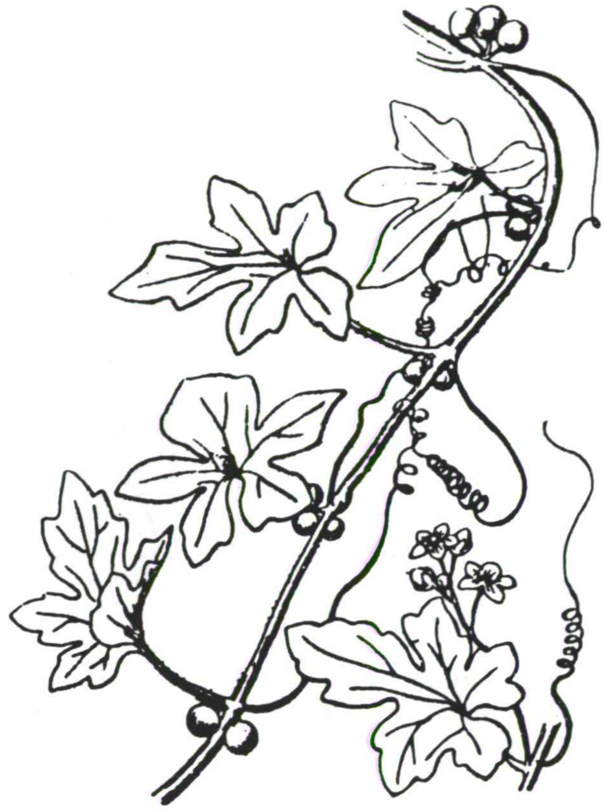




"Doble hélice reglada" confeccionada por el matemático Luigi Campedelli.

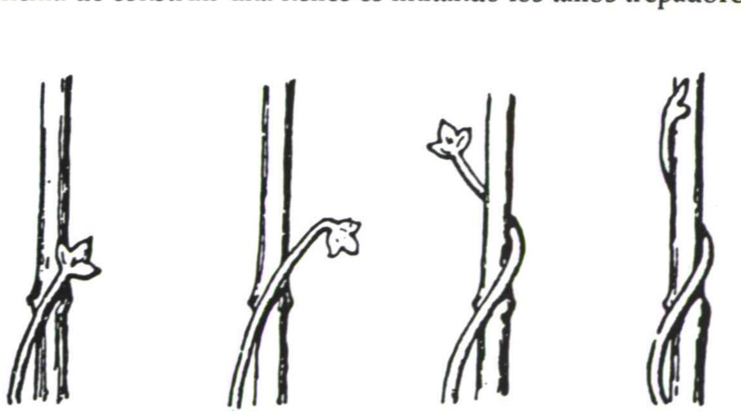
Los cuernos de muchos animales se enrollan en hélices de distinto sentido de giro. El mismo ejemplo lo podemos encontrar en los zarcillos de las plantas.



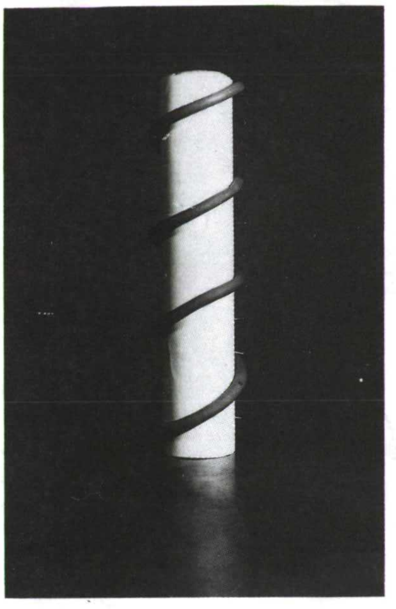


Girar y subir

Una forma sencilla de construir una hélice es imitando los tallos trepadores.



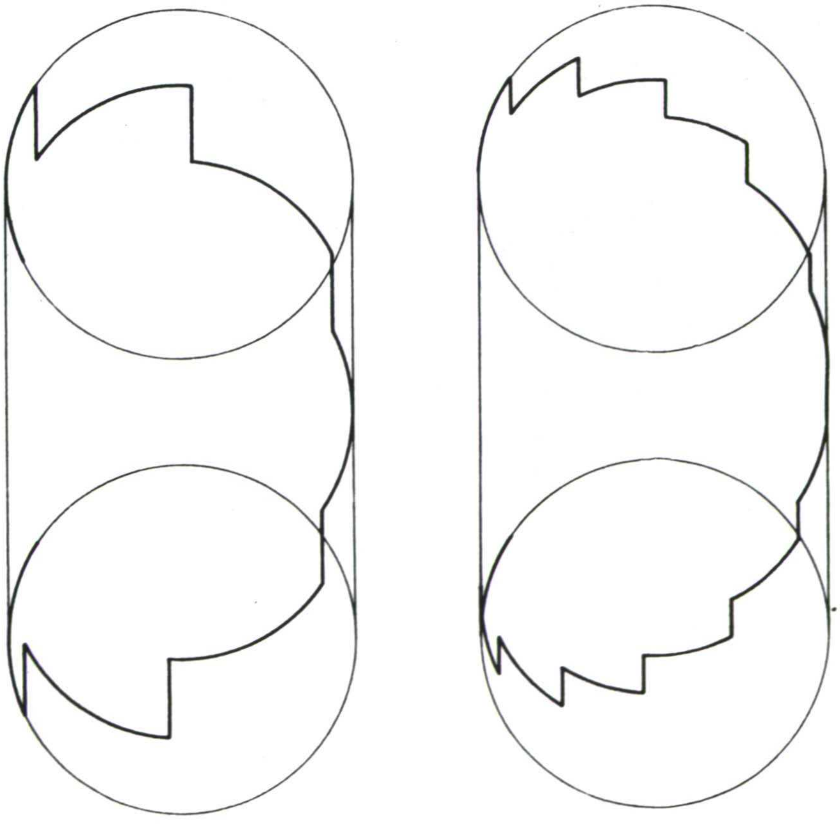
Alrededor de un cilindro duro (nos sirve el de un rollo de papel higiénico o de cocina) enroscamos y subimos a la vez un cordel o rollo de plastilina. Para sujetarlo, podemos clavar en el cilindro filas de alfileres o palillos, en generatrices opuestas; para que la hélice quede "perfecta", la altura o subida, después de una vuelta completa, ha de ser siempre la misma.



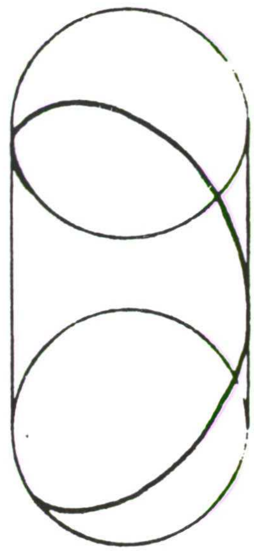
Si seguimos con el dedo, o con la imaginación, la trayectoria de un punto que recorre la hélice, nos encontramos realizando dos movimientos simultáneos: un giro alrededor del eje del cilindro y una translación o subida paralela a dicho eje.

La escalera de caracol

Cuando subimos una escalera de caracol describimos una trayectoria muy similar a la de la hélice, aunque distinguimos claramente los dos movimientos: subimos un escalón y giramos un poquito, subimos y giramos, subimos y giramos. La barandilla, que suaviza los saltos del escalón, sí que es una hélice perfecta.



Estas dos escaleras llevan al mismo sitio. En la primera los giros son más amplios y los escalones más altos.



La barandilla de la escalera es una hélice.

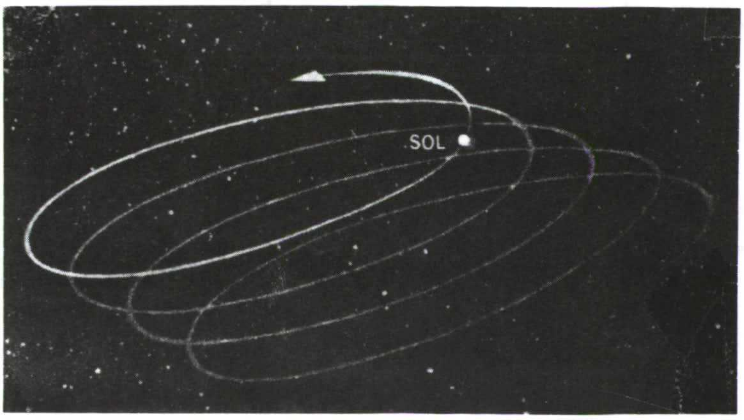
Esta estructura nos permite desplazarnos de un punto a otro, situado justamente encima, realizando siempre los mismos movimientos.

Se puede dibujar el perfil de una escalera de caracol sobre un cilindro de cartón, repitiendo los movimientos antedichos.

El resultado, si no se cuida mucho el diseño de la experiencia, es muy poco alentador desde el punto de vista estético.

Dos movimientos en el espacio

La hélicie puede considerarse generada por un punto que gira alrededor de un eje y a la vez se desplazan paralelamente al mismo: salimos del plano para entrar en el espaccio de tres dimensiones.



El Sol describe una órbita cada 200 millones de años. A su vez, la Vía Láctea se desplaza por el Universo. El resultado es la trayectoria en hélice.

Muchas veces se soslaya el estudio intuitivo del espacio y los movimientos dentro del mismo, cuando debiera ser precisamente nuestro sitio natural de trabajo, ya que en él nos desenvolvemos. Actualmente se tiende a que los alumnos traten simultáneamente el plano y el espacio, como medios para desarrollar la intuición espacial y geométrica.

Para ello disponemos a nuestro alcance de modelos sencillos: espejos para las simetrías, la puerta que gira alrededor de un eje, el desplazamiento de una banda de pájaros, los movimientos de la Tierra, los tiovivos de la feria, que giran cambiando cada vez el plano de giro, nuestro propio cuerpo con sus simetrías, y tantos otros.

Giro y traslación simultáneos

En epígrafes anteriores se ha desintegrado el movimiento generador de la hélice en sus dos componentes.

Podemos diseñar una experiencia que visualice la idea de giro y traslación simultáneos: se coloca un cilindro de cartón hueco y bien centrado, sujeto sobre un plato giratorio (tocadiscos por ejemplo) pudiéndonos ayudar con el accesorio que llevan muchos de ellos y que permite colocar varios discos de agujero central grande. Fijamos una regla a lo largo de una de las generatrices del cilindro y, mientras gira el plato, desplazamos sobre el cilindro un lápiz apoyándose en la regla.

Este procedimiento recuerda mucho a uno de los utilizados para construir la espiral de Arquímedes. No debe extrañarnos, ya que ambas curvas se generan mediante un giro y un desplazamiento uniformes.

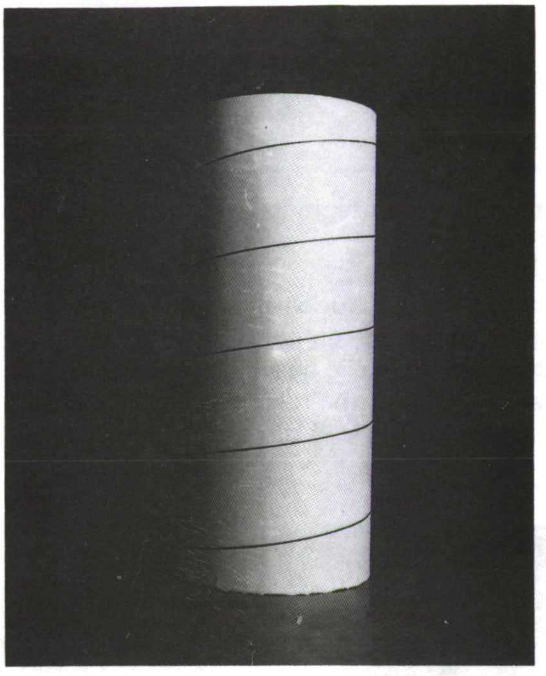
En la práctica es mucho más difícil de realizar si no se consigue que el cilindro gire solidariamente con el plato y no se desvíe al dibujar sobre él.

Otro apoyo muy accesible a esta idea de movimiento nos la proporciona el funcionamiento de un tornillo: avanza en dirección a su eje mientras gira alrededor del mismo.

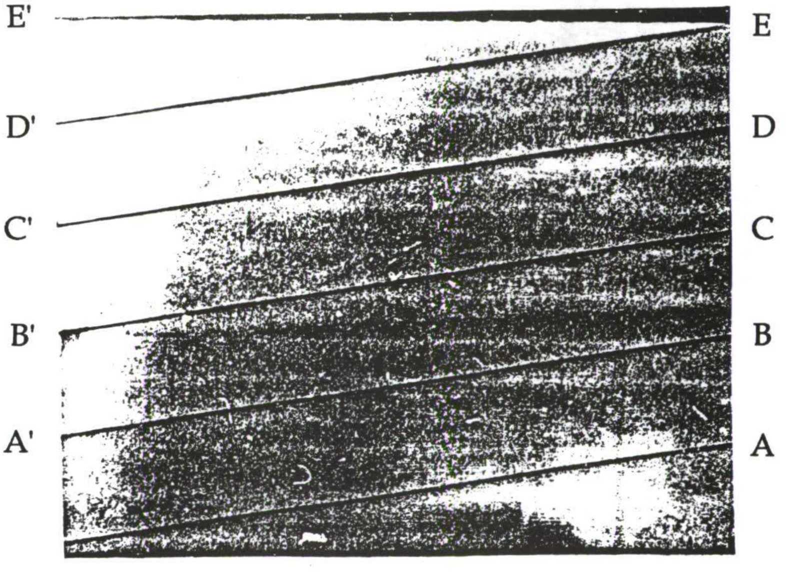
La plantilla de una hélice

Hemos utilizado ya el cilindro como superficie apropiada para dibujar la hélice, puesto que todos sus puntos están a la misma distancia del eje.

¿En qué se transforman las espiras de esta hélice si desarrollamos el cilindro sobre un plano?.



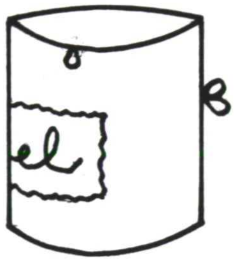
Cortemos por una generatriz cualquiera y extendamos el papel: las espiras se han convertido en un haz de líneas paralelas.

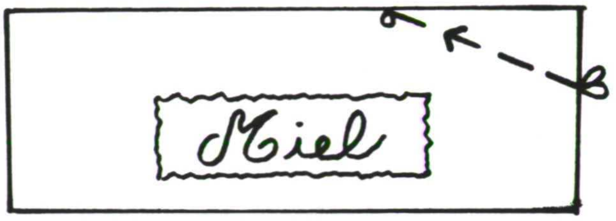


Así pues, es muy fácil, hacer la plantilla plana de una hélice sobre cartulina o papel, sin más que tener en cuenta que los puntos A y A', B y B', etc. han de estar a la misma altura para que casen al hacer el cilindro. Además trabajar con plantillas para fabricar cuerpos tridimensionales constituye una excelente interrelación plano-espacio.

El problema de la mosca

Sobre la superficie de un tarro se ha posado una mosca. Y en el borde del tarro hay una estupenda gota de miel. La mosca se dirige ávida hacia ella por el camino más corto. ¿Como será la trayectoria?. Permítasenos deshacer, por un momento, el tarro justo por la generatriz donde está la mosca.

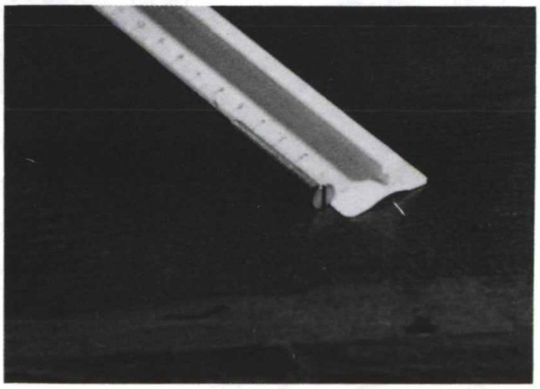




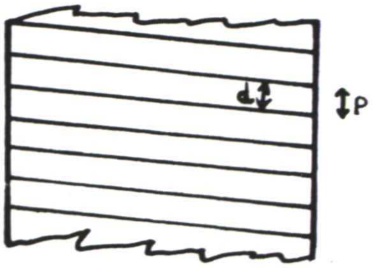
El camino más corto es, desde luego, el marcado en el dibujo. Pues bien, recomponiendo el tarro a su forma inicial, la trayectoria de la mosca se transforma en un arco de hélice, que es el movimiento que nosotros observamos realmente.

El paso del tornillo

La parte helicoidal de este tornillo mide 4 cm y contadas con mucha paciencia nos aparecen 41 espiras. Quedan pues 40 huecos entre ellas, de longitud 0'1 cm por lo que el "paso" del tornillo es de 1 mm.



Imaginando el tornillo de cartulina o papel, un trozo de su plantilla sería:

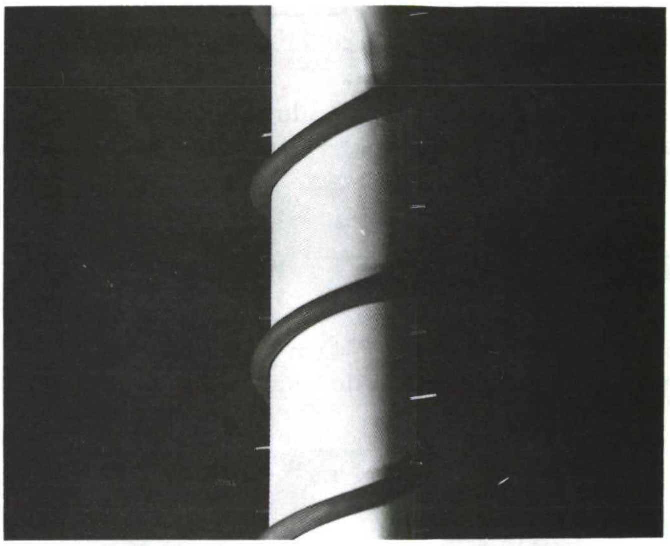


El paso no se corresponde a lo que entendemos como distancia entre dos rectas paralelas (la más corta, que sería d), sino a la distancia medida sobre una generatriz.

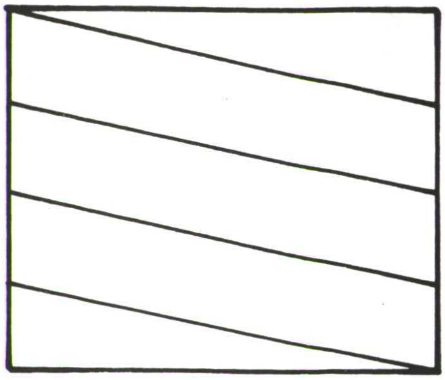
En el modelo de "subir y girar", el paso es el avance longitudinal por cada giro completo: lo que penetra el tornillo por cada vuelta del destornillador.

¿Cuánta plastilina necesitamos?

El soporte es un tubo de cartón de lo que hay en el fondo de los rollos de papel-cocina: 24 cm de alto x 4'5 cm de radio. Se han colocado dos filas de alfileres en generatrices opuestas, distanciados 2 cm y con un desfase, entre las dos generatrices, de 1 cm.



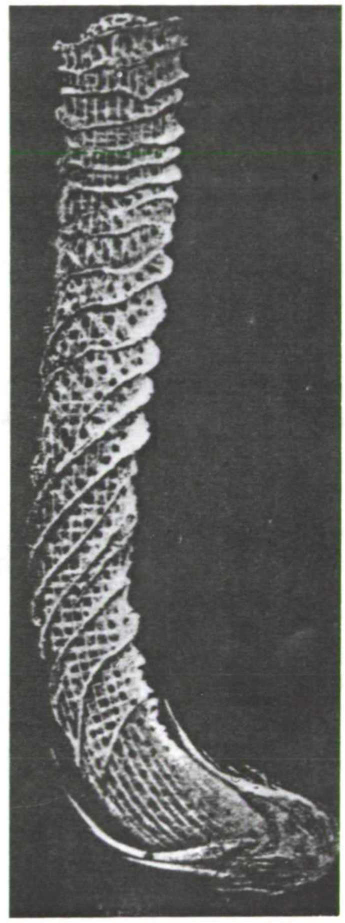
El paso de la hélice es pues 6 cm. Si desarrollamos imaginariamente el cilindro, su plantilla será:



Por el teorema de Pitágoras, o bien midiendo y teniendo en cuenta la escala, puede calcularse la longitud de cada espira. Multiplicada por cuatro da la longitud total de la hélice. Se puede evaluar aproximadamente el grosor del rollo de plastilina, y obtener así la cantidad total utilizada. En este modelo ha sido de unos 30 cm^3 aproximadamente (una pastilla standard de plastilina tiene 125 cm^3).

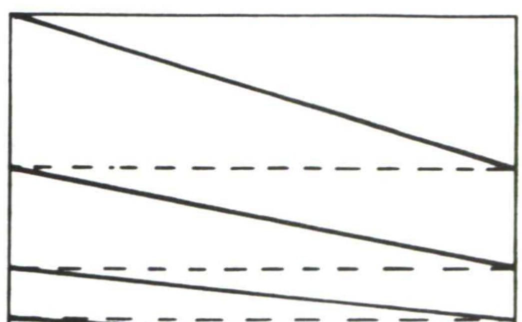
La hélice fundamental de una planta

Se llama así, en Botánica, la curva que se obtiene uniendo con una línea alrededor del tallo los puntos de imbricación de la hojas. En general, no es una hélice con paso constante como las que hemos visto hasta ahora, sino que las espiras se van apretando más hacia el extremo joven del tallo.



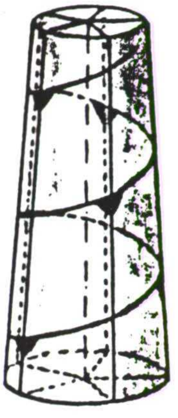
La misma estructura se puede apreciar en el esqueleto de la Esponja de Cristal.

Se puede imitar con una plantilla adecuada, como ésta.

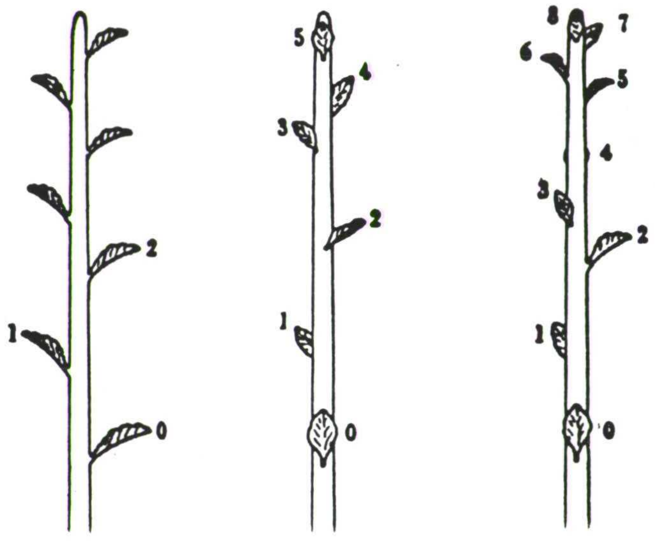


Otras veces, en plantas grandes, el tallo pierde su forma cilíndrica y pasa a ser un auténtico cono.

Aunque la curva no puede llamarse propiamente hélice, sino helicoide, sigue conservando, en Botánica, este nombre.



El estudio de la disposición de la hojas en el tallo, o Filotaxia, tiene otros aspectos de interés para nosotros: su relación con las sucesiones de Fibonacci.

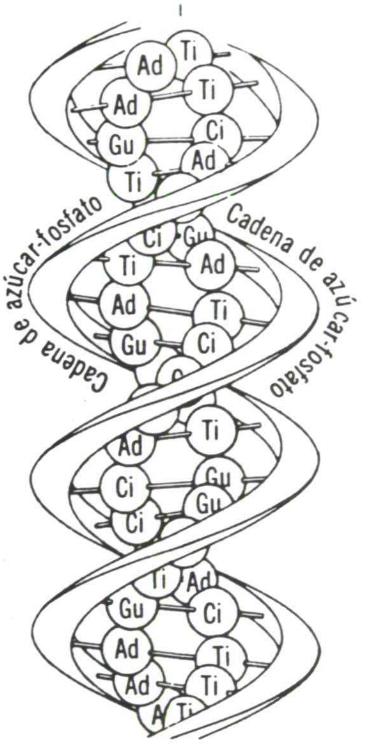


Fijémos en una hoja cualquiera, y en la primera que esté en la misma generatriz que ella y por encima. Entre una y otra, la hélice habrá dado un número de vueltas p, y en su recorrido habrá encontrado n hojas intermedias. Pues bien, p y n son términos alternos de la sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

Los pares (p, n) son: (1, 2), (1, 3), (2,5), (3, 8), (5, 13), etc.

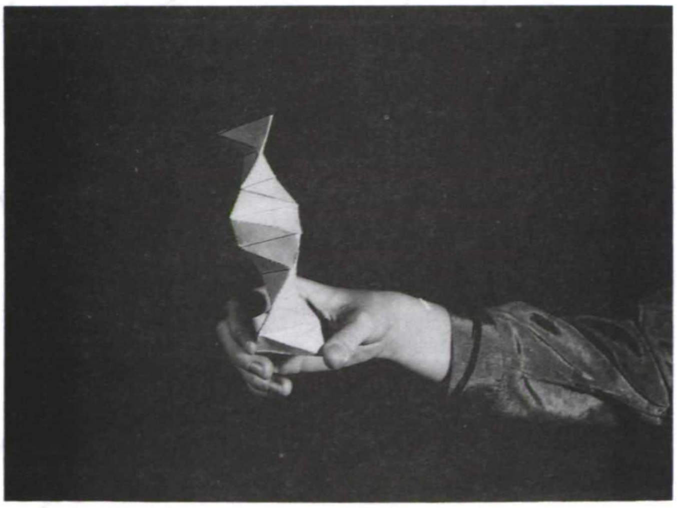
Papiroflexia para la hélice doble del ácido desoxirribonucleico (DNA)

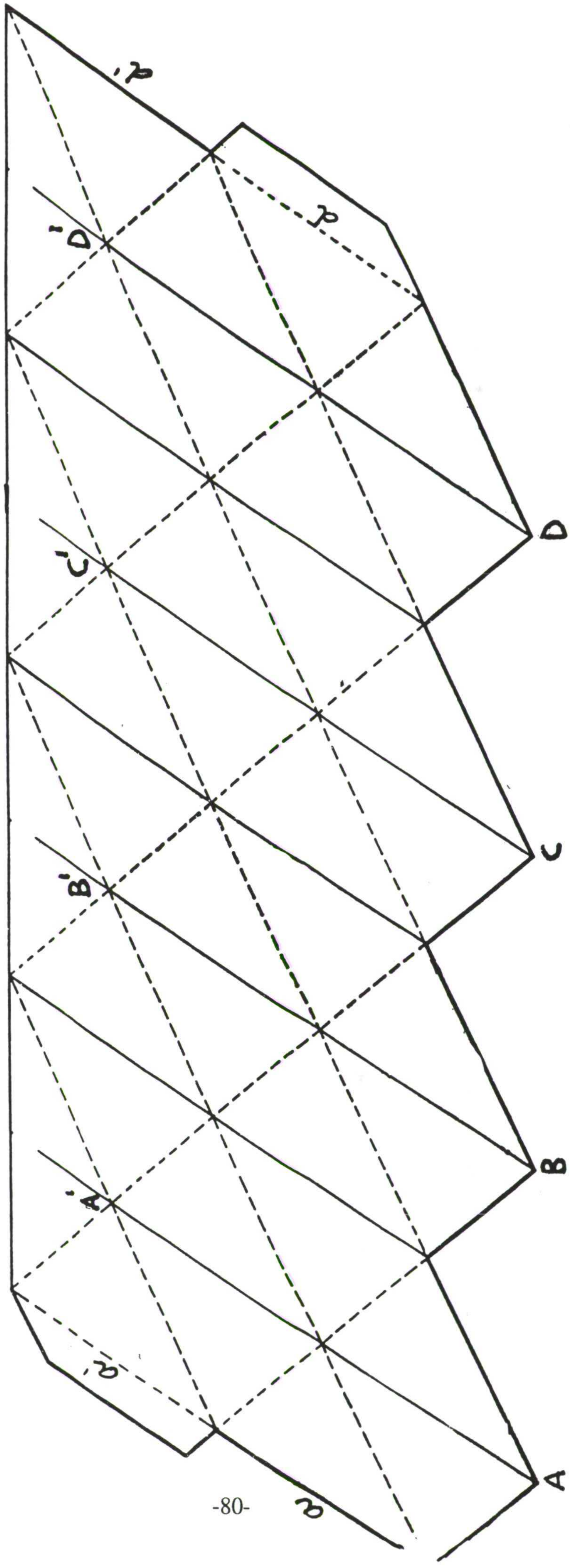


Las moléculas que forman el DNA están unidas por enlaces de oxígeno formando una hélice doble.

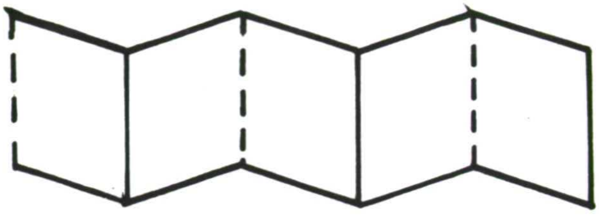
Se puede construir una hélice doble a partir de una plantilla en cartulina como la que se muestra en la página siguiente.

La hélice resulta un poco complicada de hacer por la habilidad manual que requiere, pero es interesante, además de por las razones apuntadas en otras ocasiones, por lo inusual del resultado.




D'
C'
B'
A'
D
C
B
A

Para realizar el plegado, poner las líneas continuas hacia afuera (alejándolas de nosotros) y las discontinuas hacia adentro (acercándolas).



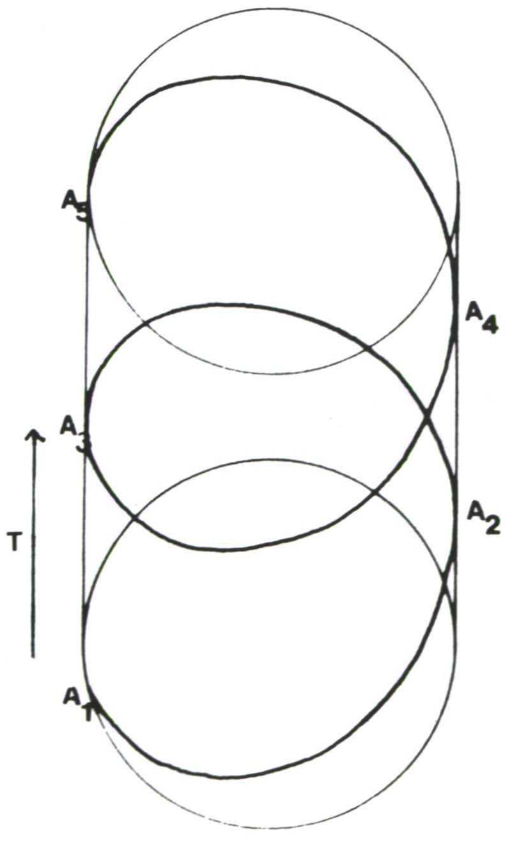
Al pegar, hay que hacer coincidir los puntos A con A', B con B', etc, y lo mismo los segmentos a-a' y d-d'.

Moviendo un trocito de hélice se obtiene el total

Las primeras actividades sobre hélices han tenido como objeto estudiar los movimientos que la generan: giro alrededor de un eje y translación paralela al mismo.

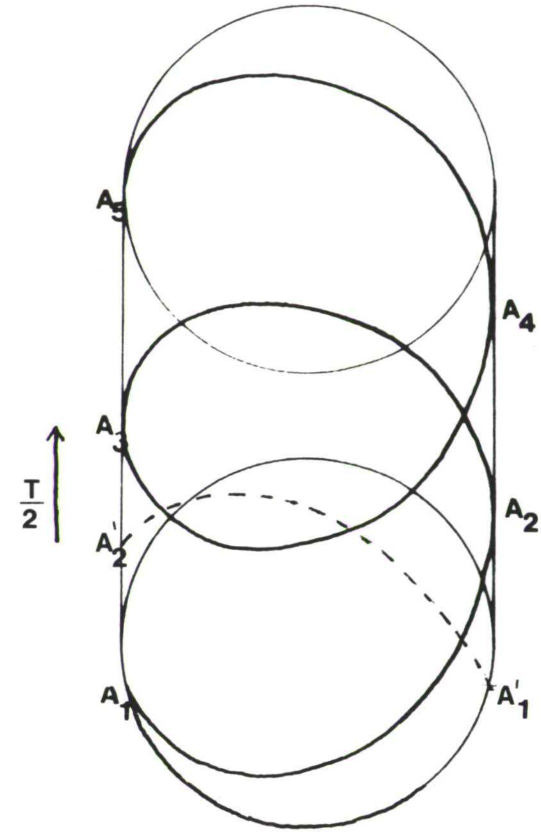
Estas dos últimas cierran el ciclo: un trozo de hélice es igual a otro trozo, la misma forma se repite indefinidamente. Encontramos otra vez la característica típica de todos los enrollamientos.

Trasladando verticalmente la vuelta completa $\overset{\frown}{A_1 A_2 A_3}$ se superpone con la siguiente $\overset{\frown}{A_3 A_4 A_5}$



El vector de traslación es paralelo al eje y su módulo es el paso de hélice. Además, con un trozo más pequeño, media vuelta por ejemplo, conseguimos lo mismo.

Girando $\widehat{A_1 A_2}$ 180º alrededor del eje se obtiene A'_1 A'_2 y trasladando esta línea (que no está en la hélice) d/2 hacia arriba, se superpone con A_2 A_3: media espira ha generado la media siguiente.



Podría hacerse algo similar con un cuarto de espira (girando 90º y subiendo d/4) o, en general, con cualquier otro trozo.

La hélice es, pues, invariante bajo una infinidad de pares giro-traslación: sometida a estas transformaciones se superpone con ella misma.

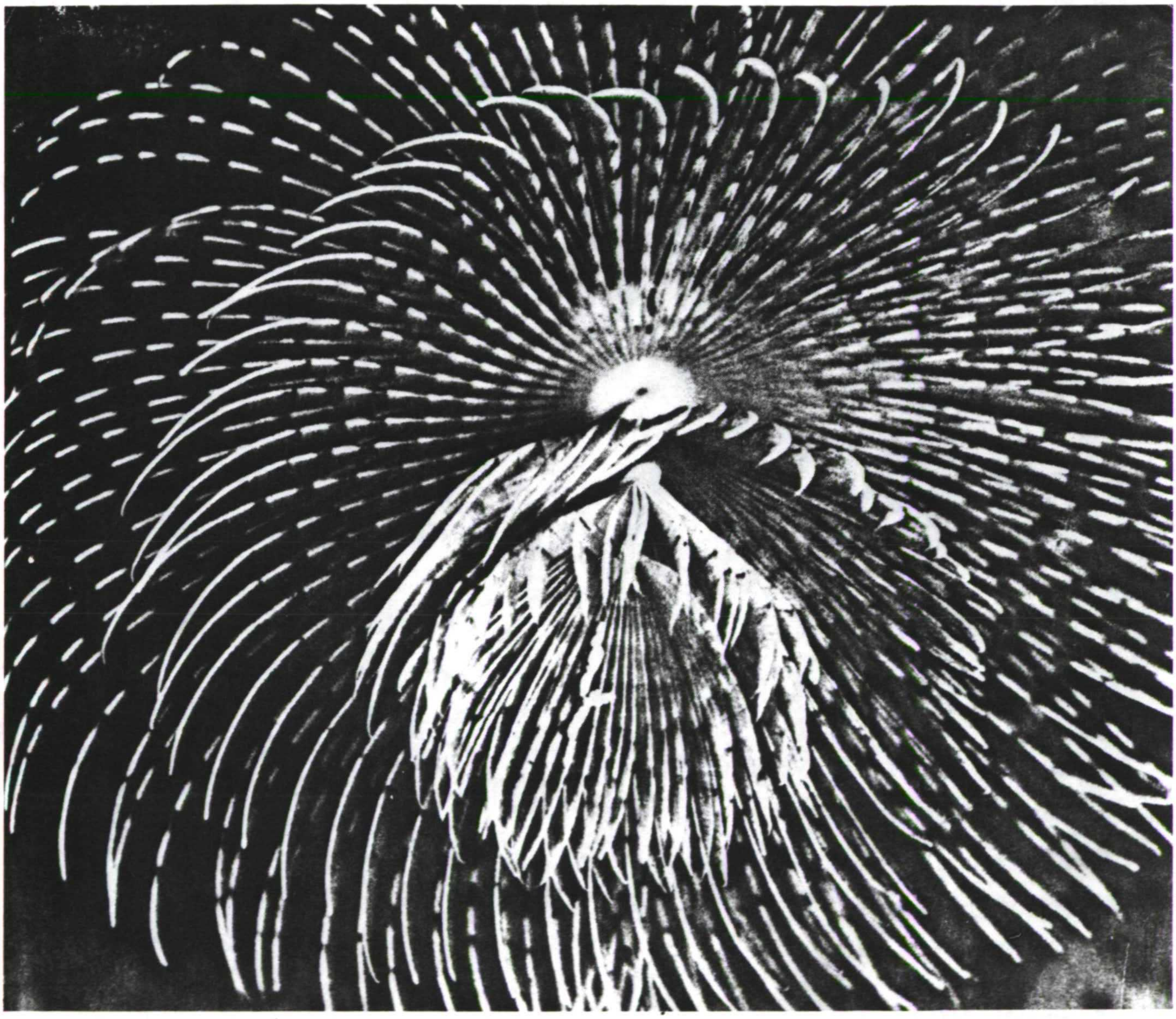
Se puede tener una visión intuitiva de este hecho con un sencilla experiencia: cortamos una hélice, construida en cartulina o plastilina, por una sección perpendicular al eje. Si colocamos los trozos encima de la mesa, podemos encontrar una posición, girando uno de ellos, de modo que veamos ambas hélices exactamente iguales.

Sensación de movimiento

Si giro este pirulí de caramelo, o un rollo de plastilina enroscado helicoidalmente alrede dor de un lápiz, parece que la hélice se mueve verticalmente: hacia abajo si el giro se hace en el mismo sentido que el enrollamiento (el de las agujas del reloj) y hacia arriba si nuestro movimien to es en sentido inverso.

Este fenómeno es otra visualización sencilla de las invariancias estudiadas en el epígra fe anterior.

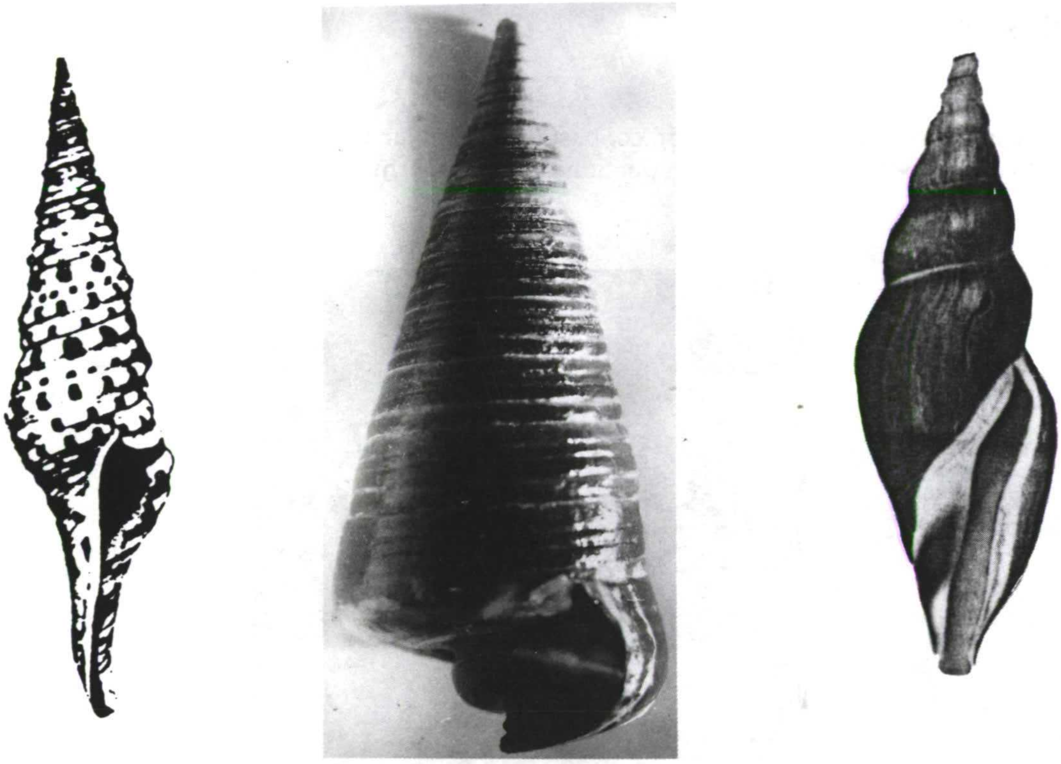
EL HELICOIDE



Espirógrafo (Spirographis Spallanzani)

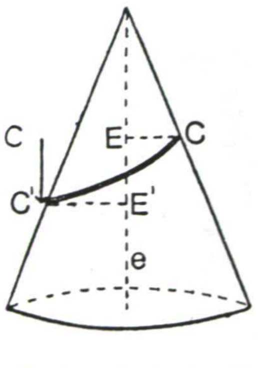
El helicoide en la Naturaleza

Nos referimos con el nombre de helicoide a las formas de enrollamientos sobre conos. Disponemos de abundantísimos modelos en los caracoles más comunes, así como en la disposición de las hojas en troncos cónicos, citada en el cápitulo anterior.



Los tres movimientos que generan un helicoide

Un buen ejemplo de trayectoria helicoidal es la de un coche descendiendo desde la cima de una motaña hasta su base por una carretera que gira y baja constantemente.



Para pasar de la posición C a la C', el coche ha tenido que hacer:

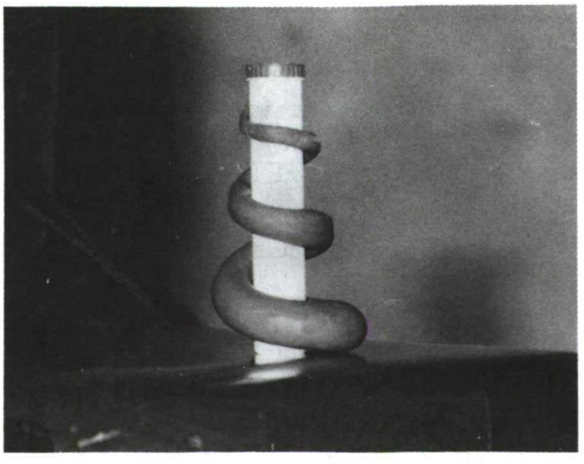
- un giro alrededor del eje "altura" de la montaña.
- un translación vertical CC' paralela al eje.
- un alejamiento del eje (E' C' > EC).

Estos tres movimientos se realizan simultáneamente, y de su composición resulta la forma helicoidal. Puede hacerse, como en el caso de espirales y hélices, un análisis detallado de los mismos, aunque aquí voy a ceñirme a la descripción macroscópica y a sugerir modelos muy sencillos para la confección de helicoides. No creo que deba profundizarse más, incluso en la Enseñanza Secundaria, ya que basta, y es difícil, visualizar tres movimientos simultáneos en el espacio.

Modelos en plastilina

Si disponemos de un soporte cónico, basta con enrollar un cilindro de plastilina sobre él. El alejamiento con respecto al eje nos lo proporciona la propia forma del soporte.

Utilizando como base un cilindro, tendremos que frabricar un cono de plastilina para simular, con el ensanchamiento de dicho cono, el alejamiento respecto del eje.



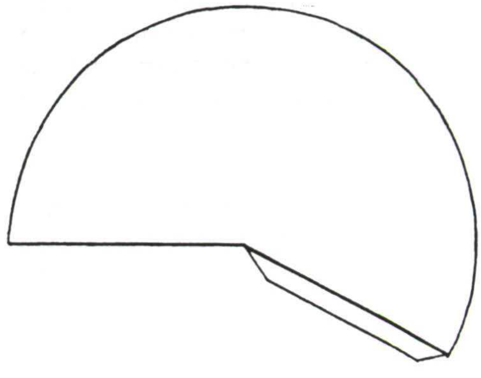
La maqueta de un caracol

El modelo que se propone a continuación sirve únicamente para caracoles que tengan una apreciable forma cónica. Aunque casi todos son helicoides, bastantes de ellos presentan modificaciones externas notables, como las producidas por unas espiras que se imbrican o superponen a otras, falseando la apariencia global. También ocurre con frecuencia que el cono soporte no tiene base circular, sino elíptica u otra curva más complicada. A estas consideraciones se debe la restricción del modelo propuesto.

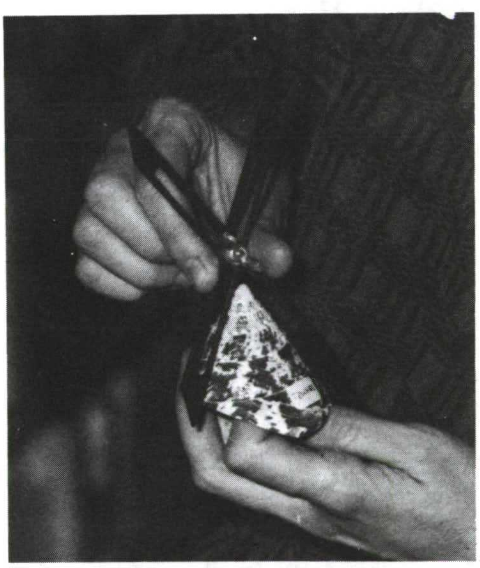
Empecemos por construir un cono de las dimensiones del caracol. Un método sencillo, meramente imitativo, consiste en hacerle una "capucha" de papel o cartulina. Con el compás se toma la distancia entre el vértice y el punto donde termina la concha, y con ésta se traza sobre papel una circunferencia.

Una vez recortada se lleva su centro al vértice del caracol y se ajusta alrededor del mismo, marcando con un pliegue el trozo que sobra.

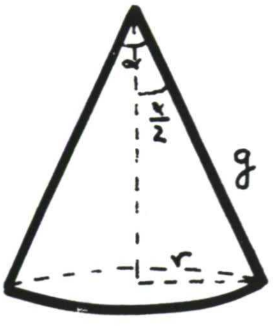
Este pliegue, en forma de sector cicular, se recorta del resto del círculo, dejando un trocito de él que sirva de pestaña para pegar.

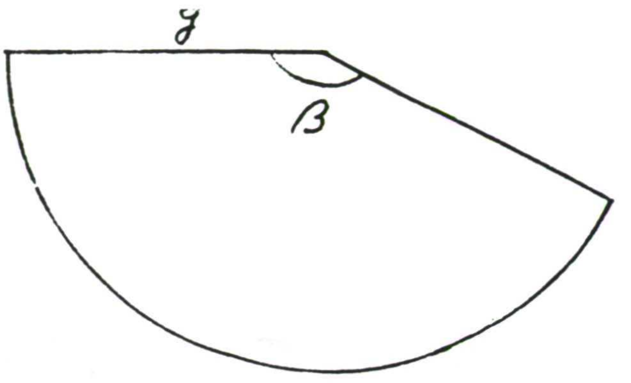


Los alumnos de enseñanza media, que ya conocen algo de trigonometría, pueden utilizarla en la construcción del cono por un procedimiento distinto del anterior. Para ello hay que medir el ángulo del caracol con un compás o simplemente con dos palillos o lápices colocados a lo largo de dos generatrices opuestas. La abertura se lleva a un transportador.



A partir de la medida de este ángulo, α , podemos obtener la del ángulo que debemos darle a la plantilla, β.





En el cono, la longitud de la base viene dada por la expresión

$$L = 2\ \pi \times r$$

y como a su vez

$$r = g\,\text{sen}\ (\alpha/2)$$

resulta, sustituyendo la segunda expresión en la primera

$$L = 2\pi\ g\,\text{sen}\,(\alpha/2)$$

Esta longitud de la base, L, en la plantilla se transforma en la del arco de crcunferencia de radio g y ángulo β, que se expresa

$$L = g\,\beta$$

Igualando las dos expresiones

$$2 \times g\,\text{sen}\ (\alpha/2) = g\,\beta$$

y simplificando

$$\beta = 2\,\text{sen}\ (\alpha/2)$$

Hay que tener en cuenta que la medida así obtenida, viene en radianes.

Para el modelo que figura en las fotos, he obtenido

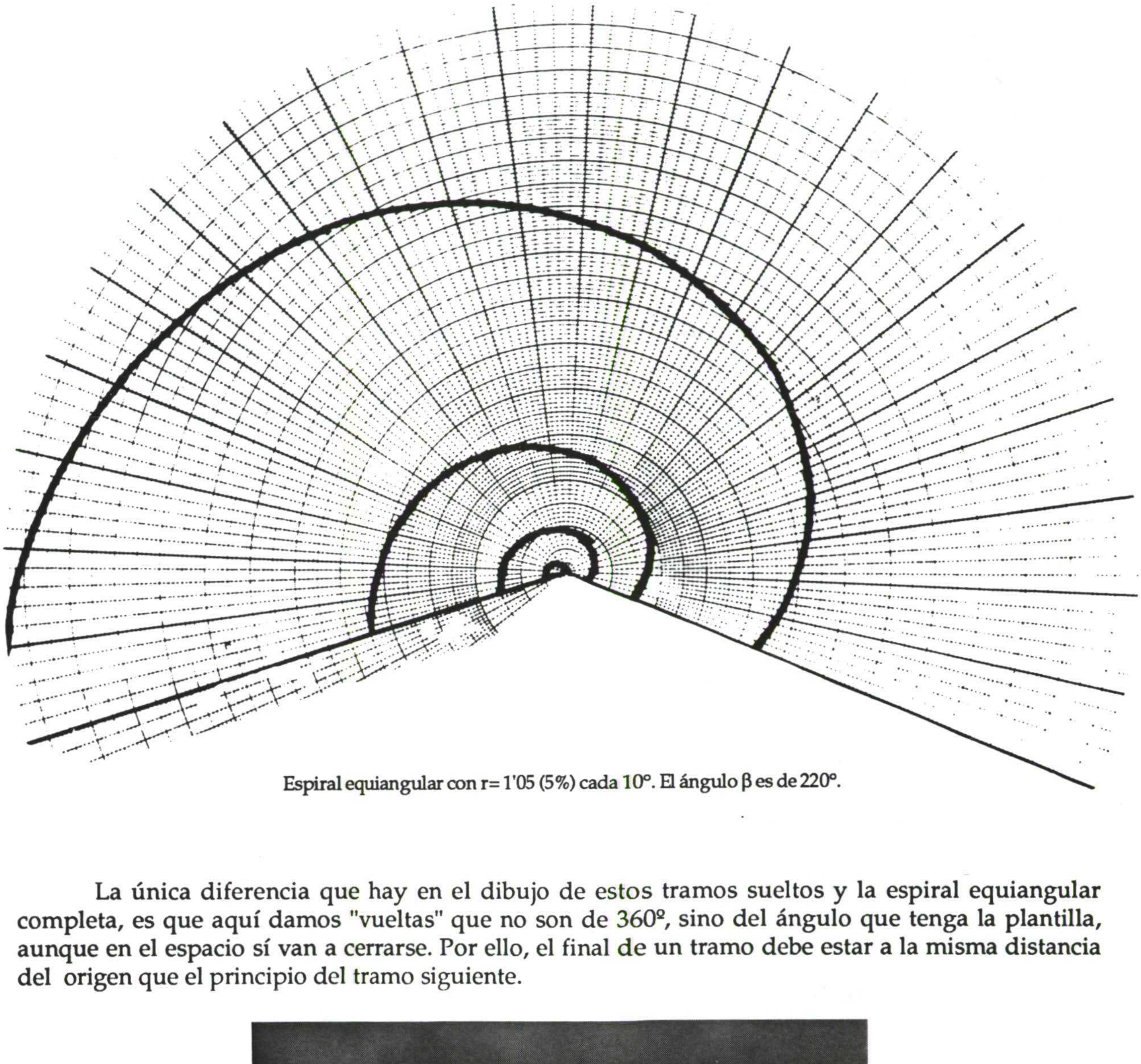
$\alpha = 74^{\text{o}}$

y por tanto

$$\beta = 3'77\ \text{rad} = 216^{\text{o}}$$

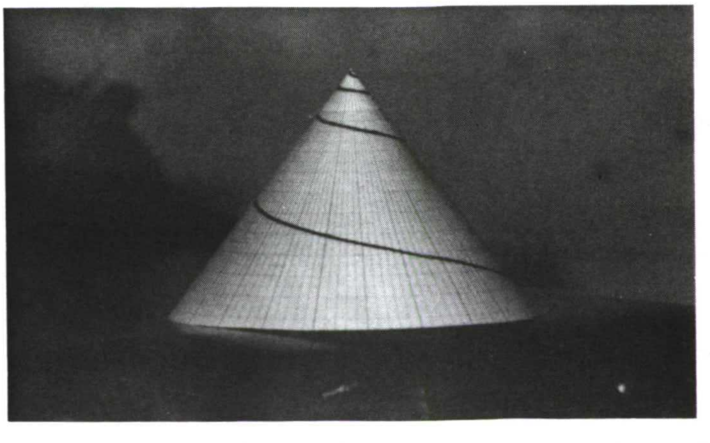
Dibujo de las estrías: otra vez espirales

En casi todos los caracoles, la anchura entre dos espiras sucesivas es mayor cuanto más se alejan éstas del vértice, y este aumento se ajusta bastante bien a una progresión geométrica. En la plantilla del cono, ésto se traduce por la aparición de curvas con forma de espiral equiangular que, recordemos, son las que siguen una ley de crecimiento en sus radios de tipo exponencial.

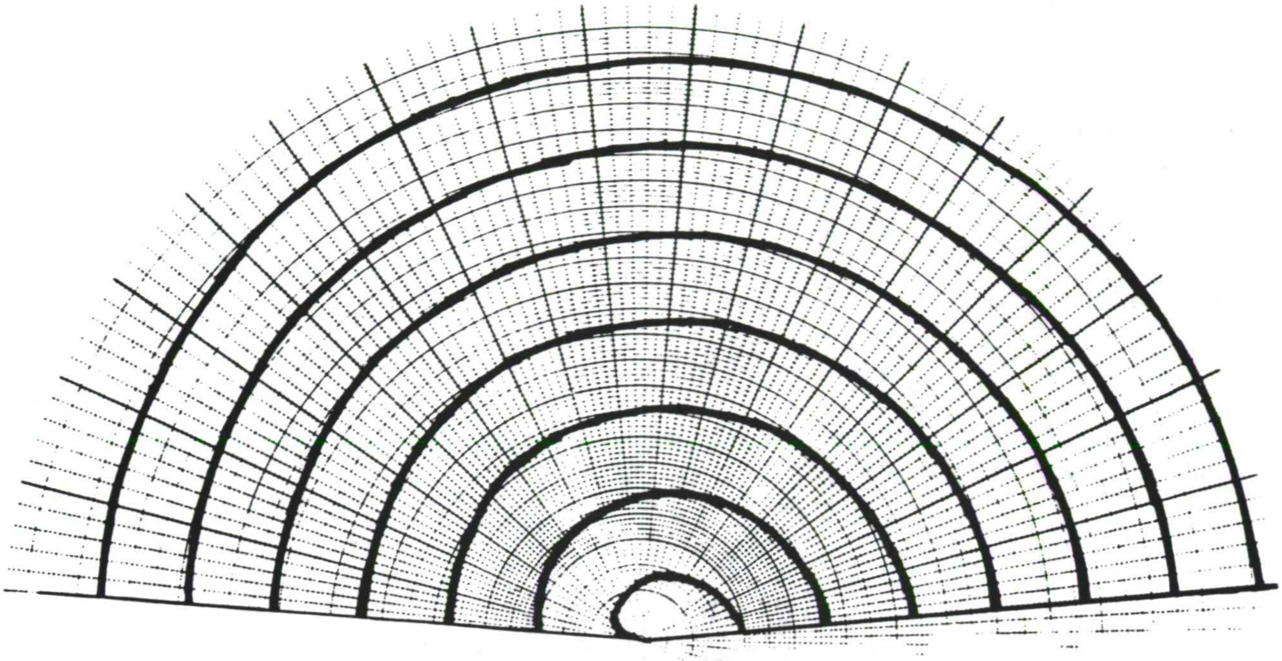


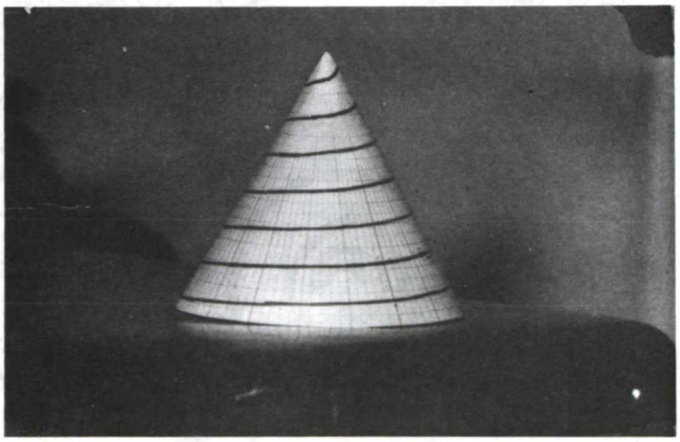
Espiral equiangular con r= 1'05 (5%) cada 10°. El ángulo β es de 220°.

La única diferencia que hay en el dibujo de estos tramos sueltos y la espiral equiangular completa, es que aquí damos "vueltas" que no son de 360º, sino del ángulo que tenga la plantilla, aunque en el espacio sí van a cerrarse. Por ello, el final de un tramo debe estar a la misma distancia del origen que el principio del tramo siguiente.



Si dibujamos espirales arquimedianas, obtenemos helicoides con anchura constante entre espiras.





Si nuestro propósito es hacer la maqueta de un determinado caracol, nos vamos a encontrar con problemas en la medición, ya que la superficie del caracol suele ser rugosa, a veces es difícil trazar sobre él un generatriz y, en todo caso, la diferencia entre dos espiras pequeñas es inapreciable con los instrumentos de medida a nuestro alcance. Lo mejor es tomar, sobre una misma generatriz, las distancias desde el vértice a las dos ó tres estrías más alejadas y calcular con ellas la razón de crecimiento en una vuelta.

En el caracol de las fotos, que tiene siete vueltas apreciables, he medido:

$$L_7 = 5'8\,\text{cm} \qquad L_6 = 4\ \text{cm} \qquad L_5 = 2'6\,\text{cm}$$

resultando los cocientes

$$L_7 / L_6 = 1'45 \qquad L_6 / L_5 = 1'53$$

Tomo como razón de crecimiento por vuelta un valor intermedio

$$r = 1'5$$

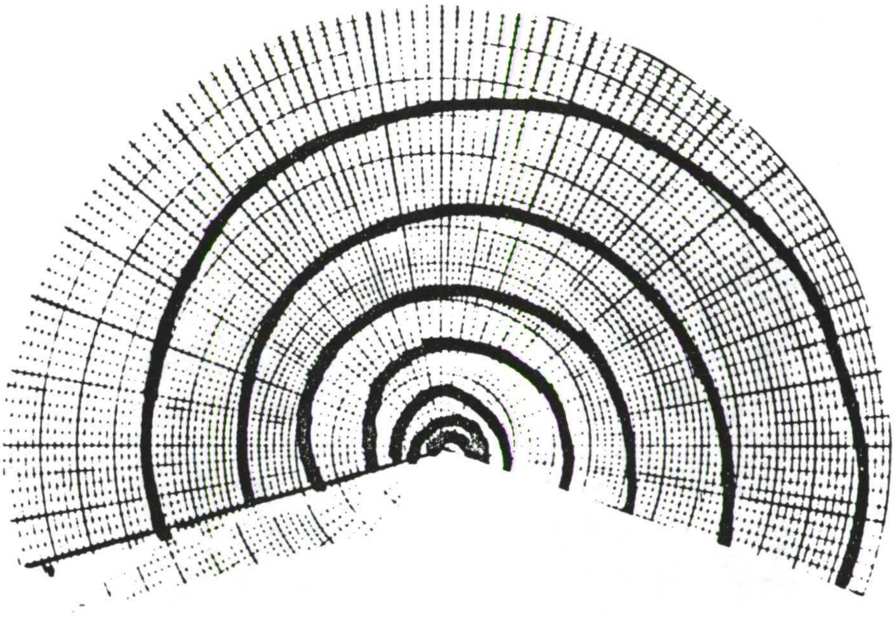
es decir, un crecimiento del 50% por vuelta. Las distancias restantes pueden calcularse a partir de la relación

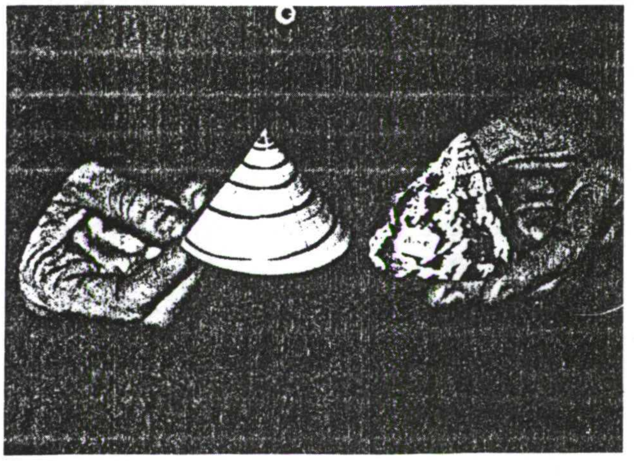
$$L_n = .L_{n+1} / r$$

y resultan, aproximadamente

$$L_4 = 1'7 \qquad L_3 = 1'2 \qquad L_2 = 0'8 \qquad L_1 = 0'5$$

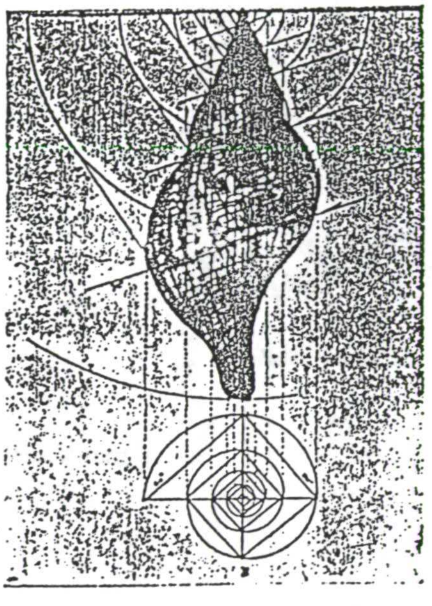
Para el dibujo de la espiral pueden tomarse otros valores intermedios, interpolando, como se detalló en el capítulo correspondiente.



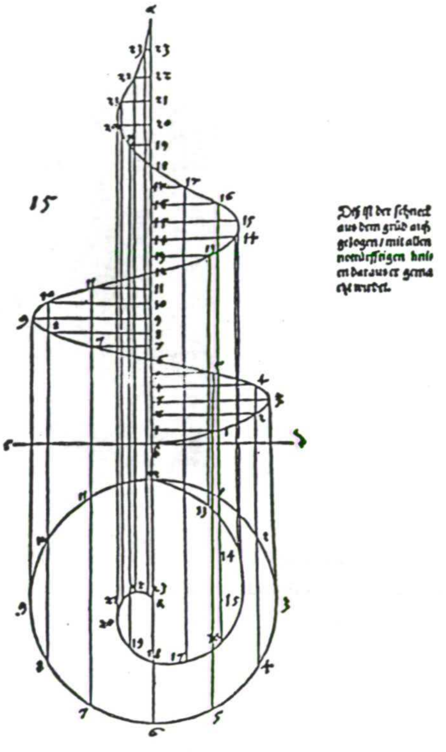


Proyecciones de un helicoide

No sólo la plantilla de un helicoide tiene relación estrecha con la espiral, sino tambien su proyección plana. Por esta razón ya apuntamos en su momento que sirve como modelo de espiral la foto de un caracol tomada de forma que la visual tenga la dirección del eje.

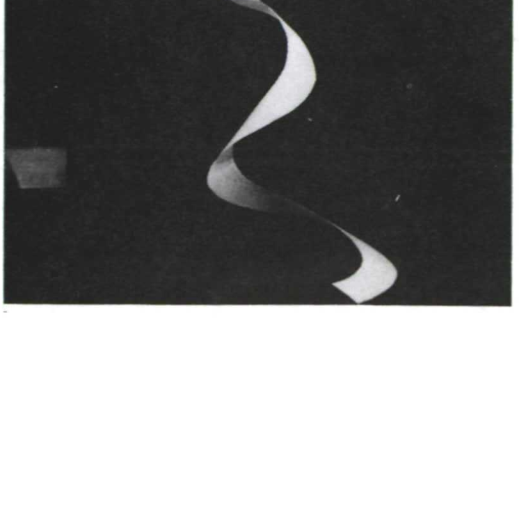


Proyección plana del caracol "Facelaria"



Dibujo de Alberto Druero indicando cómo se proyecta un helicoide sobre un plano

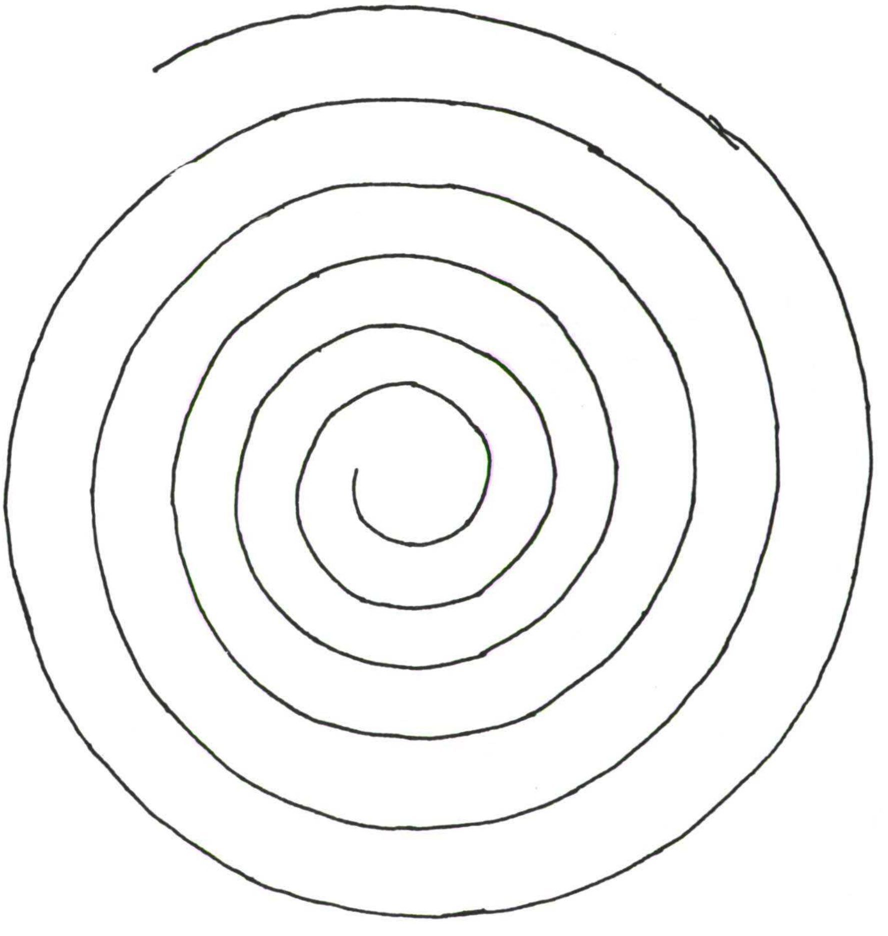
Al contrario, si recortamos una espiral dibujada sobre papel y la suspendemos por su polo, la forma espacial que determinan los bordes es un helicoide.



Esta es una de las espirales arquimedianas cuya plantilla aparece en el capítulo correspondiente. Puesta sobre un radiador comienza a girar por efecto de las corrientes de aire caliente (corrientes de convección) que suben.

Esta relación espiral-helicoide puede verse con otra experiencia curiosa: se enrolla un hilo sobre las estrías de un caracol apropiado (han de estar muy marcadas y hundidas para que el hilo se sostenga) y se coloca verticalmente sobre un papel. Al otro extremo del hilo se ata un bolígrafo y, siguiendo las mismas indicaciones que se detallaron en el capítulo dedicado a la espiral arquimediana, se va desenrollando el hilo y dibujando la curva resultante, que resulta ser una espiral.

A veces los resultados no son excesivamente satisfactorios, ya que es difícil mantener inmóvil el caracol debido a que el punto de apoyo sobre el papel es muy pequeño.



Querría volver a insistir en que estas actividades de interrelación plano-espacio, como construir plantillas, proyectar una curva tridimensional sobre otra en dos dimensiones o, al revés, sacar una curva del plano al espacio, son de gran interés para fomentar la capacidad de visión espacial en los alumnos aunque se realicen desde un enfoque puramente intuitivo y sin llegar a ninguna formalización.

El modelo de Raup y Stanley

El modelo cónico que aquí he desarrollado para la descripción de la forma helicoidal de caracoles es claramente insuficiente desde un punto de vista práctico y sólo su sencillez y utilidad didáctica lo justifican. Sin embargo, en la literatura especializada encontramos excelentes modelos que funcionan de verdad, como el que propone D'Arcy Thompson en el libro que se reseña al final, o el de los paleontólogos Raup y Stanley, que transcribo muy parcialmente a continuación:

"La geometría básica de una concha enrollada puede ilustrarse observando un gasterópodo común. La concha es un tubo hueco cónico, abierto en su extremo mayor (apertura). El material nuevo de la concha se adiciona a la apertura, de modo que el tubo adquiere mayor longitud conforme el animal crece. Durante el crecimiento se añade más material a un lado de la apertura que al otro. Con ello se produce una forma espiral en la que el tubo parece girar en torno a un eje fijo, denominado eje de enrollamiento.

Algunos rasgos de la espiral permanecen notablemente constantes en el transcurso del crecimiento y constituyen la base de cualquier sistema de descripción eficaz. Los cuatro parámetros más útiles se presentan en el diagrama de la fig. 8-2:

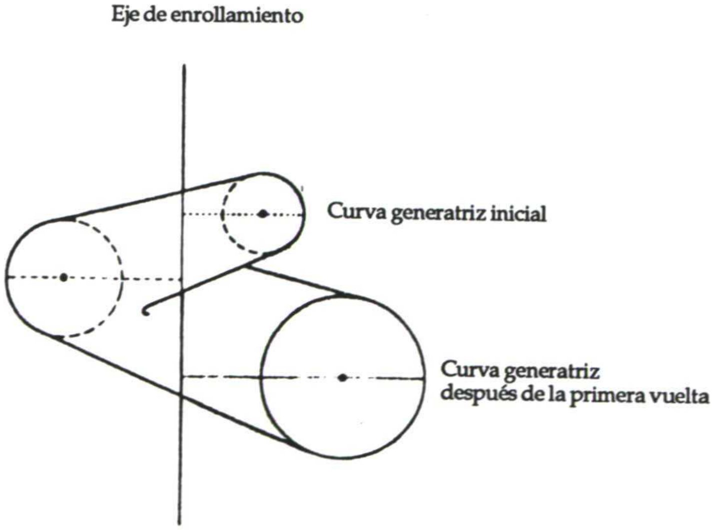


FIGURA 8-2
Diagrama esquemático de una parte de la concha de un gastrópodo. (De Raup, 1966)

(1) La forma del tubo en sección transversal que se acostumbra a llamar forma de la curva generatriz. En la fig. 8-2 la curva generatriz es circular. (La curva generatriz se define como la forma de la intersección del tubo en expansión con un plano que contiene el eje de enrollamiento. En la mayoría de los gasterópodos coincide con la forma de la apertura)

(2) La tasa de expansión de la curva generatriz con respecto a la vuelta en torno al eje. Con frecuencia se la denomina tasa de expansión de la vuelta, y es la razón entre una misma dimensión lineal (por ejemplo, el diámetro) en dos curvas generatrices separadas por una vuelta completa. En la figura 8-2, la tasa de expansión de la vuelta vale dos, lo que significa que toda dimensión lineal de la curva generatriz se dobla en cada vuelta en torno a eje.

(3) La posición y orientación de la curva generatriz respecto al eje. En la fig. 8-2 la curva generatriz circular está separada del eje por una distancia igual a la mitad de su diametro. Si la curva generatriz no fuera circular, su orientación respecto del eje de enrollameinto sería importante.

(4) El movimiento de la curva generatriz en torno al eje, que se llama traslación de la vuelta.

La traslación se expresa mejor por medio de un índice que es la razón entre el movimiento a lo largo del eje y el movimiento hacia fuera del eje durante el intervalo de una vuelta. El punto de referencia para establecer esta razón es el centro geométrico de la curva generatriz. En algunas formas, la tasa de traslación es cero y el tubo gira en torno al eje, en un mismo plano, produciendo lo que se llama concha planispiral".

Aunque este párrafo se refiere exclusivamente a conchas de tipo "gasterópodos", como el caracol común, más adelante se demuestra la validez de esta descripción para una amplia gama de formas enrolladas sin más que dar valores límite a los parámetros del modelo o seleccionando adecuadamente la curva generatriz.

Uno de los aspectos más interesantes de este libro es la aplicación que hace del modelo al estudio exhaustivo de todas las posibles formas enrolladas, sean o no viables en la realidad. Por medio de un ordenador, y haciendo variar los parámetros, se obtienen dibujos como éste:

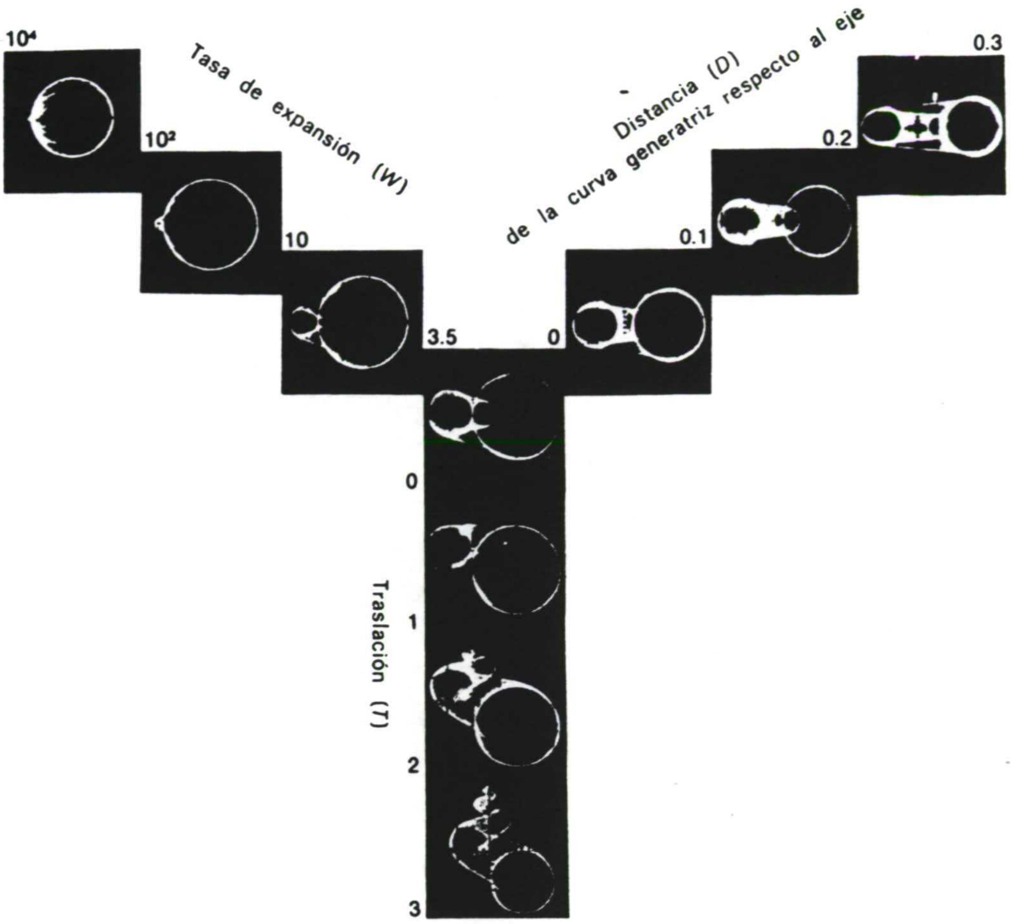


FIGURA 8-6

Series de réplicas de computadora analógica que permiten observar los efectos del cambio en los parámetros geométricos. (De Raup, 1966)

Termina el estudio haciendo un análisis de cuáles de estas formas son biológicamente posibles y estableciendo la línea evolutiva que lleva desde las supuestamente originarias, y que se encuentran en forma de fósil o han desaparecido totalmente, hasta las que sobreviven actualmente.

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

1. D'ARCY THOMPSON
   "Sobre crecimiento y forma"
   Herman Blume

2. MATILA GHYKA
   "Estética de las proporciones en la Naturaleza y el Arte"
   Poseidón

De entre los grandes libros clásicos que estudian el problema de las formas en la Naturaleza, estos dos son actualemente los más asequibles en nuestro país. Desde ópticas distintas, con aspectos ya superados como se hace notar en las ediciones recientes, tratan los problemas geométricos que presenta el crecimiento y la configuración de los seres vivos. El desarrollo matemático es diferente en cada tema; exhaustivo unas veces y sólo apuntado en otras. Ocurre otro tanto con la complejidad: desde cuetiones muy simples, casi observables, hasta otras que utilizan teorias matemáticas y físicas difíciles.

Su lectura es muy amena; proporcionan muchas ideas, que, generalmente, hay que dar vueltas y desarrollar antes de poder llevar al aula. El primero de ellos, publicado por primera vez en 1917, se centra más en las causas que han influido en el desarrollo del ser vivo, al que considera un sistema físico-químico en equilibrio en el medio. El segundo, que trata con gran detalle tambien aspectos geométricos en el arte, preconiza que las cosas bellas, como muchas de las formas naturales, son las que mejor se adaptan a la función que deben realizar.

3. RAUP/STANLEY
   "Principios de Paleontología"
   Ariel

Este libro ha constituído para mí una agradable sorpresa; no sólo he sido capaz de leer, entender y disfrutar con un texto de Paleontología siendo totalmente profana en la materia, sino que me ha proporcionado abundantes ejemplos que, desarrollados debidamente, pueden ser utilizados como trabajo de aula: métodos para medir y modelizar objetos, gráficas sobre la evolución de caracteres, poblaciones y especies, cómo determinar la edad de un fósil y tantos otros. En este trabajo transcribo el modelo geométrico que desarrolla para las formas helicoidales (caracoles), que sigue las pautas establecidas por D'Arcy Thompson.

Uno de los aspectos más interesantes de la obra es la perspectiva con que trata el desarrollo de todas las formas posibles de estructura helicoidal.

4. COXETER
   "Geometría"
   Limusa - Wiley

5. BATSCHELET
   "Matemáticas Básicas para Biocientíficos"
   Dossat

Estos dos libros ya son de contenido estrictamente matemático, pero que –cosa rara salvo en los llamados "de divulgación"– hacen continuos usos y aplicaciones de la geometría en la Naturaleza. El primero de ellos no es un libro fácil, pero creo que su riqueza compensa con creces el trabajo de leerlo.

Puede constituir una buena "puesta a punto" para aquellos profesores que tienen muy lejana, si es que alguna vez la estudiaron, la geometría. El segundo es más general, escrito para un nivel de primer curso de Facultad y abunda, no sólo en el texto sino en los ejercicios, en ideas interesantes transladables a nuestros alumnos de 12-16 años.

6. EMMA CASTELNUOVO
   "Les Mathèmatiques dans la rèalité"
   Cedic (La edicción original es italiana)

7. Editado por los autores Grupo Cero.
   "De 12 a 16: un proyecto de currículum de mátemáticas"
   Plaza Dr. Landete 4, 5º VALENCIA 6

Los dos textos siguientes son, desde un punto de vista didáctico, los más interesantes de entre todos los aquí reseñados. Su autores son sin duda muy conocidos por todos nosotros aunque, desgraciadamente, no es fácil encontrar en el mercado los libros de Emma Castelnuovo.

El primero de ellos recoge abundantes trabajos hechos por alumnos (incluyo uno sobre espirales arquimedianas), acompañados de las explicaciones metodológicas oportunas. En relación directa con el tema que nos ocupa figuran tratadas las sucesiones de Fibonacci, la proporcionalidad, la sección aúrea, las espirales, genética, cónicas y cuádricas, movimientos y semejanzas.

El proyecto curricular del Grupo Cero de Valencia es algo más que una relación de objetivos y métodos: constituye una auténtica reflexión sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Mediante la propuesta de situaciones muy variadas, generalmente abiertas, se cubren no sólo los núcleos de conocimientos, sino que se favorece la adquisición de estructuras conceptuales básicas, estrategias y técnicas. Uno de los trabajos que presentan, realizado por alumnos, está reproducido en el apartado de espirales equiangulares. Además, y respecto al tema que nos ocupa, aparecen tratadas las espirales de Durero y la sucesión de Fibonacci.