MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

LA MATEMATICA

Y SU ENSEÑANZA ACTUAL

PUBLICACIONES DE LA
DIRECCION GENERAL
DE ENSEÑANZA MEDIA

56202

ESTA OBRA DEL DR. PUIG ADAM:

LA MATEMATICA Y SU ENSEÑANZA ACTUAL

HA SIDO PREMIADA POR EL MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL (O. M. de 18 de Noviembre 1958. B. O. E. de 9 Diciembre) POR SU RELEVANTE VALOR DE METODOLOGIA PEDAGOGICA

"ENSEÑANZA MEDIA"

REVISTA DE ORIENTACION DIDACTICA
DEL
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

SUSCRIPCION ANUAL A LA REVISTA
200 PESETAS

(EXTRANJERO: 6 DOLARES)

NUMERO SENCILLO: 20 PESETAS
DOBLE: 40 PESETAS

(EXTRAORDINARIO: 60 PESETAS)

DIRECCION:

PUBLICACIONES DE LA DIRECCION GENERAL
DE ENSEÑANZA MEDIA

ALCALA, 30-5.° - TELEFONO 31 67 73
MADRID-14

LA MATEMATICA
Y SU
ENSEÑANZA ACTUAL

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL

DIRECCION GENERAL DE ENSEÑANZA MEDIA

LA MATEMATICA Y SU ENSEÑANZA ACTUAL

POR

PEDRO PUIG ADAM

PROLOGO

DE

DACIO RODRIGUEZ LESMES

PUBLICACIONES DE LA REVISTA "ENSEÑANZA MEDIA"

MADRID 1960

PUBLICACIONES

DE

«ENSEÑANZA MEDIA»

Director: DACIO RODRIGUEZ LESMES

Núm. 72

DIRECCION:

PUBLICACIONES DE LA DIRECCION GENERAL DE ENSEÑANZA MEDIA

ALCALA 30, 5.° - TEL. 31 67 73 - MADRID-14

Depósito legal: M. 11058-1959

Gráficas Cóndor, S. A. — Aviador Lindbergh, 5 — Madrid-2 588-59

INDICE

Págs.

PRÓLOGO, por Dacio Rodríguez Lesmes IX

PARTE PRIMERA

LOS PRINCIPIOS GENERALES

CAPÍTULO PRIMERO.—*Una visión humana de la Matemática* 3
1. La Matemática y la belleza 3
2. La Matemática y el hombre 30

CAPÍTULO SEGUNDO.—*Mirando al futuro* (Nuevas perspectivas) 47
1. Sobre Cibernética 47
2. Sobre la moderna teoría de la información 59
3. Un ingenio eléctrico para resolver problemas de lógica formal ... 73

CAPÍTULO TERCERO.—*El movimiento didáctico renovador* 93
1. La evolución de la didáctica matemática en nuestra generación ... 93
2. Tendencias actuales en la enseñanza de la Matemática 111
3. Balance de cuatro años de labor en España 132

CAPÍTULO CUARTO.—*Los nuevos principios didácticos* 137
1. Sobre la enseñanza eurística de la Matemática 137
2. Decálogo de la didáctica matemática media 157
3. Las últimas recomendaciones de Ginebra (1956) 164

Págs.

PARTE SEGUNDA

LA DIDACTICA MATEMATICA EN ACCION

CAPÍTULO QUINTO.—*Didácticas específicas* ... 175
1. Sobre la enseñanza de la Geometría en la Escuela primaria ... 175
2. Sobre la enseñanza de la Aritmética en la Escuela primaria ... 187
3. La didáctica matemática a lo largo de los ciclos medios ... 206

CAPÍTULO SEXTO.—*Material didáctico matemático* ... 233
1. Lo concreto en la enseñanza matemática ... 233
2. Generalidades sobre los modelos ... 240
3. Algunos ejemplos de material didáctico multivalente ... 245
4. Material didáctico matemático extraído de la vida ... 264
5. La Matemática en el juguete ... 277
6. Los films matemáticos ... 296

CAPÍTULO SÉPTIMO.—*Muestras de enseñanza curística* ... 307
1. Sobre sistemas de numeración ... 307
2. Sobre congruencias y clases residuales ... 311
3. Otra lección sobre congruencias y divisibilidad ... 317
4. Sobre la estructura operatoria de la raíz cuadrada ... 322
5. Sobre las nociones de proporcionalidad directa e inversa ... 328
6. Una iniciación al empleo de letras ... 334
7. Multiplicación y división de polinomios ... 337
8. Sobre ecuaciones lineales y sistemas ... 341
9. Progresiones aritméticas de orden superior ... 348
10. La división del espacio en regiones ... 353
11. Iniciación a las máquinas de calcular ... 357
12. Iniciación al Algebra de conjuntos ... 362
13. Sobre permutaciones ... 364
14. Iniciación de las simetrías en el plano ... 369
15. Situaciones didácticas obtenidas por plegado ... 376
16. Haces de elipses e hipérbolas homofocales ... 379
17. Posiciones de rectas y de planos ... 383
18. Volumen de prismas y de pirámides ... 390
19. Iniciación a la función lineal y su representación gráfica ... 396
20. Introducción eurística del rigor y precisión de lenguaje ... 403

Págs.

APENDICES

1. La formación del profesorado matemático de grado medio 409
2. La vocación matemática 421
3. En la encrucijada. Consejos de un guía 444
4. Nuevo mensaje de despedida 457

PROLOGO

IS one of the most original mathematics teachers of our time. Con estas palabras —limpias y escuetas— resume T. J. Fletcher, con motivo de una recensión bibliográfica, la personalidad del profesor Puig Adam, en su doble vertiente: científica y pedagógica.

Quizá resulte difícil, dentro de un leve prólogo, perfilarla con la precisión y amplitud que su polifacecia requiere. Fletcher la ha sabido sintetizar. Puig Adam se nos presenta como prototipo del Neorrenacimiento que agita nuestra época, en la que se han superado los moldes del viejo humanismo, puesto el hombre en contacto con fuerzas cósmicas y biológicas insospechadas. Para Puig Adam tiene plena vigencia el "nihil humanum a me alienum puto" que ya el primer Renacimiento levantó como bandera. Matemático por vocación, ha sabido ampliar los horizontes intuitivos, lógicos y formalistas en que se movía la Matemática, para infundirle un hálito cálido y actual y encajarla en el puesto que para ella reclaman los tiempos de hoy: ser el "esquema", la estructura básica en la que el pensamiento pueda tomar pie para ahondar en las leyes de lo que la vieja Filosofía llamó materia sensible y descubrir muchos de los mecanismos del mundo físico-psíquico. Quedan arrumbados así los principios clásicos de la abstracción, por cuanto el entendimiento, de mera potencia "separadora", pasa a convertirse en una fuerza creadora, que hace brillar lo esencial con una "iluminación poética" de lo sensible. Este empuje "poético" creacional es, sin duda, el sustrato de la personalidad de Puig Adam. Por *eso nada es extraño que se columbre hasta en lo más abstruso de sus postulados e hipótesis científicas, impulsándolo a la caza de una conjunción de intereses e inquietudes vitales, para derivar en la pasión por los métodos eurísticos.*

En ese "empuje poético" hallamos el motivo de su dedicación a la docencia. Hombre de pensamiento, lo es tanto más de acción, y la necesidad de hacer le impele a buscar, como maestro, nuevas metas: crear fe, llevar el alma a sus enseñanzas, caldeando en la forja de sus mismos afanes y entusiasmos por la Ciencia a otros espíritus. Todo ello con la "entrega" generosa en que Jan Ligthart, el conocido pedagogo holandés, veía la quintaesencia de la educación, enfocada no para resaltar la propia superioridad —nunca pecado del auténtico sabio—, sino para "hallar al otro", en el que se adivina —¡Oh ansia de la perdurabilidad!— la propia prolongación.

Bajo este prisma nos explicamos el polimorfismo de la personalidad de Puig Adam: investigador, filósofo, maestro, pintor, músico, orador y escritor de fina escuela y sensibilidad. Poliformismo que, dentro de la clave dual matemático-educador, precisara su maestro, don Antonio Torroja, al contestar al discurso pronunciado por Puig Adam en su ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y que se justifica por el hecho de que Puig Adam ha entendido la Matemática como filosofía y como ciencia, pero también como arte, a modo de una «αρχή» vital, al estilo de los pensadores "físicos" de la Jonia, si bien con una postura más racional y definida. A esto ha unido un imperativo vocacional, íntimo e irrenunciable, convertido ya en destino de su existencia: el magisterio.

Ciertamente Puig Adam es una de las figuras relevantes que España ofrece dentro de la pléyade de grandes matemáticos modernos. Como didáctico merece —con Rey Pastor— capítulo aparte. A él se debe la renovación de métodos que poco a poco ha ido activando toda una pedagogía, caduca e ineficaz, para adaptarla, desde la escuela primaria y los estudios medios, a lo que la Matemática supone como eje de la Ciencia y la técnica *actuales. Su "curriculum vitae" puede darnos, en breves escorzos, la génesis y evolución de la doble faceta de su personalidad.*

Bachiller en el Instituto de Enseñanza Media de Barcelona (entonces único), con Premio extraordinario. Ingresa en la Escuela de Ingenieros Industriales de la Ciudad Condal, simultaneando los dos primeros cursos de ingeniería con los tres primeros de la Facultad de Ciencias Exactas. En esta Facultad es discípulo de don Antonio Torroja, quien deja profunda huella en su formación matemática. Termina la licenciatura con Premio extraordinario y pasa a cursar el doctorado en Madrid, donde es discípulo de Rey Pastor, de Plans y de Vegas. Desarrolla su tesis sobre problemas de mecánica relativista y, graduado doctor con nuevo Premio extraordinario, continúa sus estudios de ingeniería, aunque por breve tiempo. Le atrae la función docente; a los veinticinco años obtiene la Cátedra de Matemáticas del Instituto "San Isidro", de Madrid, en reñida oposición contra veinte contrincantes, en su mayoría catedráticos. A raíz de este triunfo Rey Pastor le propone colaborar en la confección de libros didácticos modernos adaptados a la mentalidad escolar: con tal colaboración se inicia la evolución didáctica matemática media en nuestra Patria.

Siendo ya catedrático de "San Isidro" termina sus estudios de ingeniería industrial, completando la formación científica con el panorama de las aplicaciones técnicas. Con ello adquiere una amplia visión de la Matemática, en su doble aspecto puro y aplicado, que proyectará luego constantemente sobre su enseñanza en todos los grados y matices. Profesor auxiliar, primero, y titular después en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, de Madrid, desarrolla en ella desde el primer momento una considerable labor, contribuyendo con sus publicaciones y su acción de cátedra a elevar notablemente el nivel matemático del alumnado de ingeniería. Paralelamente a su tarea docente media y superior, efectúa numerosos trabajos de investigación sobre cuestiones diversas de Matemática pura y aplicada, que le llevan a ocupar un sillón en la Real Academia de Ciencias de Madrid, después de haber participado en diversos certámenes y conferencias científicas internacionales.

Tanto como la cosecha de nuevos triunfos científicos le interesa a Puig Adam el cuidado de la nueva semilla. No contento con haber promovido una reforma profunda de métodos, se afana en la búsqueda de nuevos modos de enseñar, que atraigan la afectividad de los niños y de los adolescentes hacia la Matemática. Nombrado en 1955 miembro activo de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática, mantiene una extensa relación internacional acerca de todos los arduos problemas que el mundo docente tiene planteados en relación con el desarrollo de la Matemática y sus aplicaciones en nuestro siglo y de la consiguiente necesidad de reforma de programas y procedimientos didácticos. De la repercusión en España de esta su labor metodológica damos reseña al final del Capítulo III de este libro.

Puig Adam es autor de más de veinte libros de Matemáticas (sin contar entre ellas las múltiples readaptaciones de los textos de Bachillerato escritos en colaboración con don Julio Rey Pastor) y de más de un centenar de trabajos de investigación y de artículos sobre temas diversos en conexión con la Matemática. Cerca de la tercera parte de estos últimos se refieren a la enseñanza.

Labor tan notable y copiosa se ve sellada por uno de los realces más estimado por Gracián para el sabio: la modestia, patrimonio de las almas magnánimas, que —en frases de Buytendijk— se refleja en la "servicialidad", en el sacrificio del "yo" al bien de los demás. Esta virtud es, tal vez, el broche de oro de las cualidades humanas de Puig Adam.

Quedan sólo unas palabras, justificando este libro. Como homenaje a la labor renovadora del ilustre profesor y considerándolo a la vez de interés, tanto para los que se dedican a la enseñanza de la Matemática como para los que se ven atraídos por sus problemas, nos pareció oportuno reunir en un volumen la producción de Puig Adam en el campo teórico general de la didáctica matemática. Ante la favorable acogida que nuestro proyecto tuvo por parte del Ilmo, Sr. Director General de Enseñanza Media, doctor don Lorenzo Vilas López, solicitamos del autor su autorización y su ayuda, que nos fué brindada generosamente. El mismo Puig Adam *ha seleccionado de su mencionada producción aquel conjunto de temas que reflejan su labor y su credo didáciicos y los ha agrupado en capítulos, según una línea conceptual que permite apreciar el estado y la importancia presentes de la didáctica matemática al que tanta contribución personal ha aportado.*

El capítulo primero reproduce una conferencia y un artículo cuyo conjunto constituye lo que pudiera llamarse "una presentación estética y funcional de la Matemática", que es tanto como decir sus valores de belleza y su vinculación al progreso técnico de la humanidad. Por eso lo hemos titulado "Una visión humana de la Matemática".

El capítulo segundo contiene tres muestras de proyección de dicha Matemática a la técnica futura (servomecanismos, teoría de la información, lógica formal y conmutación); tres simples ejemplos que bastarán para calar el alcance del pensamiento matemático de nuestros días y para hacer sentir la necesidad de una reconsideración profunda de los problemas de la enseñanza matemática en el mundo moderno.

El capítulo tercero estudia la evolución de la didáctica matemática en relación con la evolución de la propia Ciencia y traza un programa de renovación de métodos y modos de enseñar en nuestra Patria, programa que se halla en pleno desarrollo.

En el capítulo cuarto se cristalizan los principios fundamentales de esta nueva didáctica, cerrando así la primera parte del libro, que titulamos precisamente: "Los principios generales".

La segunda parte se dedica a la didáctica matemática en acción. Abre esta parte el capítulo quinto, en el que se expone, en tres artículos, lo más esencial de las didácticas específicas en los distintos campos conceptuales de la Matemática elemental a lo largo de la Primera y Seganda enseñanzas.

El capítulo sexto se dedica íntegramente al importante problema del material didáctico matemático, incluyendo en él los nuevos recursos visuales del film matemático, así como el abundante material ocasional que puede extraerse de la propia vida y en particular de los juegos de los escolares.

Finalmente, en el capítulo séptimo y último, se reproducen varias lecciones desarrolladas según los nuevos modos eurísticos, y en él hallará el lector abundantes muestras del uso didáctico del material anteriormente descrito.

Todavía nos ha parecido interesante cerrar el libro con algunos apéndoces conteniendo artículos varios del autor, relacionados con el tema didáctico: "Formación del Profesorado de Matemáticas", "La vocación matemática", "Consejos dados a los alumnos en sesiones de despedida" etcétera. Creemos que todos ellos constituyen un digno broche del libro que presentamos hoy al público docente español e hispanoamericano.

* * *

Junto a las facilidades concedidas por Puig Adam, al prestarse a efectuar la selección de sus trabajos, no dejó de manifestarnos algunos reparos, que consignamos atendiendo su ruego: Uno de ellos, su temor personal de que resulte algo prematura la recopilación, cuando todavía juzga su obra en pleno desarrollo y evolución; otro, la inquietud que le producen las repeticiones en que incurre, repeticiones que, si resultan forzosas al exponer las mismas ideas a públicos diferentes, las considera el autor injustificadas y machaconas en una exposición de conjunto. Para evitarlo ha sometido los propios textos a varias mutilaciones que nosotros hemos aceptado, desaconsejando, en cambio, otras, por estimar lícitas y aun necesarias para la fijación de ideas ciertas reiteraciones, que constituyen tal vez el sello característico de su credo didáctico.

En lo de estimar prematura la aparición de un "corpus" o síntesis de una obra en desarrollo, el lector juzgará. Nosotros no participamos de los temores del autor y, lejos de pretender dar por clausurado con tal síntesis este desarrollo, entendemos favorecerlo y estimularlo, suministrando al lector el panorama de su evolución y mostrándose los nuevos y amplios horizontes didácticos que con ella se han abierto.

La mayor parte de los artículos, trabajos y conferencias reproducidas en esta obra han sido publicados (total o parcialmente) en las siguientes Revistas: «Matemática Elemental», «Gaceta Matemática», «Revista de Psicología General y Aplicada», «Las Ciencias», «Revista de Educación», «Atenas», «Bordón», «Vida escolar», «Arquímedes», «Matematica & Paedagogia», «Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques», «L'enseignement des Sciences», «Boletín Pedagógico de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral» y en publicaciones de esta última Institución y de «Editorial Labor». A todas ellas, y especialmente a «Editorial Labor», manifestamos nuestra gratitud por las facilidades concedidas, y al autor por las gestiones que en tal sentido ha realizado, así como por su desinteresado trabajo de selección y recopilación.

DACIO RODRÍGUEZ LESMES
(Inspector Central de Enseñanza Media)

PARTE PRIMERA

LOS PRINCIPIOS GENERALES

CAPITULO PRIMERO

UNA VISION HUMANA DE LA MATEMATICA

§ 1. LA MATEMATICA Y LA BELLEZA

ESPECIALIZACIÓN Y UNIVERSALISMO

El progreso ha impuesto la especialización a tal punto, que difícilmente concebimos hoy aptitudes universales, ni aun siquiera genéricas, en los individuos. No admitimos más que aptitudes específicas; por ejemplo, para una ciencia determinada, y dentro de ella para una rama precisa, y aún preguntamos: ¿en qué sección, en qué recoveco, en qué asunto, en qué materia, en qué partícula...? ¿Cómo concebir, pues, la superposición de un interés científico y de una inquietud artística? ¿Profesor de matemáticas con vocación musical, con veleidades artísticas? ¡Inconcebible!

Es curiosa esta tendencia que tenemos los humanos a encasillarnos en lo científico y en lo artístico lo mismo que en lo político. Como si fuera posible ordenar en fila o en cuadrícula los complejos de infinitas componentes que son nuestras propias almas.

Odiosa atomización del trabajo la que, con mengua del desenvolvimiento integral de nuestro espíritu, hace cada vez más difícil el florecimiento de mentalidades universales como las de los antiguos filósofos, a quienes todo lo humano interesaba.

¡Cuántas veces, en horas en las que, soñando despierto, mi fantasía vaga impulsada por el deseo, he sentido como una envidia, como una nostalgia

---

[1] Conferencia dada en el salón de actos del Instituto Francés, de Madrid. Publicada en la revista «Matemática elemental», 4.ª serie. Tomo I. 1941.

ancestral de los siglos aquellos de Grecia, del Renacimiento, en los que, sobre la cuna de la Ciencia y del Arte, era posible abarcar, en una vida intensa, vastos panoramas de conjunto, y cultivar un poco todas las flores del encantado jardín de la creación espiritual! La frondosidad de la enmarañada selva creada impide hoy ya toda dilatada perspectiva. ¡Cuántas veces, envidiando la arrebatadora y vibrante vida de un Leonardo, por ejemplo, me he sentido impulsado hacia infantilismos creadores, hacia un robinsonismo intelectual, despreciando la previa información, por temor de ahogar mi propio impulso en el conocimiento anonadante de lo ya conocido!

El doloroso dilema es éste: O la especialización intensa, sinónima de esclavitud angustiosamente aniquiladora, o el enciclopedismo libre, multifacético, de extensa vibración, pero, por lo mismo, carente de profundidad. No sabría decir qué es lo más moral, pero sí qué es lo más bello. Por ello estimo indispensable conjugar la polarización, que impone el interés colectivo, con el desarrollo global de facultades, que aconseja el noble interés individual de superación.

VERDAD, BONDAD Y BELLEZA

Fines absolutos del alma humana, en el camino de su perfección, son la verdad, la bondad y la belleza; por ello, Ciencia, Etica y Arte debieran ir constantemente de la mano en toda educación integral del espíritu, es decir, del entendimiento, de la voluntad y del sentimiento; por ello, educar es, en el fondo, cultivar a un tiempo el conocimiento de lo verdadero, la voluntad de lo bueno y la sensibilidad para lo bello.

Esto sólo establece ya un nexo entre lo verdadero, lo bueno y lo bello: su carácter común de meta, de fin, de aspiración del alma humana en su acercamiento a Dios, perfección suprema.

En el cultivo de lo verdadero, ocupa posición central la matemática; eje, armazón, estructura, esqueleto de toda la filosofía natural. Tenemos, pues, un hilo sutil de enlace entre lo bello y lo matemático, que nos induce a ulteriores reflexiones.

UNA PREGUNTA INGENUA

¿Hay poesía en la matemática?, me preguntaba, en cierta ocasión, una alumna de marcadas aficiones literarias. ¿Por qué no ha de haberla?, contestábale yo. ¿Por qué han de estar vedadas, al edificio lógico de la matemática, la armonía, la perfección, la simetría de líneas, la unidad de conjunto y aun la emoción misma, la belleza en suma a que tú te refieres al hablar de poesía y que, sin duda, reconoces en los edificios arquitectónicos y en las obras de arte en general? Y ¿por qué no ha de haber, asimismo, una sensibilidad especial capaz de captar esta belleza abstracta, lo mismo que se capta la belleza concreta de forma material? No penetrará, quizá, a nuestro espíritu por la vía directa de los sentidos; el camino de penetración es mucho más largo y difícil, pero existe; no te quepa la menor duda.

Es frecuente imaginar los matemáticos como seres extrahumanos, desprovistos de sensibilidad para lo bello, y, sin embargo, es corriente entre nosotros hablar, en nuestra misma ciencia, de demostraciones elegantes, de problemas bonitos, de teorías bellas...

PLANTEO DE LA CUESTIÓN

Todo esto contestaba yo a mi discípula, tratando de ilustrar mis afirmaciones con algunos ejemplos elementales de resoluciones y demostraciones elegantes, en contraste con otras pesadas y machaconas. No sé si mi ingenua alumna se dió por convencida; ignoro si la sonrisa con que me escuchaba, o parecía escucharme, era de aprobación, de escepticismo o si, no tan ingenua, sonreía simplemente por haber esquivado con su pregunta todas las que yo iba a formularle sobre la lección del día.

Trascendente o frívola, su pregunta quedó latente en mi espíritu, acuciándome nuevamente cada vez que la palabra «inconcebible» volvía a herir mis oídos, como expresión corriente y vulgar de una pretendida incompatibilidad entre las vocaciones matemática y artística.

La pregunta entraña, en efecto, no pocas cuestiones arduas de dilucidar: ¿En qué consiste esta sensación de indiscutible belleza que experimentamos los matemáticos ante la adquisición de ciertas nuevas ideas, ante la asimilación de determinadas teorías? ¿Qué punto de relación tiene la creación matemática con la creación artística en general? Y por retruécano: ¿Qué hay en la obra estética que tenga algún sentido matemático? En resumen: ¿Qué hay de bello en lo matemático? ¿Qué hay de matemático en lo bello?

I. ¿QUÉ ES LO BELLO?

UN POCO DE HISTORIA

Empecemos por uno de los más antiguos documentos. Se trata de un diálogo de Platón, *Hipias mayor*.

Sócrates propone a Hipias investigar qué es lo que hace bellas las cosas. Distintas soluciones son analizadas: Lo bello es lo conveniente; lo bello es lo que conduce al objeto, lo útil; lo bello es lo agradable, lo que conduce al bien; lo bello es lo que deleita por la vista y por el oído... Todas las pretendidas soluciones son sucesivamente rebatidas por Sócrates, unas por falsas, otras por incompletas, y la pregunta, repetida hasta la saciedad en el diálogo: ¿en qué consiste la belleza? queda en el aire, como una inquietud sin solución, desafiando al futuro. Parece como si Platón, por boca de Sócrates, presintiera en este diálogo algunas de las teorías estéticas por las que ha ido fluctuando la humanidad pensante en el curso de los siglos. La hedonista pura: el arte por el placer de los sentidos, tan poco dignificante para los poetas que indujo al propio Platón a excluirles de su República perfecta; y la teoría moralista pedagógica (Estrabón, Plutarco..., remozada en la Edad Media por no pocos escolásticos), el arte por el bien, el arte por la utilidad, que reduce el arte a medio para la consecución de fines superiores o simplemente ajenos al arte, y que, por lo tanto, sigue entrañando una concepción disminuída del mismo.

No aporta mayor claridad Aristóteles, quien tan pronto incluye la belleza en la bondad, en la grandeza, en el orden, como la da por indefinible. No obstante, su figura tiene interés aquí, pues enlaza el tema con las matemáticas, según él necesarias para estudiar las cualidades de orden y de simetría que, quizá por vez primera, aparecen como características de ciertos aspectos de la belleza [2].

Más elevada es la concepción mística de Plotino, para quien la belleza es reflejo de lo divino y actúa de dentro a fuera. Así, el arte ya no es la simple mímesis de los antiguos griegos y no debe reducirse a la pura imitación de lo que perciben los sentidos, sino que es fruto del espíritu, y éste,

---

[2] V. B. CROCE: *Estética*, Segunda parte, Cap. I.

a su vez, fuente de toda belleza. La teoría, perfecta o no, eleva por primera vez explícitamente el arte a su debido rango; y digo explícitamente, porque según la autorizadísima opinión de D. Marcelino Menéndez y Pelayo, elaborada a través de un profundo análisis de diversos fragmentos espigados aquí y allá en los *Diálogos* de Platón, esta misma teoría está implícitamente contenida en la obra platónica.

Siguiendo a nuestro ilustre polígrafo, reflejemos ahora las opiniones de los filósofos cristianos en este punto. Las ideas de San Agustín sobre lo bello, que fueron objeto de un libro especial, por desgracia perdido, han de conjeturarse por fragmentos de otras obras suyas. En unas, da por forma de la belleza, la unidad y la integridad; atribuye, en otras, un valor intrínseco a lo bello, independiente de toda relación externa como es lo útil; y preside, en todas, la concepción cristiana, expresada en este apóstrofe de las *Confesiones*: «Ninguna cosa habría bella si no hubiera recibido de Ti la hermosura.» Fuera de esta excelsa concepción, todo el sistema estético de San Agustín se cifra en esta palabra: «armonía». Para él, donde hay un orden, donde hay armonía, hay belleza.

Resume Menéndez y Pelayo la doctrina de Santo Tomás acerca de la belleza, en tres conclusiones fundamentales. Primera, diferencia racional entre el bien y la hermosura, en cuanto el uno se refiere principalmente a la facultad apetitiva y la otra a la cognoscitiva. Segunda, el bien es causa final, lo hermoso causa formal. Tercera, la belleza consiste en cierta claridad y debida proporción [3].

Veamos los racionalistas del XVII y del XVIII. Poca luz aporta Descartes al problema; su sistema excluye la fantasía; la poesía no es admitida más que en tanto está sujeta al intelecto. Más explícitamente intelectualista es el cartesiano Crousaz, para quien las ideas esenciales de la belleza son «la variedad templada por la unidad, la regularidad, el orden y la proporción»; ideas que no han nacido de la fantasía ni obedecen al capricho, sino que pueden discutirse y analizarse como tales ideas. Y más concreto aún es el P. André, quien distingue en la belleza diversos grados: una belleza esencial, independiente de toda institución, otra belleza natural, y una belleza humana en cierto modo arbitraria; y aún añade la distinción, que no es

---

[3] V. M. MENÉNDEZ PELAYO: *Historia de las Ideas Estéticas en España*, tomo I.

suya, entre belleza sensible o del cuerpo, y belleza inteligible o del espíritu [4].

El intelectualismo de Leibnitz no va mucho más allá de una pura y simple confesión de impotencia, con su donosa clasificación de los conocimientos en oscuros y claros, y éstos en confusos y distintos. Para Leibnitz, los juicios de los artistas son claros pero confusos, es decir, no distintos: «On ne les fait connaître que par des exemples, et au reste il faut dire que c'est un je ne sais quoi, jusqu'à ce qu'on en déchiffre la contexture.»

Aparece en este momento Baumgarten, que trata, siguiendo la corriente de su tiempo, de crear una Estética como ciencia del conocimiento sensible, es decir, de las ideas claras y confusas de Leibnitz. Muy discutido el valor de su sistema, considerado por otros como verdadero padre de la ciencia estética, hemos de consignarle como el primero que usó la palabra *Aestetica*.

Interesantísimo es, especialmente para nosotros los españoles, la figura del P. Arteaga, jesuíta madrileño de fines del XVIII, autor de unas *Investigaciones filosóficas sobre la belleza ideal,* quien, después de declarar, con gran juicio, insolubles las cuestiones relativas al origen y formación de la idea de belleza, que acepta ya formada en nuestro espíritu, estudia la belleza artística en sus distintas manifestaciones en cada una de las artes.

Y pasemos al siglo XIX. Imposible es resumir a Kant en una cuartilla. Según la versión de Croce (autor, como se sabe, de una obra de Estética que ha tenido gran resonancia a comienzos del siglo actual) el arte no es para Kant belleza pura que prescinde de hecho del concepto, pero es una belleza adherente que supone un concepto y gira alrededor de él. La idea estética es una representación de la imaginación que acompaña a un concepto determinado. La belleza artística no es una cosa bella, sino la bella representación de una cosa. «Es bello lo que place sin concepto.» De este modo, dice Croce, viene a afirmar la existencia de una zona espiritual donde se despliega una actividad sentimental que llama juicio estético. «Es bello lo que es objeto de un placer universal.» Pero, ¿qué es este dominio misterioso?, se pregunta Croce, escépticamente. ¿Qué es este placer desinteresado que experimentamos ante los colores puros, ante los tonos puros, ante la belleza adherente en cuanto se prescinde del concepto a que se adhiere? Nuestra respuesta, sigue diciendo Croce, es que no existe este dominio, y que los casos aducidos, o son casos de lo agradable en general, o fenómenos artís-

[4] V. M. MENÉNDEZ PELAYO: *Historia de las Ideas Estéticas en España,* tomo III.

ticos de expresión; y añade: Kant, que se revolvía furiosamente contra los sensualistas y los intelectualistas, no era tan severo con aquella corriente neoplatónica del siglo XVIII. Las ideas de Winckelmann especialmente, le causaron gran sensación. En uno de sus cursos se encuentra la distinción entre materia y forma: en la música, la melodía es materia, y forma, la armonía..., y escribe también en su *Crítica del Juicio:* «En todas las artes plásticas, en cuanto son bellas artes, el diseño es lo esencial; no lo que place en la sensación, sino lo que se aprueba en su forma constituye el fundamento del gusto; los colores que iluminan el diseño pertenecen al estímulo sensual...»

Y... terminemos con ello ya, la enumeración de opiniones. Es preciso cortar en algún punto, aun a sabiendas de lo incompleto del cuadro trazado y de la infinidad de teorías que, en esta enconada porfía, quedan así sin reflejar. Ni Lessing, ni los idealistas como Schiller. Shelling, Hegel, que suponen un retorno al misticismo neoplatónico; ni el escéptico Schopenhauer, ni el pedagogo Herbart; ni la escuela escocesa, en cierto modo psicológica, ni la inglesa, ni la más reciente y singular teoría de Croce, que estimo demasiado categórica en la identificación del fenómeno artístico con el fenómeno expresivo, nos iban a resolver el enigma.

Sirvan estas torpes y largas zancadas mías a través de la historia del pensamiento estético, para afirmar, al menos, que, pese a los esfuerzos realizados, la interrogante socrática sigue en pie. «Todos hablan de belleza y apenas hay dos que apliquen este vocablo a una misma idea», exclamaba el padre Arteaga. Con razón, pues, prescindía él de definirla, y es que, con la multiplicidad de definiciones ocurre lo que con la diversidad de medicamentos. Cuando de un mal se pregonan muchos remedios, puédese afirmar que ninguno sirve. Uno sólo que sirviera habría anulado a los demás.

BELLEZA FORMAL Y BELLEZA EMOCIONAL

Con todo, podemos darnos cuenta de que distintas categorías de belleza han sido puestas sobre el tapete. Voy a recoger sólo dos: una belleza formal (el orden y la simetría de Aristóteles, la armonía de San Agustín, etcétera...) sobre la que con preferencia han especulado los filósofos de la estética, y una belleza sustantiva (la belleza idea de Platón y los neoplatónicos; la belleza divina de los místicos...) a la cual me permitiréis que atribuya el valor emocional de lo bello. Con rubor me permito opinar; pero, para mí, son necesarias las dos categorías de belleza; y no puede haber obra bella sin emoción y sin arte para expresarla; que el arte es precisamente esto: dar forma bella a la bella emoción. Obras de arte puede haber perfectas en su desarrollo, pero frías, vacías, carentes de fondo, de emoción; y no vale buscar recursos emotivos en la simple ruptura innovadora de forma, admisible cuando va acompañada de riqueza de contenido; pero inadmisible como única fuente emocional, que deriva pronto en peligrosa pugna de «ismos», deseos de singularización que acaban por no tener nada de común con la honrada y auténtica emoción estética [5].

II. ¿QUÉ ES LO MATEMÁTICO?

LO MATEMÁTICO «PER ACCIDENS» Y LO MATEMÁTICO «PER SE»

Si arduo y quimérico ha sido pretender definir lo bello, no lo es menos tratar de caracterizar en pocas palabras lo matemático.

Todos sabemos el papel que la matemática desempeña en el estudio de los fenómenos naturales; el hombre, impotente ante la enorme complejidad de los mismos, trata, en su afán especulador, de sustituir esta complejidad por la esquemática sencillez de unos entes de razón, sobre los cuales pueda discurrir, cómodamente, el razonamiento puro. Obtenidos los frutos de este razonamiento, proyéctanse nuevamente en el campo de la realidad; y así resulta que, los conceptos puestos en juego por la matemática aplicada, son sólo conceptos matemáticos «per accidens» a través de un doble proceso de abstracción y de concreción, en el que la matemática ocupa una posición central de mecanismo intermediario. Pero una vez elaborados estos entes de razón (más o menos ajustados a los que la realidad nos presentara) adquieren pronto carta de ciudadanía en nuestra mente, se enseñorean de ella, y conviértense en conceptos matemáticos puros, en conceptos matemáticos «per se», juguete precioso de nuestra fantasía.

---

[5] No queremos significar con esto que todos los tipos de escuelas que se han categorizado con palabras terminadas en «ismo» carezcan de credo estético y estén vacías de contenido emocional.

LA CORRELACIÓN GENERADORA
DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

A esta génesis y a este juego vamos a referirnos en lo que sigue. En esta génesis y en este juego es esencial el concepto de correspondencia, de enlace, de correlación. Me explicaré mejor. Si la relación es esencial para la existencia de un juicio, si la idea de relación es la esencia misma del pensamiento, el pensamiento matemático nace al considerar conjuntos de relaciones o juicios y al establecer, a su vez, conexiones o relaciones entre ellos; conexiones que pueden ser: *simultáneas,* es decir, en *derivación* (así se engendran multitud de conceptos abstractos como el de número, medida, función, transformación, sustitución, grupo); *sucesivas,* es decir, *en serie* (así se engendran las cadenas de juicios características de las demostraciones, por deducción, por inducción completa); *mixtas,* en serie y derivación (enlaces multipolares, generadores de teorías completas, tanto más compactas cuanto más enlazados se hallan los juicios que las constituyen).

Cualquiera que haya estudiado un poco de matemáticas sabe que el Análisis se edifica sobre el concepto de número, que nace, a su vez, de la *coordinabilidad* de conjuntos, es decir, de una correspondencia o correlación entre sus elementos constitutivos, y que la Geometría, en la más amplia acepción de la palabra, se edifica sobre el concepto de transformación o correspondencia entre los elementos de las figuras; que la medida es una correspondencia entre magnitudes y números; que una función es una correspondencia entre valores de variables o entre entes abstractos en el moderno Análisis general, etc. No parece, pues, aventurado tomar como una de las claves del pensamiento matemático la idea de correspondencia o correlación, es decir, de relación simultánea antes aludida. Y con esta pequeña advertencia me contento por el momento, ya que no he de necesitar gran cosa más para lo que luego ha de seguir.

INTERMEZZO

UN PRELUDIO DE CHOPIN Y UN OCTÓGONO REGULAR

Puesto que es imposible delimitar, de modo preciso, los contornos de lo bello, quién sabe si por su carácter excesivamente primario, y el perfil de lo matemático, tal vez por su carácter excesivamente erudito, tratemos al menos de establecer analogías y diferencias que permitan satisfacer de algún modo las preguntas que han sido origen de esta digresión. ¿Qué hay de bello en lo matemático? ¿Qué hay de matemático en lo bello? Pero..., percibo nuevamente el aleteo del escepticismo: ¿no serán ganas de perder el tiempo?, ¿qué tiene que ver, por ejemplo, un preludio de Chopin con un octógono regular?

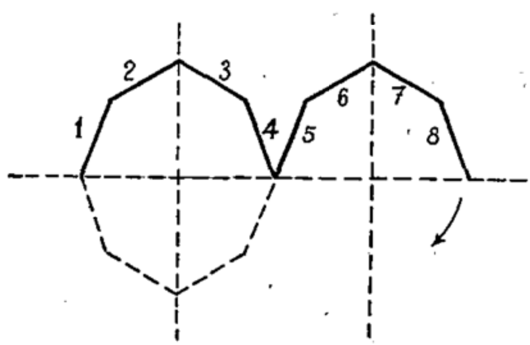
Y, sin embargo..., escuchad el siguiente preludio, una de las composiciones más sencillas del gran romántico, que, como ejemplo, se me ha ocurrido presentaros, y analizad conmigo su constitución.

7.

Ocho frases musicales le componen, iguales de figura rítmica y de duración, en perfecta simetría y periodicidad. Si de algún modo hemos de esquematizarlas geométricamente, nada más sencillo y natural que representarlas mediante trazos rectilíneos de igual longitud, y dispuestos en forma que traduzcan esta simetría y periodicidad musicales.

Las dos primeras frases forman un movimiento creciente, representado, simbólicamente, en la figura por los dos primeros trazos ascendentes de la línea dibujada. A partir de este momento, otras dos frases simétricas constituyen la réplica descendente, representada por los dos siguientes trazos. Nuevamente crece el interés en las dos frases siguientes, que inician un segundo período idéntico en sus comienzos al primero, y representado por los dos nuevos trazos ascendentes; llegamos así al segundo máximo, acusado por un singular acorde que suspende la atención y, finalmente, otras dos frases vuelven a restablecer, plácidamente, el reposo con la suave cadencia final.

Con miras a lo que más adelante he de repetir sobre la periodicidad de la música, he dibujado en el encerado una gráfica poligonal en cadena,



y no cerrando ciclo; pero si queréis volver al punto de partida, dispuestos a repetir tan delicioso como breve poemita, no tenéis más que cerrar el ciclo uniendo las dos mitades y tendréis el preludio de Chopin esquematizado en un hermoso octógono, que si no es regular poco le falta, a juzgar por la doble simetría que presenta y que traduce netamente la simetría y periodicidad cíclica de la composición repetida.

Perdonadme esta pequeña picardía de prestidigitador, que puede parecer chanza. No pretendo sacar por el momento consecuencias trascendentes de ella; me contento con limpiar el campo de prejuicios, por muy sólidos que parezcan, y preparar así mejor el terreno, para lo que, con vuestra venia, aún me queda por decir, después de este «intermezzo» con el que he tratado de aliviar unos momentos vuestra atención.

III. ¿QUÉ HAY DE BELLO EN LO MATEMÁTICO?

LA BELLEZA FORMAL EN LA MATEMÁTICA

Si nos atenemos, de momento, a la belleza formal, y consideramos los atributos de unidad, de orden, de armonía y de simetría, que desde los más remotos tiempos considéranse esenciales, no necesitaré esforzarme mucho para llevar al convencimiento de mis oyentes que también la ciencia, y en particular la matemática, es un canto constante a la unidad, al orden y a la armonía. ¿Qué es la ciencia sino un eterno esfuerzo para sistematizar el estudio de los fenómenos naturales, es decir, para presentarlos ordenadamente a través de la unidad y armonía de concepción que le imprime la matemática?

Este aspecto de lo bello, que se valora por la existencia de relaciones de enlace entre los elementos de una obra artística, que para la música se traduce en unidades de tonalidad, de ritmo o simplemente temáticas; que para las artes plásticas se aprecia en afinidad o contraste de líneas, de color; que para la arquitectura consiste en armónica distribución de masas, en relaciones de proporción; que para la poesía supone coordinación de ideas, relaciones de rima, constancia de ritmo,... se refleja, pues, asimismo en matemáticas mediante la existencia de una trabazón análoga en las teorías, es decir, en una red de enlaces entre los elementos lógicos que las constituyen, haciéndolas compactas, sólidas, bellas en el sentido de equilibrio y unidad.

Sólo así se explica que haya sido el mismo genio griego el que haya impreso honda huella sistemática lo mismo en el Arte que en la Ciencia. ¿Qué son los *Elementos* de Euclides sino una estructuración profundamente bella de los desordenados conceptos matemáticos de sus predecesores? ¿Y qué son los mismos conceptos matemáticos, según se ha dicho, sino frutos abstractos de tales enlaces, de tales correspondencias, de tales simetrías?

En resumen: los atributos de la belleza formal, de la belleza artística, están vivos en la matemática lo mismo que en el arte; y de aquí el por qué de la sensación de inefable belleza que experimentamos los que nos dedicamos al estudio de las ciencias, ante la simple contemplación global de una teoría, de una síntesis, incluso antes de haber penetrado en ella.

Recuerdo a este respecto la impresión de equilibrio, de armonía, de orden, emotiva y sedante a un tiempo, que experimenté cuando por vez primera, adolescente aún, abrí el *Análisis Algebraico* del que, años después, fué mi querido y admirado maestro, D. Julio Rey Pastor. Con sólo leer el índice de la obra, era como si la Providencia iluminara súbitamente el cuarto oscuro de mi inteligencia, donde se amontonaban de cualquier modo escolios, teoremas, corolarios..., trastos viejos de una mohosa almoneda pedagógica, y pusiera un orden mágico donde todo era antes desorden y confusión. La misma sensación volví a experimentar más tarde en el campo de la Geometría, al conocer el famoso *Programa de Erlangen*, de Klein, donde, en admirable síntesis, aparecían a mi vista enlazadas sus distintas ramas a través de la teoría de grupos.

LA BELLEZA EMOCIONAL EN LA MATEMÁTICA

Sentado lo anterior, en cuanto a la belleza formal se refiere, ¿podremos afirmar, análogamente, la existencia de una belleza emotiva en el acto de posesión de una verdad científica? Mi contestación es también afirmativa, pese a lo que, a primera vista, pudiera parecer de antagónico entre los valores lógicos y los valores sentimentales.

La emoción ante una obra de arte es, en el fondo, un fenómeno de resonancia entre el que la creó y el que la contempla. He aquí por qué, para explicarme mejor, habré de remontarme a la génesis de la invención matemática, tan semejante, como veréis, a la creación artística, y apreciaréis entonces con qué cautela hay que leer las hábiles palabras de Juan Bautista Vico (filósofo italiano del siglo XVII a quien Croce atribuye patrióticamente la paternidad de la ciencia estética), palabras con las que pretende establecer una irreductible antinomia entre el Arte y la Metafísica, entre la Poesía y la Lógica, entre los productos de la fantasía y los del raciocinio.

«Los estudios de la Metafísica y de la Poesía —afirma Vico— son opuestos entre sí, puesto que aquélla limpia la mente de los prejuicios de la fantasía, y ésta se sumerge y engolfa en ellos; porque aquélla resiste al juicio de los sentidos y ésta hace su principal regla de ellos; porque aquélla debilita la fantasía y ésta la quiere lozana; porque aquélla se jacta de no hacer del espíritu cuerpo y ésta se deleita principalmente en dar cuerpo al espíritu. De donde resulta que todos los pensamientos de aquélla son abstractos y los conceptos de ésta son tanto más bellos cuanto más corpulentos son... Así es que en todos los tiempos conocidos, en todas las lenguas que puedan sernos familiares, no hubo nunca un hombre que fuera a la vez gran metafísico y gran poeta, de la casta excelsa de los poetas de que fué Homero padre y príncipe. Los poetas son el sentido; los filósofos el intelecto de la humanidad. La fantasía es *tanto más robusta cuanto más débil es el raciocinio*» [6].

Donosa proporcionalidad inversa la que establece con estas palabras el filósofo aludido. Para replicar a ellas bastaría pronunciar los nombres de Leonardo de Vinci, de Cauchy, Saint-Säens, Le Verrier, y de tantos otros ejemplos de vocaciones simultáneas para el arte y la ciencia. Familiar entre nosotros es la figura de Echegaray, premio Nobel de literatura y físico-matemático eminente.

Por el contrario, hay que afirmar, y afirmar bien alto, que no es posible la existencia de un verdadero matemático, de un matemático creador, sin imaginación, sin fantasía. Recuérdese la frase del gran Weierstrass en carta a la matemática Sofía Kowalewski: «Un mathématicien n'est pas digne de ce nom s'il n'est pas un peu poète». ¿Pruebas? El testimonio de los propios matemáticos que aducimos a continuación.

PARALELO ENTRE LA INVENCIÓN MATEMÁTICA Y LA INVENCIÓN ARTÍSTICA

Ved cómo nos descubren Poincaré y Hadamard sus auto-observaciones en los álgidos momentos de la invención matemática. «Plus on étudie les lois de l'invention mathématique —dice Hadamard—, plus on s'aperçoit que ces lois sont, en gros, celles de la création intellectuelle en général: les différences sont beaucoup moins marquées qu'on ne serait tenté de le croire au premier abord».

Aquellos que suponen, erróneamente, que la matemática se ha engendrado con la misma fría prosopopeya con que quizá se la presentaron, fríamente, fríos profesores carentes de tacto e imaginación, atiendan a esta primera sorpresa:

«Par contre, un fait extrèmement général est l'apparition inmédiate d'une solution au moment d'un brusque réveil. J'ai dans ma propre ex-

[6] V. CROCE: Loc. cit. Parte 2.ª, Cap. V.

périence —sigue hablando Hadamard— un exemple très typique de cette nature : un chainon essentiel qui manquait a une théorie que je m'efforçais d'édifier s'est révélé à moi de cette manière, et cela dans une voie toute différente de celles auxquelles j'avais songé jusque là. C'est déjà, on le voit, un type d'inspiration mathématique».

Oidlo bien, es un matemático el que nos habla, y nos habla de inspiración. Testimonio de esta misma inspiración súbita, que tanto recuerda la de los músicos y poetas, aporta también Poincaré en su *Science et Méthode*; pero el ensayo interesantísimo de Poincaré en este punto no se limita a presentar el hecho, sino que trata de analizarlo, de explicarlo, y sienta su teoría del subconsciente, según la cual la creación matemática se compone de dos actividades, una, de excitación consciente, de solicitación frenética de ideas matrices; otra, de selección, de combinación de relaciones, cuyo mayor trabajo hace recaer en el subconsciente, zona misteriosa de actividad intelectual que no conoce el reposo, que selecciona constantemente, ofreciendo súbitamente a nuestra conciencia las combinaciones más fecundas para su ulterior análisis y estructuración; zona que yo llamaría más bien supraconsciente, para situarla por encima, no por debajo de la conciencia, distinguiéndola así de aquel otro subconsciente inferior que lo mismo nos abrocha los zapatos, nos hace el nudo de la corbata, que nos extravía una llave o un paraguas.

He aquí la frase clave de Poincaré: «Inventer c'est discerner, c'est choisir».

Paul Valéry, tan conocido en el terreno de las letras como Poincaré en el de las matemáticas, se expresa en parecidos términos cuando dice: «Il faut être deux pour inventer. L'un forme des combinaisons, l'autre choisit, reconnait ce qu'il désire et ce qui lui importe dans l'ensemble des communications du premier. Ce qu'on appelle génie est bien moins l'acte de celui-ci—l'acte qui combine—que la promptitude du second à comprendre la valeur de ce qui vient de se produire et a choisir ce produit».

La diferencia entre una y otra opinión está, fenómeno curiosísimo, en que Poincaré, *matemático,* cree en el subconsciente, y Valéry, *artista,* no cree en él: «Je ne sais pas ce que c'est que la subconscience», dice.

Para Paul Valéry hay en toda obra de arte una cierta proporción de dos constituyentes: lo espontáneo y lo articulado, digamos nosotros: lo inspirado y lo consciente. «L'idée première se propose telle quelle —dice—. Si elle excite le besoin ou le désir de se réaliser, elle se donne une fin, qui est l'œuvre, et la conscience de cette destination appelle tout l'appareil des moyens et prend le type de l'action humaine complète».

Y ved si este párrafo no es equivalente al que sigue, de Poincaré, sobre el proceso de la invención matemática:

«Tout ce qu'on peut éspérer de ces inspirations, qui sont les fruits du travail inconscient, ce sont des points de départ pour les calculs; quant aux calculs eux-mêmes il faut les faire dans la seconde période du travail conscient, celle qui suit l'inspiration, celle où l'on vérifié les résultats de cette inspiration et où l'on en tire les conséquences.»

RÉPLICA A JUAN BAUTISTA VICO

Este paralelismo de opiniones entre un poeta y un matemático, en cuanto a la génesis de sus respectivas creaciones, y que sin duda suscribirían cuantos matemáticos y artistas creadores ha habido, no deja lugar a dudas sobre la existencia de un valor emocional común en sus obras. En los momentos de excitación, de espasmo de creación, en los que el artista, lo mismo que el científico, reciben del Supremo Creador la luz de la inspiración ardientemente solicitada, llega la tensión emocional de uno y otro a su más alto grado, y queda impresa, latente en la obra, para quien sepa más tarde captarla y resonar con ella.

Y si a todo este proceso le llaman los poetas inspiración, imaginación, fantasía... ¿por qué han de estar vedadas estas palabras al matemático? No, no está en lo justo Vico cuando pretende presentar un antagonismo sustancial entre lo metafísico, lo racionalmente estructurado, y lo artístico. Sueña el poeta en las creaciones de su fantasía como sueña el matemático en las creaciones de su intelecto, muchas de las cuales son fantasía al fin, gozosos frutos de una intuición vibrante y excitada. Y si el estímulo del artista es la belleza natural, con la que tensa inicialmente el arco que ha de disparar su fantasía, así también halla el matemático, en los fenómenos naturales, el motivo inicial de especulación en sus geniales abstracciones. Luego es ya la imaginación la que elabora idea tras idea, juicio tras juicio, como el artista busca emoción tras emoción, al margen de la esclavitud primera de lo concreto, huyendo muchas veces adrede del imperativo de lo real, en un afán liberador en el que importa antes la belleza que la utilidad, y sin reconocer más cauce, más freno, que el sentido común que es al matemático lo que el buen gusto es al artista.

Es, sin duda, con este mismo convencimiento con el que dice Emile Picard en reciente discurso: «Les mathématiciens, dans leurs spéculations théoriques sont des artistes et des poètes dans le monde des nombres et dans celui des formes, sans qu'il y ait à faire de réelles distinctions.»

ANALOGÍAS Y DIFERENCIAS

La única y fundamental diferencia estriba en que el matemático opera principalmente sobre conceptos, sobre juicios, y el artista maneja sobre todo emociones, y con éstas no cabe inducir ni deducir, desapareciendo así, en la génesis de la obra artística, este doble proceso de inducción y deducción, característico de la investigación científica.

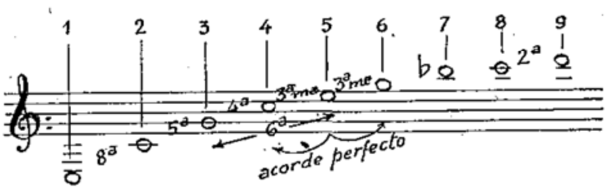
En cambio, caben en el Arte, como en la Ciencia, los procesos paralelos de análisis y síntesis, de abstracción y de concreción. Abstrae el artista, de las sensaciones naturales, los elementos, las materias primas, colores, sonido, formas, con los que dará luego realidad concreta a las creaciones de su fantasía; y al par que abstrae, analiza, es decir, descompone, y al tiempo que concreta, sintetiza, es decir, recompone, en síntesis maravillosas, de proporciones a veces gigantescas, como una basílica de San Pedro, una capilla Sixtina, una *Novena Sinfonía* o un *Parsifal*.

IV. ¿QUE HAY DE MATEMATICO EN LO BELLO?

Con las analogías y diferencias que anteceden, queda, en parte, contestada la pregunta recíproca que encabeza esta última parte de mi conferencia. Pero cesemos ahora de averiguar los procesos comunes y no comunes en el desarrollo de la obra artística o de la obra matemática; y tratemos de ver qué elementos estéticos, que puedan calificarse en cierto modo de matemáticos, intervienen en cada una de las bellas artes. Análisis tan dilatado no cabe en el corto espacio que me queda, ni pretendo abusar a tal punto de vuestra benévola atención. Me permitiréis solamente que dedique extensión preponderante al arte por mí preferido: a la música.

CARACTERIZACIÓN MATEMÁTICA DEL FENÓMENO MUSICAL

Si con el arco hacéis vibrar una cuerda de violín o de violoncelo y, en tretanto, deslizáis a lo largo de ella y de modo continuo un dedo fuertemente apretado, produciréis un gruñido atonal, grotesco, ridículo, que nada tiene de artístico. Si, por el contrario, apoyáis simplemente el dedo *sin apretar* y lo deslizáis, también rápidamente, no gruñe como antes la cuerda, sino que *canta* una sucesión, una salpicadura, de sonidos agradable: son los llamados *armónicos* del sonido principal que se produce al vibrar la cuerda libre. ¿A qué se debe la diferencia? Cualquiera que haya saludado la Física más elemental, sabe la causa. En el primer caso, vibra sólo la porción de cuerda libre, y como su longitud varía de manera continua, así también de modo continuo varía el número de vibraciones por segundo y, por tanto, el tono emitido. En el segundo caso, vibra la cuerda entera, pero solamente cuando el dedo pasa por uno de los pun-



tos de división de su longitud total en dos, tres, cuatro, cinco, etc... partes iguales, es decir, en términos físicos: cuando se producen un nodo, o dos, o tres, o cuatro..., intermedios. Los números de vibraciones son entonces doble, triple, cuádruple..., y los sonidos correspondientes, es decir, los armónicos, tienen con el sonido principal la posición indicada musicalmente en la figura, en el supuesto de que la nota fundamental sea la primera escrita, es decir, un do_2. Estos sonidos, se distinguen y relacionan acústicamente por los llamados intervalos y que son (como se indica en dicha figura): el intervalo llamado de octava, entre la tónica (que consideramos como primer armónico) y el segundo armónico (doble número de vibraciones); el intervalo de quinta entre el segundo y tercer armónico (razón de vibraciones 2 : 3); el intervalo de cuarta entre el tercero y cuarto (razón 3 : 4); el intervalo de tercera mayor entre el cuarto y quinto (razón 4 : 5), el de tercera menor entre el quinto y sexto (razón

5 : 6); el de sexta mayor entre el tercero y quinto (razón 3 : 5); el de segunda entre el octavo y el noveno (razón 8 : 9), etc. Estos intervalos musicales de segunda, tercera, cuarta..., ordenados a partir de una misma nota, engendran la escala, es decir, el ambiente tonal en que se desenvuelve la melodía. Ejecutados por grupos simultáneos en el orden en que aparecen en la sucesión de armónicos, engendran los acordes fundamentales de la armonía: acorde perfecto *(do, mi, sol)* y sus inversiones, acorde de séptima *(do, mi, sol, si bemol)* acorde de novena *(do, mi, sol, si bemol, re)*.

Ved, pues, cómo, en su origen, melodía y armonía deben el efecto grato de sus elementos a una selección que, instintivamente, efectuó el oído humano en la gama continua de infinitos sonidos (cuya totalización produce el gruñido amorfo carente de valor musical), aceptando sólo aquellos que pertenecen a una sucesión discreta cuyos números de vibraciones están en relaciones aritméticas sencillas con las del sonido fundamental.

Más sencillas aún son las relaciones numéricas que caracterizan los compases, es decir, el ambiente rítmico de la música: compás de dos, de tres, de cuatro, de seis, de nueve, de doce; rara vez de cinco, siete, etc.

Las relaciones entre la aritmética y la música son conocidas desde tan antiguo, que, por tal motivo, se clasificaba la música, junto a la aritmética, geometría y astronomía, en las artes del «quadrivium».

El enriquecimiento de la tonalidad con la escala cromática temperada, la progresión geométrica que la define y que se traduce en la curva exponencial del clavijero, los adelantos modernos de la acústica con el estudio matemático del movimiento vibratorio, etc., darían motivo sobrado para varias conferencias de empaque matemático; pero no voy, naturalmente, a fatigar a ustedes con erudición sobre la teoría de cuerdas vibrantes, tubos sonoros, etc.; por otra parte, no interesa tampoco al caso, pues no se trata ahora de la resolución matemática del problema físico, que exige elevados recursos, sino de la caracterización matemática del fenómeno sensorial. Y esto es muy sencillo y sabido también por cualquier alumno de Física elemental: las cualidades musicales de tono y timbre de una nota, es decir, de la célula musical, son sensaciones periódicas, producidas por los movimientos vibratorios de los cuerpos sonoros y de su transmisión por el aire a nuestro oído.

Si de la célula pasamos a la fibra, al tejido musical, entran ya en nuestra consideración otra suerte de fenómenos periódicos, ya apuntados en el breve «intermezzo» musical de antes. A poco que se analice la línea melódica de cualquier composición, se observa en seguida que puede descomponerse en frases o períodos análogos a los que observábamos en el preludio mencionado, frases en cuya delimitación juegan singular papel los cambios de armonía, y estos períodos que, *por regla general, suelen ser precisamente de cuatro ictus o compases,* imprimen el carácter regular de movimiento y reposo alternado necesario a la impresión de belleza formal de conjunto. La longitud de esta charla me impide ilustrar con variados ejemplos este aserto, como hubiese sido mi deseo; para los enterados, ello es innecesario; los iniciados pueden comprobarlo por sí mismos; basta con que lean los demás cualquier libro de composición musical [7].

Podréis alegar que tan estrecha y singular periodicidad no es quizá un elemento intrínseco espontáneo de la obra bella, sino una sujeción apriorística impuesta por el compositor en el desarrollo de sus ideas. Tal creía yo cuando, por vez primera, leí algo de teoría de formas musicales; pero mi sorpresa no tuvo límites cuando, analizando, a través de dicha lectura, mis propias composiciones musicales, hechas en su mayor parte en plena adolescencia, sin estudios teóricos ni prejuicios de ninguna clase, en simple y espontáneo diálogo con mi piano, descubría en ellas la misma tendencia a los períodos de cuatro compases, las mismas periodicidades preconizadas en la teoría, que parecen ser, por tanto, como verdaderos imperativos de orden y belleza de nuestro sentimiento musical.

Y si de los tejidos pasamos a los órganos, es decir, a las partes componentes de los cuerpos musicales (lieders, rondós, sonatas, sinfonías...) comprobaremos, nuevamente, cómo tales componentes se reiteran periódicamente, se enlazan en una superior distribución temática, que recuerda la equilibrada distribución de las masas de un edificio o de los capítulos de una obra científica o literaria, distribución que regula no sólo la forma sino también el fondo musical de la obra, graduando las emociones mediante periódicos contrastes. Vemos, pues, cómo la música se nos aparece como un arte esencialmente periódico, lo mismo en sus células que en sus fibras y tejidos, que en sus superiores estructuras formales y que en su fondo emocional. Vasto campo, en suma, de sensaciones y de emociones periódicas. Y esto

---

7 Por ejemplo, HUGO RIEMAN: *Composición musical,* «Colección Labor».

es, fundamentalmente, lo que tiene de matemática, y en gran parte también (no se ofendan los músicos) lo que tiene de bella.

No queda más que un enigma por resolver: ¿En qué consiste el valor emocional de un tema melódico? ¿Por qué unas notas dispuestas en cierto orden y con determinados valores rítmicos nos emocionan, y, en cambio, estas mismas notas, en otro orden o con otros valores, no nos dicen absolutamente nada? En este punto creo que la Matemática no tiene nada que decir; el valor emocional de una idea, a mi juicio, no puede ser explicado científicamente ni aun para las ideas de la misma Ciencia, por lo mismo que pertenece a otra esfera del mundo anímico, al mundo de los afectos .

ALGUNOS ASPECTOS MATEMÁTICOS DEL ARTE POÉTICO

También la periodicidad, concepto esencialmente matemático, es atributo formal de la poesía en el doble aspecto de rima, es decir, periodicidad de determinadas sensaciones fonéticas, y de ritmo, o sea, periodicidad de acentos. Fenómeno periódico de forma es asimismo la letrilla, el estribillo o ritornello, especie de rondó poético.

Quién sabe si reflejo de esta periodicidad poética es, en su origen, la periodicidad musical, ya que métrica y música profanas tuvieron cuna común en la juglaresca de todos los tiempos y edades.

Pero penetrando un poco más adentro del fenómeno poético, es decir, prescindiendo de la cáscara versificada o no, que envuelve la poesía, considerando sólo el bello juego de imágenes que maneja la fantasía del poeta, nos encontramos con el uso constante en poesía de la metáfora, fuente de las más deliciosas emociones. Para poner un ejemplo breve, escuchad la siguiente metáfora condensada de D. Pedro Antonio Ruiz de Alarcón:

> Lío tabaco en un papel; agarro
> lumbre, y lo enciendo; arde y a medida
> que arde, muere; muere y en seguida
> tiro la punta, bárrenla, y... ¡al carro!
> Un alma envuelve Dios en frágil barro
> y la enciende en la lumbre de la vida;
> chupa el tiempo, y resulta en la partida
> un cadáver. —El hombre es un cigarro.
> La ceniza que cae es su ventura,
> el humo que se eleva, su esperanza;
> lo que arderá después..., su loco anhelo.

Cigarro tras cigarro el tiempo apura,
colilla tras colilla al hoyo lanza;
pero el aroma... piérdese en el cielo.

¿Qué es lo que seduce en este soneto? No es el valor rítmico del verso, un tanto desdibujado en el primer cuarteto; ni es el valor fonético de las consonancias, algunas poco agradables como la consonancia en «arro»; ni es tampoco la imagen material sugerida del cigarro, que nada tiene de seductora. Es pura y simplemente la metáfora, el paralelismo o correspondencia entre los siguientes conceptos:

cigarro	hombre
papel	cuerpo, barro
lumbre	vida
arder	vivir
colilla	cadáver
ceniza	ventura
humo	esperanza
aroma	alma

paralelismo tanto más bello cuanto más sostenido. Y esta correspondencia que aquí vemos generadora de belleza, ¿no es acaso una correspondencia o correlación parecida a las que hemos citado al tratar de caracterizar lo matemático? He aquí, pues, cómo la metáfora viene a ser (y no se me ofendan ahora los poetas) como un caso particular del concepto matemático de función en su más amplio y general sentido.

Y, recíprocamente, el matemático usa con frecuencia de la metáfora y, por tanto, hace también a su modo poesía. ¿Qué es la geometría de los hiperespacios sino una forma poética de enunciar las propiedades analíticas de los conjuntos de n coordenadas? ¿Qué es la Geometría analítica toda sino una vastísima metáfora ingeniosamente ideada por el poeta «malgré soi» Descartes?

Para terminar esta breve alusión a los valores matemáticos de la poesía, paréceme interesante reproducir el siguiente párrafo de Menéndez y Pelayo, tomado del prólogo de su obra fundamental: *Historia de las ideas estéticas en España,* párrafo cuyo final pudiera servir de lema para esta conferencia.

«De aquí que al crítico y al historiador literario toque investigar y fijar, estén escritos o no, los cánones que han presidido el arte literario de cada época, deduciéndolos, cuando no pueda de las obras de los preceptistas, de las mismas obras de arte, y llevando siempre de frente el estudio de las unas y el de las otras. Pero entiéndase siempre que estos cánones no son cosa relativa y transitoria, mudable de nación a nación y de siglo a siglo, aunque en los accidentes lo parezcan, sino que en lo que tienen de verdadero y profundo, se apoyan en fundamentos matemáticos e inquebrantables, a lo menos para mí, que tengo todavía la debilidad de creer en la Metafísica.»

Confesión genial la de D. Marcelino de una fe suya, firme y ruborosa a un tiempo, porque tiene la doble consciencia de su solidez y de su aislamiento.

INTENTOS DE VALORACIÓN MATEMÁTICA EN LAS ARTES PLÁSTICAS

Pasando ahora a las artes plásticas, ignoro, por lo que se refiere al colorido, si se ha tratado de relacionar aritméticamente las longitudes de onda de los diversos colores cuya combinación se considera armónica, ni siquiera si una tal relación existe. De ser así, ello podría ser la base de una teoría que en pintura desempeñara análogo papel al que en la música desempeña la acústica aritmética. No conozco más sistematización y clasificación de colores que las clásicas de Chevreuil y de Rosensthiel, fundadas en la teoría fisiológica de Young, y que tienen más interés para la tintorería que para el Arte pictórico propiamente tal.

Si del mundo del color pasamos al de las relaciones espaciales, la perspectiva (cuyo descubrimiento marca, como se sabe, una época) me daría motivos muy agradables de especulación sobre lo que la pintura, la escenografía, deben a la teoría de la proyectividad, pero, repito lo mismo que dije a propósito de las cuerdas vibrantes; no se trata aquí de exhibir lo que el Arte debe a la Matemática, lo que la Pintura debe a la Geometría, sino de caracterizar matemáticamente el fenómeno estético del diseño, de la forma corpórea o arquitectónica.

La forma es un concepto esencialmente geométrico, pero no todo lo geométrico es estético. ¿En qué consiste el valor estético de ciertas formas geométricas? Difícil es la cuestión, casi tanto como lo era la pregunta que dejé incontestada a propósito de la melodía; y, sin embargo, el problema ha sido objeto de afanes de no pocos ingenios desde los más remotos tiempos.

Pitágoras afirmaba, cinco siglos antes de nuestra Era, que toda armonía, lo mismo musical que geométrica, depende de una proporción. De aquí su filosofía del orden y de la belleza del Universo, fundada en la idea de número; pero, ¿qué relaciones numéricas de proporción caracterizan la belleza de forma? El poderoso movimiento artístico matemático del Renacimiento no podía quedar ajeno al problema, y Lucas Pacciolo, al descubrir la «sectio aurea» (división de un segmento en media y extrema razón) y al hacer notar, junto con Durero, Leonardo de Vinci y otros, su aparición en ciertas proporciones aproximadas del cuerpo humano, de motivos naturales y ornamentales, iniciaron la época de taumaturgia de la que se llamó *sección divina,* a la que tan milagrosas virtudes estéticas y de toda índole se atribuyeron. Después de Kepler, que también fué devoto de ella, cayó en el olvido hasta que doscientos años después, o sea, en el siglo pasado, Zeysing la resucita con sus curiosos estudios sobre las hojas, sobre la escultura y arquitectura griegas, en las que afirma su existencia; Cook la ve latente en sus *Curvas de la vida*; Price, Jarolimek y Kleppich parecen hallarla en ciertas proporciones de la Gran Pirámide; Lund, en las catedrales góticas; Fechner, creador de la Estética experimental, observa, a través de multitud de experiencias, que el rectángulo espontáneamente preferido por el hombre es aquel cuyos lados están en la proporción aúrea. En nuestra patria, muy recientemente, el P. Barbado comprueba, asimismo, su existencia en el formato preponderante de imprenta, sobre un millar de libros tomados al azar...

Pero no han faltado otras opiniones menos ceñidas, como la de Vitruvio en tiempos antiguos, que tendía a las relaciones conmensurables; como la de Violet-le Duc, de análoga tendencia, en tiempos modernos; como la de Hambidge, que admite otras relaciones inconmensurables en las formas rectangulares arquitectónicas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ (esta última en conexión conmensurable con la de la sección áurea). Según Hambidge, ocurre como si en las arquitecturas griega y egipcia predominara el módulo $\sqrt{5}$ y en la romana y bizantina $\sqrt{2}$. Modernamente parece, pues, que la sección áurea vuelve a perder su monopolio, y en resumen, resulta que la última palabra sobre proporciones estéticas no se ha dado, ni es fácil que llegue a darse.

No quiero terminar este ligerísimo índice sin citar los esfuerzos de Birkhoff, el célebre matemático americano, uno de los más interesantes entre los contemporáneos, quien, en una ingeniosa comunicación al Congreso Matemático de Bolonia (1928), pretendió sentar normas para la determinación objetiva del valor estético de ciertas formas sencillas, como polígonos, redes y... hasta perfiles de vasos chinos. Es curioso por demás el noble intento de Birkhoff, pero, a pesar del respeto debido a su gran figura, no puedo reprimir un cierto escepticismo. El valor estético M de una forma geométrica, viene dado, según Birkhoff, por la razón

$$M = \frac{O}{C}$$

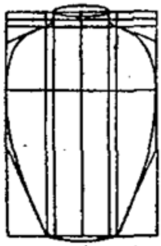
entre el número de elementos de orden O, y la complejidad C, definición muy estimable; ahora bien, ¿qué debe entenderse por elemento de orden de una figura, y cómo valorar numéricamente, de un modo general, su complejidad? Aquí entra, como es natural, una aportación subjetiva tan considerable, que, a pesar de haber medido de este modo el valor estético de varios vasos chinos, consiguiendo una ordenación que parece estar de acuerdo con nuestro sentido de belleza de líneas, la teoría da la impresión de ser lograda a expensas de las cualidades objetivas pretendidas.

Sin embargo, no cesa Birkhoff en su optimismo, y se formula preguntas análogas para la melodía, y anuncia la publicación de una obra. No ha llegado a mi conocimiento la tal obra todavía, pero sigo dudando de que en el terreno del gusto, es decir, del sentimiento, de la emoción, consiga la valoración numérica objetiva que se propone. En lo que sí tiene razón sobrada es en las palabras con las que termina su comunicación: «Pour bien voir la réalité des choses esthétiques, il ne faut pas s'attacher a aucun point de vue spécial, mais les considérer sous tous les angles possibles. C'est pourquoi il ne faut pas négliger le côté mathématique».

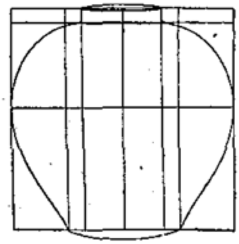
CONCLUSIONES

En conclusión: La belleza en su aspecto formal, es decir, en tanto es orden, simetría, equilibrio, armonía, tiene una estructura que, si no es traducible en fórmulas, está constituída por elementos y relaciones abstractas análogos a los que constituyen la esencia y estructura de la matemática. Estos son los valores *objetivos* de la belleza.

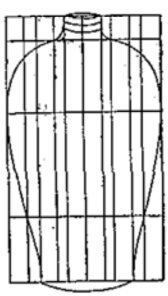
La belleza en tanto es emoción, en tanto es inspiración, escapa ya a los criterios de certeza; pertenece a otra esfera vital del espíritu humano, al mundo de los sentimientos, cuyos valores son totalmente heterogéneos con los valores lógicos. Mientras éstos son objetivos, aquéllos son *subjetivos* y dependen no sólo del autor, sino también del que contempla la obra.



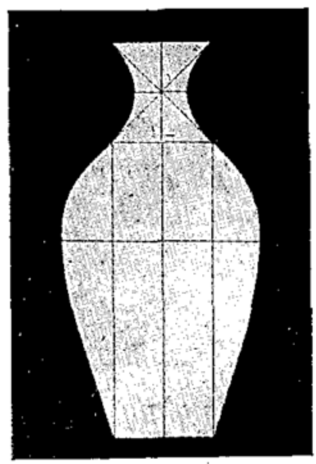
C=10, O=7, M=.70
v=2, h=2, v,h=1, t=2



C=8, O=3, M=.37
v=0, h=2, v,h=0, t=1



C=10, O=1, M=.10
v=0, h=0, v,h=0, t=1



He aquí algunos de los perfiles de vasos chinos analizados por Birkhoff, con sus respectivas valoraciones estéticas al pie. La complejidad C se mide por el número de puntos que llama «característicos» del perfil, que son: los extremos, los puntos en que la tangente es vertical u horizontal, los puntos de inflexión y los angulosos. Las relaciones de orden O, consideradas por Birkhoff, son de varias clases (y para precisarlas traza la red de horizontales y verticales por los puntos característicos del perfil): relaciones de igualdad y de duplicidad entre distancias horizontales (h); ídem verticales (v); relaciones de igualdad y de duplicidad entre distancias verticales y horizontales (v, h); ortogonalidad o paralelismo entre las tangentes en los puntos característicos, horizontalidad de las mismas, normales en dichos puntos que pasan por un centro, es decir, por uno de los puntos de la red sobre el eje de simetría; estas últimas relaciones relativas a tangentes o normales designadas por *t*, en los esquemas. Claro es que de todas estas relaciones sólo cuentan las independientes, es decir, aquellas que no son consecuencia de otras ya contadas. Pues bien, con la adopción de estos convenios, que estima Birkhoff adaptados al gusto estético corriente, obtiene los valores M indicados en las figuras, o sea 0,7 para el primer vaso, 0,37 para el segundo, 0,10 para el tercero. Finalmente construye el perfil ideal indicado en la última figura, para el que O = C, es decir, M = 1, valor estético máximo, según él. ¿Estarán de acuerdo los oyentes en atribuir, en efecto, a dicho perfil la máxima valoración estética? ¿O estimarán, quizá, que la elección de relaciones de orden expuestas es tan subjetiva como pueda serlo la opinión estética que sobre el referido perfil forme cada cual por puro sentimiento?

En cuanto se refiere a los valores objetivos, podremos, pues, establecer quizá criterios cuantitativos de mayor y menor en la apreciación de la belleza de la obra de arte; podremos, en suma, hacer crítica y crear una ciencia estética que la guíe. En cuanto a los valores subjetivos, al fondo emocional de la obra de arte, todo intento de medida y, por ende, de crítica objetiva parece vano, por falta de homogeneidad entre lo medido y el instrumento de medida.

Ahora bien; si la Matemática es incapaz de explicar, de sistematizar, de medir las emociones e inspiraciones artísticas, ello no significa que carezca en sí de inspiración, de valores artísticos emocionales, como me he esforzado en demostrar más arriba.

A falta de otros valores, permitidme, pues, invocar el valor emocional de cuanto os lleva dicho este oscuro matemático y pésimo artista.

Asomado al ventanal de mi cátedra, contemplo hace años un vasto y hermoso panorama: el crecimiento de tantas almas niñas; y en medio de la infinita variedad de aptitudes y resonancias intelectuales que contiene, percibo constantemente en él la unidad suprema de lo creado. Por ello repugno a toda suerte de antagonismos; por ello he tratado de presentar emotivamente, en campos de apariencia incompatible, como son el Arte y la Matemática, reflejos de esta superior unidad en el mundo de la creación espiritual.

Si lo he conseguido, me consideraré dichoso, pues habré hecho a la vez un poquitín de Ciencia y también un poquitín de Arte; si no, me contentaré con el recuerdo de esta libre charla, terminada la cual vuelvo a la recóndita celda de mi trabajo cotidiano, plácido manantial de suaves emociones, desde el cual os pido humildemente perdón.

§ 2. LA MATEMATICA Y EL HOMBRE [1]

En esta presentación intentaré desarrollar, del modo más asequible que pueda, estas dos cuestiones: ¿Por qué y para qué surge el pensamiento matemático en el hombre? ¿Cómo ha ido evolucionando y desarrollándose este pensamiento en relación con el progreso técnico y las condiciones materiales de vida de la humanidad?

PROSA Y VERSO EN LA CUNA DE LA MATEMÁTICA

La Matemática es tan vieja como el instinto de propiedad, es decir, tan antigua como el hombre mismo. Este se sintió matemático en cuanto el afán de retener lo suyo le llevó a contar sus rebaños y a medir sus tierras Es sabido que los antiguos historiadores atribuyen el origen y el nombre de la Geometría a los métodos de que habían de valerse los pobladores del Valle del Nilo para volver a deslindar sus campos después de las periódicas inundaciones. Pero la Matemática no se reduce a contar y a medir, ni su crecimiento ha obedecido sólo a impulsos posesorios materiales. Como toda ciencia, la Matemática crece estimulada por la curiosidad desinteresada y por el afán creador del hombre. Los hijos del espíritu, como los de la carne, nacen al mandato de nobles instintos creadores, los cuales se alimentan a su vez de sutiles curiosidades. Pero dejando ya los comentarios sobre la prosa y el verso que envuelven la cuna de la Matemática, salgamos al paso de la pregunta que adivino en muchos lectores. Ante todo, ¿qué es la Matemática?

---

[1] Agradecemos a *Editorial Labor* la autorización que amablemente nos ha concedido de reproducir este artículo del autor con el que encabeza y presenta la Sección de Matemáticas de la ENCICLOPEDIA que está publicando dicha Editorial.

LA CIENCIA DE LOS ESQUEMAS

A esta pregunta digo como el clásico : «...y en mi vida me he visto en tanto aprieto». Porque los matemáticos todavía no saben bien cómo definir su Ciencia. Por decir algo, algunos tratadistas la han presentado como «la ciencia de la cantidad», definición a todas luces insuficiente, en virtud de la cual proposiciones como ésta : «Dos paralelas a una tercera son paralelas entre sí», no podrían ser consideradas como matemáticas, ya que en ella no se hace alusión alguna a la cantidad. La Matemática no sólo estudia relaciones de carácter cuantitativo, sino que penetra en campos conceptuales más amplios; tan amplios que, repito, es muy difícil encuadrarlos en el estrecho marco de una definición. Pero, en fin, intentaré una primera definición aproximada recordando las palabras que escribí en una colección de autógrafos relacionados con el mundo infantil :

«Quiere saber el niño cómo anda el juguete recién comprado, y sus dedines no paran hasta reducirlo a un montón de resortes, de ruedas y piezas de hojalata. No le riñáis. Esta bendita curiosidad le llevará algún día a querer penetrar los secretos el mundo y de la civilización en que vive. Los científicos son niños grandes que escudriñan en sus laboratorios los maravillosos juguetes que el mundo natural ofrece a su curiosidad. Hurgando, hurgando, pasan del mundo de las cosas al mundo de los *esquemas* y al arte que estudia su belleza y su trazado : la Matemática.»

Claro es que, al presentar de este modo la Matemática como la artística ciencia de los esquemas, aplico la palabra *esquema* en un sentido amplio, es decir, como sinónimo de *símbolo*, de *abstracción*. El hombre primitivo, al representar cada una de sus ovejas por un trazo en el tronco del árbol, lo mismo que al representar más tarde su terreno por un cuadrilátero en un papiro, empezó a hacer matemáticas precisamente porque empezó a esquematizar, a simbolizar.

UN ESQUEMA DE LA CIENCIA

Y con la palabra «esquema», empleada en su doble sentido estricto y metafórico, podemos empezar a darnos cuenta del papel que la Matemática ha desempeñado en la historia del progreso humano.

El hombre, en un principio impotente ante la inmensidad de las fuerzas naturales, y atónito ante la complejidad de los fenómenos que a su alrededor se desarrollaban, se limitó a observar y a retener, a comparar y a asociar. En cuanto pudo, experimentó él por su cuenta, es decir, promovió fenómenos nuevos en condiciones favorables para su estudio. Coleccionó observaciones y experiencias, y, luego de ordenarlas por afinidades, indujo leyes comunes para fenómenos semejantes. Para descubrir tales semejanzas hubo de abstraer, es decir, hubo de prescindir de caracteres accesorios y atender a los esenciales en cada estudio, con lo cual esquematizó, reduciendo la complejidad de las cosas y fenómenos reales a la sencillez de unos entes de razón que los representaran y sobre los cuales pudiera discurrir cómodamnte el razonamiento puro. De este razonamiento, ya en esencia matemática, sacó consecuencias que, proyectadas de nuevo en el campo de la realidad, le permitieron obtener nuevas leyes, esta vez no ya *inducidas,* sino *deducidas* de las anteriores; con ellas empezó a predecir resultados de experiencias no realizadas, pudo prevenir, precaverse, defenderse de las fuerzas naturales y conducirlas, más tarde, para su provecho... Al hacer tales deducciones y predicciones, el hombre llegaba a la plenitud de su categoría racional; su razón, al convertirse de potencia en acción, le brindaba su primera conquista sobre el mundo natural: el conocimiento científico. Pero fue preciso para ello que transcurrieran muchos siglos de prehistoria y aun de historia, ya que no puede hablarse propiamente de Ciencia hasta la civilización griega, de la que haremos mención en seguida.

Quiero insistir aquí en esta doble cadena de funciones intelectuales que constituyen la trama y el esquema de la Ciencia y que se repite indefinidamente a lo largo de toda su historia. *Primera cadena*: Observaciones y experiencias, análisis y abstracciones, inducciones que permiten llegar al descubrimiento de leyes simples. *Segunda cadena:* Razonamientos matemáticos logicodeductivos, síntesis y concreciones que permiten ascender a las leyes complejas y a su aplicación a fenómenos previsibles. No otro ha sido el proceso en virtud del cual el hombre llegó a descubrir, por ejemplo, las leyes primarias de la gravitación y de la dinámica (Galileo, Newton) y ascender de ellas al conocimiento de la mecánica de los cielos y a la de los ingenios que nos transportan y nos ayudan en nuestras tareas pacíficas y guerreras. Este mismo ha sido el camino que, partiendo de simples experiencias realizadas sobre determinadas probetas, en laboratorios de resistencia de materiales, nos permite hoy proyectar estructuras sobre las que asienta la seguridad de las construcciones en que nos cobijamos. Es la misma marcha que se siguió para ascender de las experiencias de Faraday sobre inducción en circuitos sencillos, a las leyes generales de Maxwell, y descender luego a los proyectos de generadores eléctricos, de motores, de líneas de transmisión, de estaciones de radio...

Tales ejemplos podrían multiplicarse indefinidamente, y en su detalle me seguirían sin gran dificultad muchos lectores iniciados en Física y Matemáticas; pero prefiero desmenuzar un ejemplo mucho más elemental todavía, tanto, que se halle al alcance de quienes ni siquiera hayan cursado la Física de Bachillerato. En respuesta a una de las cuestiones enunciadas al comienzo de este prólogo, quiero llevar al ánimo de los lectores todos, y especialmente de los profanos, la diferencia que existe entre el conocimiento empírico y el conocimiento científico, para poner de relieve el papel que, en tal distinción, desempeña el razonamiento matemático.

CONOCIMIENTO EMPÍRICO Y CONOCIMIENTO CIENTÍFICO. EN BUSCA DE DOS ESPAÑOLES CON IGUAL NÚMERO DE CABELLOS

Supongamos que se nos pregunta si existen dos españoles que tengan igual número de cabellos. Adoptando una actitud empírica, es decir, precientífica, contestaríamos: Como es materialmente imposible contar los cabellos de todos los españoles, esta cuestión no puede ser resuelta. De tener que pronunciarnos entre la afirmación y la negación, más inclinados nos sentiríamos a dar una respuesta negativa, pensando en la «gran casualidad» que sería que dos españoles tuvieran precisamente el mismo número de cabellos; y tanto más casualidad, al parecer (razono paradójicamente), cuanto mayor sea el número de españoles.

Hasta aquí la contestación empiríca. Sin embargo, analicemos la cuestión científicamente y, para ello, desprendámonos de prejuicios imprecisos, como ése de la «gran casualidad». Designemos a cada español por un número, precisamente el de sus cabellos, con lo que efectuamos una primera abstracción, a saber: prescindir de todos los restantes atributos de cada sujeto, sexo, edad, talla, etc., y quedarnos sólo con el número de sus cabellos, es decir, el que directamente concierne a la pregunta. Concibamos ahora un fichero cuyas fichas digan, por ejemplo: Fulano de Tal y Tal... 25.315 cabellos, y así las demás. Imaginemos colocadas en una misma casilla las fichas con un mismo número. ¿Cuántas casillas harán falta en el casillero? Si partimos del supuesto de que cada español tiene un número de cabellos distinto, la consecuencia obligada a que llegaremos es que son precisas tantas casillas como españoles, es decir, 30 millones. Por tanto, en la última casilla figurará la ficha de un español *con 30 millones de cabellos en la cabeza,* es decir, tantos como habitantes tiene España. Esta consecuencia empieza ya a hacer tambalear nuestras primeras convicciones, porque... ¡parecen demasiados cabellos! Para cerciorarnos, procedamos con toda garantía efectuando una experienca muy sencilla, que puede repetirse en varias cabezas: Con un cuentahilos contemos los folículos capilares que brotan en una pequeña región de nuestro cuero cabelludo. Nos daremos pronto cuenta de que no llegan a 100 los cabellos que nacen en cada centímetro cuadrado y, por lo tanto, siendo la superficie ocupada por nuestros cabellos seguramente inferior a 10 decímetros cuadrados, es decir, 1.000 centímetros cuadrados (extensión de un pañuelo corriente con el cual podemos cubrir de sobra nuestro cuero cabelludo), deducimos fácilmente que el número de nuestros cabellos es, sin duda alguna, inferior a *100.000*. Véase cuán lejos quedamos de los 30 millones a los que nos había conducido nuestra primera impresión. Ahora podemos afirmar, con mejor conocimiento de causa, que nuestro imaginario casillero no podrá contener más de 100.000 casillas y, por tanto, los 30 millones de fichas se distribuirán, en el caso de distribución más uniforme, o de menor frecuencia, a razón de 300 fichas por casilla. En resumen, podemos afirmar categóricamente no sólo la existencia de dos, sino hasta de 300 españoles, por lo menos, con igual número de cabellos. Y, al revés de lo que antes creíamos, si mayor fuera el número de habitantes, mayor sería el número de coincidentes.

He aquí, en pequeño, en este trivial ejemplo, el proceso científico a que antes me referí. Partiendo de sencillas observaciones efectuadas con un cuentahilos, hemos establecido por inducción esta ley natural: «Cada español tiene menos de 100.000 cabellos.» De esta sencilla ley, y con un breve razonamiento de carácter matemático, hemos podido contestar la pregunta formulada, prediciendo el resultado de una experiencia tan complicada que sería materialmente imposible de realizar. Hemos conseguido, pues, una pequeña conquista científica sobre nuestra ceguera empírica, conquista intrascendente en sí misma, por supuesto, pero de tan limpia ejecutoria racional como pueda serlo la predicción de un eclipse.

EL GENIO SISTEMATIZADOR GRIEGO

Toda la Ciencia, repito, ha tenido más o menos esta génesis. De las observaciones y experiencias primeras se ha inducido el enunciado de leyes simples, y de éstas se ha deducido la explicación de nuevos fenómenos y la resolución de problemas científicos y técnicos. La misma Matemática no ha escapado a este proceso genético. Su origen es tan empírico y experimental como pueda serlo el de cualquier ciencia física o natural. Lo que ocurre es que la elaboración experimental que el hombre necesita para intuir los axiomas o principios fundamentales de la Matemática es muy breve y se asienta, en su mayor parte, sobre el caudal de observaciones realizadas y almacenadas inconscientemente durante la más tierna infancia. Asimismo, la infancia de la Humanidad, es decir, la prehistoria y la historia antigua se encargaron de acumular el material técnico empírico sobre el que asentó la sistematización matemática griega efectuada tres siglos antes de Jesucristo. En cambio, los primeros principios de la mecánica no empezaron a formularse hasta Galileo y Newton, en los siglos XVI y XVII; los de la óptica, hasta Snell, Descartes, Fermat y el propio Newton, en pleno XVIII; los de la electricidad y del electromagnetismo, en los siglos XVIII y XIX, con Ohm, Volta, Faraday, Ampère, Joule, etc., mientras los primeros principios teóricos de la Química, formulados por Lavoisier, no han cesado de revisarse desde entonces, y todavía están en plena reelaboración. Por ello, la Matemática, que nace a impulsos de la ciencia natural, se le adelanta luego enormemente por su misma etereidad. En el siglo XVIII, la Física y la Química eran aún muy rudimentarias, mientras la Matemática era ya señera. Nuestros bachilleres de hoy saben mucho más de Química que Lavoisier, pero muchísimo menos de Matemática que los matemáticos contemporáneos de Lavoisier (Lagrange, Laplace, etc.).

Al equiparar, desde el punto de vista científico, a la edad infantil del hombre las culturas anteriores a la griega, no trato de menospreciar con ello el considerable progreso técnico a que habían llegado, sobre todo en el orden de la construcción, como lo prueba el colosalismo de los templos y monumentos de Babilonia y de Egipto; pero su técnica y su cultura eran completamente empíricas. Los primeros sabios viajeros de Grecia, como Thales, Pitágoras, etc., la importaron a las costas mediterráneas en los siglos VI y V antes de Jesucristo; analizada y reelaborada por el genio griego, cristalizó más tarde en el substrato científico contenido casi íntegramente en las obras de Aristóteles (s.-IV) y de Euclides (s.-III). Dejando a un lado Aristóteles, superado siglos después por Galileo, digamos que los *Elementos*, de Euclides, que comprenden la mayor parte de los conocimientos de Aritmética y Geometría de nuestros bachilleres, no sólo fueron durante toda la Edad Antigua y Media el principal alimento matemático de la Humanidad, sino que ha sido preciso llegar hasta fines del siglo pasado para mejorarlos en lo que a fundamentos se refiere. Alguno de sus postulados, como el de las paralelas, sometido a debate y prueba durante tantos siglos, ha sido rigurosamente establecido como indemostrable en las modernas teorías axiomáticas, que han venido a confirmar así la solidez del genio euclídeo.

Los griegos, al ordenar y organizar deductivamente la Aritmética y la Geometría, fueron las primeras *amas de casa* de nuestra querida Ciencia. Pero no se limitaron a eso, naturalmente. Antes y después de efectuar tal sistematización enriquecieron la Técnica y la Matemática con numerosas aportaciones propias, elevándola a una altura que tardó muchos siglos en ser superada. Básteme citar los nombres del colosal geómetra Apolonio, con su monumental tratado sobre cónicas, y Arquímedes, genio e ingenio a un tiempo, admirable tipo de técnico y de investigador, que lo mismo dió un método para calcular π, que cuadró segmentos de parábola, cubicó cuerpos de revolución, estudió el equilibrio de cuerpos flotantes, inventó multitud de artefactos mecánicos para paz y guerra (tornos para subir agua, catapultas para lanzamiento de proyectiles, etc.). Constituye el primer gran ejemplo que prueba la unión inseparable de la Ciencia y de la Técnica, pese al desprecio que los teóricos griegos solían tener para las aplicaciones.

EL PRAGMATISMO ORIENTAL.—FLUJO Y REFLUJO DE LA CULTURA MATEMÁTICA ANTIGUA A TRAVÉS DEL MEDITERRÁNEO.—LOS ÁRABES

Características muy distintas conservó la cultura oriental, entregada al servicio de las aplicaciones. Si los conocimientos empíricos de los primitivos pueblos de Oriente, al llegar a las costas mediterráneas, fueron el origen de la ciencia helénica que los organizó deductivamente, el poderoso imperio de Alejandro, devolviendo a sus confines orientales la cultura griega, la extendió probablemente hasta la India. Las hindúes, al tiempo que cultivaban la herencia astronómica de los babilonios, aplicaron la Aritmética al cálculo mercantil, dándole el sesgo práctico, que coronó, siglos después, con la invención del sistema decimal de numeración.

De Oriente volvieron ambas culturas, la griega y la índica, y penetraron en Europa a través del Mediterráneo importadas por la invasión árabe, pueblo que, por su situación de origen en el cruce de las civilizaciones oriental y occidental, estaba destinado a heredar ambas y a hacerse depositario de ellas durante los siglos que duró su dominación. A través de las traducciones y de las obras originales de los árabes, entre las que descollaron singularmente los árabes españoles, recogió Europa la savia matemática que había de alimentar el Renacimiento, y así fue como nuestro amado «Mare nostrum» vino a ser testimonio y vehículo de este fluir y refluir, de este tejer y asimilar que llevaron la Matemática clásica, en doble movimiento pendular, del Eufrates al Mar Egeo y del Mar Rojo al Guadalquivir.

Pero los árabes no sólo importaron la geometría helénica y la aritmética índica. Iniciaron por su cuenta los métodos algebraicos, con los que vinieron, en cierto modo, a automatizar los razonamientos empleados en la solución de problemas aritméticos. La palabra *Algebr*, que significa transposición de términos, fue empleada por vez primera por el conocido matemático árabe Aljoarizmi (s. IX). Finalmente, se acreditaron como notables astrónomos transmitiendo en su famoso *Almagesto* la obra de Ptolomeo (que fue el tratado fundamental de astronomía durante un millar de años) y cultivaron los métodos trigonométricos iniciados por los indios. El desarrollo inicial del Algebra y de la Trigonometría es, pues, la contribución propia del pueblo árabe al progreso de la Matemática.

DEL RENACIMIENTO A LA ERA MODERNA

En un libro de comienzos del siglo XII, el *Libro de Geometría*, del judío catalán Abraam bar Hiia, apodado Savasorda, del que el Dr. Millás hizo, en 1931, una traducción catalana directa del hebreo, podrá darse cuenta el lector de las características de la ciencia árabe y de su doble origen teórico y pragmático. El libro se dirige especialmente a los agrimensores y partidores de herencias, y contiene un buen caudal de reglas, en su mayoría demostradas, y ejemplos para la medición de áreas de figuras geométricas y para la partición de las mismas. Tiene el libro de notable la exclusión sistemática de los ángulos, cuya medición era muy imprecisa para los agrimensores de aquellos tiempos; todas las reglas se apoyan en la medida de segmentos como datos y, por tanto, no puede faltar en tal obra la fórmula de Herón de Alejandría (s. III), que da el área del triángulo en función de los tres lados. Se conceptúa el primer libro europeo en que figura tal formulación, y asimismo el primero en que se dan reglas para resolver ecuaciones de segundo grado. De este libro plagió, en el siguiente siglo, Leonardo da Pisa, apodado Fibonacci, cuantos ejemplos y reglas le vino en gana, lo que disminuye un tanto el mérito que por otros conceptos merece y que lo sitúan como precursor y puntal del renacimiento matemático.

Los italianos Cardano y Tartaglia fueron, en el siglo XV, los principales continuadores y propulsores del Algebra, disputándose el mérito de haber resuelto la ecuación cúbica, mientras el francés Vieta introducía el cálculo literal, facilitando la expresión concisa de los métodos algebraicos. Fue así el Algebra la ciencia adelantada del Renacimiento que empezó resolviendo problemas de particiones de herencias, a los que tan aficionados eran los árabes, y terminó detenida ante las ecuaciones de grado quinto, que, como es hoy sabido, ya no pueden resolverse en general mediante radicales. A comienzos del XVII, la invención de Napier, los logaritmos, aportaba un recurso auxiliar poderoso al cálculo numérico, que, con el desarrollo del Algebra, iba adquiriendo singular importancia práctica. Para ver adelantar el Algebra ya hay que llegar a la teoría de grupos de Galois, en el siglo XIX, y las generalizaciones modernas de van der Waerden, Emmy Noether y su escuela en el siglo actual.

En ese rapidísimo esbozo del crecimiento y peregrinación de la cultura matemática hemos llegado al siglo XVII sin más progreso, desde la Matemática griega, que el desarrollo del Algebra y de la Trigonometría elementales. De modo parejo, las condiciones materiales de vida de los hombres no habían variado grandemente desde los tiempos de Alejandro Magno. La construcción había ciertamente progresado en un sentido técnico y artístico, ganando en altura y esbeltez (catedrales góticas); también el vestido había evolucionado considerablemente y en sentido opuesto desde las elegantes túnicas grecorromanas; pero el telar, la calefacción, la iluminación, las comunicaciones y, en general, las comodidades del hombre, venían a ser poco más o menos las mismas de Grecia y Roma. La única técnica que había solicitado soluciones a la Ciencia y a la Matemática fue la técnica de la navegación, que, con el descubrimiento del Nuevo Mundo, adquirió súbitamente un interés extraordinario para el tráfico comercial de ultramar y planteó apremiantes problemas no sólo en lo relativo a la construcción de naves, sino en la determinación de sus posiciones en alta mar, es decir, en el arte de navegar. La cartografía y la navegación estaban pidiendo el perfeccionamiento de la óptica y de la mecánica de precisión, ya que sin buenos instrumentos ópticos y sin buenos relojes era imposible la determinación correcta de longitudes y latitudes geográficas. Por ahí había de empezar el desarrollo pasmoso que la Ciencia y la Técnica tuvieron a partir de los siglos XVII y XVIII, y al que contribuyó mucho la imprenta, inventada en el siglo XV, que permitió difundir rápidamente los descubrimientos y favoreció la múltiple germinación de ideas en todos los confines del mundo civilizado.

Así vemos cómo los grandes matemáticos del siglo XVII, Descartes y Fermat, se dan al estudio de la dióptrica. Descartes le dedica uno de los tres tratados en los que aplica su Discurso del método. Simultáneamente vese conducido al uso sistemático de coordenadas para el estudio de curvas y lugares que permite la resolución de los problemas geométricos mediante su traducción en ecuaciones.

Después de esta «algebrización» de los problemas del espacio, poco habían de tardar los hombres de ciencia en someter asimismo a la esquematización del Análisis matemático todo el mundo natural, empezando por los fenómenos cinemáticos, en los que, además de las coordenadas espaciales, interviene la variable tiempo, siguiendo con los mecánicos, en los que se manejan fuerzas y masas, y continuando con todos los fenómenos físicos y químicos que simultáneamente se fueron descubriendo y aplicando al bienestar humano. Esta ha sido la colosal obra de los siglos siguientes y la que continúa en la actualidad. Concretemos —muy brevemente, porque el tema es inmenso— los principales jalones en esta verdadera explosión técnico-científica que abarca tres siglos escasos.

EL ANÁLISIS INFINITESIMAL Y LA MECÁNICA. UN PLANETA PERSEGUIDO POR EL CÁLCULO

El primer jalón, y el más importante, es el descubrimiento del cálculo infinitesimal. De un lado, el problema de la determinación de tangentes a las curvas planas, y de otro, los conceptos de velocidad y aceleración, condujeron a la noción de derivada, mientras que la medida de áreas y volúmenes y la determinación de movimientos de velocidad o aceleración prefijadas, dieron origen al cálculo integral. La mecánica racional encontraba en el cálculo infinitesimal el molde matemático adecuado para su desarrollo. Un siglo y medio transcurría solamente desde la formulación de sus leyes fundamentales por Newton, a fines del siglo XVII, hasta los impresionantes cálculos de Leverrier, que condujeron al descubrimiento del planeta Neptuno en 1846, partiendo de las perturbaciones en la órbita de Urano y que, comunicado a los observatorios astronómicos, fue inmediatamente corroborado por observación directa del astrónomo Galle, de Berlín, casi exactamente en el lugar previsto en aquel momento por Leverrier [2]. No podía pedirse éxito más resonante ni triunfo más sensacional a una ciencia que, comenzando con experiencias y observaciones sobre la caída de los cuerpos, había llegado a predecir la presencia y posición de todo un planeta situado a 4.600 millones de kilómetros del cerebro que lo descubría sin verlo, después de perseguirlo varios años llenando de guarismos centenares de cuartillas.

En este siglo y medio se coronaba la obra de la Mecánica con las aportaciones geniales de Euler, de los Bernouilli, Laplace, Lagrange, d'Alembert, etc., y con el avance que éstos y otros grandes matemáticos, como Cauchy y Gauss, daban a la teoría de ecuaciones diferenciales desarrollada a impulsos de los interrogantes de la Mecánica.

Simultáneamente, el auge adquirido por el tráfico con Ultramar incrementó hasta tal punto las transacciones comerciales, que los pueblos sintieron, a fines del siglo XVIII, la necesidad de unificar sus medidas, creando el sistema métrico, cuya unidad se derivó de la medida del meridiano terrestre. Las costosas expediciones y operaciones de medida que para ello hubo de realizarse, atrajeron la atención de lo sabios hacia la ciencia geodésica y motivaron que el genio matemático de la época, Gauss, estudiara la curvatura de superficies y, en general, la geometría sobre superficies curvas. Esta geometría, generalizada más tarde por Riemann a espacios de mayor número de dimensiones, ha dado origen al cálculo diferencial absoluto y a la teoría de la relatividad generalizada.

[2] «El planeta cuya existencia habéis anunciado —escribía GALLE— existe realmente. El día mismo en que recibí vuestra carta encontré una pequeña estrella que no estaba inscrita en las cartas celestes de la Academia de Berlín. La observación del día siguiente decidió que era, en realidad, el planeta buscado.»

LA FÍSICA Y EL DESARROLLO INDUSTRIAL DEL SIGLO XIX

Pero volviendo nuevamente atrás, digamos que, entretanto, las investigaciones físico-matemáticas de Fourier y Carnot atacaban, a comienzos del siglo XIX, la teoría del calor. Una ciencia nueva, la Termodinámica, surgía de tales estudios y hallaba inmediata aplicación en la utilización del vapor como fuente de energía. El hombre confió al vapor la tarea de impulsar sus naves, de arrastrar sus vehículos y de mover sus telares. Empezaba con ello a liberarse del esfuerzo muscular. La antigua artesanía desaparecía y dejaba paso a la industria mecanizada en gran escala. No quedó función manual que no fuera transferida a la invención correspondiente. Ingenios de infinita variedad fueron patentados progresivamente para realizar todo orden de tareas con las que descansar al hombre, desde empujar trasatlánticos hasta liar cigarrillos. Hubo que terminar naturalmente, inventando máquinas para fabricar máquinas u órganos de ellas. Pese a tanta maravilla, los verdaderos hitos del progreso industrial fueron las conquistas de nuevas fuentes de energía y las mejoras en el rendimiento de su utilización. El aprovechamiento y transporte de la energía mecánica de los grandes saltos de agua, transformándola en energía eléctrica, fue la última revolución técnica que coronó la obra del siglo XIX. Pero esta transformación no fué posible sin el estudio matemático previo y profundo de la Hidrodinámica, que regula el movimiento de las turbinas y el régimen en las tuberías forzadas, y del Electromagnetismo, que rige las leyes de la trasmisión y la transformación de la energía eléctrica (generadores, alternadores, transformadores, líneas de alta tensión, motores eléctricos, etc.). Por cierto que en la teoría matemática del campo electromagnético, formulada por el genio de Maxwell en 1869, había de producirse un fenómeno de anticipación del cálculo a la observación, similar al descrito en el campo de la mecánica celeste, a propósito del descubrimiento de Neptuno por Leverrier. Una sencillísima transformación formal de las ecuaciones de Maxwell, muestra la propagación ondulatoria del campo electromagnético, es decir, la existencia de ondas electromagnéticas que no fueron detectadas experimentalmente hasta veinte años más tarde por Hertz. Ellas son las que han servido de base a la técnica de la comunicación inalámbrica: telegrafía, telefonía y televisión. Ellas son, asimismo, las que han permitido la moderna formulación de los fenómenos de la propagación luminosa (difracción, polarización, etc.), que tenían explicación difícil en las teorías antiguas, y, finalmente, las que permitieron establecer las primeras leyes de la mecánica relativista restringida (leyes de Lorentz).

LA TÉCNICA DEL SIGLO XX.—LOS RUMBOS FUTUROS Y SU INSTRUMENTAL MATEMÁTICO

Y con ello llegamos al siglo actual. Una rica y dúctil fuente de energía natural, el petróleo, ha tenido en el presente siglo su más completa explotación y rendimiento con el perfeccionamiento afiligranado del motor de explosión. Ello ha permitido la rapidísima conquista del aire. La técnica de la aviación se halla todavía en pleno progreso con los métodos modernos de propulsión y el vuelo supersónico, que están sometiendo a la más dura prueba la teoría de ecuaciones en derivadas parciales de tipo hiperbólico, nuevo préstamo que la aviación recibe del cálculo después de la considerable aportación de las funciones de variable compleja, a la teoría de la sustentación del ala.

Pero la demanda de energía crece y crece de día en día con las necesidades pacíficas y guerreras. Insuficientes ya las fuentes de energía descubiertas en el siglo pasado, se ha conseguido en el presente el alumbramiento, por vía físico-matemática, del más sorprendente e inmensurable almacén de energía: la materia. Teorías matemáticas, como la relatividad y la mecánica cuántica, que nacieron muy alejadas de toda especulación industrial, prepararon científicamente esta reciente y colosal gesta del hombre: la conversión de la materia en energía. Así, la cruzada energética que empezó hace un siglo quemando carbón, termina hoy deshaciendo el átomo; y pues que el hombre supo convertir el fuego devastador en instrumento pacífico de trabajo, no es utópico esperar que, más pronto o más tarde, acabe dominando la desintegración atómica a su voluntad para obtener con ella no sólo el aniquilamiento del enemigo, sino la energía creadora que le falte cuando las fuentes anteriores se hayan agotado. A esta meta se dirige uno de los más importantes sectores de la investigación técnica presente. Pero junto a esta meta existe otra mucho más fina y quizás aún más característica del progreso actual. Hemos dicho que la Humanidad empezó, hace un siglo, a buscar en las energías naturales el modo de liberarse del esfuerzo muscular; pero le quedaba todavía la tarea de conducir, de vigilar tales energías con las que sustituía la suya. Un siglo después, el hombre, más perezoso aún, ya no se contenta con cruzarse de brazos y vigilar un mecanismo: crea ya ingenios que se vigilan y corrigen a sí mismos. No es nuevo el afán. La técnica de la regulación y del ajuste, iniciada en el siglo pasado y notablemente adelantada en el presente, en lo que a gobierno de energía eléctrica se refiere, ha dado, a partir de la última guerra, con el auxilio del radar y de la electrónica, avances gigantescos que están revolucionando totalmente la técnica automática. Resulta imposible dar idea aquí de tales avances. Baste decir que los modernos servomecanismos pueden reemplazar, por ejemplo, la función del piloto en el vuelo y, con ventaja, la del artillero antiaéreo persiguiendo el blanco, o la de equipos de calculadores desarrollando intrincados procesos de cálculo..., y, en general, se muestran capaces de sustituir al hombre en todo género de funciones que él mismo acaba reduciendo a automatismos o a reflejos condicionados. No han de causar, por tanto, mayor asombro los autómatas que remedan la conducta de animales inferiores, como las famosas tortugas electrónicas que Walter exhibió en un coloquio de París (enero de 1951) sobre Cibernética. Capítulo de la ciencia es éste de moderna creación, bautizado y desarrollado en buena parte por el matemático Wiener, unificando en un tratamiento teórico común la técnica de los servomecanismos de regulación y la técnica de la comunicación e información, para lo cual necesita echar raíces en campos matemáticos de la más jugosa fecundidad: en el cálculo operacional y en la estadística, rama de la Matemática, cuya base, el cálculo de probabilidades, toma origen asimismo en la época heroica de los Bernouilli y Laplace.

Estos parecen ser, pues, en el momento presente, los rumbos fundamentales en el progreso industrial de mañana. El rumbo energético, la conquista del átomo, con el complejo instrumento matemático característico de la mecánica cuántica: ecuaciones de ondas, matrices, espacios de Hilbert... El rumbo cibernético, la automática electrónica con su específico instrumental abstracto; cálculo operacional, transformación de Laplace-Fourier, teoría de distribuciones...

Los métodos matemáticos, de complejidad creciente, que exigen las técnicas mencionadas, a las que todavía habría que añadir muchas más que la brevedad de estas notas no permite ni reseñar siquiera (elasticidad, economía, biofísica, cálculo actuarial...), requieren ya hoy instituciones especiales donde tales métodos se aplican y perfeccionan, y equipos de analistas y calculadores especializados, puestos al servicio de la investigación técnica para resolver los arduos problemas matemáticos a que tales investigaciones conducen. La longitud inconcebible de la mayor parte de estos procesos de cálculo ha aguzado el ingenio de los matemáticos y electrotécnicos en estos últimos decenios, en los que se ha llegado a la construcción de gigantes cerebros electrónicos que, como hemos dicho, realizan a velocidades alucinantes los más largos e intrincados de dichos procesos.

Vemos, en resumen, que el hombre de ciudad moderno, desde que se levanta hasta que se acuesta, no sufre molestia ni goza comodidad que no sean en gran parte tributarias de la investigación matemática. El timbre que lo despierta, el trolebús que lo transporta, el ascensor que lo eleva, la luz que lo alumbra, el teléfono que le avisa, la radio que lo distrae..., todo ha sido calculado matemáticamente, todo se nutre de energía lejana traída a través de costosas instalaciones, cuyo cálculo descansa sobre el esfuerzo de los físicos y matemáticos de generaciones pretéritas. Cálculos y teorías igualmente erizados de matemáticas, aseguran la estabilidad de las construcciones que lo cobijan, el correcto funcionamiento de la maquinaria en que se fabrican las telas que lo abrigan y los útiles con que trabaja, y hasta la estabilidad de su economía y la de los suyos en los riesgos de enfermedad y muerte. El mismo tributo matemático lleva consigo, por desgracia, la bomba que le arranca la vida o el hogar, el cañón que la disparó o el avión que la condujo; hasta las trayectorias de caída van precisadas por los cálculos matemáticos de los técnicos de la destrucción. Pero matemático es también el temblor de la onda que lo previene y el radar que guiará los autómatas que lo defiendan mañana del peligro.

VALORES ESTÉTICOS DE LA CREACIÓN MATEMÁTICA

Mas no quisiera terminar este prólogo con tal exhibición de valores meramente utilitarios de la Matemática. Quiero cerrarlo con un canto a otro valor más noble, su valor estético como obra pura y bella del espíritu humano, que me hizo presentarla, en un principio, como el *arte* de los esquemas. Si las principales teorías han tomado origen de problemas prácticos, no es menos cierto que los conceptos abstractos en ellas elaborados se enseñorean de nuestra mente, y, al tomar carta de naturaleza en ella, proliferan, dando lugar a las más bellas construcciones intelectuales, cuyas aplicaciones futuras todavía son un misterio. Ya hemos visto cómo la Geometría, que empezó como conjunto de reglas para medir y deslindar campos, terminó siendo, bajo el genio griego, uno de los edificios racionales más hermosos y perfectos que ha construído el pensamiento humano.

La Matemática no sólo es útil, sino fundamentalmente bella. Como todo edificio, tiene su arquitectura formada por estructuras lógicas, entre las cuales existen relaciones de simetría, de unidad, de orden, de belleza, en suma, belleza que no penetra en nuestro espíritu por la vía directa de los sentidos; la sensibilidad que la capta está en lo más recóndito de nuestro intelecto, y sólo despierta después de largo y penoso aprendizaje.

Existen, asimismo, valores emotivos en su creación, lo mismo que en la creación poética. Basta, para cerciorarse, comparar textos de matemáticos, como Poincaré y Hadamard, con los del poeta Valéry, en los que unos y otros refieren los procesos de génesis de sus respectivas creaciones. Por eso, la emoción estética, que en el fondo no es sino un fenómeno de sintonía, de resonancia, se presenta lo mismo en la obra científica que en la artística. Soñadores son poetas y matemáticos. Los unos, en su mundo de fantasía, y los otros, en su mundo conceptual; fantasía y conceptos que tienen su origen común en la belleza y en el orden de las cosas, y que fluyen para el artista por los cauces del buen gusto, y para el matemático, por los cauces del sentido común.

Existen muchas menos diferencias esenciales de las que el vulgo supone entre la creación matemática y la creación artística. Y al compadecer las gentes sencillas el supuesto desvarío de la creación abstracta, mientras admira o acaso envidia la tangible gloria del genio artístico, no sabe, ni es capaz de imaginar, la inefable magnificencia de los panoramas conceptuales que alientan y embellecen la vida, aparentemente solitaria, de los genios abstractos. Ya lo dijo un poeta de otro modo en una de sus famosas rimas:

«Mientras haya un misterio para el hombre
¡ habrá poesía !»

MIRANDO AL FUTURO

(Nuevas perspectivas)

§ 1. SOBRE CIBERNETICA

GÉNESIS Y PROBLEMAS [1]

Hablar de una ciencia de base marcadamente físico-matemática a un público polarizado en otros sectores no resulta tarea fácil. Por otra parte, tampoco es posible delimitar de modo preciso una región conceptual cuando apenas se empiezan a vislumbrar sus extensas perspectivas. De todos modos, intentaré dar una ligera visión de los problemas técnicos relacionados con esta ciencia, en la forma más sencilla que me sea posible y aun de proyectar sus repercusiones en campos que no me son familiares, intercalando alguna que otra pincelada matemática con resonancias de cosecha propia.

CIBERNÉTICA Y AUTOMÁTICA

Para ser completamente objetivo, tengo que empezar declarando que la palabra *Cibernética* no es, hoy por hoy, ni más ni menos que el título que el célebre matemático Norberto Wiener ha dado a un conjunto de problemas y cuestiones concernientes a las técnicas modernas de la comunicación y del control, así como a las analogías biológicas que tales cuestiones suscitan. Claro es que el mérito de Wiener no radica en el he-

---

[1] Artículo publicado en la «Revista de Psicología General y Aplicada». Julio-septiembre 1951.

cho de haber dado un nombre, sino en haber concebido una cierta unidad científica que lo justifique. A su libro con este título envío al lector curioso, y matemáticamente preparado, que desee una información completa de sus ideas, que, dicho sea de paso, han suscitado no poca hostilidad, especialmente en lo que se refiere a las pretendidas derivaciones psicobiológicas [2].

Para comprender mejor el alcance y significado de las técnicas aludidas, remontémonos, por un momento, al proceso histórico que les ha dado origen. El hombre lucha, desde su creación, con las fuerzas naturales. Al principio se limitó a defenderse de ellas; luego quiso dominarlas y en cauzarlas para aliviarse del esfuerzo muscular (técnica que culminó en el progreso industrial de los siglos XVIII y XIX), y ahora trata de conducirlas automáticamente, aliviándose, asimismo, de las tareas de vigilar, informarse, corregir, ajustar...; en una palabra, trata de gobernar automáticamente los ingenios con los que encauza aquellas fuerzas para sus fines. Y así, la palabra «Cibernética» está tomada del griego κυβερνήτης, que significa piloto, timonel; de ella procede asimismo nuestro vocablo «gobierno».

Sin que pueda calificarse de ciencia totalmente nueva, ya que al dominio de la Cibernética pertenece, en rigor, la técnica clásica de la regulación, es lo cierto que los modernos recursos que proporciona la electrónica le están dando en nuestros tiempos (especialmente desde la última guerra) tales avances que bien pudieran marcar el sello característico de la técnica del siglo XX.

Por lo apuntado, ya intuirá el lector que esta moderna automática intenta suplantar al hombre en tareas de categoría superior a la muscular, aunque sin llegar, naturalmente, a las funciones creadoras de la inteligencia. Trátase de sustituirle o ayudarle en actividades que el hombre mismo termina reduciendo a automatismos o a reflejos condicionados después de breve aprendizaje. Veamos algunos ejemplos.

---

[2] Desde que este artículo fue escrito, hasta hoy, han aparecido varias obras con el título «Cibernética» o similar, millares de artículos dedicados a sus problemas; han surgido revistas especializadas (una española entre ellas), sociedades de cultivadores..., y se han celebrado varios certámenes internacionales para el intercambio de ideas y revisión de fundamentos. Todo ello no altera, sin embargo, lo esencial del artículo. N. del A.

El timonel de un buque en alta mar tiene por función mantener el rumbo del mismo. Para ello observa constantemente las desviaciones que sobre tal rumbo imprimen causas aleatorias (viento, oleaje...), es decir, se informa de ellas y luego gira el timón proporcionalmente a las desviaciones observadas y en el sentido preciso para corregirlas. Tan simple tarea llega a ser pronto un proceso subconsciente y se comprende que pueda ser realizada por dispositivos automáticos varios. (Por ejemplo, un contacto, solidario con la brújula, deslizándose sobre una resistencia, en arco, de un potenciómetro en el que se estableciera, por el corrimiento del contacto subsiguiente a toda desviación de rumbo, una diferencia de potencial de signo correspondiente al de la desviación y que, convenientemente amplificado, podría accionar en un sentido u otro un servo-motor que moviera el timón.) Lo dicho para un buque puede repetirse, asimismo, en términos generales, para el avión en el triple sentido de rumbo, altura y estabilización lateral, hechas las adaptaciones pertinentes a las características del mismo.

SU INSTRUMENTAL MATEMÁTICO

El funcionamiento de servos de esta naturaleza se plantea mediante ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a ecuaciones algebraicas, transformadas de ellas mediante la transformación analítica de Laplace-Fourier. Con unas u otras ecuaciones se estudia matemáticamente la estabilidad del servomecanismo, analizando si el mismo producirá reacciones excesivas capaces de romper el equilibrio del sistema o de hacerle oscilar indefinidamente, con objeto de adoptar, en tal caso, las medidas pertinentes para evitarlas.

Para los iniciados en matemática superior añadiré que la transformación de Laplace aludida resulta específicamente indicada para el estudio de los sistemas físicos que realizan transformaciones funcionales unívocas de carácter lineal e invariante respecto del origen de tiempos. Si llamamos $x\ (t)$ a un estímulo genérico del sistema (input) e $y\ (t)$ la respuesta correspondiente (output), los caracteres indicados permiten formular dicha respuesta una vez conocida la respuesta $a\ (t)$ del sistema a un impulso unitario (función de Dirac), pues basta sumar en cada instante t las respuestas del sistema a los impulsos elementales $x\ (\tau)\ d\tau$ que forman el pasado de $x\ (t)$ hasta el origen del fenómeno $(0 \leq \tau \leq t)$.

Es decir:

$$y = \int_0^t a\ (t - \tau)\, \dot{x}\,(\tau)\, d\tau \qquad [1]$$

Esta integral constituye el llamado *producto compuesto* (Faltung, convolution) de las funciones x, a y se transforma en producto ordinario mediante la transformación de Laplace, de modo que si $\xi\,(\gamma)$, $\eta\,(\gamma)$, $\alpha\,(\gamma)$ son las transformadas Laplace de $x(t)$, $y(t)$, $a(t)$, verifican la relación (γ parámetro complejo)

$$\eta\,(\gamma) = \alpha\,(\gamma)\,\xi\,(\gamma) \quad \text{o bien} \quad \xi\,(\gamma) = \varphi\,(\gamma)\,\eta\,(\gamma) \quad \text{con} \quad \varphi = 1 : \alpha \qquad [2]$$

La relación de carácter trascendente [1] queda así reducida a la pro porcionalidad funcional [2], lo que simplifica considerablemente el tratamiento matemático de los sistemas. En particular la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable es que la función $a(t)$ sea absolutamente integrable en el futuro ($t > 0$), o sea, debe existir un número $L > 0$ tal que

$$\int_0^t |\, a\,(t)\,|\, dt < L \quad \text{para toda } t$$

Esta condición se puede formular en los sistemas físicos corrientes (especialmente en los circuitos eléctricos) mediante otra condición relativa a la transformada $\alpha\ (\gamma)$ o $\varphi\ (\gamma)$ que resulta más directamente verificable, a saber: $\varphi\ (\gamma)$ debe tener todas sus raíces a la izquierda del eje imaginario, o lo que es equivalente: La región transformada del semiplano $R\ (\gamma) \geqq 0$ por la función de transformación $\varphi\ (\gamma)$ debe excluir el origen de coordenadas. El problema de estabilidad ha quedado así reducido a una sencillísima cuestión de topología que se traduce en el diagrama de Nyquist, bien conocido de los especialistas en servomecanismos. Pero volvamos al hilo de las realizaciones técnicas.

NUEVOS EJEMPLOS. LIMITACIONES

Otro ejemplo: Un artillero dirige la visual a un blanco, el cual, al propio tiempo que se desplaza, oscila con cierta rapidez alrededor de su trayectoria (trepidaciones, oleajes...). Para afinar la puntería en el disparo, el referido artillero hará algo más que perseguir mecánicamente la imagen; tendrá, en primer lugar, que imaginar una trayectoria media resultante de promediar intuitivamente las oscilaciones secundarias, y apuntar luego, no al lugar presente en esta trayectoria media, sino al lugar futuro probable que ocupará dicho blanco, transcurrido el tiempo que haya de mediar entre el disparo y el impacto. En términos físico-matemáticos: tendrá que «filtrar» la observación, limpiándola de las oscilaciones aleatorias de corto período, y «extrapolar» o «predecir» dicha trayectoria probable en un futuro próximo, teniendo en cuenta las observaciones precedentes. Mediante el auxilio del radar, esta función del artillero, bastante más compleja que la del timonel, está también al alcance de la actual técnica de los servomecanismos, con los cuales se aventaja ya al hombre en rapidez de reacción. Aquí, el primer problema que se plantea es el de caracterizar matemáticamente los operaciones de filtrado y predicción, cuestión nada fácil, por cierto; luego se procura hallar esquemas electromecánicos capaces de realizar los operadores filtro-predictores obtenidos en la teoría matemática. Esta última se ha divulgado ya en artículos y en libros, como el titulado *Extrapolation, interpolation and smoothing*, del propio Wiener.

Después de tales avances, no habrán de causar asombro los autómatas, que se limitan a imitar conductas de animales inferiores, como, por ejemplo, las famosas tortugas artificiales de Walter, recientemente presentadas en el coloquio de París sobre dichos temas (enero de 1951), y de cuyo funcionamiento podemos suministrar algún detalle por haberlas visto y por tener a mano una descripción sucinta del propio autor.

En ausencia de una excitación luminosa, la tortuga automática explora el horizonte. Su «cabeza» gira hasta que la percepción de una señal luminosa detiene el giro y pone en marcha el aparato en dirección de la señal. Si el modelo halla un obstáculo material que le impide continuar el movimiento en tal dirección, se establece un circuito que transforma el movimiento en otro de vaivén, con corrimiento lateral, hasta que el obstáculo queda vadeado. Cuando la intensidad de la fuente luminosa sobrepasa un cierto valor, se reanuda el movimiento de giro de la «cabeza» que va acoplada a la rueda de dirección, de modo que la tortuga termina dando vueltas alrededor de la luz. Ahora bien: si su potencia disminuye a punto de extinguirse, la tortuga funciona homeostáticamente, acercándose a la luz en busca de la energía que le falta. La referida «cabeza» lleva una lamparita piloto conectada al circuito del servomotor, que la hace girar, y de tal modo dispuesta, que si el modelo recibe como señal luminosa el reflejo de su propia luz en un espejo, la lámpara se apaga, con lo que cesa la señal y vuelve a girar la cabeza exploradora hasta volver a recibir la propia señal, apagándose nuevamente, y así sucesivamente, con lo que define un comportamiento específico de autorreconocimiento de la tortuga frente al espejo. Reacciones análogas de apagado y exploración alternativas se producen entre dos tortugas, que manifiestan de tal suerte un singular comportamiento «social».

Los ejemplos de funciones de ajuste y control, realizables o realizadas ya mediante servomecanismos por el estilo, serían interminables. Basten los reseñados para dar idea de los alcances de la moderna automática.

Capítulo aparte merecerían las máquinas modernas de clasificación automática, las que resuelven problemas de discriminación lógica por interferencia de condiciones convenientemente codificadas, los ajedrecistas de nuestro Torres Quevedo..., y finalmente, las gigantes máquinas electrónicas que ayudan al hombre en sus automatismos aritméticos, realizando a velocidades vertiginosas los más complejos programas de cálculo.

Todas estas conquistas han agitado no poco la imaginación de los comentaristas de café y de los articulistas de la Prensa diaria, y se ha vuelto a fantasear sobre la posible realización de «robots», los famosos personajes autómatas de la diversión escénica de Karel Capek. Ante tales fantasías es preciso volver e insitir en el hecho de que las más audaces de las funciones citadas no pasan de ser actividades que el hombre termina desarrollando subconscientemente, al margen de su numen creador y de su genio artístico. El mismo ajedrecista de Torres Quevedo, o los ajedrecistas más ligeros que la técnica moderna llegara a construir, no podrían reaccionar más que de acuerdo con las normas que el constructor hubiera realizado en ellos para llevar a buen término un final de partida que se sabe infaliblemente ganado con tales reglas. Mucho antes de llegar a este género de posiciones de las que parte el autómata ajedrecista, abandonan sus partidas los medianos jugadores humanos. Un juego de este tipo que pudiese ser desde un principio contendido entre autómatas carecería totalmente de interés para el hombre, ya que todas las posibilidades estarían *a priori* resueltas por el constructor. Por mucho que avance la automática, el genio creador quedará siempre fuera del alcance de todo autómata.

Podría llegarse, quizá, a realizar autómatas capaces de contestar acertadamente los temas o preguntas estandardizadas de un tribunal examinador invariable y aun de crear «robots» preparadores, capaces de registrar pacientemente tales preguntas inscribiendo las respuestas en los «robots» examinandos. Lo que no podría crearse jamás es un «robot» que realizara la imponderable misión contenida en la palabra «maestro». Y perdóneseme que, sin propósito preconcebido, haya recaído sobre un tema en el que hace ya tiempo vengo insistiendo: el de la diferencia entre «preparar» y «formar». Podríamos decir ahora en términos cibernéticos: preparar es hacer «robots»; educar es hacer hombres. Para terminar esta digresión: el hombre es capaz de crear infinita variedad de autómatas, pero ningún autómata será capaz de crear o de proyectar un autómata nuevo.

ANALOGÍAS FISIOLÓGICAS

Sin duda alguna, lo más interesante para el lector psicólogo no son, precisamente, las realizaciones cibernéticas de aplicación técnica, científica o guerrera, sino la repercusión que tales realizaciones han tenido en la concepción científica de las funciones del intelecto humano. Sobre este particular me confieso falto de autoridad y aun de preparación, pero temo que se esté yendo peligrosamente lejos en el establecimiento de pretendidas analogías entre los funcionamientos de cerebro y máquina. Aceptable es, por ejemplo, que se designe con la palabra «memoria» ciertos circuitos de las calculadoras electrónicas en los cuales quedan registrados, en forma de sucesiones de impulsos, los datos numéricos y aun las órdenes de ejecución de un programa de cálculo; pero que esta simpática metáfora se tome como base de hipótesis y especulaciones en las cuales nuestra auténtica memoria se explique como una maraña de circuitos orientables en un momento dado por conexiones sinápticas, se me antoja simple conjetura de valor científico por ahora muy escaso y discutible. Las únicas experiencias (de que tengo noticia) que manifiestan una relación directa entre nuestra actividad pensante y cierta actividad eléctrica de nuestra corteza cerebral, y que constituyen la moderna técnica encefalográfica, están todavía tan poco matizadas que sólo han permitido, hasta el presente, ser utilizadas en diagnósticos de perturbaciones de mucho relieve, como tumores cerebrales, epilepsia, etc. Parece iniciarse recientemente, según técnica expuesta por nuestro ilustre huésped el profesor Arellano, de Boston, estudios tendentes a correlacionar la estructura de los encefalogramas con la personalidad del sujeto experimentado, y no dejan de ser esperanzadoras las muestras presentadas por dicho profesor, en reciente conferencia dada en el Instituto «Luis Vives», de encefalogramas de sabios insignes. De ellos parecería desprenderse, por ejemplo, la presencia de ondas de bandas de frecuencia características en tipos de auténtico genio matemático. Sin embargo, esperanzador no significa todavía concluyente, y la fase de experimentación por la que deben discurrir todavía tales técnicas se presume tan larga que toda conclusión parece, hoy por hoy, prematura [3].

Interesantes resultan las especulaciones recientes de los fisiólogos cibernéticos como McCulloch y Walter, tendentes a explicar las ondas registradas por la encefalografía como posibles procesos de barrido (scanning) en el mecanismo de la visión. Aun teniendo en cuenta, dice Walter, la admirable pequeñez de las células y fibras nerviosas que intervienen en el fenómeno de la sensación visual, una proyección del campo, punto por punto, requeriría mayor espacio del que dispusiera el animal de mayor tamaño y haría, además, muy dificultosa la comparación de los datos visuales con los suministrados por otros sentidos. El principio fisiológico de economía de estructuras, parece conducir a explicar mejor la compacidad de la imagen, admitiendo procesos de barrido del campo visual análogos a los usados en televisión, y de rapidez tal, que el tiempo de barrido sea próximo al de persistencia de la impresión luminosa en la retina, y, en efecto, tal es, aproximadamente, la frecuencia del ritmo «alfa» fundamental en los encefalogramas.

Parecen confirmar además, tal hipótesis, las perturbaciones de carácter alucinatorio producidas en el área visual de la corteza cerebral cuando el campo visual se ilumina intermitentemente con frecuencias próximas a la del ritmo «alfa». Tales perturbaciones son de carácter análogo a las que se producirían en los receptores de televisión cuando la escena se iluminara con leve asincronismo respecto de la onda de transmisión.

---

[3] Con posterioridad a la redacción de este artículo (1951) tuvimos ocasión de presenciar otras interesantes experiencias realizadas por el profesor C. Gattegno con un aparato más sencillo ideado por el profesor Gay para registrar leves alteraciones energéticas a flor de piel ; experiencias que ponen de manifiesto, asimismo, la influencia de la actividad pensante sobre variables físicas observables (no precisamente eléctricas) relacionadas con el cuerpo humano. V. «Un nouveau phénomène psychosomatique» (Délachaux-Niestlé. Neuchâtel-Paris, 1952). (N. del A.)

Por otra parte, la conversión de sensaciones espaciales simultáneas en ondas espacio-temporales, permitiría intentar explicaciones físicas de los fenómenos de memoria visual bastante menos burdas que la permanencia de alteraciones materiales de carácter estático. Esta hipótesis abre al mismo tiempo perspectivas cibernéticas a la teoría gestaltista que aparece ahora de nuevo sobre el tapete en relación con la teoría matemática de invariantes por atrevida concepción de McCulloch y Pitts [4].

RETROACCIÓN Y HOMEOSTASIA

Con mucha mayor convicción me permito acoger la analogía entre la *retroacción* que caracteriza el funcionamiento de los servomecanismos de control y la *homeostasia* reguladora de las reacciones de los seres vivos. Los servomecanismos aludidos son sistemas físicos en «feed-back» o retroactivos, es decir, que se cierran, en parte, sobre sí mismos, contraponiendo la respuesta (o una transformada de ella) al estímulo, para obtener un nuevo estímulo diferencial que provoque la autocorrección. Esta función retroactiva y autocorrectora es la misma que presentan los organismos vivientes en sus funciones de adaptación y relación con el medio que les rodea. Toda alteración en sus condiciones normales de vida, provoca fenómenos retroactivos de esta clase, tendentes a regular su adaptación a las nuevas circunstancias, creando reacciones compensadoras. Cuanto más se eleva un ser vivo en la escala biológica, más delicadas y exigentes son sus condiciones de vida y, por tanto, más numerosos y complejos son los fenómenos retroactivos que las conservan, fenómenos que Cannon denominó *homeostáticos*. Recordemos, por ejemplo, la acción simultánea de los músculos antagonistas y de su inervación, con los que obtenemos la precisión de nuestros movimientos. Al realizar cualquiera de ellos, una red compleja de observaciones registradas por los sentidos estimulan la acción retroactiva de control, determinando reacciones musculares antagónicas, adecuadas a los desajustes observados. Fenómenos en abstracto análogos, aunque recayendo sobre magnitudes concretas de muy diversa naturaleza, se presentan en la regulación de la presión sanguínea (nervios vasodilatadores y vasoconstrictores), del metabolismo y de la temperatura (glándulas tiroidea, suprarrenales, sudoríparas...), de la composición de la sangre, de

[4] Véase McCulloch y Pitts: «How we know universals. The perception of auditory and visual forms». *Bulletin of Math. Biophysics.*, vol. 9; 1947.

los jugos gástricos, etc. Es muy notable la semejanza entre las anomalías de funcionamiento en los servomecanismos que la técnica construye y las que presentan los organismos vivos en algunas alteraciones patológicas, como, por ejemplo, ciertos tipos de temblor en enfermos nerviosos. La misma marcha sinuosa del borracho, probable alteración tóxica del funcionamiento retroactivo de los canales circulares, es parecida a las oscilaciones de un servomecanismo inestable. Tales analogías abren no pocas perspectivas al estudio físicomatemático de la homeostasia biológica. La misma oscilación del potencial de membrana del nervio, oscilación cuya propagación constituye, al parecer, la corriente nerviosa, tiene posible origen en alteraciones de carácter bioquímico, transmitidas a lo largo del nervio por una cadena de procesos en «feed-back», de naturaleza aún desconocida. Al menos, tal es la creencia de Lorente de Nó y de otros neurólogos.

Finalmente, los fenómenos de entrenamiento y aprendizaje, pueden explicarse físicamente, al menos en lo que concierne a habilidades y destrezas, mediante la formación progresiva de cadenas de sistemas retroactivos eslabonados de forma que cada «feed-back» sirva para controlar el anterior. Con tal fin, Ashby ha construído un aparato automático que ha denominado «homeostato», el cual realiza una cierta función de autoaprendizaje mediante la aparición automática de «feed-backs» de primer orden cuando éstos provocan una conducta inestable del homeostato. (Véase bibliografía final.)

UNA APLICACIÓN MATEMÁTICA

A este propósito, seáme permitido terminar este artículo dirigiéndome nuevamente a los lectores matemáticos, para indicar la curiosa aplicación que las fracciones continuas pueden hallar en la formulación de las funciones de transformación de tales sistemas retroactivos múltiples, y que tuve el honor de desarrollar en el coloquio de París de enero de 1951 sobre estos temas.

Si $\varphi(\gamma)$ es la función de transformación de un sistema físico lineal, tal como ha sido establecida más arriba, y añadimos a dicho sistema otro sistema de control que contraponga la respuesta del primero a su entrada, después de transformarla según la función $\psi_1(\gamma)$ la nueva función de transformación del sistema corregido es (Véase bibliografía final) :

$$\varphi(\gamma) + \frac{1}{\psi_1(\gamma)}$$

y si el sistema de control es, a su vez, corregido por otro de función ψ_2 (γ) la nueva función de transformación será la fracción continua resultante de añadir a la anterior el eslabón $1/\psi_2$ (γ); y así sucesivamente para una cadena de sistemas retroactivos eslabonados como antes se ha dicho.

Si las transformaciones sucesivas son infinitesimales y la cadena es de infinitos eslabones (como podemos imaginar que ocurre a lo largo de una línea eléctrica de transmisión), la función de transformación (impedancia en el caso de las referidas líneas) se formula mediante un algoritmo de fracciones continuas de eslabones infinitesimales no estudiado hasta ahora, que yo sepa, y cuya teoría matemática estoy desarrollando actualmente. (Véase bibliografía.) Es curiosa la íntima conexión analítica que existe entre dicho algoritmo y los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales del tipo

$$-\frac{dp}{dx} = f(x)\, q \qquad -\frac{dq}{dx} = g(x)\, p$$

análogos al sistema de Lord Kelvin en las líneas eléctricas. Aplicada mi teoría a dichas líneas con constantes uniformemente distribuídas se obtienen, como era de esperar, los resultados de la teoría clásica de la transmisión. Pero el algoritmo es asimismo aplicable cuando tales constantes no se distribuyen uniformemente. No parece, pues, fuera de razón esperar que tenga también aplicación a los fenómenos de «feed-back» metabólicos que originan la corriente nerviosa cuando se conozca más a fondo su íntima esencia.

Véase, pues, cuán amplios campos quedan por explorar en este capítulo científico recién abierto, denominado «Cibernética», en el que confluyen las más variadas especialidades: la matemática, la electrotecnia, principalmente en su modalidad electrónica; la fisicoquímica, la fisiología, especialmente la neurológica, etc. Con razón, el progreso que en profundidad tiende a convertirnos cada vez más en técnicos especialistas, exige, por otra parte, el cultivo simultáneo en extensión de horizontes amplios para que tales especializaciones no resulten condenadas a la esterilidad de su propio aislamiento.

BIBLIOGRAFIA

N. WIENER : «Cybernetics». J. Wiley. New-York ; Hermann Paris.

N. WIENER : «Extrapolation, interpolation and smothing of stationary time series». *Mass. Int. of Techn.*

JAMES, NICOLS, PHILIPS : «Theory of servomechanisms». *Mass. Inst. of Techn.*

R. LORENTE DE NÓ : «Correlation of nerve activity with polarization phenomena». *The Harvey Lecture Series.*

W. G. WALTER : «Realisation Mécanique de Modeles de Structure Cérebrale». *Coloquio de París.* Enero 1951.

W. G. WALTER : «Features in the electro-physiology of mental mechanisms». Ensayo de la Colección «Perspectivas in Neuropsychiatry». Ed. H. K. Lewis. Londres, 1950.

W. R. ASHBY : «The cerebral mechanisms of inteligent action». De la misma colección.

W. R. ASHBY : «The homoestat». (Coloquio de París. Enero 1951).

MCCULLOCH y PITTS : «How we know universals. The percepcion of auditory and visual forms». *Bulletin of Math. Biophysics.*, vol. 9 ; 1947.

MCCULLOCH : «Why the mind is in the head?». De la colección Bibliothèque Scientifique. Ed. Griffon, Suiza, núm. 22, serie dialéctica L'organisation des fonctions psychiques. M. Monnier.

A. P. ARELLANO : «Basal Electroencephalography some findings.» *Journal of Nervous and Mental Disease.* Junio de 1951.

P. PUIG ADAM : «La transformación de Laplace en el tratamiento matemático de los fenómenos físicos». *Rev. Mat. Hisp. Am.* 4.ª serie, tomo XI.

P. PUIG ADAM : «Les systhèmes retroactifs en chaine et les fractions continues». (Coloquio de París. Enero 1951).

P. PUIG ADAM : «Las fracciones continuas de cocientes incompletos diferenciales y sus aplicaciones». *Rev. Mat. H. A.*, 1951.

P. PUIG ADAM : «Matemática y Cibernética». Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

A estas notas bibliográficas correspondientes a la fecha de publicación del artículo (1951), séame permitido añadir hoy tan sólo las referentes a obras generales de Cibernética de *Ashby, Couffignal, Guilbaud* y los trabajos aludidos en el texto, en los que he continuado desarrollando la teoría de las fracciones continuas de elementos diferenciales : «Algunas generalizaciones del Algoritmo de fr. cont. de elem. dif.» (Rev. Mat. Hisp. Am., 1.ª serie, tomo XII, núm. 3) ; «Sobre algunas propiedades de las fracciones continuas de elementos diferenciales» (As. Esp. para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Oviedo de 1953. Rev. «Las Ciencias», Año XX, núm. 2) ; «Reducidas Ascendentes y Reducidas Descendentes en el Algoritmo de las Fr. Cont. de Elem. Dif.», Rev. de la Ac. de Ciencias. Madrid, tomo XLVIII, C. 1.º).

§ 2. SOBRE LA MODERNA TEORIA DE LA INFORMACION [1]

El empuje dado durante la última guerra a la técnica de la comunicación ha estimulado su estructuración matemática. Pieza clave de tal estructura es el concepto de *cantidad de información*. La agudeza desplegada en los criterios de medida de dicha cantidad y el paralelismo existente entre las fórmulas que dan esta medida y las que expresan en termodinámica estadística la magnitud física denominada entropía, bien merecen los intentos de divulgación que permitan hacer captar su belleza al público culto no especializado.

LA COMUNICACIÓN Y SUS NIVELES

Para los físicomatemáticos cultivadores de dicha teoría, comunicación es todo acto por medio del cual un ser influye en la conducta de otro. De este modo incluyen en la teoría de la comunicación la mayor parte de las manifestaciones de la vida de relación humana: lenguaje, arte, música, teatro..., y asimismo las relaciones entre animales, y, a mayor abundamiento, las conexiones entre ingenios y mecanismos.

Un sistema de comunicación enlaza dos sujetos: remitente y destinatario. Conviene considerar el primero como elemento que selecciona el mensaje entre una multitud de mensajes posibles, y el segundo, como un sujeto expectante, cuya incertidumbre apriorística, acerca del mensaje que espera, corre parejas con la libertad de selección del emisor. La transmisión del mensaje se hace a través de un vehículo o canal (material o in-

---

[1] Este trabajo recoge, en lo sustancial, las ideas expuestas por el autor en el discurso que pronunció el día 10 de noviembre de 1954 en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y fué publicado en la revista «Arbor», del Consejo Superior de Investigaciones Científicas en mayo de 1955, núm. 111.

material), pero antes precisa transformar el mensaje en señales transmisibles por medio de tal vehículo. Ello obliga a interponer, entre el sujeto emisor y el canal, un elemento transmisor que traduce el mensaje en señales, y, asimismo, entre el canal y el destinatario un receptor que efectúe la traducción inversa. En resumen: el remitente *selecciona,* el transmisor *traduce,* el canal *transmite* y el receptor *interpreta* para que el destinatario *reciba.*

Nótese que los elementos transmisor y receptor, encargados de traducir el mensaje en señal, y viceversa, pueden ser muy complejos, según lo que juzguemos como sujetos remitente y destinatario, lo que consideremos como mensaje y señal, según donde situemos, en definitiva, el origen y el término de la cadena. Porque, si en un sistema de comunicación telegráfica, consideramos como mensaje el telegrama tal cual sale de las manos del remitente, el sistema transmisor está formado por el aparato Morse o teletipo junto con el telegrafista que lo maneja; pero si consideramos el origen del mensaje en el cerebro remitente, entonces se añade al aparato transmisor anterior todo el sistema nervioso muscular de éste, capaz de dar forma escrita al mensaje conceptual. Y aun en capas más profundas hallaríamos todo el sistema lógico intelectual sintético capaz de resumir en pocos términos el complejo conceptual que se desea transmitir. Operaciones inversas aparecen, naturalmente, en la traducción y comprensión del telegrama por parte del destinatario. En cada una de estas fases pueden, pues, surgir causas de error y perturbación *(noise),* afectando no solamente a la transmisión técnica de las señales, sino también a la transformación o traducción previa y posterior del mensaje.

Según la capa más o menos profunda a que lleguemos en el origen y en el destino de la comunicación, así resultan los distintos niveles a que alude Warren Weaver en su interesante epílogo a la teoría de Shanon [2]. El nivel *técnico,* en el que pretende situarse exclusivamente Shanon, estudia simplemente la transmisión de símbolos o señales. El nivel *semántico* cala más hondo, estudiando la transmisión de conceptos. Finalmente, aún cabe situarnos en nivel más profundo que podríamos llamar *psicológico,* estudiando la influencia que determina el mensaje transmitido en la conducta del sujeto receptor.

Afirma Weaver, con razón, que los tres niveles no son tan independientes como pueden parecer a primera vista y no permiten una división de-

[2] SHANON, CLAUDE: *The Mathematical Theory of Communication.*

masiado tajante de problemas. Los problemas sobre capacidad y fidelidad en la transmisión de señales no son independientes del contenido conceptual de ellas. Precisamente dicho contenido es el que crea lenguaje, modificando, como veremos, las probabilidades de tales señales, estableciendo relaciones entre ellas e influyendo sustancialmente en los problemas de codificación y de capacidad transmisora, y este mismo contenido conceptual, al crear redundancia en la transmisión, hace subsanables los errores personales y las perturbaciones de carácter técnico que en ella puedan presentarse. Finalmente, desde el punto de vista de la psicología experimental, y de acuerdo con el concepto de comunicación antes establecido, la eficiencia de un mensaje se comprobará, en última instancia, observando si se refleja su influencia en la conducta del sujeto receptor.

Las perturbaciones pueden aparecer, como hemos dicho, en cualquiera de estos niveles: la falta de coordinación de ideas, la dificultad de lenguaje, los defectos del aparato transmisor, los ruidos del canal por degradación de la energía aportada en él, las averías del receptor, los fallos del oído del destinatario y, finalmente, sus propias dificultades de comprensión, son otros tantos motivos de perturbación que pueden presentarse en los distintos estadios mencionados.

LA CANTIDAD DE INFORMACIÓN

Ahora bien, ¿qué es lo que, en sustancia, alteran, y en qué medida lo alteran tales perturbaciones? Parece necesario plantear y resolver este problema de medida para juzgar de la bondad de un sistema de comunicación. ¿Cómo valorar, pues, la cantidad de información, de tal modo que la medida obtenida se preste a especulaciones útiles para la técnica del servicio suministrado?

El camino que conduce a tal valoración es bastante más sutil de lo que pudiera parecer a primera vista. Lo inmediato y rudimentario fuera, tal vez, medir la cantidad de información por el número de señales o símbolos transmitidos; pero pronto nos daremos cuenta de las contradicciones en que incurriríamos con un criterio métrico tan tosco.

Para localizar un habitante en Madrid necesitamos más información que para localizarle en una aldea. Una carta llega fácilmente a su destinatario aldeano con el nombre y apellidos, y, a veces, con un apodo basta. En una ciudad necesitamos nombre y apellidos, calle, número, piso, puerta, y todavía habría que añadir habitación, si hubiera en el piso muchos huéspedes. Parece, pues, obligado admitir que la cantidad de información necesaria para encontrar a un individuo en un colectivo crece con el número de individuos del mismo; es decir, es una función creciente de dicho número, y sólo resta precisar qué función nos conviene elegir. Es natural adoptar una función tal que dé para dos individuos una cantidad de información que sea la suma de las necesarias para cada uno de ellos. Ahora bien, el número de parejas de individuos que se pueden formar con los de dos colectividades es el producto (no la suma) de los números de individuos de una y de otra. Se comprende así que la escala o función natural de medida es la logarítmica, por ser la única que transforma el producto en suma. Y con esto hemos dado el primer paso fundamental en el problema de la medida: la medida de la información necesaria para individualizar un elemento entre un número finito de ellos se obtiene tomando el logaritmo del número de individuos del conjunto. La base del sistema de logaritmos dependerá de la elección de unidad. Este resultado, obtenido mediante un ejemplo sencillo, se generaliza luego convenientemente para medir la cantidad de información en casos más complejos.

Pero, antes de seguir adelante, permítaseme reforzar la naturalidad de esta medida logarítmica de la cantidad de información con un ejemplo que me parece de la mayor oportunidad.

Entre los juegos de adivinación son bastante conocidas unas tablitas de números (que el lector mismo podrá construir después de leer lo que sigue), tales que, elegido un número al azar, basta señalar las tablas en las que se halla escrito para que el poseedor de la clave acierte el número elegido. Consiste el secreto en sumar los números que encabezan las tablas señaladas.

Para comprender la esencia matemática del juego, basta imaginar los números escritos en sistema binario. Se manejan números que tienen (a lo sumo) tantas cifras binarias (0,1) como tablas examinadas. En la primera tabla escribiremos los números enteros cuya cifra de unidades de primer orden es *1* (es decir, los impares 1, 3, 5...); en la segunda tabla escribiremos todos los que tienen *1* en las unidades de segundo orden, empezando por el más pequeño (es decir, 10, que significa 2, al que seguirán 11 = 3, 110 = 6, 111 = 7...); en la tercera tabla escribiremos todos los que tienen *1* en las unidades de tercer orden, y así sucesivamente. El número que encabeza cada tabla es el menor de ellos, es decir, aquel que, escrito en sistema binario, tiene el *1* en su lugar correspondiente y las demás cifras *0*. De aquí se comprende por qué basta sumar los números cabeza de tablas en que se halla el número elegido para reconstruir éste.

Ahora bien, ¿qué información suministramos al «adivinador»? Ya dije que en las tablas sólo figuran números de tantas cifras binarias como tablas. Señalar cuáles son las que tienen el número elegido, y, por tanto, por exclusión las que no lo tienen, equivale a dar otros tantos informes de carácter disyuntivo, «sí» o «no», que en este caso se traducen en cifras, *1* ó *0* del sistema binario. En la teoría de la comunicación el informe de una discriminación disyuntiva se toma como unidad de información llamada *bit* (Tukey) o *binit* (Goldman). Con un juego de ocho tablas suministramos, pues, ocho *bits* de información, los cuales son necesarios y suficientes para individualizar un número de ocho cifras binarias a lo sumo; es decir, desde *0* hasta 2^8-1. En general, n *bits* permiten discriminar un individuo entre 2^n, siendo n, por tanto, el exponente o logaritmo que mide, según se ha dicho, la cantidad de información. La base del sistema de logaritmos es, con esta unidad, el 2. Como se ve, la ley logarítmica nace del convenio sobre la definición de suma, mientras la base del sistema viene dada por la elección de unidad.

DIFICULTADES EN LA MEDIDA MATEMÁTICA

Volviendo ahora al ejemplo de las direcciones, nos damos cuenta de que la cantidad de palabras o letras que contienen no dan una medida razonable de la información que suministran, ya que dos cartas de servicio interior, una en Madrid y otra en Guadalajara, por ejemplo, con la misma dirección: «Generalísimo, 1», representan, como hemos dicho antes, cantidades de información muy distintas, debido a que la primera recae sobre un conjunto de individuos mucho mayor que la segunda. En cambio, si la carta procede de un tercer lugar y se añade a la dirección anterior las palabras Madrid o Guadalajara, la cantidad de información resulta ya igualada, por referirse ahora, una y otra, a un mismo conjunto, el de todos los españoles. Las informaciones suplementarias suministradas por los datos geográficos añadidos, Madrid o Guadalajara, tienen también desigual valor informativo, pero con signo de desigualdad opuesto que complementa la información anterior. La palabra Madrid discrimina menos que la palabra Guadalajara, por lo que esta última contiene mayor grado de información.

Resumiendo: dos informaciones literalmente iguales (calle y número) pueden contener cantidades de información totalmente distintas si recaen sobre conjuntos (ciudades) diferentes, cuyo conocimiento se supone implícito en el receptor. Por el contrario, dos informaciones pueden tener idéntico valor, siendo literalmente distintas, por efecto de una distinta codificación geográfica.

El ejemplo que precede, con toda su ingenua simplicidad, pone además de manifiesto las dificultades que introduce en la teoría de la información el carácter semántico de los mensajes. Si unos mismos atributos (calle y número) tienen valor informativo distinto, según el concepto (lugar) sobre el que recaen (Madrid o Guadalajara), no es de extrañar que lo mismo ocurra para atributos más generales contenidos en la emisión de cualquier juicio, ya que constituyen informaciones cuyo valor es variable según la amplitud del concepto sobre el que recae el juicio emitido, y, por tanto, según la cantidad de información que el simple enunciado de dicho concepto supone. Ante esta dificultad, la teoría de la información intenta eludir el carácter semántico de las frases transmitidas, considerando éstas como simples conjuntos de letras del alfabeto, del mismo modo que la información en el juego de las tablas es un conjunto de afirmaciones o negaciones representables por un alfabeto de dos signos, 0 y 1.

Pero la dificultad que se soslaya por un lado surge por otro, complicando las fórmulas y exigiendo un análisis muy fino de las mismas. Si la cantidad de información de un telegrama ordinario formado por n signos cifras binarias se formula razonablemente mediante el logaritmo de 2^n, sería erróneo formular por analogía, mediante el logaritmo de 30^n, la cantidad de información necesaria para individualizar un número de n tomados de un alfabeto que tenga 30 en total. Aunque sea también 30^n el número de variaciones n-arias con repetición de dichos signos, ocurre en este caso que la mayor parte de tales variaciones son totalmente *improbables,* no sólo desde el punto de vista conceptual, por carecer de sentido, sino aun desde el simple punto de vista fonético y ortográfico. Ninguna palabra castellana tiene, por ejemplo, consecutivas las letras *q r,* ni las *j k,* ni las *v f*... Aparece, pues, como esencial en estas cuestiones la noción de *probabilidad del mensaje,* noción que estaba ya latente en los ejemplos sencillos antes considerados, sin que haya sido necesario aflorarla hasta ahora.

Si nos situamos en el punto de vista del emisor del mensaje, obsérvese, en efecto, que la cantidad de información es la medida logarítmica de la libertad de selección al azar entre todos los mensajes igualmente probables (direcciones, números de tablas...), y si nos situamos en el punto de vista del receptor, la cantidad de información es el logaritmo de la incertidumbre antes de recibir el mensaje; es decir (con signo opuesto), el logaritmo de la probabilidad del mensaje enviado entre todos los igualmente posibles. (Suponemos, claro es, el mensaje recibido sin perturbación, pues en caso de que tal perturbación exista, la cantidad de información se mide por el logaritmo de la razón entre dos probabilidades: las que para el receptor tiene el mensaje enviado después y antes de recibir el mensaje perturbado.)

Formulemos, pues, ya en términos de probabilidad, la cantidad de información contenida en *n bits,* o si quiere, el log 2^n, poniéndolo en la forma equivalente — log $1/2^n$, que expresa, en valor absoluto, el logaritmo de la probabilidad $1/2^n$ de acertar un número de n cifras binarias elegidas al azar. El signo — se añade por ser negativo el logaritmo de toda probabilidad (siempre menor que 1). Cuando los mensajes no son equiprobables, sino que se distribuyen en un número discreto de probabilidades complementarias p_1, p_2,...p_n (de suma unidad), el valor informativo por mensaje será la media ponderada de las cantidades de información de todos y cada uno de ellos, o sea, $\Sigma\ p_i \log p_i$.

Para formular ahora la cantidad media de información de un mensaje de n letras en un idioma determinado, el problema se complica todavía más, pues necesitamos saber no sólo la frecuencia estadística con que aparecen aisladamente las letras del alfabeto en el idioma, sino además la frecuencia de los pares, de las ternas, etc., de ellas, ya que la probabilidad de cada letra en cada momento depende de las que han precedido, según hemos indicado antes, a propósito de ciertas agrupaciones improbables.

Así es como el contenido semántico, que hemos pretendido soslayar, nos impone indirectamente su tributo, al constreñir nuestra libertad de selección, obligándonos a formular la cantidad de información a través de procesos estocásticos de naturaleza más compleja, conocidos en los estudios de estadística matemática con el nombre de cadenas de Markoff.

MENSAJES ALEATORIOS

El conocimiento de la frecuencia estadística de las letras aisladas, así como de sus combinaciones binarias, ternarias, etc., en el idioma, permite aprovechar al máximo un canal preestablecido o proyectar el sistema o canal más económico eligiendo una codificación de señales conveniente. Este aspecto ingenieril estadístico del estudio de un idioma no es totalmente nuevo, ya que más o menos racionalmente se hubo de tener en cuenta en los sistemas taquigráficos al uso; pero la moderna técnica de la comunicación es la que ha permitido apreciar su trascendencia, habiéndose tabulado en el idioma inglés las frecuencias no sólo de las letras aisladas, sino también de sus combinaciones binarias y ternarias, y cosa parecida se ha iniciado con las agrupaciones de palabras.

Shanon presenta, en su artículo ya citado, ejemplos de sucesiones de letras construídas al azar teniendo en cuenta dichas probabilidades, y es muy curioso comprobar cómo a medida que se tienen en cuenta más datos estadísticos de esta naturaleza, más se van pareciendo los mensajes aleatorios a los mensajes naturales.

A falta de tablas de probabilidades análogas en castellano, y con objeto de presentar una ilustración más familiar para el lector, construyo a continuación una sucesión de mensajes aleatorios, aplicando al castellano una técnica análoga a la indicada por Shanon para el idioma inglés.

Primer mensaje aleatorio.—Obtenido sorteando las 27 letras de nuestro alfabeto y un espacio, y anotando la sucesión de signos sacados a la suerte en los sorteos sucesivos. Ha resultado:

oe iakgzchpraymk jincyfchz icgdolxllbskrollv ...

Una secuencia que no tiene el menor vestigio idiomático, por el hecho de haber atribuído igual probabilidad a las 27 letras (y el espacio), lo que no ocurre en castellano ni en idioma alguno.

Segundo mensaje aleatorio.—Obtenido teniendo en cuenta las frecuencias de las *letras aisladas* en castellano. Para ello hemos abierto un libro (novela) al azar, y hemos anotado la letra o espacio que ocupa un orden designado al azar, en una línea igualmente elegida al azar. (Más adelante justificamos el hecho de que una novela pueda ser tomada como representativa del idioma, en cuanto a las frecuencias estadísticas de sus signos se refiere.) Resulta así el siguiente artificial mensaje, en el que ya se atisban rudimentos fonéticos castellanos:

np uiceldi saerqmoiadaa bsi be ometdnesd ...

Una fonética castellana aleatoria que podríamos llamar *aproximada de primer orden.*

Tercer mensaje aleatorio.—Construyamos ahora una aproximación de segundo orden teniendo en cuenta la frecuencia estadística de los *pares de letras.* Para ello procedamos del modo siguiente: Sacada al azar una primera letra *(o)* de una novela castellana, según la técnica del mensaje anterior, abramos el mismo libro u otro, al azar, y leamos en la página obtenida hasta hallar la letra *o,* anotando a continuación la letra (o espacio) que le sigue *(n).* Abriendo nuevamente al azar y leyendo hasta hallar la *n,* anótese la letra (o espacio) siguiente *(a)*; y así sucesivamente. Obtenemos así el mensaje:

onado a pon en dies camis maso pan dopo ndumorio mbies ...

Notablemente más aproximado a la fonética castellana que el anterior.

Cuarto mensaje aleatorio.—Aproximación de tercer orden obtenida partiendo de las dos primeras letras anteriores *on* y leyendo en una página abierta al azar hasta hallar la secuencia *on,* a continuación de la cual anotamos el signo que sigue (*o*). Abierto nuevamente el libro al azar se ha leído hasta encontrar la secuencia *no,* anotando la letra (o espacio) siguiente (*c*), y así sucesivamente. Resultado:

onocen en es trubo hacho cas el quedebe de escuda ma ei ...

Quinto mensaje aleatorio.—He aquí, finalmente, una aproximación de cuarto orden obtenida con método parecido. Se han utilizado esta vez dos libros y dos buscadores, operando simultáneamente para abreviar, dada la dificultad de hallar ya secuencias de tres letras previas, para anotar a continuación la cuarta letra. Resultado:

onoraza mudaban acasconsuas ustengos si supero de mismo busca...

Como curiosidad, indico a continuacion las secuencias de cuatro letras del texto que han dado origen aleatorio a la palabra *muaaban:*

Terna previa	Primer fragmento aleatorio donde aparece
za	traza marina
a m	la muriente
mu	pasos mudos
mud	trasmudados
uda	saludables
dab	se le mudaba
aba	compraban
ban	ansiaban la

Como se ve, a medida que se van teniendo en cuenta las frecuencias estadísticas de agrupaciones de orden más elevado, va creciendo la proporción de palabras con sentido propio, y la resonancia fonética de las demás va siendo cada vez más castellana.

Efectuando análogamente construcciones aleatorias con palabras, en lugar de letras, se logra, a partir de las aproximaciones de segundo orden y tercero, hilvanar al azar frases con sentido sintáctico y gramatical. (Véanse en el citado artículo de Shanon construcciones de este tipo en el idioma inglés.)

En resumen: las interrelaciones entre las probabilidades de los signos constituyen el reflejo estadístico que queda de su contenido conceptual, de tal modo que, recíprocamente, las propiedades estadísticas de las sucesiones de símbolos de un mensaje, permiten muchas veces ascender a dicho contenido; es decir, descifrarlo. Tal es el objeto de la criptografía, cuyo fundamento matemático se halla en la estadística y en la teoría de la información. De aquí que, criptógrafos e ingenieros de comunicación, coincidan en estudiar el lenguaje como conjunto de signos relacionados estadísticamente.

TESIS ERGÓDICA

Se comprende que al descifrar un mensaje aislado, atribuyéndole las propiedades estadísticas del lenguaje, se establece una hipótesis sólo admisible como punto de partida de tanteos; pero dicha hipótesis va ganando en verosimilitud a medida que se prolonga el mensaje, de modo que uno de gran extensión, como, por ejemplo, una novela, puede ya considerarse como estadísticamente representativo del lenguaje todo. La consecuencia de ello es que, para representar estadísticamente el idioma, lo mismo da tomar un mensaje que otro, con tal de que sean suficientemente largos, lo que justifica la técnica que acabamos de emplear en la construcción de mensajes aleatorios.

Ocurre, pues, respecto de las propiedades estadísticas del lenguaje, considerado como conjunto de los infinitos mensajes hablados o escritos imaginables en comparación con las propiedades de uno de ellos suficientemente largo, lo mismo que en termodinámica ocurre respecto de las propiedades de un gas considerado como conjunto de sus moléculas y de las particulares de cada una de ellas. En mecánica estadística se considera cada una de éstas como capaz de adoptar en un tiempo suficientemente largo (al menos con cuanta aproximación se desee) todo el conjunto de posiciones y velocidades de las moléculas del gas, de tal modo que los promedios temporales de dichos valores correspondientes a una molécula cualquiera se consideran representativos de los promedios espaciales de todo el conjunto. Esta tesis, llamada *ergódica,* es la que sirve de base al estudio estadístico de la termodinámica, y sobre su equivalente informativo se asienta asimismo la teoría de la comunicación.

Al amparo de dicha tesis *ergódica* se proyectan los sistemas de comunicación (aparatos telegráficos, emisoras de radio...), cada uno de los cuales está destinado a transmitir a lo largo del tiempo un mensaje indefinido, de propiedades estadísticas igualmente representativas del conjunto de mensajes que constituye el objeto y estudio de la transmisión.

Pero la semejanza entre ambas teorías, termodinámica e informativa, se hace más sorprendente cuando se observa que la cantidad de información medida como logaritmo de la probabilidad del mensaje tiene formulación idéntica a la entropía termodinámica, magnitud física proporcional al grado de desorganización del estado de un sistema, grado que se mide por el logaritmo de la probabilidad de dicho estado. Inquietante analogía, tan inquietante que sugiere atrevidas consecuencias.

LOS MENSAJES ARTÍSTICOS Y SU EVOLUCIÓN

Como se dijo al empezar, la vida de relación humana cabe en gran parte dentro del concepto de comunicación de que hemos partido. Toda obra literaria o artística, novela, poema, cuadro o pieza musical, puede ser considerada como un mensaje, y hemos visto cómo el conjunto de signos tipográficos estampados en una novela tiene propiedades estadísticas representativas del idioma, reguladas por sus propiedades gramaticales las cuales son trasunto en bloque de su contenido semántico. Si de una novela pasamos a un libro de versos rimados, se reflejarán, además, en las propiedades estadísticas de los signos, las exigencias de la rima. Pues bien, este sencillo ejemplo de cómo las propiedades estadísticas de la forma acusan la presencia de un contenido estético, sugiere generalizaciones de mayor alcance. Pienso que algo parecido ocurre con las propiedades estadísticas de la estructura externa en los mensajes de pintores y músicos. Me refiero, claro es, a la distribución espacial de formas y colores en artes plásticas; a la sucesión temporal de ritmos y tonos, armonías y timbres en música, cuyas propiedades deben ser, asimismo, reflejo de las normas estéticas seguidas en la obra.

Ahora bien, parece al pronto que este género de mensajes escapan a todo intento de medida por el pretendido carácter de continuidad que atribuímos a su *alfabeto,* es decir, a la gama de tonos y timbres o a la gradación de formas y colores empleados en música o en pintura.

Sin embargo, si analizamos la naturaleza de las estructuras orgánicas a través de las cuales nos llegan tales mensajes, no hallaremos sino un número finito de fibras que vibran, un número finito de células excitadas, un número finito de excitaciones diferenciadas por umbrales de sensación, un número ciertamente enorme de todos estos elementos y de sus combinaciones, pero finito.

Por otra parte, la teoría matemática de la comunicación ha elaborado ya el instrumental matemático necesario para dar entrada a dichos mensajes en la teoría cuantitativa de la información. Pero al margen de esta teoría matemática especializada, que no parece adecuado detallar aquí, quizá baste recordar al lector la limitación macro y microscópica de nuestros sentidos para que éste pueda concebir la cuantificación de tales mensajes y la posibilidad de tratarlos matemáticamente, como los mensajes discretos de la telegrafía, sin más dificultad que la derivada de la enorme magnitud de los *alfabetos* en que se expresan.

Ahora bien, al existir la posibilidad teórica de formular la entropía o cantidad de información de un mensaje musical o pictórico de análoga manera a cómo hemos indicado la formulación de la de un mensaje telegráfico, podemos admitir que esta entropía seguirá midiendo el grado de libertad de que se ha hecho uso en la selección del mensaje, es decir, en la génesis de la obra, como la entropía de un gas mide el grado de desorganización de sus moléculas. Y del mismo modo que el contenido semántico del mensaje telegráfico determina las propiedades estadísticas de las señales, así también el contenido estético del mensaje artístico se refleja en sus estructuras formales, condicionando su aleatoriedad, su libertad y, por tanto, su entropía. A mayor libertad, mayor entropía; a la plena aleatoriedad, entropía máxima.

Es más: las propiedades estadísticas de la forma literaria, musical o plástica, en una época o escuela, son las que acaso caractericen el «estilo» de dicho momento o lugar. Cuando la forma se convierte en fórmula, es decir, en regla, surge el amaneramiento, que se manifiesta matemáticamente en pobreza de estructuras y gran frecuencia de ellas. En resumen: en pérdida de libertad, y por tanto, de entropía.

Así podemos ver desde un punto de vista matemático la implacable evolución del arte. Es un proceso incesante e inevitable de ruptura de formas, acaso consecuencia del pecado engendrador de reglas y maneras. A lo largo de este proceso se recae, a veces, en estructuras formales, antiguas, pero casi siempre se crean sistemas estructurales nuevos, cada vez más relajados. Se puede concebir, pues, la evolución de arte, como un proceso de entropía informativa creciente, análogo al segundo principio de la termodinámica que señala el crecimiento de la entropía en el mundo físico inanimado, la tendencia inexorable al desorden energético y al caos. Tan inexorablemente característico que Eddington lo considera como el único fenómeno del mundo físico capaz de señalar por sí solo la «flecha del futuro» *(times arrow)*, el que nos indica de modo inmediato si los fotogramas de una película están montados en el orden en que se impresionaron o al revés. Pues bien, del mismo modo el tiempo marca su huella inexorable en la evolución de los estilos en el sentido indicado de entropía informativa creciente, sentido que nos permite asimismo reconocer la cronología de las obras artísticas por su simple contemplación o audición.

Centrado este artículo en torno al concepto y medida de la cantidad de información, creemos que debemos poner aquí punto final a esta escapada al terreno de los mensajes artísticos, escapada que, si bien nos ha desviado del tema central, permite entrever las amplias perspectivas que se ofrecen a la teoría de la información en campos no específicamente técnicos.

§ 3. UN INGENIO ELECTRICO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE LOGICA FORMAL [1]

Es conocido el isomorfismo existente entre el cálculo de proposiciones de la lógica formal y el cálculo con funciones de conmutación. El álgebra abstracta que estructura este isomorfismo es el Algebra de Boole (Algebra de conjuntos o de clases).

El objeto de este artículo es dar a conocer un cuadro de elementos que he realizado con material eléctrico del uso más corriente: hilos, conmutadores, enchufes, lámparas ordinarias (sin necesidad de relés ni lámparas electrónicas), cuyo acoplamiento fundado en este isomorfismo permite materializar cómodamente, casi en forma de juego, las relaciones usuales de la lógica proposicional y resolver con ello los problemas corrientes de tal lógica, verificando implicaciones, equivalencias y tautologías.

El intento de utilizar dicho isomorfismo, aun desde el punto de vista didáctico, no es nuevo. En la exposición internacional de material didáctico matemático celebrada en Madrid en abril de 1957 [2], el profesor Servais y el autor de estas líneas presentaron algunos modelos sencillos de realización escolar interpretando diversas funciones binarias, y entre ellas las más elementales de la lógica proposicional. La estructura de cálculo binario de los modernos cerebros electrónicos ha sugerido su aplicación a la

---

[1] Presentado en la sesión de la Sección de Exactas del 3-XII-58. Dado a conocer ante un grupo de congresistas del XXIV Congreso Luso-Español para el Progreso de las Ciencias el 18-XI-58 y en sesión pública de la Real Academia de Ciencias del 10-XII-58. Publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid. Tomo LIII, cuaderno 1.º. Una versión francesa ampliada de este artículo se publica en el núm. 2 de la revista «L'Enseignement des Sciences»; París, 1959. Se incluye en este capítulo por las aplicaciones del Algebra de Boole que de él se desprenden.

[2] V. una crónica de la referida Exposición en P. PUIG ADAM, *El material didáctico matemático actual*. Publ. de la revista «Enseñanza Media».

resolución de problemas de carácter lógico. Los mismos robots clasificadores de la moderna técnica automática resuelven en el fondo problemas de carácter lógico al reconocer y agrupar elementos caracterizados por grupos de cualidades (predicados) comunes. No sabemos, sin embargo, que se haya construído, mediante recursos tan al alcance de todos, material análogo al que presentamos hoy, capaz de permitir al alumno componer por sí mismo y rápidamente modelos de las funciones proposicionales más variadas y resolver jugando con ellos los problemas usuales de la lógica formal. En lo sucesivo, por las razones expuestas y otras que se verán más adelante, designaré dicho conjunto de elementos con la denominación metafórica de «juguete».

LAS FUNCIONES PROPOSICIONALES ELEMENTALES Y SU INTERPRETACIÓN MEDIANTE CONEXIONES

Como preámbulo conviene recordar dichas funciones lógicas indicando su interpretación en circuitos de interruptores.

Representemos por p, q dos proposiciones lógicas capaces de adquirir solamente valores de verdad (1) o falsedad (0); representemos con las mismas letras los estados de dos interruptores, cada uno de los cuales establece contacto (1) o le quita (0) entre el par de bornas correspondiente.

I.—Obsérvese ahora la analogía entre los valores de verdad de la proposición compuesta «p y q» y los estados de contacto entre las bornas extremas en un acoplamiento en serie de los interruptores p y q.

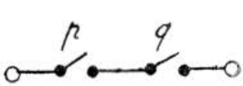


Fig. 1

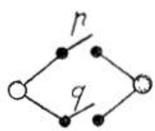


Fig. 2

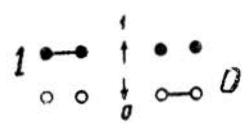


Fig. 3

La *conjunción* «p y q» es cierta solamente cuando son ciertas ambas componentes p, q. En el acoplamiento en serie de dos interruptores existe contacto entre las bornas extremas (circulitos blancos de la figura) cuando, y solamente cuando establecen contacto ambos interruptores p, q. Interpretando cada proposición mediante un interruptor, el acoplamiento en serie de éstos dará, pues, una imagen física de la *conjunción* de proposiciones.

Usaremos la notación abstracta común $p \, . \, q$, y le llamaremos producto lógico, por la gran similitud de propiedades que tiene con el producto $p \, . \, q$ de dos variables binarias (de valor 0 ó 1), el cual sólo toma el valor 1 cuando valen uno ambos factores.

II.—Obsérvese asimismo la analogía entre los valores de verdad de la proposición compuesta «p o q» (interpretada en un sentido complementativo, no oponente) y el acoplamiento en paralelo de dos interruptores p, q.

La *complementación* «p *o* q» es cierta cuando lo es una por lo menos de las proposiciones [3]. Acoplados dos interruptores *en paralelo,* según el esquema anterior, existe contacto entre las bornas extremas cuando uno de los interruptores por lo menos establece contacto. El acoplamiento en paralelo de interruptores interpreta, pues, físicamente la complementación lógica de las proposiciones que representan.

Adoptaremos la notación abstracta $p \vee q$ entre dos varibles binarias para indicar la función de ellas que adquiere el valor 1, al tener dicho valor una por lo menos de ambas (o las dos, naturalmente) y que adquiere el valor 0 sólo cuando son nulas ambas.

III.—La *negación* «no p» tiene valor de falsedad (0) cuando p es verdadera (1) y viceversa.

Un conmutador corriente consta de dos pares de bornas, de tal suerte que cuando existe contacto entre las de un par (1) no le hay en el otro (0). Utilizando tales conmutadores podremos, pues, representar la negación del estado de contacto de un par de bornas (superior) mediante el del otro (inferior) (v. fig. 3).

Para indicar la negación de p utilizaremos la notación p'.

Con las funciones que acabamos de definir (y aún con la negación y una de las restantes) puede la lógica formal expresar las relaciones que le son necesarias; pero la frecuencia con que se presentan algunas de ellas justifica que se les dé notación específica, y que construyamos correlativamente para ellas los circuitos equivalentes correspondientes.

IV.—Así, en toda la lógica matemática es esencial la relación $p' \vee q$ que se designa $p \rightarrow q$ y establece la *implicación* de q por p. En efecto,

[3] Preferimos el nombre de *complementación* al de *disyunción*, que induce al error de oponer p a q.

si p es cierta, p' es falsa, y para que sea cierta $p' \vee p$ debe ser cierta q; por tanto, efectivamente la verdad de p implica (en el sentido ordinario) la verdad de q. Esta implicación no es reversible; puede ser cierta sin que lo sea la recíproca, es decir, siendo q verdadera y p verdadera o falsa. En resumen, la función $p \rightarrow q$ sólo es falsa cuando p es verdadera y q falsa.

Para construir un circuito representativo de tal función, $p' \vee q$, habremos de conectar en paralelo la negación p con q. Se comprende que es necesario para ello poder llevar estados contrarios de la variable p al circuito, y, por lo tanto, la conveniencia de representar dicha variable por un *conmutador* en lugar de un simple interruptor.

V.—También es conveniente dar nombre y notación específica a la relación $p' \vee q'$, la cual es equivalente a la $(p \, . \, q)'$ ya que sólo es falsa cuando son simultáneamente verdaderas p y q (falsas p' y q'). Por ello llamaremos a esta función *incompatibilidad* de p y q y adoptaremos para ella la notación de Sheffer: $p \mid q$.

Su representación, mediante un circuito, exige el acoplamiento en paralelo de las negaciones de p y de q, y, por tanto, el uso de conmutadores para representar ambas variables [4].

En seguida veremos cómo la necesidad de llevar valores contrarios, no sólo de las variables sino también de las funciones, a circuitos compuestos, nos impone no sólo la necesidad de conmutadores para realizar los estados contrarios de las variables, sino también de acoplar, a los circuitos funcionales, aquéllos que den valores contrarios para poder arrastrar simultáneamente éstos. La inversión de resultados de conexión se realiza en telefonía mediante relés, y en electrónica mediante triodos, pero la inserción de unos y otros complica considerablemente los circuitos (por la necesidad de generar corriente continua) y, dado el número relativamente corto de variables que utiliza la lógica formal, nos ha parecido didácticamente preferible la solución que proponemos de arrastrar dualmente las variables y las funciones, ya que tal solución de circuitos duales nos la proporciona elegantemente la misma dualidad del álgebra de Boole. Digamos, pues, dos palabras de sus propiedades formales.

---

[4] Al margen del manejo de incompatibilidades, el interés teórico de la función | radica en que en función de ella son expresables todas las demás, incluso la negación $p' = p \mid p$ $(= p' \vee p')$.

LEYES FORMALES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

El lector comprobará fácilmente las siguientes propiedades de la negación:

$(p')' = p$ (involución) $\quad p \, . \, p' = 0$ (contradicción) $\quad p \vee p' = 1$ (tercio excluído) [1]

Parece innecesario aclarar que utilizamos aquí el signo = en el sentido «tiene el mismo valor que». Cuando relaciona funciones proposicionales se suele sustituir por el signo de equivalencia $\equiv$ (que tiene el mismo significado).

Expresaremos de esta suerte las dos siguientes *leyes de dualidad* (una de ellas ya apuntada a propósito de la función $p \mid q$) que relacionan entre sí las dos funciones fundamentales . , v, a través de la negación.

$$(p \vee q)' \equiv p' \, . \, q'$$
(ambos miembros ciertos sólo cuando p y q son simultáneamente falsas).

$$(p \, . \, q)' \equiv p' \vee q'$$
(ambos miembros falsos sólo cuando p y q son simultáneamente ciertas). [2]

Estas leyes (simétricas) expresan que *la negación del resultado de una operación . o v, es equivalente al de la otra operación efectuada con las proposiciones contrarias.*. La aplicación de esta ley nos permitirá hallar los circuitos duales necesarios.

Consignemos, además, las leyes formales siguientes, fáciles de comprobar:

$p \, . \, p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$	(idempotencia)	[3]
$p \, . \, q \equiv q \, . \, p$	$p \vee q \equiv q \vee p$	(conmutatividad)	[4]
$(p \, . \, q) \, . \, r \equiv p \, . \, (q \, . \, r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	(asociatividad)	[5]
$(p \vee q) \, . \, r \equiv p \, . \, r \vee q \, . \, r$	$(p \, . \, q) \vee r \equiv (p \vee r) \, . \, (q \vee r)$	(distributividad).	[6]

Estas dos últimas leyes establecen la distributividad recíproca de cada una de las operaciones . , v respecto de la otra. La primera es análoga a la distributividad algebraica del producto respecto de la suma. Razonemos la segunda (que choca con la no distributividad de la suma respecto del producto en el álgebra ordinaria).

Al verificarse p y q (a la vez) o r, significa que se verifican a la vez «p o r» y «q o r», y recíprocamente. Análogamente razonaríamos la primera propiedad distributiva. La comprobación de una y otra, viendo la equivalencia de los circuitos compuestos que representan uno y otro miembro, es igualmente sencilla.

PROPOSICIONES COMPUESTAS

Todas las propiedades que considera la lógica de enunciados son expresables, como las leyes que acabamos de indicar, mediante combinaciones de las funciones elementales antes definidas. Nos limitaremos a poner algunos jemplos familiares en matemáticas.

La relación

$$(p \longrightarrow q) \equiv (q' \longrightarrow p') \qquad [7]$$

expresa la equivalencia entre un teorema y su contrarrecíproco. Principio básico de todas las demostraciones por reducción al absurdo.

La relación

$$(p \longrightarrow q) \cdot (q \longrightarrow p) \equiv (p \cdot q \vee p' \cdot q') \qquad [\equiv (p \equiv q)] \qquad [8]$$

expresa la simultaneidad en la certeza o en la falsedad (y, por tanto, la equivalencia) de dos proposiciones que sean tesis e hipótesis de dos teoremas recíprocos. Se usa cuando se establecen condiciones necesarias y suficientes (caracterizaciones, lugares geométricos...).

La relación

$$(p \longrightarrow q) \cdot (q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r) \qquad [9]$$

expresa la transitividad de la implicación, transitividad esencial en toda teoría deductiva.

La relación, un poco más compleja,

$$(p \longrightarrow q) \cdot (r \longrightarrow s) \cdot (p \vee r) \cdot (q \mid s) \longrightarrow (q \longrightarrow p) \cdot (s \longrightarrow r) \qquad [10]$$

expresa el llamado teorema de Hauber o de reciprocidad en teoremas compuestos de varias hipótesis (dos en la fórmula: p, r) con sus tesis correspondientes (q, s). Afirma tal teorema, y eso es lo que expresa la fórmula, que si se verifican los teoremas directos, y sus hipótesis se complementan al tiempo que sus tesis son incompatibles, los teoremas recíprocos son ciertos.

Resulta interesante comprobar cómo estas relaciones pueden desgranarse de las leyes formales del álgebra de Boole antes establecidas, pero ello nos desviaría del objeto de nuestro trabajo, que es el de construir los elementos necesarios para poder interpretar eléctricamente todas las relaciones análogas de la lógica de proposiciones.

En los contados ejemplos indicados de proposiciones compuestas, se observa la reiterada aparición de la relación de implicación entre resultados de funciones más simples. Como para interpretar una implicación hemos de conectar en paralelo las bornas representativas de la *contraria* de la función implicante con las de la implicada (véase p. 75-IV), de aquí la necesidad, antes aludida, de arrastrar no sólo los valores de las funciones, sino también sus contrarios. Veamos cómo conseguirlo por aplicación de las *leyes de dualidad* (pág. 77).

CIRCUITOS FUNCIONALES DUALES

Interpretemos, desde el origen, cada variable mediante un conmutador usual con dos pares de bornas y dos estados, de tal suerte que en uno de

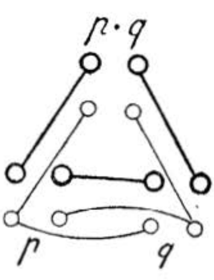


Fig. 4

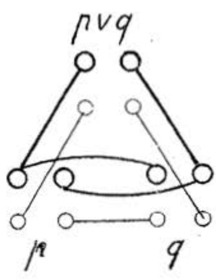


Fig 5

ellos (pulsador en alto, por ejemplo) se establezca contacto entre las de un par, y en el otro estado (pulsador bajado) queden en contacto las bornas del otro par (fig. 3). Designaremos en los esquemas que siguen, mediante circunferencias de trazo grueso, las bornas (negras en los modelos que hemos realizado) que están en contacto con el pulsador en alto, estado al que atribuiremos el valor de verdad (1) de la proposición; y con trazo fino (bornas rojas en nuestros modelos) las que están en contacto con el pulsador bajo, estado contrario, valor de falsedad (0) de la proposicion representada.

Si acoplamos dos estados de computación p, q de esta naturaleza, conectando en serie las bornas superiores de ambos y en paralelo las bornas inferiores, los dos nuevos pares de bornas terminales de una y otra conexión nos marcarán los valores contrarios en la operación $p \, . \, q$ (véase fig. 4).

En efecto, en virtud de las leyes de dualidad, la conexión en paralelo de las negaciones de las componentes dará como resultado $p' \vee q' = (p \, . \, q)'$, es decir, la negación del producto.

Análogamente, la ley $p' \, . \, q' = (p \vee q)'$ sugiere las conexiones indicadas en la figura 5 para interpretar la proposición $p \vee q$ y su valor contrario.

De las definiciones antes establecidas se deducen fácilmente las conexiones que siguen, para interpretar los resultados (y sus opuestos) de las funciones de implicación $\longrightarrow$ y de incompatibilidad $|$.

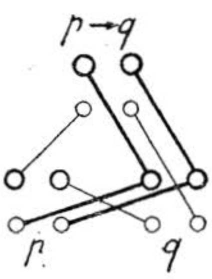


Fig. 6

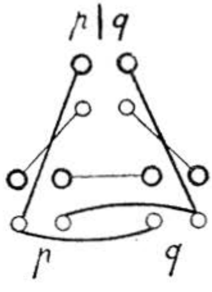


Fig. 7

Obtenemos así, en la doble borna de salida de cada circuito, los resultados duales de la función elemental correspondiente, construída con los valores de las dos variables (o funciones) dualmente introducidas en los dos pares de bornas de entrada. Cada función queda así caracterizada por el sistema de conexiones entre tales bornas. Ello nos perimitirá llevar dualmente el resultado de cada función a nuevas funciones, y así, sucesivamente, para interpretar cualquier proposición compuesta de la lógica proposicional. En seguida diremos cómo podemos comprobar entre tales proposiciones compuestas, relaciones de implicación, de equivalencia, o verificar su carácter tautológico.

DESCRIPCIÓN DEL JUGUETE

Con lo dicho hasta aquí se comprenden fácilmente los elementos de que consta el juguete, y que agrupamos de modo natural en la siguiente forma :

I. *Cuadro de variables proposicionales*

En el primer modelo construído hemos previsto hasta cuatro variables, y para cada una de ellas hemos acoplado varios conmutadores (concretamente, cuatro) en idéntico estado, es decir, de suerte que una misma palanca actúe sobre los cuatro a la vez. El objeto de esta multiplicidad de repe-

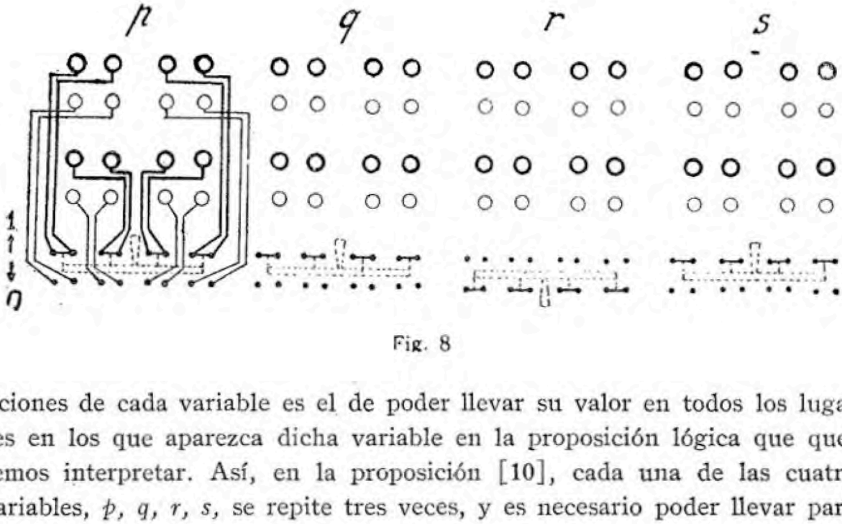


Fig. 8

ticiones de cada variable es el de poder llevar su valor en todos los lugares en los que aparezca dicha variable en la proposición lógica que queremos interpretar. Así, en la proposición [10], cada una de las cuatro variables, p, q, r, s, se repite tres veces, y es necesario poder llevar para cada una el mismo estado de conmutación en los tres lugares en que aparece en la fórmula.

El conjunto de los 4 × 4 conmutadores, con sus correspondientes pares de bornas de salida acopladas, va montado en una placa rectangular de plástico transparente (para que aparezcan visibles las conexiones). Detallamos en el esquema anterior las conexiones correspondientes a una sola de las variables p. En definitiva, se establece contacto en cada uno de los pares de bornas superiores cuando la palanca está en alto, y en los pares inferiores cuando está la palanca bajada.

II. *Elementos funcionales*

Son las conexiones funcionales duales, expuestas en pág. 79, 80. Cada una interpreta una función lógica elemental compuesta con las dos variables representadas por los cuatro pares de bornas de entrada, dando el valor dual de la función en los dos pares de bornas de salida. Cada juego de conexiones representativo de una función se ha montado sobre una pequeña placa rectangular de plástico transparente (conexiones visibles), dibujando en ella el signo de la operación que realiza. Se ha repetido cada función varias veces, según la frecuencia de su aparición en las fórmulas. Así, la interpretación de la relación [10], exige el uso de cuatro funciones producto . , de una función v de cinco funciones de implicación y de una función de incompatibilidad.

III. *Elementos transportadores*

Para transportar los estados duales de contacto de las variables iniciales, así como los de las funciones y funciones de función que se van formando sucesivamente con ellas, necesitamos conectar los pares de bornas

Fig 9

de salida del cuadro inicial o de cada función con las bornas de entrada de las funciones sucesivas. Tales transportes son, por consiguiente, cuadrifilares, llevando cada conexión dos hilos negros (que se terminan en los extremos con enchufes binarios del mismo color) y dos rojos (asimismo terminados con enchufes binarios rojos). La operación de transporte se realiza sencillamente introduciendo los pares de enchufes terminales en las bornas de entrada y de salida respectivas del mismo color. Si eventualmente conviene transportar el valor contrario de una variable o de una función, basta invertir los colores en una de las conexiones de salida o entrada. La inversión de enchufes al conectar permite, pues, realizar en todo momento la operación de negación de la variable transportada.

Con lo anterior, el lector comprenderá fácilmente el modo de proceder para realizar cualquier función compuesta. En el esquema que sigue indicamos todos los acoplamientos de elementos necesarios para formar la función que aparece en la fórmula [10]. Hemos omitido la reproducción del cuadro de variables del que se supone proceden las variables p, q, r, s, introducidas en la hilera inferior de elementos funcionales (los seis paréntesis de la fórmula):

$$(p \rightarrow q) \cdot (r \rightarrow s) \cdot (p \vee r) \cdot (q | s) \rightarrow (q \rightarrow p) \cdot (s \rightarrow r).$$

Los resultados de las cuatro primeras funciones han sido asociados en dos pares por la operación producto, y los resultados de éstos nuevamente

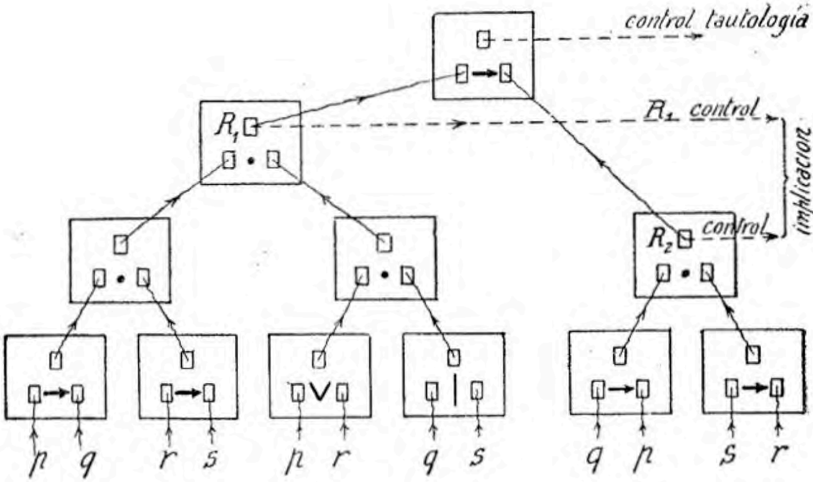


Fig. 10

asociados en un resultado R_1, que representa así el producto de los cuatro primeros factores, es decir, el primer miembro de la implicación final. (Para mayor sencillez del dibujo hemos esquematizado cada conjunto de cuatro bornas de entrada o salida mediante un rectangulito, y hemos representado con un trazo único los transportes cuadrifilares entre tales cuadripolos.) Análogamente, tendremos representado en el cuadripolo R_2 el valor dual del segundo miembro.

IV. *Elementos de control. Verificación de implicaciones, equivalencias y tautologías. Construcción de tablas de valores de verdad*

Con los resultados R_1 y R_2 podemos seguir ahora dos caminos para verificar eléctricamente si $R_1 \rightarrow R_2$, es decir, para comprobar si cada vez que existe contacto entre las bornas negras de R_1 (valor de verdad de R_1) también le existe en las bornas negras de R_2.

Un camino consiste en acusar eléctricamente los valores de verdad de cada uno de estos resultados, conectando cada uno de ellos en serie con una lámpara de incandescencia alimentada por la red usual (a la manera de un interruptor corriente) (fig. 11).

Cada vez que se encienda la lámpara correspondiente, será señal de que se habrá producido contacto entre las bornas finales a través del

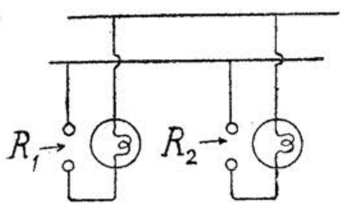


Fig. 11

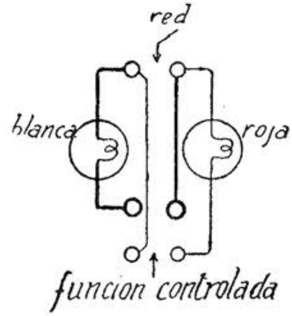


Fig. 12

juego de conexiones del aparato. Para verificar la implicación $R_1 \rightarrow R_2$ no tenemos más que comprobar si cada vez que se enciende la lámpara de control R_1 (verdad de R_1), se enciende asimismo la de R_2 (verdad de R_2). Si así ocurre (aunque la recíproca no sea cierta), podemos asegurar que la implicación $R_1 \rightarrow R_2$ es cierta.

Para esta comprobación nos bastaría actuar con las bornas negras, pero si conectamos además una lámpara roja en serie con las bornas rojas duales, podremos controlar también el comportamiento de las negaciones. Como los pares de bornas rojas y negras tienen siempre, por construcción, valores opuestos, si actuamos con dos lámparas (blanca y roja) de control para cada función, siempre estará encendida una, y sólo una, de ellas, con lo que podremos precavernos contra todo posible error por defectuosidad de contactos o por averías transitorias en la red. Tales elementos de control duales tienen el esquema anterior (fig. 12).

Con un elemento de esta naturaleza podemos *construir cómodamente la tabla de valores de verdad* de una función lógica compuesta, anotando la luz que se enciende (blanca = verdad; roja = falsedad) para cada com binación de posiciones de los conmutadores, representativas de los valores de verdad o falsedad de las variables.

Como hemos dicho, la existencia de la relación de implicación entre dos funciones lógicas, $f_1 \rightarrow f_2$, se acusará por el hecho de encenderse la

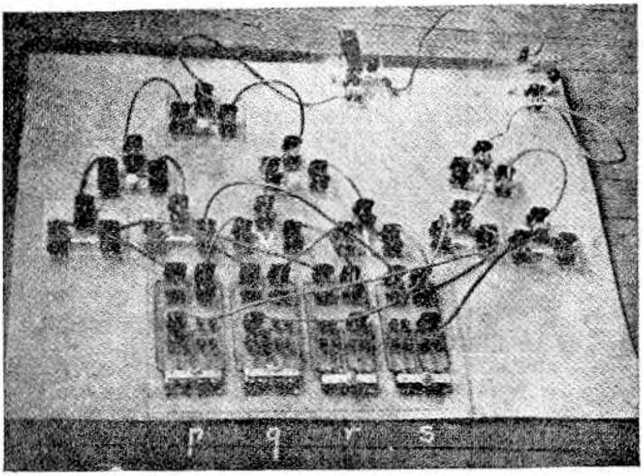


Fig. 13

lámpara blanca de f_2 cada vez que se encienda la de f_1 (aunque, repetimos, no sea necesariamente cierto lo recíproco). Claro es que entonces, cada vez que f_2 esté en rojo, también lo estará f_1, es decir, $f'_2 \rightarrow f'_1$ (equivalencia de un teorema directo y de su contrarrecíproco). Así es como se ha verificado la implicación $R_1 \rightarrow R_2$ de la fórmula [10], según el montaje que reproduce la fotografía anterior (fig. 13).

Si coinciden los colores de ambas funciones, f_1, f_2, en todas las posiciones posibles de los conmutadores, las funciones son entonces equivalentes $f_1 \equiv f_2$, es decir, ambas son simultáneamente ciertas y simultáneamente falsas. He aquí, pues, cómo también podemos detectar equivalencias con dichas lámparas de control. Asimismo podemos detectar relaciones de contradictoriedad: caso en que las lámparas de control de una y de otra función sean constantemente de colores distintos.

Finalmente, si para todas las posiciones posibles de los conmutadores de las variables, una función formada con ellas da siempre luz blanca, significará que la proposición lógica que traduce es siempre cierta, cualesquiera que sean los valores de verdad o falsedad de las variables proposicionales que en ella intervienen. Se trata entonces de una llamada *tautología*. Y así es como podemos detectar las tautologías eléctricamente.

Ejemplo: Si, como se ha indicado en el esquema de la figura 10, se llevan los resultados R_1 y R_2 a las bornas de entrada de una relación de implicación, comprobaremos que el resultado en las bornas de salida es una tautología. Este es el segundo de los caminos aludidos al comentar dicho esquema, para verificar la certeza de la relación que representa.

V. *Ecuaciones lógicas*

Con los elementos de control descritos podemos asimismo resolver otros problemas frecuentes en la lógica de proposiciones. Son de esta naturaleza: Sabiendo que una cierta relación lógica es cierta (no idénticamente, es decir, no tautológicamente cierta), y conocido que sea el valoı de verdad o de falsedad de una o varias de las variables proposicionales que intervienen en ella, ¿qué consecuencia podemos obtener en relación con los valores de las variables restantes? Son problemas semejantes a los de resolución de ecuaciones del álgebra ordinaria, y los podemos llamar similarmente *ecuaciones lógicas*.

Por ejemplo: Sabiendo que $(p \rightarrow q) \cdot (r \rightarrow s) \cdot (p \vee r) \cdot (q \mid s) = 1$ (es cierta), y que la proposición s es falsa, ¿qué consecuencia resulta para las proposiciones p, q, r? Construyendo esta función con los elementos del juguete (es la función R_1) y acoplando el resultado final con un elemento de control, fijaremos la palanca de la variable s en posición de negación (bajada) y tantearemos las posiciones de las restantes tres palancas que den para la función el valor de verdad (luz blanca). En este ejemplo no hay más que una combinación que verifique esta condición; corresponde a los valores p cierta, q cierta, y r falsa.

VI. *Control directo de equivalencias. Implicaciones y equivalencias entre equivalencias*

Para verificar la equivalencia o la contradictoriedad entre dos funciones, f_1, f_2 (de las que disponemos valores duales), podemos utilizar el esquema de la figura 14, reduciendo así las lámparas necesarias a un solo par: blanca- roja. Insertados los valores de f_1 y f_2 en las bornas de en trada, se ve que cada vez que tienen el mismo valor (contacto entre las bornas de igual color), el circuito se cierra a través de ellas y de la lámpara blanca. Cuando los estados de contacto son opuestos, el circuito se

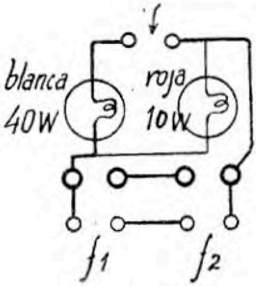


Fig. 14

cierra a través de las dos lámparas en serie, de las cuales sólo se pone incandescente la roja, de menor potencia.

La presencia de luz blanca (o roja) en *todas* las posiciones de los conmutadores de las variables, acusará la equivalencia tautológica (o contradictoriedad) de las funciones f_1 y f_2.

Con dos elementos de control de esta naturaleza podremos comparar relaciones no tautológicas de equivalencia entre dos pares de funciones $f_1 \equiv f_2$, $f_3 \equiv f_4$. Si, al variar los conmutadors de las variables de todos los modos posibles, cada vez que el primer elemento de control acusa luz blanca, el segundo la acusa también, podremos afirmar que existe una relación de implicación entre las dos funciones de equivalencia $(f_1 \equiv f_2) \rightarrow (f_3 \equiv f_4)$. Si las luces de los dos elementos son siempre del mismo color, podremos afirmar que existe una equivalencia tautológica entre las dos funciones de equivalencia $(f_1 \equiv f_2) \equiv (f_3 \equiv f_4)$. Si los colores son siempre contrarios, existirá entre ellas una relación de contradicción. De esta suerte podemos verificar eléctricamente las equivalencias, las contradicciones y las implicaciones entre relaciones de equivalencia.

Combinando un elemento de control de equivalencia con un elemento de control ordinario, podremos verificar análogamente las relaciones de implicación, de equivalencia y de contradictoriedad entre una función de

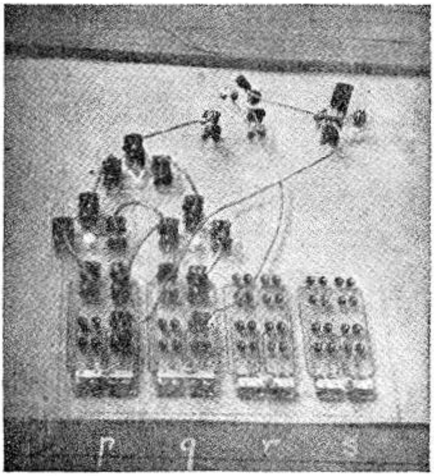


Fig. 15

equivalencia $f_3 \equiv f_2$ y una función lógica de otra especie, o simplemente con una variable.

La figura 15 reproduce, por ejemplo, la verificación con el juguete de la relación tautológica.

$$\{(p \equiv q) \equiv q\} \equiv p \quad \text{bajo la forma} \quad [(p \cdot q \vee p' \cdot q') \equiv q] \equiv p.$$

EL ALCANCE DE NUESTRO «JUGUETE»

Aun concebido con finalidad didáctica, no deja de tener otras posibilidades interesantes. Las cuestiones de lógica formal van penetrando moderadamente en las aplicaciones prácticas, por ejemplo, en los estudios de organización de empresas, en el análisis de procesos industriales [5], y, en general, en la moderna técnica llamada de «investigación operativa».

Como autor de tal «juguete» no soy el más calificado para comparar su alcance con el de otras «máquinas» lógicas existentes [6]. Tengo, sin embargo, la impresión de que posee caracteres suficientes para singularizarlo: 1) simplicidad y economía extremas, ausencia de relés y de elementos electrónicos; 2) adaptabilidad completa debida a la movilidad de sus elementos; 3) alcance prácticamente indefinido por la posibilidad de adjunción de elementos nuevos (sin invalidar los precedentes). He aquí por qué lo califico como «juguete» y no como máquina, ya que contiene en germen (como el juguete Meccano) una infinidad de máquinas rápidamente realizables, tantas cuantas funciones lógicas queramos construir. Y es también por su multivalencia y por la actividad de montaje con que traduce las fórmulas por lo que creo que tiene un valor didáctico netamente señalado.

En cuanto a sus posibilidades de aplicación no didáctica, me limitaré a un ejemplo comparativo a raíz de un problema citado en el libro de Berkeley «Giant Brains» para ilustrar el alcance de la máquina lógica de Kalin-Burkhart (1948). Una importante empresa, deseando ampliar el seguro de sus empleados establece ciertas condiciones y ciertas reglas que conducen a paradojas aparentes que es preciso poner en claro. Sin entrar en detalles diremos que, después de enunciar las referidas condiciones bajo forma de variables proposicionales, la cuestión se traduce en términos de lógica formal como equivalente a la determinación de los valores de verdad de una función de la forma:

$$(q \rightarrow p) \,.\, (p \,.\, q \,.\, s' \rightarrow r) \,.\, (r \rightarrow q) \,.\, (p' \rightarrow s').$$

Con los elementos de nuestro juguete se la puede construir fácilmente después de algunos minutos de montaje. Quince golpes de conmutador (a golpe por segundo), bastan para construir la tabla de valores deseada. La máquina de Kalin-Burkhart efectúa, al parecer, el «scanning» o recorrido del campo de variabilidad más rápidamente. Pero es por lo menos treinta o cuarenta veces más cara que mi juguete, y no alcanza a registrar más allá de doce «statements» (proposiciones incluyendo las repeticiones),

[5] V. *Symbolic logic in operations Research* de WALTER E. CUSHEN, en el libro *Operations Research for Management*. Ed. Johns Hopkins Press.

[6] V. MARTIN GARDNER, *Logical machines and diagrams*.

mientras mi juguete puede prolongarse indefinidamente por adjunción de nuevos elementos. Tal como ha sido descrito aquí es capaz para dieciséis «statements» con cuatro variables distintas.

Si se mira al futuro se comprende, pues, cuán amplias perspectivas, tanto didácticas como comerciales, tanto epistemológicas como industriales, parecen destinadas a la lógica formal, al álgebra de Boole y a los ingenios que la realizan.

EL RECORRIDO DEL CAMPO DE VARIABILIDAD

Acabamos de decir que quince segundos (a golpe por segundo) bastan para recorrer todos los estados posibles de los conmutadores y para observar los valores de una función construída con cuatro variables. (Las combinaciones posibles son 16, pero una de ellas ya está presente en el momento de conectar el elemento de control a la red.) Si las variables son 5, el número de golpes de conmutador necesarios son $32 - 1 = 31$; y, en general, $2^n - 1$ para n variables. Hasta siete u ocho variables el «scanning» a mano del campo de variabilidad no exige sino unos dos a cuatro minutos de trabajo.

Con el fin de metodizar las conmutaciones para no olvidar ninguna combinación, se puede acudir a una representación geométrica del campo de variabilidad que ya usé hace algún tiempo en un método geométrico para la síntesis de funciones de conmutación [7], y que se muestra igualmente fecundo para la interpretación y la solución de problemas lógicos como los que nos ocupan.

Una variable con dos estados notados 0 y 1, puede representarse por los extremos de un segmento; dos variables por los vértices de un cuadrado. Los estados de tres variables por los vértices de un cubo, los de cuatro por los vértices de dos cubos (v. fig. 16) y así sucesivamente doblando el número de cubos y disponiéndolos según tres direcciones ortogonales, etcétera. En el caso de cuatro variables p, q, r, s, las tres primeras, p, q, r, pueden interpretarse como las coordenadas cartesianas 0, 1 de los vértices de cada uno de dos cubos, que se distinguirán entre sí por los valores $s = 0$, $s = 1$ de la cuarta coordenada. Para recorrer lo más rápidamente posible todo el campo de variabilidad no hay más que trazar un itinerario

[7] V. P. Puig Adam, *Métodos gráfico y algebraico para el proyecto de circuitos electrónicos de cálculo.* «Revista de Ciencia Aplicada», julio-agosto 1952.

que pase una sola vez por cada vértice y los recorra todos, como el itinerario de la figura 16, por ejemplo. Siguiendo las aristas indicadas y pasando de un cubo a otro por dos puntos que ocupen en ambos idéntica posición, cada paso de un vértice al siguiente supone la acción sobre un solo conmutador. Partiendo del punto $p = q = r = s = 0$ del primer cubo, y siguiendo el itinerario indicado en la figura, los quince golpes de conmutación actuarán sucesivamente sobre los conmutadores $p, q, p, r, p, q, p, s, p, q, p, r, p, q, p$, y terminaremos en el vértice $p = q = r = 0$, $s = 1$ del segundo cubo. Es conveniente, sin embargo, no seguir siempre el mis-

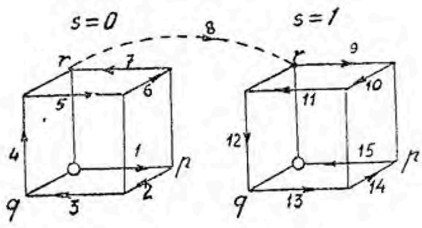


Fig 16

mo itinerario, con objeto de evitar que unos conmutadores (en este caso p, q) se desgasten más que otros. La alteración de itinerario no ofrecerá dificultad si se piensa que siempre tres golpes de la forma p, q, p recorren una cara del hipercubo del campo.

Observación.—Los elementos funcionales del juguete hubieran podido reducirse a los de las operaciones . y v, sustituyendo en el montaje toda operación de la forma $p \rightarrow q$ por su equivalente p' v q (mediante inversión de los polos de entrada de p), y toda relación de la forma $p \mid q$ por su equivalente p' v q' (inversión de las dos entradas). Incluso bastaría una sola de las dos funciones, ya que p v q puede realizarse por medio de su equivalente $(p' \,.\, q')'$ por inversión de las dos entradas y de la salida. Sin embargo, prefiero no hacer uso de estos recursos, como no sea excepcionalmente (caso de agotarse una clase de elementos funcionales y sobrar de otra), ya que me parece improcedente recargar la atención del que efectúa el montaje con los consiguientes riesgos de error, sin que ello redunde en una simplificación compensadora en la tarea material inicial de la construcción de los elementos.

Se pueden construir elementos funcionales asociando varias variables mediante las operaciones . ó v, sin más que acoplar en serie o paralelo todos los pares de bornas sucesivas de las variables. Hemos preferido, sin embargo, el uso exclusivo de funciones de *dos* variables por la posibilidad de asociación posterior, mucho más adaptable a todos los casos, como hemos visto en el ejemplo de la fórmula [10].

CAPITULO III

EL MOVIMIENTO DIDACTICO RENOVADOR

§ 1. LA EVOLUCION DE LA DIDACTICA MATEMATICA EN NUESTRA GENERACION [1]

Al aceptar el honroso encargo de hablaros en esta sesión inaugural, pensé que acaso fuera oportuno tratar un tema didáctico, y lo estimé así por dos razones: una, de justicia, y otra, de actualidad.

Entiendo de justicia revalorizar la preocupación didáctica en las reuniones científicas de esta índole, por el indudable beneficio que el progreso de la Ciencia recibe de los progresos en su enseñanza. Por otra parte, toda remoción de planes, como la que en estos momentos está viviendo la Enseñanza media española, supone la consiguiente agitación de ideas, y el retorno al plano de actualidad de los problemas pedagógicos.

Permitidme, pues, que sin más autoridad que la que vuestra bondad me confiere, y casi sin más bagaje que el recuerdo de una inquietud cuyo amanecer empieza ya a borrarse en lejanía, retenga vuestra atención unos instantes sobre la evolución de la didáctica matemática de nuestro siglo y los principios fundamentales que, a mi juicio, la han determinado.

PUNTO DE ARRANQUE

La didáctica como fenómeno de transmisión del conocimiento es tan antigua como el conocimiento mismo. Pero la didáctica como arte, como

[1] Conferencia inaugural de la Sección de Matemáticas del Congreso Luso-Español para el progreso de las Ciencias, celebrado en Oviedo en septiembre-octubre de 1953

ciencia, o como simple técnica, toma cuerpo cuando los conocimientos adquiridos por la humanidad empiezan a rebasar las posibilidades de asimilación del educando, creando problemas de selección, de sistematización y de presentación, es decir, de programa, de método y de modo. Por último, estos problemas pasan a la categoría de problemas pedagógicos cuando se enfoca con ellos no sólo la más eficaz transmisión de conocimientos, sino además la huella formativa que dicho proceso de transmisión debe dejar impresa en el educando. Pero dicho enfoque exige ya no sólo el conocimiento de las materias a enseñar, sino también el de la psicología del sujeto a quien se enseña.

Dejando, pues, en un discreto telón de fondo la didáctica matemática hasta el siglo XVIII, tomaré en estos comentarios como plano comparativo de arranque el del nacimiento de la didáctica pedagógica que vinculo en Pestalozzi, y no habrá de extrañarles que a lo largo de mi discurso refleje inquietudes propias, ni que repita párrafos escritos al calor de ellas en otras ocasiones.

Pero quizá no esté de más empezar precisando de modo más concreto la distinción que acabo de apuntar entre didáctica a secas y didáctica pedagógica.

DIDÁCTICA ESTRICTA Y DIDÁCTICA PEDAGÓGICA

He dicho que la transmisión de conocimientos crea problemas de programa, de método y de modo en cuanto los conocimientos acumulados rebasan las posibilidades del educando durante su vida escolar. Se impone entonces: una selección de resultados, una sistematización de ellos y una presentación adecuada de los mismos con objeto de conseguir la máxima asimilación con el más breve esfuerzo. Son los genios ordenadores y sistematizadores quienes se han encargado de tal tarea a lo largo de la historia de la Ciencia, de los cuales la raza griega dió los primeros y soberanos ejemplares, y entre ellos la figura señera de Euclides. A todos ellos les llamaría yo los grandes didácticos «en el sentido estricto», por cuanto, al actuar de verdaderas amas de casa de la Ciencia y al presentarla ordenada a los visitantes, han abreviado la tarea de asimilación de cuantos se han asomado a ella a través de sus admirables síntesis. Pero ¿merecen asimismo el nombre de pedagogos?

La ciencia crece por procesos mixtos de análisis y síntesis de inducción y deducción. Se acumulan experiencias y observaciones, se registran hechos, se examinan analogías, se abstraen conceptos, se inducen leyes y se tejen deductivamente sistemas. La presentación sintética de tales urdimbres da una indudable solidez al conjunto presentado; pero no enseña precisamente a urdir, que es lo educativo. Así, pues, usados como instrumento de transmisión de conocimientos han tendido a acentuar cada vez más la separación entre *dos procesos* que no debieron divorciarse nunca: el de la *génesis* de los conocimientos y el de su *transmisión*. Las consecuencias de tal divorcio las ha sentido la enseñanza de la Matemática de un modo palpable en el caso concreto de los famosos *Elementos* de Euclides.

Todos sabemos que sus conceptos y proposiciones sintetizan y ordenan de modo admirable los conocimientos de Geometría y Aritmética acumulados empíricamente por el mundo antiguo. Pero convertido este tejido de definiciones, de axiomas y teoremas en el único vehículo de cultura matemática durante siglos, muy poco influyó, a mi entender, a lo largo de ellos en el progreso auténtico de la Matemática. No fue, creo yo, la lectura de Euclides la que sirvió de estimulante generador de nuevas ideas en el campo de la Geometría, sino más bien las lecturas de Arquímedes y de Apolonio, de exposición menos sistemática pero viva y fresca cual chorro explorador, como lo fueron en el campo del Algebra las aportaciones india y árabe, pletóricas de sentido concreto de aplicación.

Mas cuando la referida síntesis euclídea llegó a ser no ya anodina, sino contraproducente para el progreso de la Matemática, fue cuando el empuje de la Ciencia acumulada llegó a desplazar el estudio de los famosos *Elementos* a edades escolares demasiado tempranas, y como tales inadaptables al método racional. Fue así como vino a caer un día la Geometría de Euclides (o cualquiera de las variantes de sus innúmeros glosadores) en manos de niños de doce años. La aversión hacia la matemática que el estudio prematuro de tales exposiciones abstractas deja en el alma infantil ha sido, a mi juicio, culpable de la pérdida definitiva de muchas inteligencias para la matemática. Bastaría para justificar tal aversión la machaconería, incomprensible para el niño, en demostrar verdades de clara evidencia, extrayéndolas a viva fuerza de otras no más evidentes, y el empleo, por añadidura, de demostraciones por reducción al absurdo, es decir, basadas en premisas no sólo desligadas de la realidad sensible (única que el niño capta a esas edades), sino aún contrarias a esta realidad misma.

He aquí, pues, por qué no basta para resolver acertadamente el problema didáctico el conocimiento cabal y sistemático de la disciplina a enseñar, con sus problemas y métodos propios de resolución e investigación; es preciso, además, el conocimiento profundo del sujeto discente, de su psicología, y de la evolución de sus facultades. Entroncado de esta suerte el problema didáctico dentro del más amplio problema pedagógico, adquiere su debida valoración y perspectiva, tal como apuntábamos más arriba. A esta didáctica pedagógica habré de referirme en lo que sigue.

LOS ORÍGENES DEL MOVIMIENTO RENOVADOR

Como es natural, el sector de enseñanza en donde antes empezó a sentirse la necesidad de una tal didáctica, fué el sector de la enseñanza primaria, y, sin que ello suponga desmerecer la labor de los filósofos y tratadistas de épocas y escuelas anteriores que más o menos directamente influyeron en el progreso de la pedagogía, estimo que el primer pedagogo que pasó del bello juego con las ideas a la dura lucha con las realidades concretas de la escuela activa, llenándola de contenido experimental y de verdadera trascendencia formativa matemática fue el suizo Pestalozzi a fines del siglo XIX. El fue quien introdujo en la enseñanza primaria el empleo sistemático de la observación y de la experimentación, cuya necesidad, aun en la enseñanza matemática, razonaré más tarde.

Su famosa *Ausschaungslehre,* a mi entender mal traducida por *Teoría de la intuición,* fue sin duda uno de los puntales sobre los que instituyó más tarde Herbart su filosofía de la educación, basada en su teoría de las apercepciones, que no hemos de glosar aquí, pero cuya trascendencia en el movimiento pedagógico del pasado siglo fue tan marcada. La huella de Pestalozzi y Herbart fue seguida por Froebel, creador de los *Kindergarten.* El material experimental de Froebel fue mejorado más tarde notablemente por María Montessori en su famosa «Casa dei Bambini», mientras otros pedagogos, como Decroly, prefieren extraer el material matemático primario de la naturaleza misma...

Sea como fuere, así germinaba a comienzos de este siglo la semilla sembrada por Pestalozzi, más de cien años atrás. Había tardado en dar frutos, pero éstos eran de la mejor calidad, y si la mayoría de las escuelas seguían aferradas a los procedimientos tradicionales, ningún maestro titulado ignoraba los avances del siglo XIX en la Pedagogía elemental, avances que constituyen uno de los más legítimos orgullos de la humanidad en este siglo.

Pero en dicha época tal movimiento pedagógico renovador no había calado todavía en la enseñanza secundaria, y quiero creer que no porque no sintiera su necesidad, sino porque la formación universitaria del profesorado de Enseñanza media había fomentado inconscientemente la falsa idea de que el Instituto era una especie de Universidad en pequeño. En estas aulas concebidas a lo universitario nos hemos educado los bachilleres de nuestra generación, mocosuelos que enrojecíamos de susto y de vergüenza cada vez que éramos tratados solemnemente de «usted» por venerables profesores de barba blanca, que nos llamaban con un pomposo «Don» seguido del nombre y dos apellidos desde su empinado pedestal. ¡ Cuánto camino había que recorrer (y falta recorrer todavía en muchos centros) hasta llegar a la clase taller, a la cátedra sin estrado, a la cátedra sin cátedra, en la que el profesor sin lugar especial para sí, está, sin embargo, en todas partes! Pero no empecemos divagando.

LAS CUESTIONES FUNDAMENTALES

En la época a que me estoy refiriendo, es decir, a comienzos de este siglo, si no había calado, empezaba a manifestarse la inquietud pedagógica en la Enseñanza media, principalmente en Alemania e Inglaterra, donde ya se criticaba la eficacia de los métodos tradicionales de enseñanza matemática. El reconocimiento del fracaso de estos métodos y el descrédito que recaía sobre la Matemática misma, por culpa de sus malos pedagogos, exigían ante todo un análisis profundo de la finalidad formativa de la Matemática en la Enseñanza media. Era preciso preguntarse: ¿A dónde vamos?, ¿qué nos proponemos con la enseñanza de la Matemática en el Bachillerato? Para de acuerdo con la respuesta, formular las preguntas de *método:* ¿por dónde vamos? y de *modo:* ¿Cómo vamos? Aunque parezca a muchos sorprendente, la cuestión de programa: ¿Qué cogeremos en el camino?, tiene en Bachillerato una importancia subordinada; pero luego hemos de hablar de ello.

El distinto modo de jerarquizar estas preguntas y aun de contestar a ellas en lo que va de siglo, marca la evolución que comentamos.

LA CUESTIÓN DE FINALIDAD Y LAS CONSECUENCIAS DE UNA VISIÓN ESTRECHA DEL PROBLEMA

Empecemos, pues, por la cuestión fundamental de finalidad. La situación a principios de siglo era ésta: La Matemática en primera enseñanza tenía por finalidad primordial la adquisición de las destrezas de cálculo necesarias para la vida ordinaria y en la segunda enseñanza el desarrollo del sentido lógico.

Las instrucciones del curso prusiano (1901) decían, por ejemplo, con referencia a la enseñanza matemática media: «En todos los campos de esta materia el objeto debe ser, por lo tanto, el de obtener una comprensión clara de los teoremas a desarrollar y de sus deducciones, así como de la práctica y habilidad en usarlos.»

Es de justicia consignar que Shellbach y Klein en Alemania, lo mismo que Perry y Godfrey en Inglaterra, clamaban inmediatamente por una mayor tendencia intuitiva y concreta; pero la tónica general era la consignada, y no faltan citas de voces autorizadas que lo confirman, como la de Withehead, quien afirmaba en el Congreso de Cambridge de 1912 que la eficacia de la enseñanza de la matemática residía simplemente en el desarrollo del sentido lógico. Y si, pasando de la segunda enseñanza a la primera, nos referimos a España, todavía encontramos en 1933 libro de Metodología Matemática elemental, en el que se afirma: «Pocas son las actividades psicológicas del niño que pueden ser utilizadas para el estudio racional de la Matemática, justificando así en cierto modo el aprendizaje rutinario que durante tantos siglos se ha hecho...» «El ideal estará, pues, en hacer de toda la enseñanza de la Matemática un campeonato continuo en que la rapidez, la exactitud, la facilidad, la precisión y el rigor lógico, la perfección, en una palabra, vayan aumentando sucesivamente de acuerdo con las características que como arte y como ciencia le hemos asignado.»

El estrecho dilema y al propio tiempo el terrible salto en que se condensaba la vieja enseñanza matemática era, pues, ese: empirismo o logicismo; del primero se saltaba al segundo sin gradaciones intermedias. Mientras no pudiera obtenerse del niño frutos de razonamiento lógico no quedaba otra tarea que la de inculcarle destrezas, excitando, a falta de otro interés, su espíritu de competencia y campeonato. Pero en cuanto apuntaran sus facultades de raciocinio, ¡ ah !, entonces era llegada la hora de abrumarle con axiomas, con teoremas, corolarios, escolios, etc. Todos los varones de nuestra generación, y de las anteriores, hemos sufrido las consecuencias de este angosto dilema, cuyo resultado ha sido la aversión y la huída de muchas inteligencias hacia otros campos en los que han acreditado una gran finura. Y no es de extrañar que tal aversión cristalizara en diatribas célebres por su paternidad y por su dureza, como la de madame de Stäel, quien decía [2], por ejemplo: «Las verdades demostradas con énfasis no conducen a las verdades probables y éstas son las únicas que aparecen en los negocios, en el arte, en la sociedad»; como la de Le Bon, quien opinaba que la Matemática «sólo sirve para desarrollar el gusto de los razonamientos sutiles», alegando «que los más eminentes matemáticos no saben con frecuencia conducirse en la vida y se desorientan frente a las menores dificultades»; como Huxley, que afirma que: «La matemática es un estudio que no obliga a la observación, a la inducción, a la causalidad»; como, finalmente, Bouasse, quien casi en nuestros días asesta en uno de sus pintorescos prólogos estos terribles mazazos: «El matemático tiene horror a lo real, abomina del caso particular, la abstracción y la generalización son los ídolos a los que sacrifica el buen sentido. Cuando ya no queda nada de un fenómeno es cuando razona a sus anchas; el vacío es su elemento; la forma, su dios.»

No dejan de tener su fundamento tales diatribas, pero lo injusto es que se dirijan contra la matemática o los matemáticos y no, como debiera ser, contra los vicios y torpezas en su enseñanza.

SENTIDO LÓGICO Y SENTIDO DE APLICACIÓN

Todos estos provienen, como hemos dicho, de una visión estrecha de la cuestión fundamental de finalidad. Nadie pone ya en duda el papel que la matemática desempeña en el desarrollo del sentido lógico; diré más, diré que es la Ciencia más adecuada para ello, por la misma precisión y sencillez de sus conceptos y no he de extenderme aquí en probar ni lo uno ni lo otro.

Pero dando por descontadas todas las excelencias de la lógica, es indudable que no bastan para la vida ni hubieran siquiera bastado para el desarrollo de la Ciencia.

---

[2] «L'Allemagne», Part. I. Cap. 18.

La Matemática es el filtro a través del cual el hombre estudia los fenómenos naturales; esquematiza la complejidad de los mismos por la sencillez de unos entes de razón sobre los cuales pueda discurrir cómodamente el razonamiento lógico; obtenidos los frutos de éste, procede la interpretación de los mismos en el campo de la realidad. Hay, pues, tres fases en el estudio matemático de los fenómenos naturales, una primera fase de planteo o de *abstracción,* una segunda fase de razonamiento lógico, y una tercera de traducción o paso de lo abstracto a lo concreto, operación que llamaremos de *concreción.*

La enseñanza matemática clásica se ha reducido durante mucho tiempo al cultivo de la segunda fase, se han ido transmitiendo de generación en generación los conceptos matemáticos desprovistos de toda significación real, enrarecidos a fuerza de depurados, y de aquí el divorcio entre la enseñanza matemática y la realidad, de aquí el tipo de hombre de ciencia incapaz de conducirse con buen sentido en la vida, el tipo frecuente del ingeniero repleto de ciencia matemática pero incapaz de plantear, con sentido práctico, los problemas que la técnica le ofrecía.

Si se quiere conseguir, pues, una formación matemática completa que habilite al educando para utilizar en su día la Matemática como instrumento vivo, no debe descuidarse en la enseñanza matemática de ningún grado, el sentido de aplicación en su doble aspecto de abstracción y concreción. Pero esto no se consigue limitándose a poner problemas llamados de aplicación después de exposiciones teóricas abstractas (problemas la mayor parte de las veces de aplicación más aparente que real). El remedio debe atacar al mal en su origen mismo, es decir, en la etapa de formación de los conceptos matemáticos. Así, antes de iniciar el método lógico ha de haberse acumulado en la mente del alumno un rico caudal concreto de observaciones, de experiencias y de intuiciones efectuadas desde los primeros años de la escuela y que, sedimentadas en lo inconsciente del niño, sean el el germen de los conceptos abstractos.

La facultad de abstracción no se desarrolla razonando *in abstracto* sino empezando por lo concreto. Si abstraer es prescindir de algo, es preciso que empiece por existir este algo de que se puede prescindir. La deficiencia de la enseñanza de tipo clásico en este punto consiste en dar las abstracciones hechas y no enseñar a formarlas, que es lo útil y lo eficaz.

EL PAPEL DE LA INTUICIÓN

Ahora bien, si los entes abstractos, una vez elaborados, obedecen a leyes matemáticas precisas, en cuyo desarrollo juega papel fundamental la lógica deductiva, ya no ocurre lo mismo en el proceso de elaboración de los esquemas abstractos, es decir, en la fase primera mencionada. Plantear, en las complejas ciencias de la naturaleza, y no digamos en las sociales, es saber elegir las variables de influencia preponderante en el fenómeno, es adivinar (sin efectuar las experiencias muchas veces de realización imposible) que los efectos de la omisión de otras acarrearía grave error. Es predecir el comportamiento de una realidad sensible saltando por encima de ella, cerrando los ojos y *viendo* lo que ocurre (si vale la palabra) en una realidad interna nuestra imaginada. Es, en definitiva, hacer uso de la facultad que en matemáticas llamamos *intuición* (de *in tuere,* mirar dentro) y que no debe confundirse con la denominada «intuición» por algunos psicólogos y pedagogos, más cercana de la percepción sensorial.

Fácilmente se comprende que ya no son los valores lógicos los que nos pueden guiar en esta selección previa de premisas, ya que la lógica es sólo apta para actuar sobre premisas previamente elaboradas, ni son tampoco, en muchas ocasiones, valores lógicos los que a la postre determinan las ideas clave de las soluciones de los problemas, sino la clarividencia previa interna de la fecundidad de una determinada asociación de ideas y de la esterilidad de las demás. Aun en la génesis y desarrollo de la propia ciencia matemática es reconocido por todos nosotros que el verdadero faro que ilumina y descubre los nuevos senderos es la intuición; el rigor lógico viene casi siempre detrás, limitándose a cimentar sólidamente los descubrimientos de aquélla.

El fracaso de muchos matemáticos, más justo sería decir de muchos malos matemáticos, ante los complejos problemas de la vida, fracaso que motivó las anteriores críticas sobre ellos y sobre la matemática, no son sino consecuencia de un defectuoso cultivo de esta sutilísima facultad en la que principalmente radica el «esprit de finesse» de que nos hablaba Pascal.

EN SENTIDO DE LO ESENCIAL

Se comprende ahora por qué la omisión del cultivo de la intuición en la enseñanza matemática la desvitaminiza al punto de motivar en los educandos la falta de esta cualidad que podríamos llamar *sentido de lo esen-*

cial, sentido tan indispensable en la Técnica como en la vida en general. Para tomar decisiones en la vida no basta saber hacer un minucioso análisis de las circunstancias que puedan influir en la situación que pretendemos superar; es preciso tener la intuición clara de aquellas de mayor peso y no pretender soluciones matemáticamente perfectas donde la naturaleza del problema no las reclama, ni inhibirse por la presencia de causas de signo opuesto cuando alguna de ellas carece de importancia.

Quien en su educación matemática haya cultivado la facultad de intuir, cabe esperar que haya desarrollado el *sentido de lo esencial* a que estoy aludiendo y que, sabiendo discriminar con acierto lo preponderante de lo secundario, no se pierda en sutilezas de juicio inútiles ni discuta en vano, ni actúe torpemente en sus decisiones vitales.

CONCRECIÓN Y APROXIMACIÓN

Si lo anterior se refiere al cultivo de la fase de abstracción, no era defecto menos grave de la enseñanza matemática tradicional el descuido del desarrollo de la facultad que hemos llamado de *concreción,* es decir, la proyección al plano de la realidad concreta de los resultados suministrados por los procesos resolutivos abstractos. Y ¡qué lamentables las consecuencias de tal descuido! La insensibilidad de muchos alumnos ante resultados cuya absurdidad hiere ¿a qué se debe sino a la falta de hábito de aquella proyección?

En el mismo orden de ideas, hemos de achacar a este defecto de la enseñanza tradicional la ausencia del *sentido de aproximación* tan necesario al científico como al técnico. Precaviéndose contra las consecuencias de los pregonados campeonatos, habría que evitar desde la escuela elemental competiciones de exactitud no sólo ilusorias sino atentatorias al buen sentido. Al acordarme de aquel niño (preparado en lo que se llama «un buen colegio») que, al preguntarle por qué había dado con cuatro cifras decimales un determinado número de obreros, me contestó compungido, «porque no había tenido tiempo de sacar más», pienso en la conveniencia de la *cruzada de la concreción,* del sentido de aplicación y aproximación que haga desaparecer de los cuadernos escolares tales diezmilésimas de obrero, así como las fracciones de segundo en los tiempos necesarios para realizar obras de albañilería, o las de milímetro en distancias topográficas, y tantas y tantas cifras absurdamente ilusorias que aparecen en cálculos técnicos efectuadas con tablas de Schrön sin desperdiciar ninguna de sus siete cifras decimales aun partiendo de coeficientes empíricos de los que a duras penas si se conocen dos o tres cifras.

LA CUESTIÓN DE MÉTODO.—LOS PERÍODOS DE SU EVOLUCIÓN

Entendida en los sentidos indicados la finalidad educativa que debe perseguirse en la enseñanza de la Matemática en el Bachillerato, veamos las consecuencias didácticas que de tal crítica se derivan en orden a los problemas de método y modo.

Sin dejarnos llevar por exclusivismos simplistas y apriorísticos, podemos decir que los mejores métodos y modos son aquellos que sin olvidar las finalidades apuntadas, se adapten mejor a la psicología del escolar.

Podría caracterizarse la escuela antigua de la enseñanza de la matemática por el desprecio, por la ignorancia de los problemas psicológicos y el consiguiente predominio sobre ellos de los problemas puramente lógicos.

Se olvidaba que la lógica y los intereses del niño no son los mismos que los del adulto. Las exposiciones lógicas impecables no satisfacen las apetencias analizadoras del niño, ni siquiera sirven para cultivar en él hábitos de síntesis, ya que tampoco se desarrolla precisamente esta capacidad dando la síntesis hecha. ¡Qué engañosa complacencia la de nuestros viejos profesores al oirnos repetir demostraciones estereotipadas! ¡Qué cándido espejismo al imaginar que así aprendíamos a discurrir! El resultado conseguido en la mayor parte de los casos eran tan sólo el cultivo obsesionante de la memoria para lograr una pura y simple imitación, bajo la falsa apariencia de un raciocinio de prestado.

Se olvidaba lo que llaman algunos psicólogos «el realismo intelectual del niño», es decir, su incapacidad para la comprensión prematura de las relaciones lógicas formales o abstractas. Así veíamos usar prematuramente las demostraciones por reducción al absurdo antes comentadas a propósito de los estragos del sistema euclídeo en los alumnos de tierna edad. Se olvidaba, o se ignoraba, la ley *biogenética,* que si en Filosofía positivista ha tenido derivaciones excéntricas, en Pedagogía sigue expresando una analogía interesante, según la cual el desarrollo del individuo reproduce en pequeño el desarrollo de la especie. Y así se presentaba la matemática escamoteando al niño el proceso genético que en la humanidad ha tenido nuestra ciencia.

Se olvidaba, por fin, que la evolución mental del niño sigue la misma ley de *continuidad* que su crecimiento físico; se saltaba, como hemos dicho, de los procedimientos empíricos de la escuela primaria a los razonamientos euclídeos de las obras venerables de matemática clásica, sin tener en cuenta que los alumnos de Euclides no fueron precisamente niños.

¿Cuál era el resultado de todo este sistema? Ya lo hemos comentado: la inadaptación, la incomprensión y una aversión definitiva para la mayor parte de las inteligencias que así quedaban perdidas para la Matemática.

Con todo ello se llegó a fomentar la errónea creencia de que aun para el cultivo de la matemática elemental hacían falta aptitudes especialísimas.

A remediar todos estos males ha tendido el progreso de la Didáctica matemática en lo que va de siglo y que puede caracterizarse por el imperativo de la finalidad sobre las cuestiones de método, modo y programa, y por el conocimiento de la psicología del niño y de su evolución.

Las simples leyes biogenéticas y de continuidad que rigen esta evolución, han determinado la implantación de los *métodos cíclicos* que establecen la continuidad en el estudio de las materias sin fraccionarlas en cotos separados, así como el uso preponderante de la intuición en los primeros años y la evolución progresiva de los métodos que, sin discontinuidades ni saltos bruscos, permitan desarrollar las actividades psicológicas del niño gradualmente desde su primera infancia hasta la Universidad.

SOBRE LA CUESTIÓN DE MODO

En cuanto al problema de modo creo que la principal guía es atender a los *intereses* del niño. Me refiero, naturalmente, a los intereses como apetencia volitiva del mismo.

El modo de enseñanza más acorde con dichos intereses del educando es el modo *eurístico,* en el cual el profesor tan sólo sirve de guía para que el alumno vaya descubriendo por sí solo las verdades o por lo menos se haga la ilusión de ello. Como observa agudamente Rey Pastor, no es la *posesión* de los bienes, en este caso culturales, sino su *adquisición,* lo que depara al hombre las mayores satisfacciones.

Y ahí vemos también cómo el modo eurístico tiende a acercar nuevamente los dos procesos a que me referí en un principio y que la enseñanza sintética tradicional divorció: el proceso de génesis de los conocimientos y el proceso de transmisión de los mismos; y en este sentido es el modo eurístico el que mejor responde a la ley biogenética citada, haciendo pasar al educando por un proceso de formación de conceptos análogo al experimentado por la humanidad.

Este punto de vista ha tenido tal influencia en los pedagogos modernos que algunos de ellos, como Piaget, puestos a filosofar, no desglosan ya el conocimiento científico de su propia génesis y ya no escriben sobre Epistemología, sino sobre Epistemología *Genética.*

LA SITUACIÓN ACTUAL

Para que se vea hasta qué punto el cuadro evolutivo que acabo de exponer a mi manera, refleja en sus puntos esenciales las corrientes actuales en la educación matemática, no hay más que leer las instrucciones que acompañan los programas de segunda enseñanza de las distintas naciones (tengo a la vista los programas franceses, belgas, portugueses...) Me limitaré a transcribir algunas de las recomendaciones que la UNESCO acordó elevar a los Ministerios de Instrucción Pública de los diferentes países asociados, en julio de 1950, recomendaciones que, aun afectando a la instrucción primaria, son asimismo aplicables a los primeros cursos de nuestra Enseñanza media [3].

«Que la iniciación matemática se adapte etapa por etapa a las operaciones intelectuales características de los diferentes grados de desarrollo del niño y utilice recíprocamente todos los recursos que estas operaciones llevan consigo.»

«Que ya la escuela maternal facilite al niño la ocasión de descubrir, gracias a un conjunto de acciones efectivas y personales, las relaciones elementales (inclusión, orden, correspondencia, etc.), constitutivas del número y del espacio.»

«Que la iniciación a las operaciones aritméticas, durante los primeros años de enseñanza primaria se funde siempre sobre acciones previas, permitiendo al niño descubrir por su cuenta el mecanismo de estas operaciones

---

[3] Sabido es que el concepto de «Escuela» en Europa es algo distinto al nuestro y que en tales «Escuelas» existe una mayor continuidad entre la primera enseñanza y la media. En la fecha en que se dió esta conferencia la Unesco no había tratado todavía el tema de la enseñanza matemática media, lo que hizo en 1956 (conferencia 19.ª). Véase el final del capítulo siguiente. N. de la R.

por la manipulación de objetos concretos y en función de preguntas que él mismo se habrá formulado según sus intereses espontáneos.»

«Que paralelamente a esta construcción de relaciones numéricas, se organice una serie graduada de actividades sobre las formas, las relaciones y las medidas espaciales elementales, con el fin de asegurar la correspondencia entre las operaciones aritméticas y las operaciones geométricas.»

«Que la actividad del niño en sus capacidades de invención vaya siempre acompañada de un incentivo a la comprobación, de modo que la adquisición de cada nuevo sistema de operaciones o de relaciones marque un progreso en el rigor de los razonamientos.»

«Que los ejercicios destinados a asegurar la adquisición de mecanismos del cálculo, especialmente del cálculo oral, intervengan solamente después que el niño haya comprendido el sentido de las operaciones en juego y la necesidad de esta mecanización.»

«Que la enseñanza matemática esté coordenada lo más posible a las otras enseñanzas; que los ejercicios y problemas propuestos a los alumnos sean verosímiles, sacados de la vida práctica y lo más posible en relación con el medio en que vive el niño.»

Tras la lectura de tales recomendaciones comprobé, con alegría, que la enseñanza oficial española no está atrasada en lo que a didáctica matemática se refiere. El espíritu que las informa es el mismo que nos guió hace más de veinticinco años al escribir en colaboración con mi querido maestro don Julio Rey Pastor los libritos destinados a tal didáctica, de cuya posterior influencia en cuestionarios y textos de aquí y de Hispanoamérica no he de ser yo el fiel contraste, ni mucho menos el pregonero. Pero sí quisiera decir que a la hora de rendir cuentas del empleo de mi vida estimaré como el más señalado servicio que quizá haya podido rendir a mi Patria, el haber colaborado en aquella tarea de renovación que, acogida en un principio con indiferencia y escepticismo por la rutina ofendida, después..., después ha sido envuelta en silencios mucho más elocuentes todavía. En réplica a ellos digo lo que digo, cometiendo grave pecado de inmodestia. Pero no me refiero tanto al silencio despectivo como al silencio delictivo; al que acentúa un desprecio como al que disimula un plagio; que si el primero duele, el segundo irrita, que es peor.

PROGRESOS DESEABLES EN MATERIA DE PROGRAMAS

Sin embargo, aún queda no poco por corregir aquí y fuera de aquí. No hablaré de males enraizados en terrenos ajenos a la pedagogía misma, ni de los inherentes a la «macropedagogía», impuesta por la aglomeración de alumnos en la mayor parte de nuestras aulas; poco se adelanta con diagnosticar males sin poderlos resolver. Me limitaré a indicar algunas perspectivas de mejora en lo que se refiere a programas, a contraste de métodos y modos y a formación del profesorado.

Ya dije antes que la cuestión de contenido tiene en segunda enseñanza menos importancia que la cuestión de método. La finalidad del Bachillerato es más formativa que informativa, y lo formativo no es el índice, sino el modo de desarrollarlo. Un bachiller puede tener una formación matemática excelente sin necesidad de saber muchos teoremas. Pero es preciso tener en cuenta aquí otro punto de vista de indudable interés para la vida futura del alumno: *la utilidad*. Se ha defendido muchas veces el interés educativo de una teoría en razón inversa de su utilidad y viceversa; nunca acerté a comprender por qué. Si la eficacia educativa de la enseñanza radica principalmente en los métodos, respetando éstos tendremos libertad para elegir los conocimientos que mayor utilidad puedan prestar a nuestros bachilleres en su lucha futura por la vida, y así, los dos puntos de vista, utilitario y educativo, que se han presentado tantas veces como contrapuestos, sin serlo, quedarían conjugados en una sencilla fórmula armonizadora: *enseñar conocimientos útiles con métodos educativos.*

El adelanto más importante que en materia de programas de matemáticas en segunda enseñanza se ha realizado en este siglo en Europa es la introducción de algunas nociones de Cálculo infinitesimal y de Geometría analítica. Los programas de Bachillerato de nuestra generación, girando en torno a las cuatro unidades clásicas: Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, resumían tan sólo los conocimientos matemáticos de la humanidad hasta el siglo XV. Ningún bachiller tenía la menor idea de la poderosa contribución determinada en el progreso técnico actual, por las ideas sembradas en el siglo XVII por Descartes y Fermat al plantear por primera vez, analíticamente, problemas de Geometría (primer paso para el estudio analítico de la Física) y en el XVIII por Newton y Leibniz al crear el Cálculo infinitesimal. En cambio, en Trigonometría agotábamos el tema (y seguimos agotándolo) con refinamientos de carácter puramente técnico, como, por ejemplo, el empleo del teorema de las tangentes y las fórmulas de Briggs para conseguir la resolución de triángulos mediante el empleo exclusivo de fórmulas logarítmicas.

Si hoy nuestros bachilleres tienen ya por lo menos una idea de la potencia de los recursos matemáticos aludidos, base de la ciencia determinista dominante hasta los albores de este siglo, permanecen aún en la ignorancia más completa, por lo menos en lo que a España se refiere, del poderoso recurso de la estadística, base de la nueva ciencia indeterminista de nuestros días y esencial para todas las profesiones (médicos, legisladores, economistas, pedagogos, agricultores, etc.), cuya actividad opera sobre grandes colectivos y que no pueden analizar los complejos fenómenos que en tales colectivos se presentan más que por métodos estadísticos. Creo que ya sería hora de dejar a un lado, por trasnochada, la preocupación topográfica y cartográfica, característica de los comienzos del XIX, y de empezar a decir algo a nuestros bachilleres del manejo matemático de las colectividades a expensas de algún corte practicado a la Trigonometría o a otros capítulos de la Matemática clásica, que sólo se mantienen en los programas por una heredada rutina [4].

TAREA A REALIZAR EN MATERIA DE MÉTODOS Y MODOS LLAMAMIENTO A LA UNIVERSIDAD

Los pedagogos, por nuestra parte, debiéramos hacer uso constante de los métodos estadísticos y de toda la técnica moderna de psicología experimental, que tanto usa de ellos, para contrastar los progresos de nuestros alumnos, humanizando los regímenes de pruebas, tan necesitados de profunda renovación, para estudiar la evolución de sus facultades mentales, para explotar sus posibilidades futuras, orientándolas profesionalmente desde el mismo Bachillerato (una de cuyas misiones primordiales es precisamente la resolución de este grave problema de orientación), y, finalmente, para comprobar la eficacia de nuestros propios modos y métodos de enseñanza mediante pruebas y *tests* de comparación.

---

[4] Después de la lectura de este discurso y casi simultáneamente con su publicación se dieron a conocer nuevos programas del Bachillerato español, en los que por vez primera se introdujeron algunos conceptos estadísticos.

Esta es, a grandes rasgos, la gran tarea que queda todavía por realizar en el campo de la pedagogía matemática en segunda enseñanza, y en este sentido hemos de formar debidamente el nuevo profesorado, capaz de realizarla. La última de las recomendaciones internacionales de la UNESCO antes aludidas reza así: «Que los centros encargados de la formación de los maestros sean invitados a inspirarse en los principios más arriba definidos, a fin de preparar a los profesores para ponerlos en práctica.» Advertencia que demuestra el interés internacional en el problema de la formación del profesorado de matemáticas.

En España esta formación corre a cargo de las Facultades de Ciencias, y a ellas he de dirigirme en consecuencia.

Pese a mi formación mixta científica y técnica, yo me considero ante todo hijo de la Universidad, y a ella le debo quizá lo mejor de mi formación; pero, declarado esto, no tengo empacho en lamentarme del pertinaz abandono de la formación pedagógica del alumnado de Ciencias, tanto más cuanto que la mayor parte de este alumnado sigue la carrera con objeto de dedicarse a la enseñanza. Tal descuido del principal aspecto profesional de las carreras de Ciencias me parece inexplicable y funesto. La experiencia pedagógica de sus titulares sólo puede así lograrse, cuando se logra, después de tanteos y fracasos a costa de sus futuros alumnos. En matemáticas concretamente, las consecuencias de este abandono van siendo cada vez más graves al acentuarse progresivamente el desnivel entre las regiones conceptuales del licenciado recién salido de las aulas universitarias y las del alumno recién ingresado en el Instituto o colegio donde tal licenciado enseña. ¿Cómo va a descender súbitamente del elevado plano de las abstracciones matemáticas que elabora hoy la Topología, el Algebra moderna, el Análisis abstracto..., al plano realista y concreto de la limitada mentalidad de un niño de diez años? Se impone el conocimiento previo de esta mentalidad, y se impone urgentemente, sobre todo, prácticas previas de paracaidismo pedagógico para quienes cursen estudios de Ciencias con miras a la enseñanza. Sólo así podrán aterrizar felizmente en el campo de sus futuras actividades.

Y aún si me apuráis añadiré que no tan sólo en el descenso, sino también en el ascenso a tales abstracciones, la Universidad, tarde o temprano, se verá forzada a considerar los problemas didácticos en su propia enseñanza, como los consideró la enseñanza primaria en el siglo pasado y los cuida en el presente la enseñanza secundaria. Los problemas de finalidad, método y modo son sensiblemente los mismos, con las modalidades y diferencias propias de la edad. A toda edad es perjudicial el divorcio excesivo entre los procesos de génesis y de transmisión de conocimientos. A toda edad es indicada la conveniencia del método eurístico, y a toda edad el interés hacia la materia en estudio, hábilmente despertado por el maestro, sigue siendo el principal estímulo de la atención y la mejor fuente de energía psíquica para vitalizar una atención fatigada.

Pero... al llegar a este punto me empiezan a asaltar serias dudas acerca de si yo mismo, después de tanto predicar sobre biogenética, eurística e interés, no habré llegado a apagar el interés y a saturar la fatiga de mi propio auditorio. Sería realmente imperdonable; imperdonable y, además, ridículo... Nueva duda: ¿Sería o es? Señores, por si acaso, terminemos, y, sea como fuere, muchas gracias por vuestra gentil atención.

§ 2. TENDENCIAS ACTUALES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA [1]

I. LA EVOLUCION DE LA MATEMATICA

MATEMATICA Y CIENCIA NATURAL

Sabido es que los historiadores griegos atribuyeron el origen de la Geometría a los métodos de que se valieron los pobladores de las orillas del Nilo para medir sus tierras y deslindarlas de nuevo tras las periódicas inundaciones. Pero la construcción y artesanía prehistóricas acusaban ya el conocimiento de las formas geométricas elementales, y mucho antes, sin duda, el mismo instinto de propiedad llevó al hombre a contar sus rebaños representándolos por piedrecillas o por trazos en los troncos de los árboles.

Contar, medir y construir fueron las primeras operaciones matemáticas de la Humanidad. La primera raya que el pastor primitivo trazara para representar su primera oveja fue el primer símbolo matemático de la Historia. Símbolos o representaciones matemáticas han sido, asimismo, desde el primer tosco diseño de un campo en el papiro hasta la moderna descripción tensorial de la curvatura en el universo. La matemática toda es ciencia de representaciones, de esquemas, y es tan antigua como el instinto de propiedad, como el hombre mismo.

Representar, esquematizar, es abstraer. Es prescindir de cualidades accesorias para quedarse con la cualidad fundamental destacada en cada representación: la simple cualidad de ser, en Aritmética; la posición, la forma y la extensión, en Geometría; el peso, la masa, etc., en Mecánica... Reduciendo el mundo físico a tales abstracciones, pudo el hombre simplificar la inmensa complejidad de los fenómenos naturales. Gracias a la

[1] Cuatro Conferencias radiadas por las antenas de Radio Nacional, del 25 al 28 de enero de 1956.

sencillez de las representaciones idealizadas, pudo hacerlas dóciles al razonamiento puro; razonamiento que le permitió, primero, inducir leyes simples que fueran como el *substratum* de todos los fenómenos esencialmente homogéneos, y deducir luego de dichas leyes consecuencias que, traducidas de nuevo al mundo físico, le habilitaron para *predecir* el resultado de fenómenos desconocidos, de experiencias complejas aún no realizadas. De la predicción al proyecto, de la ciencia a la técnica, ya no quedó más que un paso.

Así, las leyes de la Mecánica, inducidas de simples observaciones sobre la caída de los graves, permitieron al hombre descubrir planetas ignorados por el telescopio, y también proyectar y crear los mecanismos que nos transportan y nos alivian el trabajo. De las sencillas experiencias obtenidas sobre probetas en un laboratorio de resistencia de materiales, inducimos leyes que nos permiten calcular las complicadas estructuras sobre las que vivimos y circulamos. De las sencillas experiencias de Faraday sobre inducción en circuitos se ascendió análogamente a las leyes generales de electromagnetismo, que no sólo permitieron explicar complejos fenómenos de óptica, sino también proyectar generadores y motores eléctricos, líneas de transmisión, emisoras y receptores de radio...

Estos ejemplos, pocos entre los muchos que pudieran citarse, ponen de manifiesto el doble juego inductivo-deductivo que caracteriza la Ciencia toda, y el papel esencial que la Matemática ha desempeñado en este doble juego, gracias a su función esquematizadora. Sirvienta y reina de las ciencias la ha llamado alguien, y, en efecto, así es, en cuanto les sirve de sostén y las domina a un tiempo.

MATEMATICA APLICADA Y MATEMATICA PURA

He querido recordar expresamente aquí el origen concreto y empírico de la Matemática, como también su íntima conexión con la ciencia físico-natural, de la que sigue recibiendo acicate y estímulo generador, porque los matemáticos nos olvidamos, con frecuencia, de este humilde origen y de la simbiosis que la une a la ciencia natural. Como si nos molestara recordar que nuestra ciencia fue sirvienta antes que reina, fue aplicada antes que pura.

Hemos visto que los conceptos matemáticos lo fueron en su origen sólo a modo de tránsito, es decir, *per accidens,* para ser proyectados inmediatamente de nuevo al campo de la realidad. Pero estos entes de razón, una vez creados, adquieren carta de ciudadanía en nuestra mente, se enseñorean de ella, convirtiéndose en conceptos matemáticos puros, en conceptos matemáticos *per se*. Y la mente matemática, libre ya de las trabas con el mundo físico real, del que recibió los impulsos iniciales estimulantes, teje y combina, abstrae y generaliza, se ensancha, prolifera y progresa, lo mismo en sus ramas y frutos que en sus raíces o fundamentos. Y ocurre un fenómeno curioso. Este desarrollo, efectuado ya a espaldas de toda aplicación al mundo físico, este tesoro matemático puro, tan desinteresadamente acumulado, constituye una reserva conceptual, de la que inesperadamente surgen posteriores aplicaciones al mundo físico que nadie era capaz de prever. La ciencia presenta ejemplos de tal naturaleza en tal cantidad, que con razón puede decirse que la matemática pura de hoy volverá a ser matemática aplicada de mañana.

Concepción tan abstracta como el Algebra de Boole (álgebra que este matemático inglés ideó hace más de un siglo para esquematizar ciertas leyes del razonamiento lógico) se ha mostrado ser, recentísimamente, el instrumento matemático apto para esquematizar las conexiones en los circuitos electrónicos de las máquinas de cálculo. No olvidemos, pues, que la Matemática es una sola, que su origen arranca de la ciencia natural, y que su carácter de pura o aplicada no radica más que en la intencionalidad del que la crea o estudia, pero no en su íntima esencia. Más adelante volveremos sobre esta conexión de la Matemática con la vida, para sacar las debidas consecuencias en orden a su enseñanza.

CONCEPTO Y FORMA EN MATEMATICAS

Analicemos, entre tanto, cuáles son los procesos de creación en el mencionado desarrollo de la Matemática pura. Esta creó sus conceptos iniciales, como se ha dicho, por idealizaciones y abstracciones efectuadas sobre objetos concretos del mundo físico. Pero estos objetos ideales pasaron pronto a ser, en el campo mental, material concreto, sobre el cual se edificaron nuevas abstracciones e idealizaciones en planos de simbolización superior. Si la Matemática se nutre, en efecto, inicialmente de contenidos conceptuales, para manejarlos y relacionarlos con comodidad y rapidez se vale de símbolos, es decir, de representaciones formales de los mismos, y traduce los juicios lógicos que relacionan dichos conceptos mediante leyes formales entre sus símbolos representativos de tal suerte, que, combinando con corrección tales transformaciones, acaba el matemático por olvidarse del contenido conceptual. Descansa de dicho contenido en las reglas simbólicas que sabe le conducirán a resultados infalibles, por ser traducción cabal de las leyes del razonamiento matemático.

Condensación simbólica y formalización del razonamiento han hecho posible la formidable progresión de abstracciones y generalizaciones crecientes que constituyen la Matemática de hoy. Conceptos que se expresan mediante formas nuevas, combinaciones de formas que engendran a su vez nuevos conceptos, que se simbolizan mediante nuevas formas, y así sucesiva e indefinidamente.

LEYES Y ESTRUCTURAS

Un buen día, el Algebra (siglo XIV) llega a formalizar la Aritmética.

Poco después (siglo XVII), absorbe y formaliza la Geometría. Más tarde, en complicidad con el Cálculo, formaliza y sintetiza la Física y la Técnica todas. Y cuando hoy nos damos cuenta de que exigencias formales, como la de la invariancia de las ecuaciones de la Física, acaba revolucionándola conceptualmente, hasta dar origen a la teoría de la relatividad, terminamos por preguntarnos: ¿Quién gobierna a quién: el concepto a la forma o la forma al concepto?

La pregunta tiene hoy su más estricta oportunidad, aun sin salirnos del campo de la Matemática pura. Sabido es que, ya en el siglo XVII, los algebristas llegaron a calcular las soluciones reales de una ecuación cúbica a través de radicales imaginarios, carentes entonces de todo sentido matemático. Asimismo, a fines del pasado siglo, Heaviside, con su cálculo simbólico, defectuoso de significación matemática precisa, integraba correctamente ecuaciones diferenciales en forma más expeditiva que la entonces tradicional, y que modernamente ha tenido su plena justificación significativa mediante la transformación de Laplace. Con estos y otros ejemplos, los matemáticos se dieron cuenta de que no sólo podían operar correctamente olvidándose del contenido conceptual de los símbolos manejados, sino que el manejo extrapolado de dichos símbolos llegaba a engendrar nuevos conceptos. Asidos firmemente a las riendas de las leyes formales, vieron que podían atravesar con ellas regiones desconocidas, acortando distancias, para llegar finalmente a puerto seguro, a resultados correctos.

Se vino a comprender así el poder creador de la forma, de la ley, cuya conservación y extrapolación daba origen a entes matemáticos nuevos. Por primera vez, la ley, primando sobre las nociones que le habían dado origen, servía de sostén a nuevos dominios conceptuales. Los ejemplos de cuadros de leyes operativas que servían de armazón común a múltiples y variados dominios se multiplicaron ante la mirada escrutadora del matemático. La última abstracción resultante de todo ello fue prescindir sencillamente de los objetos y quedarse con las armazones, es decir, con las estructuras.

Desde que el gran matemático alemán David Hilbert extendió la concepción axiomática de la Geometría al campo de la Aritmética, en los umbrales del siglo XX, la Matemática toda ha evolucionado en un sentido formalista, guiada por el concepto de estructura. Lo esencial matemático ya no se busca en lo metafísico, sino en lo pragmático; la ley ha desplazado a la génesis. «Nous posons des règles de jeu et nous jouons» («Ponemos reglas de juego y jugamos»), replicaba un matemático de la moderna escuela a un filósofo que le objetaba. Y esta sencilla metáfora, pronunciada durante una memorable polémica que presencié en el Congreso de Filosofía de la Ciencia, en París (1949), ilustra mejor que cualquier definición la clase de estructuras que los matemáticos de hoy consideran como los cimientos de nuestra ciencia. Son los cuadros operacionales los que definen tales estructuras, y el matemático ya no se fatiga en ampliar penosamente los campos conceptuales en busca de la más amplia generalidad encuadrable en un mismo marco legislativo; se queda simplemente con la legislación y no se preocupa de la naturaleza de los seres que la cumplen. Mientras no existan leyes contradictorias, la estructura legal define por sí sola un estado matemático digno de consideración y estudio.

He aquí, pues, cómo la Matemática, que empezó por desnudar al mundo físico de sus infinitas galas hasta reducirlo a esquemas matemáticos puros, ha terminado desnudándose a sí misma de sus contenidos conceptuales, quedándose en puro esqueleto legislativo. Pero si este esqueleto no sustenta aparentemente carne alguna, es capaz de sostener una infinidad de contenidos vitales, y en esta capacidad está precisamente su gran poder y fecundidad: la paradójica y enorme potencialidad de lo vaciado, de lo abstracto...

Y con esto doy fin a este rápido perfil evolutivo de la Matemática, objeto del primero de estos capítulos sobre las «Tendencias actuales en la enseñanza matemática». Me ha parecido conveniente empezar analizando la evolución de lo que es objeto de nuestra enseñanza, para poderla proyectar sobre la evolución de la enseñanza misma que vamos a considerar en los capítulos siguientes. Con ello comprenderemos mejor las inquietudes que se perfilan en el movimiento didáctico matemático actual, al tiempo que las perspectivas genéticas trazadas nos permitirán plantear en sus justos y equilibrados términos los ímpetus naturales en toda innovación.

II. LA EVOLUCION DE LA DIDACTICA

ENSEÑAR Y APRENDER

Si la evolución moderna de la Matemática se resume en una tendencia hacia la primacía de la ley sobre el concepto, la evolución de la didáctica podría caracterizarse por una primacía del acto de aprender sobre el acto de enseñar.

El centro de la didáctica clásica era el maestro; su acción, enseñar. Enseñar bien era transmitir bien sus conocimientos, y en tal transmisión sólo se atendía al buen orden y a la claridad, entendidos siempre desde el mismo punto de vista central, el maestro. Se admitía tácitamente que quien tuviera la fortuna de ser así enseñado aprendía bien, porque aprender en tal concepción de la enseñanza era lo pasivo, lo condicionado, mientras lo activo, lo determinante, era enseñar.

Ante los fallos de tal pretendido axioma se advirtió que aprender es un acto mucho más complicado que la simple recepción pasiva de conocimientos transmitidos; que no hay aprendizaje donde no hay acción, y que, en definitiva, enseñar bien ya no es transmitir bien, sino guiar hábilmente al alumno en su acción de aprendizaje. Esta acción del alumno terminó así primando sobre la acción del maestro, y al condicionarla totalmente, quedó subvertida la primacía inicial de sus papeles. El centro de la enseñanza ya no es hoy el maestro, sino el alumno. Esta verdad es tan sencilla, que, de puro sencilla, muchos no la han asimilado todavía.

DIDACTICA Y PSICOLOGIA

Consecuencia inmediata de esta verdad: para enseñar bien, mejor dicho, para guiar acertadamente el aprendizaje, ya no basta conocer *el objeto* de este aprendizaje; es preciso conocer antes mejor *el sujeto,* es decir, el alumno. De aquí la aportación fundamental de la psicología del niño a la pedagogía moderna, y en particular a la didáctica de nuestro siglo. Un buen maestro ha de tener siempre una buena dosis de psicólogo, y he aquí por qué la evolución de la didáctica corre parejas con la evolución de la psicología.

El Renacimiento se rebeló ya contra la enseñanza verbalista tradicional y empezó a considerar los procesos de aprendizaje a través de los sentidos. Comenio, en el siglo XVII, sentó ya normas para una educación basada en los sentidos, educación que se dió en llamar «intuitiva», adoptando un concepto de intuición que no debe confundirse con el que tenemos actualmente los matemáticos. Pestalozzi es el primero que, a fines del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX, tradujo en realidad viva tal enseñanza, a la que, finalmente, Herbart dió fundamentación filosófica. Herbart es el primero que intenta estructurar científicamente la pedagogía con un criterio intelectualista hoy ya superado, pero que tuvo en su época una aceptación y una influencia enormes.

La psicología ha ido transformándose, a su vez, de ciencia filosófica a ciencia que quiere ser positiva o natural. De un lado, el evolucionismo ha aportado, como tributo a dicha transformación, la concepción genética del psiquismo infantil, al compararlo en cierto modo con el del hombre en estado primitivo. De otro lado, el «behaviorismo» o «conductismo» da a la pedagogía una orientación experimental, estudiando las reacciones del niño colocado en situaciones convenientemente planeadas e interpretando tales reacciones, tan pronto con tendencia disociadora o analítica (análisis factorial), como con un sentido estructural o gestaltista. Consecuencia de toda esta aportación de la psicología y de su evolución ha sido una profunda modificación en los métodos y modos de enseñanza.

METODOS Y MODOS

La distinción entre método y modo es un tanto sutil, ya que no puede establecerse en forma categórica. En líneas generales, *método* es sinónimo de camino (odos) para llegar a un fin (meta), y responde a la pregunta ¿Por dónde vamos?; mientras el *modo* responde a esta otra: ¿Cómo vamos? Así, hablamos de métodos analítico, sintético, inductivo, deductivo, intuitivo, racional, cíclico, histórico, etc., mientras parece más propio hablar de modos activo, pasivo, eurístico, individual, colectivo, etc.

El método viene condicionado por la evolución intelectual del niño, mientras el modo, que atiende a despertar su interés, está relacionado con su vida afectiva, con las posibilidades sociales y de ambiente en que se desenvuelve la escuela y aun con factores tan simples como el número de alumnos en clase.

EVOLUCION DE METODOS

Se comprende cómo el mejor conocimiento de la evolución intelectual del niño y de sus formas de razonar y pensar ha podido motivar la evolución de métodos didácticos. En lo que a didáctica matemática se refiere, al desplazarse el centro didáctico del maestro al alumno, el privilegio del punto de vista lógico, grato al primero, hubo de ceder ante las posibilidades psicológicas del segundo. El realismo intelectual del niño hizo ver lo incomprensible que resulta para él el empeño en demostrar verdades de clara evidencia extrayéndolas a viva fuerza de otras verdades no más evidentes, y la insuperable dificultad en seguir razonamientos abstractos sin imágenes concretas en que apoyarlos, y en especial las demostraciones por reducción al absurdo basadas en premisas no sólo desligadas de la realidad sensible, sino aun contrarias a la realidad misma.

La ley biogenética, según la cual el desarrollo del individuo reproduciría en pequeño el desarrollo de la especie, hizo ver lo contraproducente del sistema tradicional de enseñanza matemática elemental, en el cual se presentaba ésta racionalmente organizada por el genio griego, hurtando al niño todo el proceso genético previo, es decir, sus etapas experimental, inductiva e intuitiva, por las que pasó en las civilizaciones anteriores a Grecia.

La continuidad en la evolución psíquica del niño indicó asimismo la improcedencia de presentar las disciplinas matemáticas distribuídas en compartimientos estancos (Aritmética, Geometría, Algebra, Trigonometría), estudiadas en cursos distintos y, por consiguiente, en edades diferentes, y, por el contrario, la conveniencia de organizar la enseñanza *cíclicamente,* es decir, por desarrollos progresivos, en los que las unidades lógicas antiguas quedan reemplazadas por unidades funcionales globalizadas, al servicio de los intereses crecientes del escolar y de acuerdo con la evolución de sus posibilidades mentales.

En definitiva, el estudio de la evolución intelectual del alumno determina la evolución metodológica, que podría ordenarse cronológicamente según el esquema siguiente de períodos, cuyos atributos deberán ser interpretados con carácter no absoluto, sino predominante:

1.° *Período de observación* (Jardín de infancia). Análisis simple, observación de los hechos y cosas que rodean al niño. Desarrollo de los sentidos.

2.° *Período de experimentación* (Primaria). Se provocan nuevos hechos para su análisis. Se inducen analogías. Se desarrolla la transducción, es decir, el paso de lo particular a lo particular análogo.

3.° *Período de intuición* (Bachillerato elemental). Los hechos reales o provocados se sustituyen por hechos imaginados. La realidad externa sensible, por el mundo interno de la fantasía. El niño mira ya dentro de sí; hace afirmaciones, no ya sobre lo que *está ocurriendo,* sino también sobre *lo que ocurrirá en tales o cuales circunstancias*. Desarrollo consiguiente de la imaginación y de la inducción.

4.° *Período lógico* (Bachillerato superior). Se sustituye la evidencia sensible e intuitiva por la evidencia lógica; los hechos imaginados, por las premisas abstractas y sus consecuencias necesarias. Esquematización del razonamiento mediante el simbolismo abstracto. Desarrollo de la deducción lógica y de la abstracción.

EVOLUCION DE MODOS

En cuanto a la evolución de los modos, viene condicionada, como se ha dicho, por la evolución de la afectividad del niño y de sus círculos de interés. En la escuela antigua se concebía al niño como un depósito que había que llenar y aun colmar de conocimientos; la didáctica moderna lo concibe más bien como un potencial a convertir en actividad. Es preciso que los profesores se percaten bien de la trascendencia que dicho cambio supone. Los que todavía no se hayan dado cuenta de ello, piensen en la enorme cantidad de energía psíquica que nos entra por las puertas de nuestras aulas todos los días. Nuestra principal y nuestra difícil tarea de cada día, es precisamente, dar cauce a estas energías, dar que hacer a nuestros alumnos, un quehacer que les interese y eduque al mismo tiempo progresivamente.

No olvidemos que el niño tiene constantes ganas de hacer cosas, de realizar por su cuenta hallazgos y descubrimientos, y sólo nos escuchará de buena gana si estimulamos y favorecemos con nuestra explicación sus apetencias creadoras. La didáctica moderna no concibe ya la clase como una sala de conferencias, sino como un taller de trabajo; ya la palabra *maestro* se va pareciendo cada vez más a la de maestro de taller y cada vez menos a la de conferenciante.

Estas son, en líneas generales, las características de la moderna enseñanza activa y eurística, en la cual el profesor sólo sirve de guía para colocar al alumno en situación de descubrir por sí mismo los conocimientos que se desea que adquiera.

TRANSMISIÓN Y GÉNESIS

Como dijimos al hablar de la evolución de la Matemática, la ciencia crece por procesos mixtos de análisis y síntesis, de inducción y deducción. Todos estos procesos quedan ocultos en las exposiciones *sintéticas* de la Ciencia utilizadas corrientemente en la enseñanza. Buscando una economía de exposición que suele ser más ventajosa para el que expone que para el que recibe, se ha ido acentuando cada vez más las separación entre dos procesos que no debieron divorciarse nunca: el de la *génesis* de los conocimientos y el de su *transmisión*.

Considerable progreso fue, sin duda, el reconocimiento de que la vía natural de acceso a la razón eran los sentidos; pero la pedagogía que de la sola aplicación de este principio surgió durante el siglo pasado, y que pudo llamarse «intuitivo-sensualista», olvidó una cualidad básica del pensamiento: la cualidad *activa,* que hoy, repito, se reconoce esencial en los procesos de aprendizaje. No basta con «mostrar», si el alumno permanece pasivo en la contemplación de lo que tan vistosamente se le presenta; es preciso provocar, además, una actividad *suya* generadora del conocimiento que ha de asimilar.

LA DIDÁCTICA ACTIVA

Ya lo he dicho, y no me cansaré de repetirlo: no hay adquisición estable de conocimientos donde no haya acción que la provoque, sea esta acción derivada de una adaptación del niño al mundo físico y social que lo rodea, como cree Dewey, sea, como cree Claparède y me parece más probable, una simple necesidad vital o funcional, la pura necesidad de hacer, de actuar. Tanto uno como otro de estos dos grandes puntales de la pedagogía moderna centran la técnica didáctica en una acción investigadora del alumno. En esta concepción psicopedagógica, pensamiento y acción están tan unidos, que ya no se distingue si el pensamiento es fruto de la acción o es instrumento de la misma. A mi entender, ni uno ni otro filósofo de la educación nos han dado una explicación causal del pensamiento psicológicamente satisfactoria, pero ambos nos han legado, en cambio, una interpretación finalista y funcional del mismo, del mayor interés didáctico.

Kerschensteiner, por su parte, preocupado de la educación de la voluntad y del carácter, no atribuye tanta importancia al activismo creador como al activismo verificador de lo creado. Para él, la actividad del niño no debe ser tanto autoelaboración como autocrítica. Prescindiendo de cuestiones de preponderancia, reconozcamos que este punto de vista complementa de modo eficacísimo las esencias del método activo, confiriéndole un carácter peculiarmente adaptable a la enseñanza matemática, por la facilidad que ésta ofrece a la comprobación. La Matemática es quizá la disciplina más apta para practicar la autocorrección y para educar de este modo la objetividad de opiniones y la firmeza de conductas.

He aquí, pues, en resumen, las características modales de la escuela activa moderna, particularmente significativas en didáctica matemática: el aprendizaje ha de ser creador y eurístico; será funcional y espontáneo; y será, finalmente, autocrítico.

III. EL MOMENTO DIDACTICO MATEMATICO ACTUAL

LA ENCRUCIJADA DIDÁCTICA

Con la confluencia de las dos líneas evolutivas de la matemática y de la didáctica, expuestas en lo que antecede, llegamos al momento actual. De un lado, la matemática deriva hacia abstracciones cada vez más formalistas; de otro lado, la didáctica evoluciona, exigiendo creación y descubrimiento en los procesos de aprendizaje; finalmente, la técnica moderna echa mano de recursos matemáticos cada vez más avanzados, espoleando al matemático puro para crear todavía nuevas estructuras. En esta febril encrucijada de creaciones, de exigencias y de posibilidades, la tarea del profesor de matemáticas se hace cada vez más delicada y más ardua.

Los desniveles entre la Enseñanza media y la superior se acentúan de día en día, tanto en el sentido ascendente como en el descendente; tanto en el acceso de los bachilleres a la Universidad como en el regreso de los licenciados a la enseñanza elemental en calidad de profesores. Y no son sólo desniveles, sino verdaderos cambios de actitud mental los que exigen estos saltos, causando profundas desadaptaciones iniciales. El problema ha trascendido del campo de la pedagogía y de la política educativas al campo de la propia matemática, ya que al lado de los maestros y reformadores de planes, son ya hoy los mismos matemáticos los que se preocupan de la trascendencia que la evolución de nuestra ciencia pueda tener en la enseñanza.

COMISIONES INTERNACIONALES

Prueba reciente de ello es el hecho de que se haya creado, en el seno de la Unión matemática internacional, una Comisión específicamente dedicada a las cuestiones de enseñanza. Pero con anterioridad a dicho brote pedagógico de la comunidad matemática internacional, la iniciativa privada se había ya organizado para atacar el problema. La insatisfacción general por los resultados de la enseñanza matemática elemental, y la complejidad creciente de la misma ante los procesos evolutivos aludidos, habían reunido ya a varios matemáticos, pedagogos, psicólogos y epistemólogos europeos famosos, en torno a esta preocupación común, convencidos de que solamente la coordinación de esfuerzos en un plano internacional podría realizar el anhelo de una reforma profunda y eficaz en los programas y en los métodos todavía tan deficientes en la mayor parte de los países.

Y así nació la «Comisión internacional para el estudio y mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática» que desde hace cinco años viene promoviendo reuniones internacionales en las que se estudian los más variados temas que afectan a las relaciones entre la matemática y su enseñanza, sus aplicaciones, sus fundamentos y evolución, su programación y posibilidades psicológicas, reuniones a las que son invitados especialistas significados en cada tema. La Comisión ha dado muy recientemente a luz su primera publicación con un conjunto de artículos que dan idea del orden de estudios didácticos y epistemológicos que caracterizan el momento europeo actual. Me detendré en dos de ellos por estimarlos acaso los más significativos.

ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS Y ESTRUCTURAS MENTALES

El primero lleva la firma del conocido psicólogo ginebrino Jean Piaget, y siguiendo en él la línea de sus conocidas investigaciones en la genética del conocimiento infantil, estudia las relaciones entre las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En relación con la clásica antinomia filosófica entre objetivismo y subjetivismo que, aplicada a la matemática, se concreta en saber si el hombre la descubre o la crea, es natural preguntarse si las propiedades estructurales de la matemática surgen, en el terreno psicogenético, como un descubrimiento de cualidades objetivas de los entes matemáticos, o si, por el contrario, éstos resultan así organizados como consecuencia de las estructuras inherentes a nuestra actividad mental. La consecuencia a que llega Piaget es que, en efecto, las estructuras operatorias de la inteligencia manifiestan desde su origen los tres grandes tipos de organización que corresponden a los que en la creación matemática dan lugar a las estructuras algebraicas, las estructuras de orden y las estructuras topológicas. Inútil ponderar la importancia de estas conclusiones en orden al problema didáctico, ya que si todo el edificio matemático se apoya en definitiva sobre estructuras con las que se organiza nuestra propia inteligencia, habrá que atender fundamentalmente a esta organización para metodizar una sólida enseñanza matemática.

IDEARIO DIDÁCTICO DEL PROFESOR GATTEGNO

Interesantes son también, en el libro comentado, las aportaciones del lógico-matemático holandés Beth (que hace reflexiones sobre organización y método), de los matemáticos franceses Choquet (que propone nuevas bases axiomáticas para la Geometría elemental), Dieudonné (que estudia la evolución del Algebra) y Lichnerowicz (que estudia las oportunidades de los programas secundarios corrientes en orden a la posible familiarización del escolar con las estructuras algebraicas modernas). Pero el trabajo que juzgo de mayor interés para el profesorado de grado medio es el artículo del profesor Gattegno, del Instituto de Educación de la Universidad de Londres, secretario y alma de la referida Comisión, que con el título «Pedagogía de las Matemáticas» expone las bases de una didáctica matemática media moderna, esencialmente dinámica y eurística, en la que coloca al alumno frente a situaciones que le obligan a formar por sí mismo las estructuras mentales aptas en cada caso para la adquisición del conocimiento que se quiere abordar.

En álgebra dichas estructuras surgen de un dinamismo de reversibilidad en las operaciones y de equivalencia en las expresiones, desarrollado en un juego que se mantiene en el plano abstracto. En cambio, en Geometría preconiza el cultivo intensivo de la experiencia geométrica, entendiendo por tal la adquisición consciente de relaciones asociadas a una dinámica perceptiva y activa realizada con el uso de instrumentos elementales. La necesidad del rigor y sus exigencias progresivas surgen, según Gattegno, como fenómeno consecuente a la explicación de dicha conciencia, espoleada por el deseo de comunicación y de discusión con los compañeros de estudio. Experiencia, comunicación y organización mental progresiva del alumno son, en resumen, los puntales sobre los que Gattegno edifica su didáctica geométrica.

Me he detenido levemente en la exposición de las características de tal didáctica no sólo por el interés que en sí tienen, sino también con el deseo de resaltar este caso notable de un matemático moderno que, habiendo comenzado su tarea científica con investigaciones de alto análisis, ha preferido luego dedicar su vida a la tarea didáctica, consagrándose por entero a los niños, con tanto más ahinco cuanto más pequeños son.

LA EXPERIMENTACION ESTADISTICA

Por lo demás, las soluciones en didáctica no son únicas, y las modernas escuelas de didáctica matemática en Italia, Suiza, Inglaterra, Bélgica, Alemania, Francia y España... tienen cada una sus genéricas modalidades que sería largo aquilatar y que presentan a su vez específicas variantes según los pedagogos.

Las soluciones no son únicas, repito, y el problema de la elección objetiva de procedimiento didáctico de ataque en cada caso es fundamental en una didáctica que quiera ser científica. Pero este problema sólo está en vías de solución. En este asunto el juez decisivo es el alumno. Pero al querer comparar la eficiencia de grupos de alumnos enseñados por métodos distintos, cabe preguntarse hasta qué punto la diferencia de resultados puede ser debida a los métodos y en qué medida puede ser atribuída a las diferencias individuales o de grupo. Y éste es problema que entra de lleno en la delicada técnica estadística, técnica que está al día en la educación norteamericana, pero que penetra lentamente en los medios pedagógicos europeos. Haciendo excepción de los trabajos sistemáticos de pedagogía experimental realizados en Lovaina, y otros aislados, yo diría que hay en Europa como una cierta prevención en contra de las aplicaciones didácticas de la estadística; como si se temiera que los encasillados numéricos terminaran deshumanizando el problema; acaso por las considerables dificultades que plantea la técnica del muestreo cuando se maneja material humano; acaso simplemente por la tendencia progresiva a la individualización de la enseñanza como ideal pedagógico. El concepto de alumno medio es, en efecto, una entelequia. Pero tampoco existe el enfermo medio, y, sin embargo, los estados imponen o aconsejan vacunas después de experiencias efectuadas sobre colectivos. No suelen considerar si las medidas adoptadas pueden perjudicar a casos individuales de excepción. Les basta con la seguridad o la fuerte probabilidad de obtener una mejora de conjunto. Parece, pues, razonable aplicar criterios análogos en la experiencia didáctica efectuada con miras a la adopción de normas colectivas.

Y ésta es la razón por la cual he querido aludir, con el relieve que a mi juicio merece, a esta moderna corriente experimental estadística al pretender ofrecer a mis oyentes un cuadro lo más completo posible del panorama didáctico matemático actual. Ahora bien: los trabajos que conozco hasta ahora sólo afectan a temas de enseñanza muy elemental y, si la incompleta información de que dispongo no me engaña, tengo la impresión de que el tratamiento estadístico de la didáctica experimental secundaria está todavía por hacer. He aquí, pues, todo un campo de investigación actual por el profesorado de nuevo cuño.

LA ANTINOMIA ENTRE PREPARACION Y FORMACION

La estadística puede aportar asimismo una contribución valiosa al problema creado por las pruebas de examen. Cuando no es el profesor quien juzga a sus alumnos al término de su gestión, sino que se encargan de ello otras instituciones mediante pruebas específicas realizadas masivamente y contra reloj, se crea inevitablemente una técnica examinadora a la que se adapta inmediatamente una técnica preparadora que termina desplazando de la enseñanza su vital aliento formativo. Es muy difícil ser a un tiempo buen educador y buen preparador. Un profesor demasiado preocupado por el porcentaje de éxitos de sus alumnos en las pruebas de examen terminará olvidando el examen definitivo de la vida. Problema pedagógico fundamental de nuestros días, en todos los países, es el atenuar esta inevitable antinomia entre preparar y formar, mediante una adecuada readaptación del régimen de pruebas, que evite en lo posible por sí misma toda técnica preparadora.

IV. LA TAREA ESPAÑOLA

DESPERTAR DE UNA CONCIENCIA PEDAGOGICA MEDIA NACIONAL

Tras la exposición de los rasgos característicos del actual momento didáctico matemático medio internacional; tras la expresión de mis propias inquietudes y de los problemas que estimo pendientes de solución, tiempo es que analicemos objetivamente el momento español y veamos cuál es nuestra inmediata y nuestra futura tarea, lo mismo en lo referente al perfeccionamiento interior que a nuestra colaboración internacional.

Ante todo debo decir con sinceridad que la comparación de la hora actual con el panorama de hace algunos años nos permite abrir las puertas a una halagadora esperanza. El interés de las autoridades científicas, académicas, eclesiásticas y políticas por los problemas didácticos y pedagógicos del grado medio crece de día en día, manifestándose en hechos significativos como la creación de centros didácticos de consulta, formación y perfeccionamiento del profesorado, la creación de cátedras de metodología y didáctica especiales, la organización de reuniones y congresos del profesorado en acción, la creación de centros de enseñanza experimental, la participación de España en reuniones internacionales dedicadas a problemas de enseñanza, la alusión frecuente a tales problemas en discursos de destacadas personalidades, etc.; todo ello parece indicar el alborear de un movimiento renovador.

Ante este despertar de una conciencia pedagógica media nacional, un primordial deber de colaboración incumbe al profesorado oficial de Enseñanza media, y a él me dirijí en primer lugar, aprovechando la honrosa invitación de Radio Nacional para que desarrollara ante sus micrófonos algún tema de actualidad científica. Ninguno me pareció tan imperioso ni sugestivo, en el momento presente, como el de la didáctica de mi especialidad. Lamento solamente que, con este motivo, tenga que hablar con frecuencia en primera persona sin ánimo de presunción. Entiendo que una comunicación persuasiva sólo puede lograrse con la calidez de lo íntimo y personal.

COLABORACION INTERNACIONAL

Invitado en la primavera anterior, por el Ministerio de Educación Nacional, para organizar estudios tendentes a una posible mejora en los métodos y programas de la enseñanza matemática media, pensé que debía pulsar simultáneamente las inquietudes nacionales y las internacionales del momento presente en este grado.

La información internacional se ha conseguido y se seguirá obteniendo en lo posible por contacto personal directo con los elementos más destacados del profesorado matemático europeo. Mis colaboradores —los profesores Guiraum, de Granada, y Pascual Ibarra, de Valladolid— y yo mismo hemos realizado viajes por Italia, Suiza, Austria, y en breve poi Bélgica, Inglaterra, Francia, con lo que pasarán de cuarenta los profesores con los que tendremos conocimiento y relación directa. Quiero rendir aquí un saludo cordial a todos ellos. A los colegas italianos que tan gentilmente acogieron a Pascual Ibarra; a los colegas belgas e ingleses, que con igual gentileza han invitado a Guiraum; a los suizos y austríacos, que tan cariñosamente nos atendieron al concurrir a la novena reunión de la Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la enseñanza matemática, y, muy especialmente, a nuestros compañeros de dicha Comisión, hoy ya buenos amigos, después de nuestra convivencia de nueve días en régimen de trabajo intenso y leal colaboración.

Si nuestra labor didáctica había sido realizada hasta ahora puertas adentro, empezamos ya a asomarnos al exterior, a conocer y a ser conocidos, y no es poco lo que podemos esperar de este cordial conocimiento. Por de pronto, la referida Comisión se reunirá en abril de 1957, en Madrid, para estudiar el tema del «Material de enseñanza matemática» y traerá las novedades internacionales sobre dicho material, que se exhibirán en una exposición simultánea a la reunión, proyectándose en ella películas escolares dedicadas a la enseñanza de la matemática, mientras una reunión de técnicos internacionales discutirá acerca de los procesos de su realización y utilización en las clases.

El Instituto de San Isidro prepara por su parte una modesta exposición local simultánea sobre «Material de enseñanza matemática extraído de la propia vida», que, a modo de complemento de la exposición técnica, tratará de mostrar hasta dónde es posible sacar enseñanzas matemáticas del mundo observable en la vida diaria y hasta dónde pueden los mismos escolares llegar a la realización de ideas y modelos matemáticamente instructivos mediante trabajos manuales efectuados con los medios más sencillos en el propio Instituto o en sus casas. No hay que decir cuánto agradeceremos al profesorado español toda aportación que se nos ofrezca en este empeño que con tanta simpatía ha sido acogido por la Comisión Internacional y por las autoridades nacionales. Corresponde dar aquí las gracias por ello al excelentísimo señor ministro de Educación Nacional y a los directores generales, de los que he recibido apoyo y aliento estimulante en la tarea de organización de las referidas reuniones y exposiciones.

ENCUESTA NACIONAL SOBRE PROBLEMAS INMEDIATOS. INGRESO Y PRUEBAS

Pero, junto a la actividad desplegada en el orden internacional, hace falta coordinar asimismo nuestros anhelos y tareas didácticas nacionales. A este objeto promoví en mayo último una encuesta que intentaba recoger, entre el profesorado oficial y privado, el mayor número de opiniones acerca de ciertos puntos fundamentales en todo proyecto de mejora.

El primero, y tal vez el más urgente en lo que a Enseñanza media se refiere, es la fijación de un nivel serio y uniforme de ingreso. Es forzoso reconocer que, la prueba actual, es notoriamente insuficiente tal como se lleva a cabo, ya que, muchos de los declarados aptos, ni saben enterarse de lo que leen, ni son capaces de seguir sencillos razonamientos intuitivos, ni plantear el más elemental problema de Aritmética; a duras penas si saben reproducir unos automatismos carentes de contenido conceptual. Sin obtener, pues, el provecho que lograrían de haber ingresado con la debida madurez, no son más que una rémora en las clases, en perjuicio de los realmente aptos. Y no es cosa fácil desengañarlos luego. Hay que enfrentarse con la hiperexcitada sensibilidad de los padres de familia que suelen tener horror a la verdad. Y al suministrar a éstos el pequeño engaño que su tranquilidad anhela, curso tras curso se va acarreando un material humano que sólo servirá para nutrir más tarde las peligrosas filas de los fracasados e inadaptados sociales.

El problema del nivel de ingreso es, repito, uno de los más importantes a resolver no sólo en didáctica matemática, sino en toda la pedagogía media. Así lo han reconocido la mayor parte de los profesores y catedráticos que nos han contestado, coincidiendo en la necesidad de uniformar y elevar el nivel de dichas pruebas.

Claro es que, a dicha unificación, habrá de seguir el perfeccionamiento y unificación de niveles y pruebas curso por curso. A tal efecto tenemos en ensayo un sistema de pruebas teóricas y objetivas entre nuestro alumnado del Instituto de San Isidro, que, complementando el indispensable examen práctico, pueda evitar la longitud y la tendencia memorística del clásico examen oral. En estos primeros ensayos no persigo tanto que las pruebas midan el grado de preparación de los alumnos como que éstos sirvan para medir el grado de dificultad de las pruebas, para lo cual será necesario ampliar la base estadística de ensayo antes de plantear su posible generalización. En esta tarea me pueden ayudar eficazmente cuantos compañeros sean gustosos de ello. Pienso que el perfeccionamiento y la unificación de pruebas sea acaso uno de los primeros problemas cuya solución podamos abordar con éxito en un plan experimental de esfuerzo conjunto. Entre tanto, la encuesta sigue abierta y todas las sugerencias que se nos hagan serán bien recibidas.

EL PROBLEMA DE LOS CUESTIONARIOS

Otro de los puntos de la encuesta, incluído con el consenso de la Dirección General de Enseñanza Media, solicitaba la opinión general sobre los cuestionarios actuales y la eventual indicación de aquellas cuestiones que se juzgaran de más urgente modificación. No sorprenderá que las opiniones hayan sido aquí mucho más divergentes. He notado, con pena, algunas nostalgias de los antiguos encasillamientos en asignaturas. Esto plantea el interesante tema de la concepción cíclica de los programas. Para mí es indiscutible la conveniencia de un desarrollo cíclico del contenido matemático del bachillerato; pero los ciclos no son precisamente la simple yuxtaposición de retazos de las antiguas asignaturas que la tradición nos legó lógicamente estructuradas: Aritmética, Geometría, Algebra y Trigonometría. Las unidades lógicas antiguas deben dejar paso a nuevas unidades estructurales que abarquen campos matemáticos cada vez más amplios, en progresión acorde con la evolución de la mentalidad y de los intereses del escolar. Esta será una de las importantes cuestiones que habrán de ser objeto de estudio en las próximas reuniones del profesorado que se proyectan.

PUNTOS NEURALGICOS EN EL APRENDIZAJE MATEMATICO

También hemos solicitado en la encuesta el señalamiento de las cuestiones que ofrecen mayor dificultad a los alumnos de matemáticas en los distintos cursos de bachillerato, así como de los errores más frecuentes en ellos. Los lugares comunes señalados ofrecen inmediato campo de estudio metodológico, y algunos de ellos ya han sido objeto de clases experimentales de ensayo ante pequeños grupos de prueba en mi cátedra de Metodología y Didáctica de la Facultad de Ciencias Exactas; cátedra que desarrollo en el mismo Instituto de San Isidro con objeto de que los alumnos de la Facultad puedan adiestrarse en vivo en mi presencia, y puedan aprender de los propios niños más que de mí mismo.

EXPERIENCIAS DE ENSEÑANZA EURISTICA

Hasta ahora me he contentado en tales prácticas de enseñanza con lograr exposiciones claras y comprensión del nivel del alumnado a que se dirigen; pero, en la segunda mitad del curso, trataré de inculcarles las esencias del método eurístico, que ya llevo ensayado por mi cuenta en puntos tan delicados como el manejo de fracciones entre niños de primer curso; la extracción de la raíz cuadrada y la determinación del máximo común divisor y mínimo común múltiplo, en alumnos de segundo grado; la iniciación a las ecuaciones, la división de polinomios, en tercero, etcétera. En todos estos ejemplos que cito he conseguido, tras una adecuada conducción de la actividad el niño, y no por procesos demasiado lentos, el descubrimiento por el propio alumno del modo correcto de hacer, que sólo se ha explicitado en regla después de tal dominio posesivo.

Es sorprendente la potencialidad, el ingenio y la inventiva desplegada por los niños y el infatigable entusiasmo que ponen en su tarea cuando se sabe despertar en forma sugestiva su interés hacia el objeto del conocimiento.

LA GRAN TAREA A LARGO PLAZO. HACIA UNA ENSEÑANZA ACTIVA

La elaboración de un programa completo de didáctica matemática activa y eurística en todo el Bachillerato, y el apostolado necesario para conseguir su implantación, es la gran tarea que hay que emprender y que estamos dispuestos a emprender. Tarea a largo plazo, digo, porque si bien la confección de un programa viable es cuestión de un número limitado de experiencias, el adiestramiento de un extenso profesorado capaz de vivirlo constituye más dilatada empresa, mientras parece tarea que rebasa ya los límites de la actual generación llegar a modificar la arquitectura y la mentalidad administrativa en un sentido que permita la adaptación del número de clases y de profesores al número de alumnos, y no al revés, como se viene haciendo.

Porque es el caso que los métodos eurísticos no se pueden llevar a la práctica en grupos de más de treinta alumnos, tope internacional en Enseñanza media. Y todos sabemos cuán lamentablemente rebasado se halla este límite en nuestros centros oficiales y privados. Pero este ideal acabará por imponerse aquí, como se está imponiendo en el extranjero. Basta haber vivido un poco la enseñanza activa para apreciar el vacío teatralismo de la enseñanza tradicional. Lo que en la primera es trabajo gozoso, investigación, descubrimiento, discusión y realización, es en la segunda atención pasiva hacia explicaciones y peroratas que, aunque se oigan, no siempre se escuchan. En ésa, el tedio; en aquélla, el interés. De un lado, la firmeza con que se retiene lo conquistado; de otro, la inestabilidad con que se recuerda lo transmitido.

Pero ¿en qué puntales podremos apoyar nuestra cruzada cuando está todavía tan arraigado en la opinión el concepto de clase conferencia, cuando la arquitectura sigue proyectando y construyendo aulas magnas? Todo continúa supeditado al culto y veneración de la docta palabra. Desde las oposiciones de acceso, hasta la acústica de las salas de cátedra. Destilado por aquéllas un nuevo explicador, ¿por qué no han de aprovechar sus explicaciones cien alumnos en lugar de treinta, o cuatrocientos en vez de cien? ¡Explicar, siempre explicar! Pero enseñar no es sólo cuestión de palabras, ya lo hemos dicho y lo repito una vez más; enseñar es guiar los procesos de aprendizaje, y, no existiendo auténtico aprendizaje sin acción, se comprende que si entra en lo posible dirigir la actividad eurística de treinta alumnos, hacer lo mismo con cien o con cuatrocientos simultáneamente es ya una quimera.

¿Que ello supondrá algo así como triplicar la cantidad y mejorar a un tiempo la calidad de los profesores, con el consiguiente encarecimiento de la enseñanza? Desde luego; pero la magnitud de la responsabilidad lo requiere. Esta es la tarea que nos incumbe desde ahora: hacer sentir el peso de esta responsabilidad, dignificar y revalorizar la función docente; atraer la simpatía y la preocupación social hacia ella. Sólo así conseguiremos que esa función pueda llevarse algún día lo más selecto de la juventud. Cuando cada español considere la educación de sus hijos como la mejor inversión a que puede destinar su hacienda, es probable que el Estado refleje este mismo criterio colocando en el primer plano hacendístico de sus atenciones la educación de su infancia y adolescencia. De esa adolescencia que tanto necesita de nosotros, de esa infancia que ni protesta, ni amenaza, ni vota..., pero de la que depende el futuro de nuestra Patria.

§ 3. BALANCE DE CUATRO AÑOS DE LABOR

(Nota de la Redacción)

REVISTA DE ENSEÑANZA MEDIA, promotora de esta publicación, desea añadir un breve comentario al presente capítulo. Las conferencias en él reproducidas y que datan de los años 1953 a 1956 resumen el proceso evolutivo de la Matemática y de su enseñanza en el mundo actual, y trazan un magno programa de trabajos y mejoras a realizar en la técnica docente española.

En relación con tal programa creemos conveniente resumir lo ya logrado en el corto plazo transcurrido. Nos interesa, con tal resumen, alimentar, en primer lugar, de esperanza la impaciencia que se adivina en los propósitos y vaticinios del autor. Son éstos inevitables en quien tiene conciencia clara de errores y remedios y compara la realidad con el deseo. Es muy posible que las reformas y mejoras no vayan al ritmo acelerado que el autor anhela; pero es muy posible también que, por estar situado muy adentro de su propia obra, no tenga la perspectiva exterior necesaria para percibir el camino ya recorrido por la enseñanza matemática española en la dirección que él ha trazado.

La REVISTA DE ENSEÑANZA MEDIA que recoje el palpitar de la conciencia pedagógica media nacional, quiere llevar al ánimo del autor, de sus colaboradores y seguidores, la convicción de la fecundidad de su labor, para mantener viva la fe en la obra realizada, pese a todas las inercias, indiferencias y aun hostilidades que la rutina suele oponer a todo aliento innovador.

La sola comparación de los textos de la conferencia de 1953 con las de 1956, permite percibir señales indudables del avance de tal proceso evolutivo en España. La reforma de programas de 1954 recogió no pocas indicaciones contenidas en la alocución de 1953. La orientación didáctica dada posteriormente a la cátedra de Metodología matemática, por deseo de la propia Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Central, es otra señal inequívoca de que las advertencias enunciadas en aquella ocasión no cayeron en saco roto. Pero la simple recapitulación de hechos acaecidos en relación con la didáctica matemática española desde el curso 1955-56, en que se inició el movimiento de reforma patrocinado por el autor, hasta el curso actual, nos permitirá darnos idea de la resonancia que este movimiento ha tenido en el ámbito nacional e internacional.

Empezaremos por echar un vistazo a lo ocurrido en la enseñanza primaria. Puig Adam, consciente de que la reforma de métodos y modos ha de empezar por la base, es decir, en el nivel de la primera infancia, tomó contacto, desde los instantes iniciales, con la Dirección General de Primera Enseñanza, y, posteriormente, con el Servicio Español del Magisterio, para organizar cursillos en los que se desarrollaran ante los maestros españoles los más modernos procedimientos de enseñanza de la Aritmética en la Escuela. Y así se practicó, por primera vez en España, el método de los Números en Color que, ideado por el inspector belga Cuisenaire, ha sido ampliamente modelado, propagado y perfeccionado por el profesor Gattegno, del Instituto de Educación de la Universidad de Londres. Puig Adam comprendió desde sus primeros contactos con dicho profesor toda la trascendencia del método, su extraordinaria eficacia sugestionadora para la infancia, y todo el alcance que Gattegno ha sabido darle en relación con la concepción estructural y conjuntista de la Matemática moderna. En los tres cursillos hasta ahora organizados, en los que el profesor Gattegno dió a conocer y practicó en vivo ante niños españoles el referido método (Madrid, marzo de 1956, ante Inspectores y maestros de la capital; Santander, agosto de 1956, ante maestros e Inspectores asistentes al cursillo organizado por el S. E. M. en la Universidad de Verano de la ciudad montañesa; Madrid, abril de 1957, ante catedráticos de Escuelas Normales del Magisterio), el profesor Puig Adam sirvió de embajador, presentador, y aun defensor a veces, de su colega Gattegno, participando activamente en la organización de los cursillos, y en los seminarios y discusiones en los que se comentaban apasionadamente sus resultados. De dichos cursillos surgieron varios profesores oficiales y privados que empezaron a propagar en cadena el método (justo es destacar entre todos ellos la infatigable labor de la maestra Doña Concepción Sánchez, que ha recorrido ya casi toda España con las regletas coloreadas de Cuisenaire) de tal modo, que en la actualidad son ya más de mil setecientas escuelas las que han adoptado este interesante y eficaz método. Sobre él se han publicado ya varios libros en España, uno de ellos por el

Ministerio de Educación Nacional, y se ha organizado simultáneamente la fabricación española del material necesario para la aplicación del método, de tal suerte que hoy se exporta el material de fabricación española a los Estados Unidos, al Canadá, a las repúblicas sudamericanas: Brasil, Colombia, Argentina, Uruguay; también de Etiopía y hasta de la misma Bélgica se han recibido pedidos de regletas españolas.

En el dominio de la Enseñanza Media propiamente dicha, Puig Adam, después de organizar la encuesta a que se refiere la última conferencia transcrita, ha dirigido e intervenido activamente en las reuniones de catedráticos de Matemáticas de Instituto, organizadas por la Dirección General de Enseñanza Media, para tratar los problemas de su didáctica. Tres han sido las reuniones de catedráticos habidas desde aquella fecha hasta el presente. En la primera, celebrada en marzo de 1956, se discutió el siguiente programa: 1.º Nivel de ingreso y pruebas; 2.º Ciclos matemáticos medios; 3.º La Matemática en el Bachillerato femenino y en el de Letras; 4.º Puntos neurálgicos de la enseñanza matemática media; 5.º La matemática moderna en el Bachillerato; y 6.º Posibilidades actuales de la enseñanza activa en nuestros Centros oficiales. En esta Reunión intervino el profesor Gattegno, presente a la sazón en Madrid, al frente de otro cursillo simultáneo antes referido. En la segunda reunión, habida en octubre del mismo año, se ampliaron los temas anteriores estudiando: 1.º Los fines de nuestra enseñanza; 2.º Los obstáculos que se oponen a su eficacia; 3.º El problema de las pruebas objetivas, tanto de curso como de grado; 4.º El contenido matemático del curso preuniversitario; 5.º Los métodos de enseñanza eurística, con los cuales se dieron clases experimentales; y 6.º Los modelos dinámicos construídos en el Instituto de San Isidro, para el planteamiento de situaciones didácticas aptas para la aplicación de dichos métodos. Se consideró, asimismo, el problema de la atracción de la enseñanza no oficial hacia los nuevos métodos, planteándose la organización de reuniones y cursillos dedicados a dicha enseñanza en los distintos Distritos Universitarios, bajo la dirección de los Inspectores y profesores destacados de los mismos. La tercera reunión, habida en diciembre, estudió: 1.º Los errores más frecuentes de los alumnos en las clases de Matemáticas; 2.º La posible reorganización de los Cuestionarios, especialmente del Grado Elemental, a través de unidades funcionales que aglutinaran y definieran los ciclos matemáticos adecuados a los distintos grados, acompañados de las orientaciones metodológicas precisas; y 3.º Se continuó el estudio del material didáctico, cuya creación estimuló con gran insistencia el Sr. Puig ante la inminencia de la Reunión Internacional que había de celebrarse en Madrid en la primavera siguiente, sobre el tema de dicho material. Finalmente, fue estudiado el grave problema de la crisis del profesorado de Matemáticas en todo el mundo, el cual empieza a hacerse patente ya en el acceso a las cátedras y auxiliarías de nuestros Centros oficiales.

Los estudios y conclusiones a que se llegaron en estas reuniones impresionaron favorablemente a las autoridades, y reflejo de esta impresión se manifestó no sólo en la orientación dada a los Cuestionarios de 1957, de algún modo inspirados en los esquemas funcionales sugeridos en su día por el Sr. Puig, sino que también en detalles de organización administrativa tan importantes como es el número de alumnos en las aulas. Por primera vez en la docencia oficial española se estableció la limitación de los mismos en el grado medio, en términos que, si cuantitativamente no responden todavía a las exigencias óptimas de una buena pedagogía, reflejan la importantísima determinación oficial cualitativa de establecer una tal limitación, reconociendo su ineludible necesidad.

Tan satisfactorias y esperanzadoras como las reuniones consignadas entre catedráticos, fueron las que varios de éstos han promovido, a su vez, en sus distritos universitarios bajo la presencia y tutela de la Inspección de Enseñanza Media (Granada, Oviedo, Valencia, Valladolid, Salamanca, ...). En algunos de ellos ha intervenido el autor activamente dando conferencias y clases experimentales. Finalmente, el Centro de Orientación Didáctica ha organizado en Madrid Cursillos destinados al profesorado privado, dirigidos por Puig Adam, con la colaboración de los profesores Pascual Ibarra, Sancho San Román y Royo López. La estimulante repercusión que en la enseñanza colegiada y privada han tenido estos cursillos puede apreciarse en los números de marzo-abril de 1958 de la citada Revista.

Curso abierto de Didáctica Matemática es el que da Puig Adam en el Instituto de San Isidro, combinando el Seminario Didáctico del mismo con la Cátedra de Metodología Matemática de la Facultad de Ciencias, conjunción de Cátedra y Seminario que permite a los alumnos de la referida Facultad, que aspiren a ejercer el profesorado de Matemáticas, la práctica experimental y en vivo de la docencia, durante su período de estudios, con el material humano de los alumnos de grado medio, bajo la dirección del autor. Por esta cátedra, vivero permanente de experimentos didácticos y de realización de nuevos modelos y material, han desfilado no sólo los referidos alumnos de cuarto curso de la Facultad, sino también numerosos Profesores argentinos y uruguayos que, pensionados por sus respectivos Gobiernos para perfeccionar su formación profesional en Europa, han preferido permanecer en Madrid después de tomar contacto con la referida cátedra. También han desfilado por ella, en calidad de visitantes o conferenciantes, diversos profesores extranjeros, como el aludido profesor Gattegno, el prof. Dubarle, el prof. Maevgangv, etc.

Esta presencia internacional se ha manifestado todavía más ostensiblemente en las participaciones que España ha tenido en las reuniones de carácter internacional dedicadas a la enseñanza de la Matemática, especialmente la organizada por la UNESCO y la Oficina Internacional de Educación, en Ginebra en 1956 (1) y en las habidas en 1955 en Ramsau (Austria) y en 1957 en Madrid, organizadas por la Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza Metamática. Esta última dedicada al tema del material didáctico matemático fue acompañada de una Exposición internacional de dicho material (la primera que registra la Historia de la Ciencia) y se halla ampliamente reseñada en el libro publicado por dicha REVISTA bajo el título : *El Material Didáctico Matemático Actual,* y la misma firma de éste. La resonancia internacional de esta Reunión-Exposición se desprende de los comentarios aparecidos en las más importantes revistas extranjeras dedicadas a la enseñanza de la Matemática en las que, dicho sea de paso, empiezan ya a figurar artículos de colaboración española (V. Matemática Paedagogia (Bélgica), Bu-

[1] Véase más amplia referencia al final del capítulo siguiente.

lletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques (Francia), Mathematics Teaching (Inglaterra), Archimede, Il Centro (Italia), Matematyka (Polonia),...). En sus reseñas sobre la referida Reunión se comenta muy elogiosamente la participación española. Pero más elocuentes todavía que la comedida prosa de las revistas profesionales son las efusivas manifestaciones privadas de simpatía y admiración contenidas en correspondencia particular que, precisamente por serlo, no nos consideramos autorizados a publicar.

Si del marco de la Enseñanza Media propiamente tal, pasamos a la Enseñanza Media profesional, hemos de consignar asimismo la labor realizada por el autor en la Institución de formación del profesorado de Enseñanza Laboral. Designado en enero de 1956 por la Dirección General de Enseñanza Laboral para regir la Asesoría Matemática del Profesorado de Matemáticas de los Institutos Laborales, ha organizado en la referida Institución cursillos de perfeccionamiento de dicho profesorado, concursos de lecciones modelo y de material didáctico matemático, orientando y aunando los esfuerzos del benemérito profesorado de estos Centros, el cual ha respondido a tal estímulo de forma ejemplar. Desde entonces no falta la colaboración matemática de algún profesor de dichos Centros en los números del BOLETIN PEDAGOGICO que publica aquella Institución, y bajo cuyo patronazgo se ha publicado, además, la obra del autor «DIDACTICA MATEMATICA EURISTICA» en la que se exponen los fundamentos y se describen las experiencias y resultados de las clases experimentales de su Cátedra y Seminario Didáctico antes aludida, obra cuya traducción al italiano ha sido solicitada por asociaciones de profesores de dicho país hermano. La participación extraordinariamente meritoria del profesorado de Matemáticas de los Institutos Laborales en la Exposición Internacional, antes referida, se detalla en la aludida obrita sobre «El Material didáctico actual», y da idea cabal de la intensidad de la renovación de métodos lograda en los Centros de Enseñanza Media y Profesional.

Finalmente, la repercusión de las conferencias dadas por el autor ante las Instituciones de Enseñanza Media privada, refléjanse asimismo en la inquietud despertada en dichos Centros y en las evidentes señales de nueva vitalidad que ya están dando en la formación de su profesorado, en sus Revistas, en el envío de colaboraciones, como las recientemente recibidas y publicadas en la REVISTA DE ENSEÑANZA MEDIA. (V. los núms. 29-32 y 33-36.)

Creemos que este rápido resumen es suficiente para informar al lector de todo lo que se ha conseguido en el corto plazo de cuatro años que nos separan de la iniciación del movimiento renovador comentado y permiten sugerir una consoladora esperanza para el porvenir.

CAPITULO IV

LOS NUEVOS PRINCIPIOS DIDACTICOS

§ 1. SOBRE LA ENSEÑANZA EURISTICA DE LA MATEMATICA [1]

Una vez más tengo el gusto de dirigirme a la Federación de Amigos de la Enseñanza, amablemente invitado por su Secretariado, en esta su XXVI Semana de Educación, y lo hago con verdadero placer, porque he entendido siempre que la enseñanza oficial y la privada deben actuar en estrecha colaboración en la tarea de mejorar sus métodos.

Todos los niños españoles, estudien donde estudien, son acreedores a la misma atención y tienen derecho a beneficiarse por igual de los avances que en materia de pedagogía se promuevan en España y fuera de ella. En consecuencia, todo el profesorado español, oficial y no oficial, tiene el deber de sentirse unido, contribuyendo con su trabajo y experiencia al mismo aliento de mejora, dejando a un lado antagonismos que no debieron haberse suscitado ni alimentado nunca, y con el pensamiento puesto tan sólo en lo que ha de ser objeto común de nuestros afanes: la mejor formación del niño español.

LA POBREZA DE NUESTRA COSECHA

Decía hace pocos días en Valladolid, en conferencia sobre la formación del profesorado, que esta formación no termina nunca; que el profesor

[1] Conferencia pronunciada ante la Federación de Amigos de la Enseñanza, en su XXVI Semana Pedagógica, el día 28 de diciembre de 1957, en el Salón de Actos del Palacio de Sindicatos.

sigue mejorándola durante toda su vida; que continúa aprendiendo de sus propios alumnos mientras vive y enseña. La clase vivida es el mejor de los textos donde puede ir descubriendo día a día las facetas desconocidas de la inteligencia del niño. Desdichado del que se crea en posesión de un modo de hacer tan perfecto que no admite retoques ni mejoras. Y desdichados sus alumnos; porque la inamovilidad de procedimientos y la carencia de estímulos no es solamente signo de soberbia, sino también de muerte. Cuando se tiene un sentido autocrítico alerta y cuando se sabe leer en el libro eternamente abierto de la clase, nunca se termina el proceso de acumulación de experiencias y de mejora y adaptación consiguiente de procedimientos.

Leamos, pues, en este libro. ¿Cuál es el balance de satisfacciones que encontramos en él? ¿Qué nos dice, la experiencia, del éxito de nuestra enseñanza? ¿Qué interés hemos sabido despertar? ¿Cuántas vocaciones, cuántas voluntades hemos sabido atraer hacia nuestros estudios? Confesemos nuestra decepción. La Matemática sigue siendo el principal escollo con el que tropieza la niñez y la juventud que pasa por nuestras manos. Y menos mal si no hemos dejado un lastre de odio hacia ella. Porque si preguntáis, no ya a los pequeños, sino a los mayores, a los hombres de mi generación, de aquella que se formó a usanza clásica, con la zarabanda de postulados, teoremas, corolarios, escolios..., que llenaban nuestros textos, os declararán sin rodeos que la Matemática fue, para la casi totalidad de ellos, no ya una disciplina difícil, sino un galimatías de enunciados y razonamientos que terminaron por aprenderse de memoria como un suplicio impuesto al margen de toda comprensión y de todo interés. Toda la convicción que adquirieron la mayoría de los varones de nuestra generación fue la de su incapacidad para las matemáticas. «No sirvo», era la impresión que dejaba su estudio a la inmensa mayoría de los escolares de comienzos de siglo..., y, claro es, el aborrecimiento definitivo a lo impuesto e incomprendido era inevitable.

ANALISIS DE CAUSAS

Pues bien, hay que empezar por declarar muy alto que este *Non possumus* con el que se resignaban los alumnos, y al que asentían tácitamente los profesores, es una lamentable falsedad, resultante tan sólo de un defectuoso sistema de educación. No hay nadie, absolutamente nadie, que pueda declararse específicamente negado para las matemáticas. Existen, sí, diferencias de ritmo en el aprendizaje de ellas, lo mismo que en cualquier otro aprendizaje; pero creer que para aprender matemáticas es necesaria una facultad especial, solamente reservada a cerebros de cierto privilegio, es un error que hay que combatir con energía, mejorando precisamente nuestros sistemas de enseñanza. Aquel verdadero horror a las matemáticas fué tan sólo la consecuencia de un verdadero error educativo. Error de programación; inadaptación del método; ineficacia del modo.

Errónea la programación clásica por presentar la Matemática dividida en compartimentos separados, dispuestos linealmente a lo largo del Bachillerato: Aritmética, Geometría, Algebra y Trigonometría, tal como aparecieron históricamente a través de los genios griego primero, y árabe después. Equivocada, por no tener en cuenta la génesis del pensamiento matemático de la humanidad y la evolución, en cierto modo paralela, del pensamiento matemático del niño, el cual se desarrolla concéntricamente en múltiples direcciones en lugar de agotar radialmente los recorridos; que se organiza mejor a través de unidades funcionales progresivas que en torno a las escuetas unidades deductivas clásicas.

Absurdo el método —método íntegramente lógico, hipotético-deductivo, tal como fué transmitiéndose de generación en generación desde los tiempos de Euclides— sin tener en cuenta que éste no escribió sus famosos elementos para uso de niños de once o doce años. Del todo absurdo y antiformativo, por escamotear el período intuitivo e inductivo seguido por la humanidad hasta llegar a la madurez sintética griega; por olvidar el largo proceso previo de edificación de categorías mentales, según gradación de abstracciones que es preciso ajustar al ritmo normal de crecimiento del escolar.

Inoperante el modo, por descuidar totalmente la captación de intereses, pretendiendo suplir esta falta de atracción natural del niño hacia el objeto de estudio con el único recurso de estímulos coactivos secundarios, oscilantes entre la ñoñería y la crueldad; llamadas a la vanidad o al temor; espejuelo de premios, amenaza de castigos.

Una más extensa crítica de este tipo de enseñanza matemática tradicional y de sus consecuencias hallará, quien la apetezca, en la conferencia pronunciada en Semana análoga hace siete años y publicada en el número de Atenas de marzo del 51. Si me he permitido recordar hoy nuevamente esta crítica, es tan sólo para empezar efectuando un balance de los progresos que en materia de programa y de método se han realizado ya en lo que va de siglo y para situar así, en su adecuado marco, las esperanzas de mejora en lo que se refiere al modo.

TRES INTERROGANTES ESENCIALES

Si quisiéramos sintetizar en términos esquemáticos las cuestiones que determinan el proceso de aprendizaje del niño, podríamos centrarlos alrededor de estos tres interrogantes:

¿Qué es lo que el niño *debe* aprender?
¿Qué es lo que el niño *puede* aprender?
¿Cómo lograr que el niño *quiera* aprender?

Las necesidades sociales en cada momento histórico, junto a la constante del destino eterno, nos marcarán lo que el niño *debe* aprender. La evolución psicológica de su inteligencia nos dirá lo que el niño *puede* aprender. Pero, tan importante como todo ello, es que el niño *quiera*. Sólo así, el aprendizaje será auténtico, por ser natural y no forzado. Hay que atraer su afecto al objeto del conocimiento. Despertar en él la voluntad del esfuerzo para adquirirlo, antes de imponerle dicho esfuerzo como un mero sacrificio.

Pues bien, la enseñanza tradicional matemática, solamente prestaba atención al problema del programa, a lo que el niño debía aprender, y ello aún con visión tan retrospectiva y arcaica que bien puede declararse hoy en gran parte inservible y caducada. Las humanidades de hoy no son las de antaño. No preparamos al niño para vivir el recuerdo de nuestro pasado, sino para vivir su futuro, lleno de exigencias técnicas y, por ende, científico-matemáticas.

Pero la gravedad del error de la enseñanza tradicional se manifestaba aún más ostensiblemente en las preguntas segunda y tercera de las formuladas, que son precisamente las relativas al método y al modo. No se prestaba ninguna atención a lo que el niño *podía*, en verdad, asimilar en cada etapa de su desarrollo, ni menos todavía se preguntaron nuestros profesores si nosotros, niños, teníamos algún deseo de aprender lo que nos enseñaban, pregunta que en aquellos tiempos hubiera parecido ridículamente absurda. De aquí el imperativo exclusivo de los modos indirectos y coactivos de estímulo.

AVANCES LOGRADOS EN MATERIA DE METODOS

Afortunadamente, los progresos en el conocimiento de la psicología infantil en lo que va de siglo, y concretamente, los numerosos estudios realizados acerca de su evolución intelectual han promovido una indiscutible mejora en la cuestión de métodos. Así, la implantación de los métodos cíclicos, y de métodos intuitivos en los primeros años de Bachillerato, permitieron ajustar mejor los procesos de aprendizaje a la continuidad del desarrollo intelectual del niño, salvando el abismo que existía antes entre la Escuela y el Instituto, brusquedad de salto característica de una enseñanza matemática elemental montada sobre dos vacíos: el empirismo instrumental de la aritmética primaria y el logicismo prematuro de las matemáticas clásicas del antiguo Bachillerato.

España no ha ido a la zaga en esta saludable evolución de métodos. Casi me atrevería a afirmar que en algunos períodos hemos ido en vanguardia, ignorándolo nosotros mismos. Me refiero, por ejemplo, a la modalidad característica de los métodos intuitivos introducidos en el Bachillerato español hacia 1926 y 27, operando con un concepto de intuición más cercano al de la auténtica actividad descubridora y generadora del pensar matemático que al sentido que a esta palabra se suele dar en la pedagogía tradicional. Intuición más significativa de evidencias interiorizadas, de adivinaciones de experiencias imaginadas, que de observaciones y experiencias reales que constituyen el estrato inferior, la primera base sensible de nuestro conocimiento. Intuición que no excluye el uso del razonamiento, sino que se apoya, por el contrario, en una intensa actividad razonadora que todavía no es abstracta ni *reductiva*, como la actividad racional clásica. Intuición que busca el acceso directo e inmediato a la verdad, apoyando los razonamientos en oportuno pedestal concreto. En este modo de concebir la enseñanza intuitiva y en la amplísima y variada llamada a imágenes vitales con las que se empezó a fomentar en la mente del niño español la elaboración subconsciente de abstracciones posteriores, radicó tal vez la singularidad avanzada de nuestra solución al problema de la enseñanza intuitiva de la Matemática en los primeros grados.

Reforma que fue acentuada posteriormente con la introducción insensible y progresiva de la evidencia lógica reductiva; desplazamiento gradual de las evidencias sensible e intuitiva anteriores; evolución paulatina, siempre más atinada que la presentación ex abrupto del método racional en un tercer curso, como se hacía, por ejemplo, en los programas del año 34. Evolución metódica que culmina en los cuestionarios recientes con la introducción de unas nociones de metodología de la matemática elemental en el quinto curso, última innovación que aporta una nueva y acusada personalidad en los programas españoles. La comparación de los textos y programas actuales con los más acreditados antes de 1926 permite apreciar los progresos realizados en materia de adaptación de métodos a la evolución intelectual del niño. Creo firmemente que hoy el niño español *puede* ya aprender las matemáticas que se le ofrecen a lo largo de su desarrollo, por lo mismo que se adaptan mejor a él.

AVANCES POR LOGRAR EN MATERIA DE MODOS

Pero, como antes he dicho, esto no basta, es preciso que el niño, además, *quiera.* Y esta es nuestra nueva y actual cruzada. Nos encontramos ahora, pues, ante un problema de mejora de *modos,* el cual habrá de chocar con más prejuicios e inconvenientes que la reforma de métodos introducida en el año 26, con ser respetable la oposición que la rutina ofendida opuso entonces a la innovación.

Para caracterizar en términos precisos y breves los motivos de esta conquista del querer del niño, me vais a permitir que me valga de conceptos y palabras vertidas ya en otras ocasiones.

La evolución de la Didáctica actual se caracteriza por una primacía del acto de aprender sobre el acto de enseñar, y por el desplazamiento consiguiente del centro de la enseñanza. El centro en la Didáctica clásica era el maestro; su acción, transmitir conocimientos. Se pensaba que quien tuviera la fortuna de recibir lecciones de un transmisor claro y ordenado había de aprender necesariamente, porque aprender en tal concepción de la enseñanza era eso: recibir, es decir, lo pasivo, lo condicionado, mientras lo activo, lo determinante era enseñar, era transmitir.

Se ha tardado no poco en tener conciencia clara de que el acto de aprender es mucho más complicado que lo que supone la recepción pasiva de conocimientos transmitidos; que no hay aprendizaje donde no hay acción, y que, en definitiva, enseñar bien ya no es transmitir bien, sino saber guiar al alumno en su acción de aprendizaje. Esta acción del alumno ha terminado así primando sobre la acción del maestro, condicionándola totalmente y subvirtiendo la primacía inicial de sus papeles. El centro de la enseñanza ya no es hoy el maestro, sino el alumno. Rotunda verdad, que de puro sencilla muchos maestros no han asimilado todavía.

El interés del niño por el conocimiento que recibe está en razón directa de la parte activa que toma él mismo en su adquisición. En matemáticas concretamente, las síntesis euclídeas resolvieron el problema de la sistemática transmisión de conocimientos matemáticos, separando totalmente la transmisión de la génesis. La solución, perfecta o casi desde un punto de vista lógico, era equivocada desde un punto de vista psicológico, porque la síntesis, al ocultar hipócritamente todo el proceso activo de elaboración en el que radica la génesis del conocimiento transmitido, pierde en vitalidad, en interés y en eficacia formativa, lo que gana en valores estrictamente lógicos. Por muy elevado que sea el concepto que el alumno tenga de su maestro, difícilmente se interesará en recibir pasivamente los productos elaborados a través de procesos sintéticos en los cuales él no ha tomado arte ni parte.

La acción no es sólo una necesidad vital del niño, cuya introducción en los procesos de aprendizaje marca la principal característica de la escuela moderna, sino que desde el punto de vista epistemológico es esencial en la formación del pensamiento mismo (y reproduzco ahora palabras textuales del prólogo de mi Didáctica matemática eurística). Pensamiento y acción aparecen de tal modo vinculados, que si no es posible concebir acción sin pensamiento que la conduzca, tampoco se concibe pensamiento sin acción que lo haya provocado.

Esta vinculación es tan esencial en matemáticas, que no hay concepto fundamental que no tenga su acción generadora, desde la noción de número natural (originada por la acción de coordinar conjuntos), hasta las nociones proyectivas (procedentes de acciones de proyectar, cortar, etc.) y topológicas (entrar, salir, situarse entre, etc.).

A la luz de la sistematización moderna de la matemática, esta concepción activa de la génesis del pensamiento matemático adquiere aún más singular relieve que acusa la necesidad perentoria de una didáctica consecuente. Así, la Geometría moderna no es ya el estudio de tales o cuales figuras, sino el de las propiedades que permanecen invariantes en tales o cuales transformaciones (acciones efectuadas sobre ellas). El Algebra moderna es el estudio de estructuras operacionales, una especie de dinámica de relaciones en la que ya no interesan los seres relacionados, sino las acciones relacionantes, es decir, las operaciones y sus leyes o propiedades.

Se siente, en resumen, la necesidad imperiosa de una didáctica no sólo activa, sino eurística en el sentido de procurar que el alumno elabore por sí mismo los conceptos y conocimientos que haya de adquirir, mediante el acicate de situaciones hábilmente creadas ante él por el maestro, con objeto de que el interés funcional y directo por ellas despertado sea suficiente para fomentar la actividad generadora. Más que interpretar la Matemática como un colosal depósito estratificado en los textos que las anteriores generaciones nos han legado, hemos de concebirla como una actividad pensante en eterna producción: la de ayer, la de hoy, la de mañana. Para que no falte esta última formamos a nuestros alumnos hoy. Sólo cultivando el espíritu de investigación y de conquista se asegura, a un tiempo, la firmeza de lo adquirido y la continuidad histórica del progreso. Y obsérvese cómo no perseguimos una didáctica facilona y blandengue, sino, por el contrario, una fortaleza de conocimientos y un impulso basados en el esfuerzo del niño estimulando éste convenientemente, al tiempo que se gradúa y dosifica. No se trata, pues, de eludir dicho esfuerzo, sino de lograr que sea deseado.

EL GRAN PROBLEMA DIDACTICO ACTUAL

Sin duda parecerá a muchos utópica quimera pretender que el niño *quiera*, que el niño se interese espontáneamente por el objeto del conocimiento matemático, y más quimérico aún que el niño descubra sus matemáticas; y, sin embargo, ambos objetivos son alcanzables simultáneamente por ser con frecuencia inseparables. Preguntad a los que han vivido, a los que han experimentado ya clases activas eurísticamente concebidas. Ellos os dirán la asombrosa inventiva de que hace gala el niño, aun a veces los que en las primeras reacciones parecen manifestarse más torpemente. Ellos os dirán la inmensa alegría del niño que por propia inventiva descubre la verdad, el goce de encontrar por sí mismo el nudo resolvente de un problema, el hallazgo de una ley, de una generalización, esa feliz sonrisa ante la evidencia primitivamente oculta. Ellos os dirán también la forma indeleble con la que estos hallazgos quedan fijados en la mente de sus descubridores. Y ¿qué de extrañar tiene que el niño descubra gozando y goce descubriendo, si es ley natural en el hombre no estimar tanto lo que se recibe como lo que se conquista?

El niño tiene una curiosidad innata, un interés vivísimo en descubrir, en enterarse, en querer saber cosas; todo es cuestión de encauzar ese interés, de captar su voluntad hacia el objeto del conocimiento. Pero ¿cómo hallar los estímulos eficaces en cada caso para promover espontáneamente su esfuerzo investigador en la dirección deseada?

Este es, señores, precisamente nuestro gran problema didáctico actual, problema para cuya solución pido la intensa colaboración de todos, porque no puede ser obra de un individuo, ni siquiera de una minoría; porque es necesario un amplísimo repertorio de recursos de que poder echar mano, un vasto cuadro de experiencias realizadas y anotadas para adaptar nuestra enseñanza a las modalidades exigidas en cada momento crítico; tal es asimismo la multiplicidad de perspectivas posibles de ambiente, de número y calidad de alumnos en los variados grados que abarca la Enseñanza media. Lo que sí puedo aseguraros es que la solución de este problema no es una utopía. Llevo mucho tiempo experimentando y viviendo personalmente la conducción eurística de la enseñanza matemática; he visto, además, la rápida adaptación, por simple contagio de este modo de hacer, en alumnos y compañeros que han conseguido ya notables éxitos y satisfacciones; y sé también lo bastante de experiencias internacionales análogas, para poderos asegurar que el problema tiene solución y que los niños son muy felices haciendo y descubriendo sus matemáticas. Sin duda, hay en la sala testigos presenciales de tales ensayos; compañeros y alumnos con suficiente riqueza de experiencias propias para confirmar la verdad de lo que estoy diciendo. Con toda seguridad también habrá, entre los presentes, profesores dedicados a la enseñanza primaria, que hayan experimentado la eficacia de los resultados que pueden ser obtenidos con el material de números en color, las famosas regletas de Cuisenaire, que el profesor Gattegno maneja tan admirablemente y que ha propagado con tanto acierto ya en España, donde ha dejado seguidores de tanta eficacia como vocación. Este material es un ejemplo palpable, por su sencillez y multivalencia, de la riqueza de situaciones matemáticas que pueden ser creadas ante los niños y de cómo desde la más tierna edad pueden ellos descubrir sus matemáticas jugando y deleitándose. Tengo a gala haber servido de embajador en España a mi amigo Gattegno, del Instituto de Educación de la Universidad de Londres, y estoy muy gozoso del éxito conseguido por el método de los números en color, ya que estimo que la reforma de modos debe tener su iniciación desde los primeros grados.

EJEMPLOS VARIOS

Pero no quiero hablaros hoy de las regletas. Se trata de una Semana dedicada a la Enseñanza media, y aunque también en algunos temas de ella son las regletas utilizables y yo mismo he ideado algunas clases con ellas, veo horizontes mucho más amplios en la concepción de situaciones eurísticas aplicables a la segunda enseñanza. Me limitaré a citar solamente algunos ejemplos, muy pocos, de iniciación eurística de clases diversas con las que dar forma concreta a los principios generales anteriormente expuestos.

Anunciad, por ejemplo, a un grupo de niños de once o doce años, que vais a exponerles un criterio para averiguar si un número es divisible o no por 9; y empezad los razonamientos conducentes a tal fin. Miradles a los ojos: ni uno solo brilla; pupilas neutras, inexpresión, aunque os escuchen con la más exquisita y disciplinada atención. Al poco tiempo, furtivas miradas al techo, a la puerta, a las hojas del árbol que se ve tras la ventana, a la nube que pasa, a la mancha de tinta que sobre la mesa dibuja la silueta de un extraño perro..., pequeños suspiros y bostezos rápidamente contenidos; todo ello os acusará la impermeabilidad de los oídos y el aburrimiento y desinterés general, a menos que una oportuna pregunta y el cero subsiguiente a la ausencia de respuesta venga a restituir la atención perdida.

Decid, en cambio, a los niños que escriban un número cualquiera, de muchas cifras; que cambien el orden de ellas y resten los dos números así formados; que tachen de la diferencia obtenida una cifra, y adivinadles esta cifra tachada, conociendo la suma de las restantes, y veréis cómo el deseo de descubriros el truco mueve mágicamente el interés de toda la clase y enciende luz en las pupilas apagadas. El truco no tarda en ser descubierto, con general alegría; preguntadles entonces (como me atreví a hacerlo en pública y comprometida experiencia) si les basta con este descubrimiento, invitando incluso a dar la clase por terminada para aquellos que no sientan necesidad de más, y os sorprenderá ver espontánea en algún niño la curiosidad racional del ¿por qué? Un tímido «Quisiera saber por qué» hace prender inmediatamente la curiosidad en los demás, de tal modo que ya nadie quiere marcharse hasta satisfacerla. Entonces los razonamientos que hagáis para satisfacer esta necesidad provocada a través de una adivinación estimulante, razonamientos que son los del criterio de divisibilidad por 9, serán acogidos con la auténtica atención que el propio interés despierta, y que antes faltaba en absoluto.

Otro ejemplo en clase de Algebra: Preparad en el encerado una multiplicación de polinomios y borrad el multiplicador y los productos parciales, de tal modo que sólo quede escrito en el encerado, al entrar vuestros alumnos, el multiplicando y el producto. Pretextad contrariedad por haber sido borrada parte de la operación y pedid ayuda a vuestros alumnos para reconstruirla. He aquí otra situación estimulante que tampoco me ha fallado para llegar a conseguir que los muchachos reconstruyan, ¡ y con qué ingenio !, el multiplicador y los productos parciales, inventando así ellos mismos la regla para la división de polinomios.

Y si del campo de la Aritmética y Algebra pasamos al de la Geometría, más sugestivo si cabe desde el punto de vista eurístico, ¡ qué amplia variedad de situaciones podéis crear para estimular el interés investigador de vuestros alumnos alrededor de cualquier modelo, de cualquier movimiento efectuado con figuras recortadas ante ellos, o mediante simples pliegues de papel !; ¡ hasta con los elementos más corrientes de uso diario, como carpetas, agujas, un paraguas, una falleba, un sencillo juguete de contenido matemático, como los puzzeles, los mosaicos, el robbot mágico, el mecano, etc. ! Porque *no creáis que el modo eurístico necesite indispensablemente de una gran riqueza de modelos prefabricados.*

Con un trozo de cordel podéis intrigar a vuestros alumnos invitándoles a describir a ciegas la mediatriz del segmento determinado por los extremos, sostenidos por dos de ellos. Basta partir, naturalmente, del punto medio, manteniendo tensas las dos mitades e ir acortándolas simultáneamente y por igual. Y podéis dar a continuación una bella lección a los mayores sobre trazado de cónicas sin más que alterar el punto de partida (con lo que describiréis hipérbolas homofocales) o deslizándole a lo largo de la cuerda para dibujar elipses a guisa de jardinero. Cada acción desarrollada ante ellos lleva aparejada un concepto adherente, como también una intuición anticipada del resultado del trazado, que podéis hacer objeto de amplia gama de preguntas con las que mantener vivo el interés de la clase entera.

Con un sencillo trozo de cristal oscuro y transparente podéis crear, a los ojos encandilados de vuestros alumnos, toda una rica variedad de situaciones y problemas en los que juega esencialmente la simetría especular que el cristal, colocado verticalmente sobre el papel, realiza en las figuras dibujadas en él.

En abril de este año tuvo lugar en el Instituto de San Isidro una exposición internacional de material didáctico matemático, simultánea a la XI Reunión de la Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la enseñanza matemática, cuyo tema era el referido material, reunión a la que asistieron unos cincuenta representantes extranjeros de doce países, nueve de ellos expositores. En esta exposición tuve empeño, como miembro de la referida Comisión, en presentar, junto a modelos didácticos expresamente construídos, gran número de sugerencias de clases eurísticas, fundadas en el uso de material muy sencillo tomado de la vida misma, y en particular de la vida del niño, que es el juego y el juguete. No he de cansaros ahora repitiendo lo que allí vísteis o pudísteis ver. Quiero recordar simplemente, a modo de ilustración, la divertida lección que sobre trayectorias parabólicas puede desarrollarse con el juego llamado «Bolavá»; la que sobre progresiones aritméticas puede urdirse proponiendo calcular la longitud de una serpentina sin desliarla; la intrigante iniciación al cálculo con expresiones irracionales cuadráticas mediante la propuesta de adivinación del número de piezas del rompecabezas que con el nombre de «Rombo» se expende en los bazares; la excitante iniciación a la Geometría analítica y a la ecuación de la recta conseguida con la problemática alineación de tres peones del juego llamado de «Cinco en línea»...

Omito más ejemplos, así como la referencia al material de filminas y películas, hoy ya empleadas con éxito en la enseñanza matemática, porque harían interminable esta charla, y pudieran dejar por otra parte la falsa impresión de que para cultivar el modo eurístico es necesaria una cantidad de material inasequible a los presupuestos de los colegios modestos. No hay tal cosa. Bien está si se dispone de material abundante con el que se pueda variar el aliciente de las situaciones estimulantes, la novedad es siempre factor infalible de interés; pero conste una vez más que puede interesarse fuertemente al alumnado con material muy sencillo y hasta sin material alguno, con la tiza y el encerado, con el lápiz y el papel, como en los ejemplos antes citados.

LAS PRETENDIDAS OBJECIONES AL MODO EURISTICO

Y permitidme ahora que me anticipe a vuestra crítica, crítica que agradeceré al término de la conferencia, sin que me contraríe ni sorprenda; porque no hay nada, por excelente que sea, que no tenga alguna contrapartida de reparos. Tan es así que, como os digo, quiero hacer yo mismo un análisis de las objeciones más frecuentes que se me han formulado.

Primera objeción: *Lentitud del procedimiento.*

Es la crítica más generalizada. Dada nuestra manera tradicional de hacer, en la que tendemos a suministrar lo más pronto posible reglas de acción a los alumnos para que cuanto antes sepan a qué atenerse ante una situación de examen, se nos antoja perdido lamentablemente el tiempo invertido en la espera de una solución espontánea de los pequeños, cuando en nuestra mano está librarles del atolladero. Grave error. No sabéis todo el fruto que los niños obtienen de estos momentos de espontáneo esfuerzo, mientras se hallan intensamente acuciados por el interés directo de la cuestión planteada. Es necesario tener mucho aguante para la espera, lo comprendo; yo mismo me confieso a veces impaciente. Pero ¡ cuán gratas compensaciones proporciona el saber esperar! Lo esencial es estar atento a que el niño no deje de actuar mentalmente, de combinar, de seleccionar, de organizar sus ideas, actividad que se ve reflejada en los tanteos y garabatos emborronados, tan ricos de enseñanzas sobre los procesos de su pensar matemático, en sus balbuceos, simplemente en sus movimientos de cabeza, de labios, en este mirar introspectivo y acuciante... Procede a veces rebajar suave y gradualmente el nivel del peldaño que se le ha puesto delante cuando es palpable que no va a superarlo; aunque en esto son frecuentes las sorpresas. ¡ Cuántas veces, como antes os decía, los niños que en un principio parecían más torpes y alejados de toda comprensión, ven luego claro súbitamente, como si una luz providencial les iluminara y se acomodan tan rápidamente al ritmo de los demás que hasta incluso logran aventajarlos! Toda paciencia inicial es poca, y no se olvide que el tiempo, que al principio parece perdido, se recupera luego con creces por la seguridad con que el alumno asimila lo adquirido por su propio impulso. De nada sirve acelerar a la fuerza los procesos de aprendizaje si luego resulta nula o casi nula la cosecha, y hay que repetir y repetir para conseguir una fijación artificiosa de conocimientos.

Segunda objeción: *La falta de homogeneidad de la clase.*

No es, en verdad, objeción aplicable específicamente al método activo eurístico, sino también a cualquier otro método como, por ejemplo, el tradicional de explicación. Menos recursos tiene en éste el profesor para enterarse de la inadaptación posible de su ritmo al de comprensión de la clase. Precisamente el hecho de acusar más pronto los asincronismos del alumnado, constituye un tanto a favor del activismo eurístico. Pero ello no nos excusa de hablar del problema. El planteamiento en común de las cuestiones estimulantes a un grupo de muchachos ofrece el natural inconveniente de que los mejor dotados se adelanten a dar la solución a los demás y de que éstos terminen acomodándose a que sus compañeros discurran por ellos. Este inconveniente se presenta especialmente en las clases en las que, bien sea por el elevado número, bien sea porque la limitación del material imponga su manipulación colectiva, resulta obligada asimismo la formulación de propuestas ante grupos. En tal caso es preciso vigilar muy cuidadosamente que todos intervengan en el diálogo, menudeando y distribuyendo las preguntas, procurando que las más fáciles recaigan en los menos dotados para que todos sientan motivo de satisfacción en participar, y conteniendo si es preciso la impaciencia natural de los que inevitablemente se adelantan en ver claro o en imaginarse que lo ven. Mejor resultado da en ocasiones invitarles a escribir en silencio las soluciones y respuestas en hojas que el profesor revisa una a una recorriendo constantemente las mesas, mientras plantea las preguntas y comenta las respuestas. En este modo de proceder, como en el del diálogo, es muy importante que los alumnos se autocorrijan, enfrentando las opiniones y resultados contradictorios para que los mismos enfrentados decidan quién tiene razón. Y cuando nadie acierte, en lugar de un expeditivo y seco «está mal» es preferible llevar el diálogo de modo que el error sea detectado por los mismos alumnos ante consecuencias visiblemente absurdas. Aun con ello resulta inevitable el desajuste de ritmo entre unos y otros, sobre todo cuando la clase es demasiado heterogénea. En este caso, el profesor debe tener un fino instinto de adaptación a un ritmo intermedio para que ni los más capaces lleguen a perder el interés por pobreza de estímulos, ni los menos rápidos lleguen asimismo a abandonarse, desalentados, por no poder seguir a los demás. No hay que decir que, en cuanto sea posible subdividir y organizar las clases, homogeneizando los grupos, ello favorecerá esta adecuación de ritmo y la simultánea vibración de la clase entera. En todo caso, no veo inconveniente en promover la ayuda de los mejor dotados en favor de los menos, cuando se tenga la seguridad de que éstos han dado de sí cuanto podían dar.

Tercera objeción: *El elevado número de alumnos de nuestras clases.*

Es, desde luego, el factor que puede influir más decisivamente en contra del modo eurístico de enseñar. En una clase concebida como salón de conferencias, el profesor puede acaso mantener la atención simultánea de sus alumnos, por numerosos que sean, con la magia de su palabra, o, por lo menos, una apariencia de atención impuesta por disciplina. ¡La enseñanza tradicional se alimenta de tantas apariencias! Pero cuando la clase se convierte en taller y el profesor en auténtico maestro de tal taller, se comprende que debe limitar el número de sus discípulos operarios a aquellos cuyo trabajo pueda simultáneamente atender. La limitación del número es esencialísima en el modo de hacer activo y eurístico. Si no percibimos esta necesidad en nuestra propia carne de maestros, si no sentimos el rubor de la farsa que supone la macropedagogía, es inútil que hablemos de mejora de métodos ni de modos. Pero tengamos cuando menos la honradez de reconocer el fraude que estamos cometiendo en nuestra sagrada misión: la educación de nuestra juventud.

Para fijar un número, internacionalmente admitido como tope, os diré que ninguna clase de enseñanza media debiera exceder de treinta alumnos. En una moderna institución de Lausanne me confesaba el Director haberse puesto de acuerdo con el arquitecto en lo relativo a las dimensiones de las clases, con objeto de que los muros impidieran para siempre cualquier debilidad administrativa que pudiera hacer exceder tal número de las 24 plazas que justamente cabían en cada local. Y resulta muy significativo el hecho de que otros profesores suizos, en conversación privada con un compañero nuestro que recorría a la sazón los Centros de Enseñanza media de la Suiza francesa, al preguntarles éste el número de alumnos que tenían en sus clases, tuvieran no pocos reparos en informar que aunque legalmente no debieran exceder de treinta, se habían visto forzados, por circunstancias excepcionales, a tener (y aquí bajaban la voz muy confidencialmente) ¡ hasta treinta y cinco!

¡ Y pensar que todavía nosotros mantenemos clases oficiales de 70, 80, 100 alumnos y aun más! Paso extraordinario y esperanzador, por el precedente que establece, es la declaración en la ley de que no puedan exceder nuestras clases de cincuenta, lo que a partir de este año se ha puesto en práctica ya en los cursos primero y quinto del nuevo plan. Número todavía excesivo; pero, como digo, el hecho solo del reconocimiento legal de la necesidad de la fijación de un tope como principio marca un paso que, aunque tímido y tardío, merece toquemos a júbilo.

Por grande que sea la esperanza futura, no es mucho, pues, lo que de momento podemos lograr en la enseñanza oficial en sentido auténticamente eurístico con clases de cincuenta alumnos; pero no debemos acobardarnos por ello. Son múltiples los ensayos que llevo realizados en clases aún más numerosas, mediante una técnica de distribución en grupos pequeños y de jerarquización de alumnos en ellos; ensayos con los cuales he obtenido siempre resultados mucho mejores que los que se desprendían del sistema tradicional de explicación y pregunta.

Pero si en la esfera oficial estamos todavía forzados a tener cifras excesivas de alumnos, que nos impiden el pleno desarrollo de los nuevos modos, en la enseñanza privada y en los colegios ya no tenéis tal imperativa contrariedad. Está en vuestra mano organizar y limitar los grupos docentes en la forma más eficaz para la enseñanza. Por eso fío más de momento en las posibilidades de reforma de modos en la enseñanza no oficial, si en verdad la desean. Tampoco he de regatear para ella mi esfuerzo personal si es requerido. Va en ello la felicidad de millares de niños que sufren todavía estudiando matemáticas. Sólo aspiro, en principio, a convenceros o a poneros en camino para que los mismos niños os convenzan. Yo sé que una vez adquirida la convicción, la voluntad y el entusiasmo no han de faltaros para el logro. En los todavía escasos contactos personales que he vivido con elementos de vuestro profesorado que han seguido mis cursos de Metodología y Didáctica, tengo muestras elocuentes de que mi esperanza no es baldía.

Cuarta objeción: Mi único temor es que os acobarde *la obsesión de los exámenes*. Y aquí llegamos a la cuarta y última de las objeciones que me formulo y replico, porque sé que responde a temores que podéis noblemente sentir.

El régimen de pruebas constituye uno de los más graves problemas de la enseñanza. Aquí y fuera de aquí. Y ello debido a la inevitable antinomia que crea entre formación y preparación. Una reglamentación defectuosa del sistema de pruebas puede echar al traste el mejor de los planes educativos. Y puede destruirlo por errores cometidos a veces con la mejor de las intenciones; pongo por ejemplo una intención uniformadora o excesivamente detallista. Me explicaré mejor.

Cuando a tal punto se detalla la prueba, se tecnifica, se automatiza, por así decirlo, un examen, se crea automáticamente también otra técnica, la de entrenamiento para dicha prueba, para dicho examen. Y la enseñanza, que debiera ser ante todo *formación* del educando, se convierte en *preparación,* que no es lo mismo, sino casi todo lo contrario.

En este punto las autoridades debieran actuar con extrema cautela. Porque los profesores tendemos, ¿no es cierto?, a que se nos fije y limite estrictamente la naturaleza de las pruebas que habrán de sufrir nuestros alumnos, con objeto de asegurar su éxito en el examen, éxito del que dependerá, según juicio tradicional de padres y examinadores, el prestigio del profesorado y de los centros en que se han preparado. El verbo «preparar» ha suplantado al de «formar» en el lenguaje académico de los comentarios: «¡Qué bien preparados los presentan!» No se nos ocurre decir: «¡Qué buena formación llevan!» Y no lo podemos decir porque, en rigor, los exámenes sólo han comprobado la preparación y no la formación.

Así resulta que el régimen de exámenes, que debiera constituir una verificación de eficacia de sistemas educativos, una prueba anticipada de la educación de los futuros ciudadanos para la vida, que es, en definitiva, la gran maestra y examinadora, se va convirtiendo poco a poco en un sistema de cláusulas contractuales entre el Estado y el profesorado para regular rendiciones de cuentas en la memoria de los niños a cambio de aprobaciones de saldo que autoricen el pase. Y de aquí que cuanto más estrechas sean dichas cláusulas, mejor se considere definido el contrato; cuanto mejor satisfechas aquéllas, mejor cumplido éste. De aquí que se tienda a fijar programas bien desmenuzados en preguntas que no puedan alterar los examinadores, en suministrar listas bien delimitadas de problemas, y, a ser posible, colecciones de ellos, sobre las que forzosamente hayan de versar las pruebas de examen. Y que no sean excesivas para que haya tiempo de explicarlos bien y repetirlos muchas veces durante el curso hasta memorizarlos y convertirlos en clichés mentales que puedan traerse a la memoria al estímulo del enunciado. Y ¡ por favor !, que no haya variación aviesa de enunciados, aunque vengan a decir lo mismo, para que los alumnos no se desorienten y ya no sepan a qué clisés corresponden. ¡ Nada de angustivas sorpresas ! Todo bien previsto y esquematizado. Los niños así preparados, convertidos en autómatas, se lucirán en el acto del examen, mostrando lo bien que disparan la respuesta correspondiente a cada estímulo predeterminado. El colegio que mejores autómatas presente, aquel cuyos *robots* así fabricados tengan mayor capacidad de almacenaje de reflejos, es el que se llevará la palma de «buen colegio».

Señores, quizá haya exagerado un poco la caricatura. Perdóneseme por la amargura que este cuadro de costumbres académicas tan arraigadas en nuestra Patria me produce. Ya sabéis que la ironía es, con frecuencia, el único escape que se permite el dolor frenado por la discreción. Pero ¿ no os estremece también la subversión pedagógica que este estado de cosas supone ? Porque decidme, en verdad, ¿ de qué van a servir luego estos autómatas cuando la vida les obligue a actuar ante la inmensa variedad de estímulos imprevistos y tantas veces contradictorios ? Actuarán, sin duda, porque la vida, gran maestra, les enseñará también, llenando el vacío formativo que acarrean; pero actuarán no *gracias* a su preparación, sino *a pesar* de ella.

¿ Solución ? No es fácil. Mientras las pruebas favorezcan a tal punto la técnica preparadora, yo aconsejaría a los profesores que tuvieran siempre presente la responsabilidad que ante Dios tenemos contraída de formar, por encima de todo, a nuestros alumnos para su vida futura; para la vida eterna ante todo, pero también para esta vida que nos ha tocado en suerte vivir, tan llena de miserias como de maravillas. Aunque los padres, a quienes debemos educar también a través de sus hijos, crean que nuestra misión es procurar el lucimiento de nuestros alumnos ante el efímero tinglado de los tribunales de examen, nuestra misión es mucho más elevada : se trata de hacerles útiles para Dios, para la Patria y para la sociedad en que han de desenvolverse y vivir; y si no es posible abandonarles al azar de unas pruebas, actuando como si no existieran, sea al menos el tiempo invertido en la específica preparación de ellas reducido al mínimo, para que no se anteponga y absorba la esencial labor de formación que nos incumbe. Os daréis cuenta entonces de que un alumno bien formado lleva implícita una fuerte preparación, mientras la recíproca no es cierta.

Y en cuanto a las autoridades, no me cansaré de rogarles, con todos los respetos, que constriñan y automaticen lo menos posible la acción del profesorado, que no le pongan en trance de convertirse en meros preparadores, que le dejen margen de libertad suficiente para desarrollar su personal labor formativa. Y ya que no es posible prescindir en absoluto de un control examinador (porque tampoco voy a incurrir en la utopía de creer en una axiomática excelencia de todo el profesorado), procure al menos que se aquilate y mejore cada vez más el sistema de pruebas; pero no en un sentido detallista, sino en un sentido de ajuste a los procesos de la inteligencia en acción del niño ante los estimulantes vitales, perfeccionando la técnica de exploración y medida de dicha inteligencia y de asimilación auténtica de conocimientos, ideando sistemas de pruebas que tiendan a detectar cada vez mejor la madurez con preferencia al automatismo y al verbalismo memorista.

RESUMEN

Señores, antes de terminar quisiera que como impresión sustancial de esta charla quedaran fijas en el recuerdo de mis oyentes las siguientes afirmaciones, que constituyen su resumen:

Primera. La técnica de la enseñanza de la matemática necesita una evolución que la adapte a las necesidades del mundo moderno y a las posibilidades intelectuales y reacciones afectivas del mundo infantil.

Segunda. La evolución de modos de enseñar es tan necesaria como la de programas y métodos. No basta saber lo que el niño debe y puede aprender, sino que es indispensable lograr, además, que quiera aprenderlo.

Tercera. Un gran problema didáctico queda abierto en esta cruzada de captación de voluntades para el aprendizaje de las matemáticas, cruzada en la que es necesaria la colaboración de todo el profesorado, tanto oficial como privado. Se trata de crear un vastísimo cuadro de situaciones estimulantes y eslabonadas para que los niños puedan gozar descubriendo las matemáticas que aprenden.

Cuarta. La enseñanza de la matemática se ha de desenvolver para ello en clima de clase activa, de clase taller, y no de clase pasiva, de clase conferencia. Se impone la reducción de los grupos y el incremento y formación consiguiente del profesorado necesario.

Quinta. Esta cruzada es de trascendental urgencia social y patria, dada la posición axial que la matemática ha tomado en el mundo moderno y en sus bases, esencialmente técnicas y económicas.

Sexta. Pero además, y esto es lo más hermoso de nuestra tarea, es obra fundamental de caridad, porque habrá de llevar la alegría del aprendizaje de las matemáticas a los millares de niños españoles y de todo el mundo que todavía sufren estudiándolas.

§. 2. DECALOGO DE LA DIDACTICA MATEMATICA MEDIA [1]

Se me piden *normas* didácticas. Preferiría despertar una *conciencia* didáctica; sugerir formas de sentir antes que modos de hacer. Sin embargo, por si valieran, ahí van las sugerencias que estimo más fundamentales:

I.—*No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.*

II.—*No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.*

III.—*Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.*

IV.—*Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.*

V.—*Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.*

VI.—*Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.*

VII.—*Promover en todo lo posible la autocorrección.*

VIII.—*Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.*

IX.—*Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.*

X.—*Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.*

Exceptuando el consejo primero de *No rigidez* o *Adaptación,* que es el más general, los demás podrían agruparse y categorizarse del siguiente modo:

Preceptos relativos a cualidades del método de enseñanza: II. *Genetismo.*—III. *Vitalismo.*—IV. *Gradación.*

[1] Publicado en la Revista «Gaceta Matemática», 1.ª Serie, Tomo VII, números 5 y 6; 1955.

Preceptos relativos al modo: V. *Eurismo*.—VI. *Interés*.—VII. *Autocrítica*.

Preceptos que pudiéramos llamar de plenitud: VIII. *Maestría*.—IX. *Expresión*.—X. *Exito*.

* * *

Para precisar el alcance de cada uno de estos preceptos permítaseme añadir un breve comentario a cada uno de ellos.

I.—*No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.*

El centro de la enseñanza no es hoy ya el maestro, sino el alumno. La acción de aprender ha arrebatado su antigua primacía al acto de enseñar. Hoy enseñar es estimular y guiar los procesos de aprendizaje. De aquí que la acción del maestro quede condicionada en cada caso a dichos procesos. Conviene recordar especialmente aquí este carácter general de la enseñanza con objeto de evitar que los profesores de matemáticas busquen en la didáctica soluciones fijas y rígidas como las de la Matemática misma.

II.—*No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.*

Este olvido engendra una estrecha idea de la finalidad educativa de la Matemática, finalidad que no debe limitarse al desarrollo del razonamiento lógico abstracto. Las nociones y las operaciones matemáticas han tenido su primitivo origen histórico en procesos de abstracción y esquematización del mundo físico real. La humanidad sólo ha podido aplicar el mecanismo abstracto a los problemas que dicho mundo le ha presentado, después de efectuadas dichas esquematizaciones. Los resultados de esta elaboración abstracta se han proyectado de nuevo al campo de la realidad en la interpretación y ataque de nuevos problemas. Los procesos genéticos del pensamiento matemático están lo suficientemente vinculados a su evolución histórica para que no nos olvidemos de dicha génesis y evolución.

III.—*Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.*

Para la inmensa mayoría de nuestros alumnos la Matemática no será más que un instrumento de enfoque en sus problemas vitales futuros. Educarles matemáticamente es bastante más que presentarles el mecanismo abstracto del instrumento en vacío. Habrá que cultivar asimismo en toda la enseñanza matemática el sentido de aplicación en sus dos fases de abstracción y concreción que preceden y siguen a tal mecanismo.

Por otra parte este mecanismo tiene su unidad funcional. La división de la enseñanza matemática en compartimentos estancos determinó programas lineales cuya unidad lógica ha sido sustituída modernamente por unidades funcionales cíclicas más adecuadas al desarrollo psíquico del alumno. Ello favorece, al término de los ciclos, la propuesta de cuestiones de cierta amplitud que abarquen teorías matemáticas diversas, y aun conectables con otras disciplinas como la Física, la Química, la Geografía, etc.

La amplitud de tales cuestiones podrá dar ocasión a la organización de trabajos en equipo, promoviendo hábitos útiles de colaboración social y de autodisciplina de grupos en comunidad de trabajo.

IV.—*Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.*

Lo concreto y lo abstracto no son términos absolutos, sino relativos.

Lo concreto empieza siendo lo observable, lo que directamente perciben nuestros sentidos; luego pasa a ser lo imaginable, lo intuíble, lo representable. Por abstracciones sucesivas edificamos categorías mentales en las que se estratifican lo concreto y lo abstracto en orden de abstracción creciente y concreción decreciente, de modo que cada estrato es abstracto respecto del anterior y concreto respecto del siguiente.

Tal estratificación de categorías requiere tiempo y sedimentación y, por tanto, cada categoría sólo es accesible a determinada edad mental que el educador matemático tiene que tener muy en cuenta para graduarlas convenientemente no sólo de curso a curso, sino aun ocasionalmente de alumno a alumno, acudiendo a planos más concretos de comprensión en aquellos menos dotados.

V.—*Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora de los alumnos.*

El niño no es un depósito a llenar de conocimientos, sino un potencial deseoso de convertirse en actividad. Encaucemos esta actividad en un sentido educativo. Los procesos de transmisión de conocimientos no deben divorciarse de los de adquisición o descubrimiento. Sólo hay auténtica asimilación de un conocimiento cuando es fruto de una acción que motive su génesis. La tarea del maestro es provocar la actividad creadora del alumno orientándola en cada caso hacia la generación del conocimiento que se trata de adquirir. Es la única forma de conseguir firmeza y seguridad en la adquisición. Los ejemplos y los problemas son los que han sugerido casi siempre los conceptos y las teorías.

VI.—*Estimular dicha actividad despertando el interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.*

Pero el estimulante disparador de la actividad del niño no debe ser la coacción o la fría propuesta de cuestiones que no despierten un interés *directo,* es decir, que sea función exclusiva de las cuestiones en sí. Por el contrario debe ser dicho interés despertado por la situación el que dispare la actividad funcional del alumno. Sólo así sacará éste energías de su caudal para vencer las dificultades. La afectividad del niño juega en esta cuestión un papel extraordinario, y resulta a veces mágico el poder creador que desarrolla el niño cuando se acierta a llamar poderosamente dichos factores de interés y afectividad.

La Matemática, contra lo que muchos pueden creer, se presta grandemente a despertar estos potenciales de interés, si se sabe presentar sus problemas en la forma estimulante de un misterio a descifrar, de un apuro vital a resolver en ficción de juego. Aun en un terreno puramente abstracto los conceptos matemáticos son particularmente aptos para crear situaciones de juego mental aderezándolos convenientemente. Si además se sabe sacar partido de las innumerables situaciones matemáticas creadas por problemas de la vida real, uniremos a dicho interés autónomo el interés superpuesto por la proyección a la vida, y atenderemos a la formación matemática completa y vitalista esbozada en los puntos segundo y tercero.

VII.—*Promover en todo lo posible la autocorrección.*

Una de las potencialidades educativas de la matemática radica en el hecho de ser sus resultados autocomprobables. En la educación del carácter y de la voluntad el resorte de la autocrítica es fundamental. Un educando acostumbrado a corregirse a sí mismo por el sencillo vehículo de la comprobación de sus propios resultados, y, por tanto, de sus propios errores cuando los cometa, sabrá acaso ser más cauto en sus precipitaciones, más seguro en sus pasos, más objetivo en sus juicios y acaso más humilde en sus apreciaciones.

Pero también el profesor debe aplicarse el precepto, procurando comprobar objetivamente, por sí mismo, los resultados de su enseñanza y mejorando sus procedimientos a tenor de tales comprobaciones. Los métodos estadísticos le pueden aportar poderosa ayuda en su tarea experimental de perfeccionamiento.

VIII.—*Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.*

Suele ser expediente cómodo de preparadores suministrar cuanto antes las reglas y repetir sus aplicaciones a saturación. Pero procediendo de esta suerte se crea en los alumnos el más rígido automatismo mental. Este proceder es tanto más peligroso cuanto que el alumno mismo, en su afán de acción, acoge con alegría las reglas que le permiten actuar rápidamente antes de asimilar las esencias metódicas; alegría tanto mayor cuanto más discursivos y aburridos son los procedimientos de asimilación a que se le somete.

La necesidad de la regla no es sentida cuando la acción del alumno se desenvuelve en los procesos mismos de adquisición. Muchos pedagogos, pasándose por ello a la reacción contraria, abominan de toda regla ante el peligro de automatismo que pueda provocar. Sin embargo, la regla, cuando es posterior al dominio del procedimiento, tiene un valor: el de la condensación expresiva del acto dominado. Pero sólo es aconsejable cuando existe tal dominio previo, dominio que significa flexibilidad de adaptación a cada caso particular y no rigidez de acción. Solamente cuando la síntesis expresiva del procedimiento no corra el riesgo de convertirse en imperativo simplista de acción es cuando la regla resulta lícita pedagógicamente y aun aconsejable como recurso último.

IX.—*Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.*

El enunciado de las reglas y definiciones, hecho con posterioridad al dominio del proceso o del concepto, debe ser siempre producto de una elaboración expresiva del propio alumno como resultado de tal dominio. No debe impacientarnos el que dicho enunciado resulte en un principio defectuoso. Sólo exigiendo que la expresión del alumno siga fielmente su pensamiento, sólo invitándole a que enuncie «pensando en voz alta», tendremos la garantía de que lo enunciado tiene un contenido subyacente y no es pura repetición de un clisé memorista estereotipado.

En lugar de ridiculizarla, prefiramos una tosca autenticidad a una huera imitación; y aprovechemos los enunciados imperfectos como motivos instructivos de crítica suave y persuasiva (no deprimente) que promueva la corrección y perfeccionamiento por el propio alumno. Es muy difícil definir bien cuando no se domina aún el lenguaje, tanto más difícil cuanto más primario es el concepto definido, como ocurre con gran parte de los conceptos matemáticos. No juzguemos como ignorancia de un concepto o de una propiedad la dificultad de su enunciación. Pese a esta dificultad el niño puede tener clara consciencia de uno y de otra y saberlos aplicar impecablemente. En tales casos, antes de exigir prematuramente repeticiones memorísticas, es preferible esperar a que la perfección expresiva se alcance como consecuencia natural de la fidelidad al pensamiento y del progresivo dominio del lenguaje.

X.—*Procurar que todo alumno tenga éxitos que eviten su desaliento.*

Quizá ninguna disciplina cree entre los alumnos desniveles tan acusados como los que crea la matemática. Esto produce en los menos dotados verdaderos complejos de desaliento y de aversión hacia la matemática que ya nunca tendrán remedio.

Todo ser humano necesita el alcaloide espiritual del éxito que estimula su vida de relación social; y si las grandes dosis pueden ser funestas, las pequeñas dosis son necesarias. Hay que procurar suministrárselas a los alumnos menos dotados, homogeneizando cuanto sea posible los grupos y proponiendo a cada grupo homogéneo ejercicios a su nivel.

Terminemos con un comentario a la totalidad:

Estos que pudiéramos llamar «consejos axiomáticos» tienden, como he dicho, no a fijar normas de acción, pero sí a crear una conciencia didáctica capaz de sugerir dichas normas al vivir la enseñanza. De aquí su carácter de generalidad. En su mayoría son aplicación de principios generales de pedagogía a nuestra enseñanza.

El primero es, como se ha dicho, el más general de todos. Los otros resultan igualmente aplicables a otros grados de enseñanza, pero no en su totalidad ni tan específicamente como en la enseñanza matemática media. Así, la gradación de planos de abstracción, por ejemplo, es problema de singular relieve en la infancia y adolescencia, es decir, en los períodos de evolución máxima de la inteligencia, pero pierde su capital importancia en niveles superiores. Otro tanto pudiéramos decir de los preceptos segundo y tercero. Análogamente, los preceptos quinto y octavo sólo pueden aplicarse parcialmente en el nivel primario por la necesidad imperiosa de crear en dicho nivel una técnica instrumental de cálculo aunque los alumnos no sean capaces de descubrirla ni de dominar métodos antes de automatizar soluciones.

La misma advertencia hecha en lo que se refiere a los distintos niveles de enseñanza puede repetirse en lo relativo a las distintas disciplinas. No cabe duda de que cada precepto aislado tiene asimismo su contenido y validez en otros campos didácticos, pero no en el mismo plano global de interés jerárquico, como en la enseñanza de la matemática. Y hecha esta aclaración, doy por suficientemente justificada la específica orientación del decálogo.

§ 3. RECOMENDACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Elevadas por la «UNESCO» y la «OFICINA INTERNACIONAL DE EDUCACION» a los Ministerios de Instrucción Pública de los países adheridos, en la Décimonovena Conferencia Internacional de Instrucción Pública habida en Ginebra en julio de 1956 [1]

La Conferencia Internacional de Instrucción Pública, convocada en Ginebra por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura y por la Oficina Internacional de Educación, habiéndose reunido el 9 de julio de 1956 en su décimonovena sesión, adopta, el 17 de julio de 1956, las siguientes recomendaciones:

La Conferencia: Considerando que las Matemáticas han tenido en todo tiempo un valor cultural y práctico indiscutible y un papel importante en el desarrollo científico, técnico, económico y, en particular, que nuestra época presenta una coyuntura matemática sin precedente en la Historia,

---

[1] Por indicación del Sr. Puig Adam, miembro de la Comisión española que participó en dicha Reunión Internacional, en la que estuvieron representados 71 países, reproducimos aquí este cuadro de recomendaciones que constituye la síntesis internacional más completa de orientaciones metodológicas en pedagogía matemática moderna.

El Comité de Redacción de estas instrucciones, designado por la Asamblea general a propuesta de su Presidente Sr. Piaget, estuvo constituído por los profesores Servais (Bélgica), Puig Adam (España), Knani (Túnez), Choukour (Afganistán), Campedelli (Italia), Markouchevitch (U. R. S. S.) y Bisdorff (Luxemburgo). (V. acta del 13 de julio). En las referidas instrucciones se nota claramente la aportación de nuestro compatriota, cuyas fundamentales ideas didácticas contenidas en su anterior Decálogo, aparecen íntegramente aceptadas y encuadradas en el vasto marco abarcado por la Comisión. (N. de la R.)

Considerando que la formación matemática es un bien y un derecho de todo ser humano, cualquiera que sea su raza, su sexo y su condición y actividades,

Considerando que para asegurar el progreso y la prosperidad de los pueblos la elevación del nivel matemático general debe ir a la par con la expansión técnica y científica superior,

Considerando que las diversas civilizaciones han jugado un papel en la creación y el desarrollo de las Matemáticas,

Considerando que la psicología reconoce que todo ser humano es capaz de cierta actividad matemática y que no hay ninguna razón para creer que las niñas son menos aptas que los muchachos para estudiar las Matemáticas,

Considerando que la Pedagogía de las Matemáticas debe ser cada día más científica y más eficaz,

Considerando que es preciso dar una prolongación a la Recomendación número 31, referente a la iniciación matemática en la Escuela Primaria adoptada por la XIII Conferencia Internacional de Instrucción Pública,

Somete a los Ministerios de Instrucción Pública de los diferentes países la Recomendación siguiente:

FINES DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

1. En el curso de los estudios secundarios, tanto técnicos como de formación general, conviene alcanzar, en la mayor medida posible, los fines educativos de la enseñanza de las Matemáticas que atañen a las funciones intelectuales y a la formación del carácter. Estos fines se relacionan con los procesos de la lógica en acción (reflexionar, analizar, abstraer, esquematizar, razonar deductivamente, generalizar, especializar, aplicar, criticar, etc.), con las cualidades racionales del pensamiento y de su expresión (orden, precisión, claridad, concisión, etc.), con el espíritu de observación, con las concepciones espaciales y cuantitativas, con la intuición y la imaginación en el dominio abstracto, con el desarrollo de la atención y del poder de concentración, con la adquisición de la perseverancia y del hábito del trabajo ordenado, y, en fin, con la formación del espíritu científico (objetividad, probidad intelectual, afán de investigación, etc.).

2. Las operaciones de orden práctico, la adaptación al medio natural y la necesidad de comprender los problemas que plantea la vida técnica,

económica y social exigen cada vez más conocimientos matemáticos corrientes (cálculo, geometría usual, representaciones geométricas, fórmulas, ecuaciones, funciones, tablas y gráficos). Estas nociones y medios fundamentales intervienen también en un número creciente de profesiones.

3. Las Matemáticas y el estilo de pensamiento que les es propio deben ser considerados como un elemento esencial de la cultura general del hombre moderno, aunque su actividad no sea científica ni técnica. Es de desear que la enseñanza de las Matemáticas, en estrecha unión con la enseñanza de otras ramas, conduzca a los alumnos a comprender el papel que juegan las Matemáticas en las concepciones científicas y filosóficas del mundo actual.

4. Uno de los fines principales del curso avanzado en Matemáticas en los últimos años de la enseñanza secundaria debe ser la preparación a los estudios superiores científicos o técnicos, cuya base matemática crece de día en día.

LUGAR DE LAS MATEMATICAS

5. La enseñanza de las Matemáticas, obligatoria en las diferentes clases del ciclo inferior de las escuelas secundarias, debe disponer de un número de horas adecuado.

6. En el ciclo superior de las secciones científicas el curso de Matemáticas debe beneficiarse de un horario extenso.

7. Es de desear que los alumnos que manifiesten disposiciones especiales para los estudios científicos tengan la posibilidad de seguir una enseñanza más desarrollada que les permita entregarse a estudios complementarios personales.

8. En los países donde la enseñanza de las Matemáticas no figure con título obligatorio en ciertas secciones (Secciones Literarias, por ejemplo) debería ser organizada una enseñanza matemática con tendencia cultural más que puramente técnica, al menos a título facultativo.

9. El coeficiente que afecta a las Matemáticas en el momento de la calificación de los resultados de los alumnos, cualquiera que sea el modo de realizarlo, debe ser proporcional al valor que se reconoce a esta disciplina. Cuando ésta es obligatoria, y especialmente en secciones científicas, deberá ser considerada como una de las ramas principales, fundamentalmente en los pases de clase y en las certificaciones de fin de estudios.

PROGRAMAS

10. El programa de Matemáticas de una sección determinada de la escuela secundaria debe ser conforme a los fines generales de la enseñanza de esta rama y a los objetivos particulares de la sección.

11. Los programas serán puestos al día y adaptados a los progresos de las ciencias y a las necesidades de la técnica y de la vida moderna, sacrificando las cuestiones anticuadas. Se tendrá principalmente en consideración el hecho de que, para elevar el nivel de los programas en las clases superiores, ciertos países han introducido la geometría analítica, el cálculo infinitesimal, la estadística y las probabilidades y dan una importancia creciente al estudio de funciones y vectores, así como a las aplicaciones de las Matemáticas.

12. La dificultad y extensión de las materias a enseñar estarán en relación con la edad mental media correspondiente a cada clase y con los intereses y las necesidades de los alumnos. Si conviene dar a los individuos dotados para las Matemáticas complementos de formación, es preciso evitar el provocar desaliento en alumnos flojos imponiéndoles materias cuya complejidad exceda a sus medios intelectuales.

13. Conviene establecer los planes de estudio tendiendo a organizar la enseñanza de las Matemáticas alrededor de unidades funcionales que coordinen las diversas ramas al mismo tiempo que destaquen las nociones generales.

14. En este orden de ideas es deseable determinar, mediante ensayos pedagógicos realizados sin prejuicios, en qué medida las estructuras ampliamente polivalentes de las Matemáticas modernas puedan servir para mejorar la enseñanza secundaria.

15. Sería de desear que los profesores tengan una cierta libertad de iniciativa para prolongar eventualmente los programas básicos con complementos facultativos.

MÉTODOS

16. Cuando se den las directrices metodológicas, es conveniente que sean consejos y sugestiones que tiendan a conformar la enseñanza tanto al progreso de la psicología de la inteligencia y de la pedagogía de las Matemáticas como a la naturaleza y al uso de las Matemáticas, ciencia teórica

que tiene un origen ligado a lo real y un alcance eficaz en nuestra acción sobre él.

17. Todo debe disponerse para estimular y favorecer en el alumno el aprendizaje activo de las Matemáticas por una participación personal tan grande como sea posible en su elaboración.

18. Es necesario: *a*) excitar y sostener el interés de los alumnos tanto para las Matemáticas en sí como para sus aplicaciones, *b*) estar atento a la trayectoria del pensamiento matemático juvenil, *c*) adaptar la enseñanza a las capacidades individuales y a la evolución mental de los alumnos, diferenciándolos sucesivamente según su destino.

19. Es preciso: *a*) partir, siempre que sea posible, de lo concreto para llegar a lo abstracto, sobre todo en las clases inferiores y, cada vez que la cosa sea útil, hacer un llamamiento a la experimentación real, figurada o imaginada, para sugerir la definición o la demostración; *b*) darse cuenta de que el conocimiento matemático nace y se desarrolla por la penetración de las acciones concretas y la organización de los sistemas operatorios; *c*) aprovechar las cuestiones provocadas por las situaciones concretas no solamente para mostrar la importancia práctica de las Matemáticas, sino sobre todo para motivar los desarrollos teóricos.

20. Importa: *a*) Acostumbrar al alumno a formar las nociones y a descubrir él mismo las relaciones y propiedades matemáticas antes que imponerle un pensamiento adulto ya hecho; *b*) asegurar la adquisición de nociones y procesos operatorios antes de introducir el formalismo; *c*) no confiar al automatismo más que las operaciones asimiladas.

21. Es indispensable: *a*) Hacer adquirir primero experiencia de los entes y relaciones matemáticas e iniciar en seguida al alumno al razonamiento deductivo; *b*) extender progresivamente la construcción deductiva de las Matemáticas; *c*) enseñar a plantear los problemas, a buscar los datos, aprovecharlos y apreciar los resultados; *d*) conceder la preferencia a la investigación eurística de cuestiones, más que a la exposición doctrinal de los teoremas; *e*) hacer tomar conciencia de la estructura de una teoría hipotético-deductiva en la que, sobre la base de postulados, los teoremas sean construídos por demostraciones y los términos nuevos introducidos por definiciones, de modo que conduzcan a una exposición lógica deductiva de la materia estudiada.

22. Es preciso: *a*) Estudiar los errores de los alumnos y ver en ellos un medio de conocer su pensamiento matemático; *b*) ejercitar a los alum-

nos en la práctica del control personal y de la autocorrección; *c*) dar el sentido de la aproximación, del orden de magnitud y de la verosimilitud de los resultados; *d*) dar la prioridad a la reflexión y al razonamiento antes que al aprendizaje rutinario y memorístico y limitar el papel de la memoria a la fijación de los resultados fundamentales; *e*) proponer materias de examen que exijan más formación matemática que preparación intensiva.

23. Importa: *a*) Estimular los modos personales de expresión, aunque aproximados, y mejorarlos gradualmente; *b*) llevar al alumno a la precisión y al rigor por las necesidades de una comunicación eficaz con los demás y una exigencia de claridad de su propio pensamiento; *c*) favorecer la investigación y la iniciativa individual tanto como el trabajo en equipo; *d*) aumentar el número de alumnos que se interesen por las Matemáticas y contribuir a desarrollar su formación y su conocimiento organizando círculos, conferencias, competiciones y otras manifestaciones de carácter facultativo y difundiendo libros y revistas que les sean accesibles.

24. Es indispensable: *a*) Recalcar la unidad intrínseca de las Matemáticas, no separando sus ramas y aproximando los diversos métodos de resolución de una cuestión dada; *b*) indicar las etapas importantes de la historia de las nociones y de las teorías matemáticas estudiadas.

25. Es necesario: *a*) Mantener la coordinación de las Matemáticas con las ciencias que hacen uso de ellas; *b*) sacar partido de las exigencias del pensamiento matemático para aumentar la precisión, la claridad y la concisión del lenguaje; *c*) guardar el contacto de las Matemáticas con la vida y la realidad.

MATERIAL DIDACTICO

26. La evolución de la metodología de las Matemáticas reclama una adaptación de los libros de texto. Al lado de los libros de iniciación a las Matemáticas, permitiendo el acceso progresivo a las nociones abstractas, el alumno deberá poder disponer de obras de consulta donde las materias adquiridas sean revisadas y organizadas sobre un plan más elevado. Las obras de referencia, de complemento y de vulgarización, las revistas, etc., deberán ser puestas a la disposición de cada uno en las bibliotecas de las clases. Esta documentación será adaptada a los fines

de las diferentes secciones y respetará para cada una de ellas la dosificación entre el punto de vista práctico, las necesidades técnicas, el desarrollo teórico y la preocupación cultural.

27. Del uso de los medios auxiliares audiovisuales, de los modelos matemáticos concretos (existentes en la vida corriente, construídos por los alumnos o los profesores, o también fabricados por firmas comerciales), que tienen un lugar cada vez más destacado en la enseñanza, conviene sacar partido para que los alumnos adquieran de forma activa las abstracciones matemáticas.

PERSONAL DOCENTE

28. En Matemáticas, más quizá que en otras ramas, el papel del profesor es primordial. La elección, la formación y el perfeccionamiento de los profesores de Matemáticas debe ser objeto de una atención y una solicitud particular por parte de las autoridades responsables de la educación de la juventud.

29. Los profesores encargados de enseñar las Matemáticas en los Centros de Enseñanza media, deben tener una formación matemática de un nivel netamente superior al de su enseñanza. Esta formación debe implicar no solamente el estudio de las matemáticas teóricas, sino una parte de matemáticas aplicadas, la historia general del pensamiento matemático, la metodología de la ciencia matemática en sí y el estudio de las matemáticas elementales consideradas desde un punto de vista superior.

30. Una preparación pedagógica y psicológica adecuada debe ser el complemento indispensable de la formación matemática del profesor e inspirarse en un conocimiento claro y bastante madurado de los fines generales y de los principios de la educación humana. En esta preparación debe insistirse en la evolución estructural de la inteligencia en relación con la elaboración del pensamiento matemático. En ella se tratará de las relaciones entre lo concreto y lo abstracto de modo a situar la metodología de los modelos en la enseñanza matemática. El futuro profesor será entrenado en la observación y en la experimentación en materia de pedagogía matemática. Por encima de todo se le interesará por los adolescentes y por sus aspiraciones, a fin de que pueda ser el animador y el guía de la juventud.

31. Conviene velar por que todos los alumnos de las clases inferiores y los alumnos menos dotados de las superiores tengan buenos maestros.

32. Es preciso que el profesor de Matemáticas en funciones pueda estar al corriente, a la vez, de la evolución moderna de las ciencias matemáticas teóricas, de las aplicaciones actuales importantes de las Matemáticas y de los progresos recientes de la didáctica de su disciplina. Es de desear que sean tomadas medidas con vistas a facilitar el perfeccionamiento de los profesores (conferencias, cursos de vacaciones, seminarios, grupos de trabajo, preparación, publicaciones, etc.).

33. Las sugestiones de los inspectores especializados o de los consejeros pedagógicos, el ejemplo del trabajo de profesores experimentados, son medios excelentes para aumentar el rendimiento de la enseñanza.

34. El profesor de Matemáticas debe gozar en la sociedad moderna de la consideración y del relieve social a los cuales tiene derecho su formación científica y su misión de educador.

35. Ya que en todos los países una enseñanza adecuada de las Matemáticas es un elemento esencial de la educación, importa asegurar la designación de un número suficiente de profesores calificados, tanto más cuanto que esto es una condición de la expansión científica, técnica, económica y social de todos los pueblos.

COLABORACION INTERNACIONAL

36. Los Gobiernos y los organismos culturales o educativos internacionales, tales como la UNESCO, el Bureau Internacional de Educación, la Comisión Internacional de Enseñanza Matemática, la Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas, deben favorecer por todos los medios (publicaciones, conferencias, intercambios, exposiciones, viajes de estudio y estancias en el extranjero, etcétera) el cambio internacional de ideas, de trabajos, de investigaciones y de resultados obtenidos en la enseñanza de las Matemáticas, a fin de que la juventud del mundo entero pueda beneficiarse lo antes posible de las experiencias y de los progresos realizados por los profesores de todos los países.

SEGUNDA PARTE

LA DIDACTICA MATEMATICA EN ACCION

CAPITULO V

DIDACTICAS ESPECIFICAS

§ 1. SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA EN LA ESCUELA PRIMARIA (*)

Más que exponer aquí una didáctica detallista, atenderé a señalar principios orientadores que permitan proyectar la labor de la Escuela hacia el futuro del alumno, sea cualquiera el nivel cultural en que éste haya de desenvolverse luego. Dedicaré, por tanto, especial atención a los problemas de finalidad y método sin detenerme en modos y materiales que reduciré a leves indicaciones al paso. (Ver los capítulos siguientes.)

VALORES UTILITARIO Y FORMATIVO

Una vez más correspóndeme decir que de los dos fines que hay que exigir a la Enseñanza en todo grado: el utilitario y el formativo, debe, a mi entender, prevalecer el formativo en la segunda enseñanza, pero no así en la primera, en la que ambos fines deben equilibrarse y aún, si preciso fuera, atender antes al utilitario con objeto de suministrar ante todo al alumno aquellos conocimientos y aquellas destrezas fundamentales indispensables (lectura, escritura, cálculo, medidas, etcétera), con las que se teje la vida de relación en toda sociedad civilizada. Pero además, la finalidad formativa, exige suministrar dichos conocimientos en forma tal que deje el terreno mental preparado para que puedan

(*) Publicado en «Bordón», revista de la Sociedad Española de Pedagogía, marzo, 1953.

ser elaborados en él estadios superiores de cultura, si tal es el destino del alumno.

¿Qué valores utilitario y formativo debemos, pues, esperar de la enseñanza de la Geometría en la Escuela Primaria? Para acertar en el tratamiento del individuo recordemos una vez más lo ocurrido en la especie. La Aritmética nació en cuanto el hombre quiso *contar* sus bienes; la Geometría, en cuanto quiso *medirlos* y *construirlos* (acotar sus terrenos, construir sus viviendas, etc.). En estas tres operaciones primitivas de la humanidad: contar, medir y construir, está el origen de la matemática y también (salvada la diferencia de estímulos e intereses) la pauta de los primeros balbuceos matemáticos del niño en la escuela.

Dejando al cuidado de la Aritmética la operación de *contar* y las técnicas operatorias que a su alrededor se desarrollan (la adición y la multiplicación son *cuentas,* es decir, modos de contar abreviados), podremos dar por alcanzada la finalidad utilitaria de la Geometría en la Escuela Primaria en cuanto el alumno sea capaz de reconocer, medir y construir las formas geométricas que se le hayan de presentar con más frecuencia en su vida de relación futura. Por construir entendemos, naturalmente, el diseño o la realización de figuras esquemáticas representativas, no la realización efectiva de objetos, labor de los distintos oficios, la cual se apoya precisamente en aquella técnica geométrica previa adquirida en la Escuela.

¿Y la finalidad formativa? Es error frecuente creer que la principal finalidad formativa de la Geometría radica en el ejercicio lógico que se desprende de su encadenamiento de teoremas. Este error tiene su génesis en un proceso histórico bien conocido. Sabido es que la Geometría empezó siendo un conjunto de conocimientos empíricos de los antiguos constructores y medidores orientales y terminó siendo el edificio racional más bello y perfecto legado por el genio griego. Desde entonces se adoptó la enseñanza de la Geometría euclídea como la calistenia mental por excelencia. Antes de Euclides, ya Platón hizo inscribir a la entrada de su Academia: «Nadie entre que no sepa Geometría», y dijo de ella que «atraía el alma hacia la verdad formando el espíritu filosófico al obligarla a dirigir sus miradas a lo alto y no a lo terreno»... [1]. Muchos siglos después, Pascal y Spinoza aún nos hablan del *espíritu geométrico* como sinónimo del *espíritu lógico*. Esta curiosa subversión de valores se debe a que la Geometría es,

---

1 *República*. Libro VII.

por la misma perfección de sus conceptos, terreno docilísimo al método deductivo puro, consistente, como es sabido, en la admisión de algunas proposiciones primeras (axiomas, postulados) y en la deducción lógica de todas las demás. Ahora bien, ¿es éste el valor formativo que podemos esperar de la enseñanza de la Geometría en la Escuela? Hemos de contestar con una negativa categórica. Es preciso recorrer todavía mucho terreno intuitivo y aún experimental antes de llegar a la floración de los conceptos abstractos sobre los que se edifica la vía deductiva. Ni los alumnos de Platón ni los de Euclides eran niños. La deducción de unas verdades como consecuencia lógica de otras, es deleite de inteligencia adulta, garantía de solidez en los estadios superiores de cultura científica, pero no despierta ningún interés en el niño, tanto más, cuanto que las verdades geométricas que puedan establecerse en este grado de enseñanza, o saltan a la vista (igualdad de los ángulos de lados paralelos, por ejemplo), o pueden verificarse experimentalmente de modo fácil (suma de los ángulos de un triángulo, por ejemplo). Es más, ciertos tipos de demostración como los fundados en la reducción al absurdo, consistentes en partir de la negación de la tesis para llegar a una contradicción con la hipótesis, no sólo son prematuros, sino contraproducentes por la confusión que se establece en la mentalidad del niño al partir de supuestos contrarios a la evidencia sensible que es la que impera en tales grados sobre la evidencia lógica. Sólo a título de ensayo y cuando el interés de la cuestión lo aconseje, podrá iniciarse algún razonamiento deductivo mostrando el encadenamiento lógico existente entre algunas verdades sencillas, como, por ejemplo, las citadas anteriormente en los ejemplos consignados entre paréntesis.

¿Qué sedimento formativo debemos, pues, dejar en la primera enseñanza de la Geometría a defecto del cultivo de las facultades lógicas deductivas? Para contestar a esta pregunta habré de repetir, una vez más, que el tratamiento matemático de los fenómenos naturales, no consiste solamente en el mecanismo deductivo efectuado sobre los esquemas abstractos que la mente humana se forja como representativos de los entes naturales, sino que va inexorablemente acompañado de una fase previa de *abstracción* o elaboración de tales entes, partiendo de las cosas materiales, y de una fase final de *concreción* o paso inverso de los resultados abstractos obtenidos al campo de la realidad, con la consiguiente interpretación y selección de soluciones. Una educación matemática completa debe, pues, ejercitar también estas dos fases de abstracción y de concreción y esto en todos los grados de enseñanza (tal es el «leitmotiv» de mi credo pedagógico, lo mismo en el Bachillerato que en la Enseñanza técnica) y con mayor razón en la primera enseñanza, en la que resulta prematuro el sutil tejido de la lógica. Es, precisamente, en la primera enseñanza donde debemos acumular todas las vivencias sensoriales, experimentales e intuitivas, que sedimentadas en el subconsciente del niño, constituirán los estratos básicos sobre los que asentará más tarde todo el edificio racional abstracto.

No olvidemos que la Matemática, como toda otra Ciencia, ha tenido su origen empírico y experimental, mucho más breve ciertamente que el de las otras Ciencias (por lo cual se estructuró científicamente mucho antes que ellas), pero no por ello ha dejado de existir, y lejos de renegar de este origen hemos de tenerlo muy presente en la educación del niño, cuya elaboración de conceptos no puede diferir grandemente de la que ha seguido la humanidad. En consecuencia, antes de pensar en la estructuración racional de la Matemática y en particular de la Geometría, cuidaremos mucho las fases de observación, de experimentación y de intuición hábilmente distribuídas a lo largo de todo el período de enseñanza primaria en sus distintos grados.

En rigor, la observación y el análisis simple de hechos y cosas surgen espontáneamente en el niño mucho antes de su asistencia a la escuela; se inician con el desarrollo de sus sentidos que ya dejan en él sus primeras vivencias espaciales, invariablemente unidas a sus primeras experiencias motrices. En la escuela se iniciará la experimentación, es decir, se provocarán nuevos hechos geométricos artificiales que agudizarán su observación y análisis (por ejemplo, comparación de formas de que hablaremos en seguida) induciendo analogías y desarrollando la *transducción* (o paso de lo particular a lo particular análogo) como fase previa a la *inducción* (paso de lo particular a lo general). Finalmente, en un período posterior, se desarrollará su *intuición* sustituyendo los hechos reales espontáneos o provocados, por hechos imaginados; la realidad externa sensible, por el mundo interno de la fantasía; el niño empezará a mirar dentro de sí (intuere) haciendo afirmaciones, no ya sobre lo que está ocurriendo y viendo realmente, sino sobre lo que ocurriría si tal o cual experiencia se efectuara, y que él está viendo en su imaginación.

El desarrollo de esta facultad de intuir se adapta perfectamente a la evolución psíquica de la primera y segunda infancia, y es extraordinariamente interesante para una completa formación matemática del educando, tanto o más que el desarrollo posterior del raciocinio, siendo precisamente en primera enseñanza y en los primeros grados de la segunda donde tal tarea debe ser esmeradamente cuidada por los educadores.

Todo esto cabe, pues, esperar en el terreno formativo de una buena educación matemática en la Escuela, y particularmente de la enseñanza de la Geometría, en la que el desarrollo de la intuición mencionada se referirá concretamente a la *intuición espacial.* Y ahora veamos, tanto desde el punto de vista utilitario como educativo, las distintas modalidades que el cultivo de tal intuición espacial exigirá desarrollar. Las centraremos en torno a los tres conceptos: *forma, posición* y *extensión.*

FORMA, RECONOCIMIENTO Y CONSTRUCCIÓN

Hemos dicho, al estudiar los fines en el párrafo precedente, que la finalidad utilitaria de la Geometría en primera enseñanza, puede considerarse alcanzada en cuanto el niño sea capaz de reconocer, construir y medir las formas geométricas usuales. El reconocimiento de tales formas y la denominación correspondiente implica ya un problema metodológico interesante con objeto de desglosar el concepto de forma del de posición y tamaño. La semejanza de formas es un tipo de analogía que puede ya ejercitarse en los primeros grados, e incluso entre párvulos, mediante juegos de emparejamiento de figuras *parecidas,* resolviéndoles previamente algunos ejemplos para inculcar el criterio de *parecido* que se busca. Se puede empezar por lotes de figuras construídas de la misma materia, color y tamaño similar, para luego ir variando tamaños, colores y materias. De tales modelos, que ya suponen un cierto grado de abstracción preelaborado, se pasará más tarde a buscar parecidos con los objetos reales (cajas, puertas, ventanas, ruedas, etc.) y, finalmente, a su dibujo esquemático en el papel o en el encerado. No es, a mi entender, aconsejable empezar por los dibujos en el encerado, ya que la inevitable relación de posición que se establece entre el marco y la figura es una adherencia difícil de despegar luego. Si, por ejemplo, se dibuja por primera vez un rombo con las diagonales horizontal y vertical, será difícil que el niño reconozca luego como figura igual el mismo rombo con un lado horizontal, por ejemplo, mientras que esta dificultad queda vencida si antes se han acostumbrado los niños a manejar y denominar las figuras recortadas colocadas sobre la mesa en posiciones varias [2]. Es interesante practicar en tales figuras recortadas la operación de *simetría* cambiando la cara de apoyo sobre la mesa, al objeto de habituar a reconocer la igualdad inversa de figuras planas simétricas. (Esta igualdad se hace particularmente difícil de reconocer espontáneamente sin este ejercicio previo).

En este estado de conocimientos y de ejercicios es particularmente ingenioso y adecuado el material montessoriano que convierte en juego, y, por tanto, en actividad espontánea y deseada, la búsqueda de formas iguales mediante el ajuste de la figura recortada al molde vaciado en las placas y cajas de juego. Este reconocimiento practicado a ojos vendados, asociará la forma al movimiento, cultivando la destreza motriz preliminar al dibujo.

En cuanto al problema de lenguaje inherente al reconocimiento de tales formas, bastará dar a cada forma su nombre sin pretender que el niño de los primeros grados asimile definiciones que se repiten de memoria sin dejar huella alguna formativa. Mucho más interesante resulta esperar a los grados superiores para que sea el mismo niño quien intente dar definiciones por su cuenta mediante el descubrimiento previo de propiedades específicas de la forma que se trata de definir, y no debe importar que tales definiciones se ajusten o no a las del texto al uso mientras sean geométricamente correctas. Por ejemplo, pueden admitirse como igualmente buenas las definiciones de paralelogramo: como cuadrilátero con los lados paralelos dos a dos; cuadrilátero con los pares de lados opuestos iguales; cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en su punto medio, etc., puesto que cada una de estas propiedades es privativa del paralelogramo y sólo de él.

Las preguntas de contestación afirmativa: un rectángulo, un rombo, un cuadrado, ¿son paralelogramos?, y otras parecidas, dejarán en el alumno la semilla de las nociones abstractas de género y especie. La construcción en alambre de modelos deformables permitirá materializar el género (por ejemplo, distintas formas de un paralelogramo) y la especie (caso particular en que los ángulos son rectos). Todos estos ejercicios de particularización de una figura y denominación correspondiente por género próximo y diferencia específica tienen, pues, la proyección futura deseada en la formación lógica del educando.

[2] Con el mismo fin se construyen en Italia pizarras giratorias, y el profesor GATTEGNO hace uso del *geoplano* (tablero móvil con clavos, entre los cuales se tienden gomas que dibujan las figuras corrientes de la Geometría plana).

Las asociaciones motrices iniciadas en el reconocimiento de formas permitirán pasar insensiblemente al dibujo de las mismas en el cuaderno con lápiz, o con tiza en el encerado, o con una simple estaca en el jardín. La apetencia estética y el deseo consiguiente de perfección, hábilmente despertados, incitarán al uso de instrumentos geométricos que al principio pueden reducirse casi exclusivamente a la cuerda tirante que sirve igualmente de regla y de compás. Posteriormente se iniciará el uso del compás, de la regla y de las escuadras, comprobando su correcta construcción al tiempo que se establecen las propiedades de la recta y de la perpendicularidad. Inútil seguir desarrollando aquí un programa graduado de construcciones que conocen ya todos los maestros. La construcción de cada figura se razonará haciendo ver cómo traduce las propiedades características de la misma.

Todos los recursos constructivos elementales deben ser aprovechados en la escuela, huyendo del exclusivismo de la regla y del compás. El uso del papel de calco suministrará provechosas experiencias sobre igualdad directa e inversa en el plano. El juego de escuadras podrá manejarse en los últimos grados constituyendo excelentes experiencias sobre las propiedades de la perpendicularidad, del paralelismo y de la traslación. La práctica hábil de dobleces en el papel suministrará asimismo experiencias provechosas sobre la simetría. Combinadas tales dobleces con el uso de la tijera pueden obtenerse materializaciones rápidas de figuras, condensando, por ejemplo, todas las propiedades de un rombo al obtenerlo por un solo corte practicado en un papel doblemente doblado en ángulo recto. Análogamente pueden obtenerse figuras con más ejes de simetría. El recorte de figuras deleitará al niño en el libre juego y obtención de formas estéticas, iniciando así la indiscutible relación entre la Geometría y las artes plásticas.

POSICIÓN Y MOVIMIENTO

La alusión que, en el párrafo que precede, acabamos de hacer a ciertos instrumentos y experiencias relacionadas con movimientos y simetrías nos trae de la mano al segundo punto fundamental a tener en cuenta en el cultivo de la intuición espacial: el relativo a las relaciones de posición. Ya hemos dicho que el concepto de forma se engendra con independencia de los de posición y magnitud, pero el cultivo de la intuición espacial quedaría incompleto si paralelamente al concepto de forma no se desarrollaran los de posición y extensión. La Geometría euclídea estudia propiedades de las figuras que permanecen invariantes respecto de cualquier movimiento atribuído a las mismas, pero no es menos cierto que estas propiedades se ponen de manifiesto imprimiendo a las figuras movimientos adecuados que las superponen a sí mismas apareciendo con ello relaciones de igualdad, simetría, etc., que constituyen la clave de las propiedades enunciadas.

En los *Elementos* de Euclides ya se hace uso del movimiento y superposición de figuras para las primeras demostraciones, pero una vez obtenidos de esta suerte los teoremas de igualdad de triángulos, todas las restantes relaciones de igualdad se reducen a dichos teoremas mediante «triangulación» conveniente de las figuras. Semejante estructuración racional de la Geometría engendra una concepción reticulada del espacio y de las formas, ocultando las relaciones directas entre forma y movimiento, es decir, las propiedades invariantes en cada movimiento y los grupos de ellos que conservan dicha invariancia, con los instrumentos geométricos propios de cada grupo.

Esta concepción de la Geometría a través del concepto de grupo es la única que sitúa la Geometría dentro del marco de la Matemática moderna, y, aun cuando no se hable a los niños del concepto de grupo, es indiscutible la conveniencia de dejar la semilla de él y de cultivarla mediante los movimientos más elementales : giros, traslaciones, simetrías y de los instrumentos capaces de realizarlos (compás, juego de escuadras, dobleces, papel de calco). Y otro tanto diremos de las relaciones de semejanza realizables, por ejemplo, mediante un pantógrafo fácil de construir en la propia Escuela.

Ante la imposibilidad de exponer, en el breve espacio de que dispongo aquí el detalle del desarrollo sistemático de la Geometría elemental a través de esta concepción, séame permitido remitir al lector curioso que se interese por ello a los *Elementos de Geometría* de la colección elemental intuitiva que escribimos hace años en colaboración con mi querido y admirado maestro don Julio Rey Pastor. Escrita la obrita para niños de los primeros cursos de Bachillerato, su orientación es perfectamente aplicable a los grados medio y superior de la enseñanza primaria, y quiero suponer que el conocimiento de este ensayo, primero de tal naturaleza en España, es el que ha motivado la invitación origen de estas líneas [3].

MAGNITUD Y EXTENSIÓN

Permítaseme añadir finalmente dos palabras sobre el cultivo de la intuición en lo que se refiere a las relaciones de magnitud y extensión. Iniciado el párvulo en las relaciones de mayor y menor mediante juegos de ordenación de modelos de tamaños distintos, al comenzar los grados primarios podrá ya interesársele en la pregunta, ¿cuántas veces mayor?, que implica la operación de *medida*. Convendría que en un principio estén las unidades relacionadas con dimensiones de sus propios miembros (palmos, pies, brazadas, etc.) [4]. La diversidad de medidas según el tamaño de los palmos, pies, etc., inducirá la conveniencia de adoptar patrones únicos y entonces se les hablará del metro y sistema métrico.

Los ejercicios de mediciones directas de longitudes en la clase, en su casa, en el jardín, etc., serán divertido juego de los niños y conviene prodigarlos, puesto que su repetición engendrará en ellos la intuición de la medida *sin efectuarla*, es decir, las apreciaciones *a ojo* que son luego de tanto interés en la vida práctica. ¿Cabrá tal mueble en este rincón?, ¿qué distancia aproximada hay entre la escuela y mi casa?, ¿es mayor o menor que la que hay de la iglesia al Ayuntamiento?, etc.

A propósito de las longitudes de trayectos de cierta extensión, es inevitable su asociación con el tiempo empleado en recorrerlas y el concepto inherente de velocidad. Se obtendrán las velocidades de marchas de los alumnos al paso rítmico corriente, y así podrán evaluar éstos las longitudes grandes por los tiempos de recorrido. No hay que decir que tales ejercicios son propios de los últimos grados.

Para la medida de ángulos es aconsejable un goniómetro rudimentario de cartón o cartulina construído en la propia clase.

---

[3] La concepción de la Geometría como conjunto de propiedades invariantes en ciertos grupos de transformaciones, se debe al matemático alemán KLEIN, en su famoso programa de ERLANGEN, pero tal concepción ha trascendido todavía muy poco en los textos elementales de enseñanza. SEVERI, en Italia, y BOREL, en Francia, han desarrollado libros elementales de Geometría inspirados, asimismo, en la idea básica de movimiento.

[4] Así procede la escuela decroylana.

Como es sabido, las extensiones superficiales ya no se miden por superposición directa y efectiva de la unidad sobre la superficie medida, pero la regla fundamental que da la superficie del rectángulo resulta de un razonamiento en que tal superposición es imaginada. Los suelos de baldosas cuadradas darán oportuna ocasión de ilustrar tal regla y su deducción. Las transformaciones por equivalencia justificarán las reglas que dan las áreas de las demás figuras poligonales. Los juegos de «puzzles» o rompecabezas con figuras geométricas recortadas, proporcionarán ejercicios útiles de transformación de figuras por equivalencia. Modelos convenientes de tales juegos materializarán relaciones métricas que pueden demostrarse por equivalencia, como, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, del cual podrá hacerse uso en los grados superiores para la medición indirecta de diagonales (antenas en las terrazas, cuerdas de tender, etc.). La superposición imaginada y los juegos por equivalencia suministrarán el material intuitivo sobre el que podrá fundarse la estimación a ojo de extensiones superficiales de tanto interés en el campo, como puede serlo el de las longitudes. Convendrá, pues, que el alumno se forme una idea clara de las extensiones de un *área*, una *hectárea*, una *fanega*, por comparaciones con la extensión de la clase, de la plaza del pueblo o ciudad, etc.

Las medidas de volúmenes y capacidades se relacionarán de modo no sólo inevitable, sino, además, conveniente, con las de peso y densidad. Las mediciones indirectas de capacidades mediante pesadas de frascos vacíos y llenos de agua, serán ejercicios de la mayor utilidad e importancia práctica. Las cucharadas que caben en el frasco darán oportuno ejercicio para calcular la capacidad de la cuchara o cucharita, y el número de gotas necesarias para llenar ésta permitirá obtener el volumen, así como el peso de cada gota. Los volúmenes y capacidades grandes, silos, depósitos de agua, etc. (supuestos, naturalmente, de formas geométricas sencillas: ortoedros, cilindros, etc.) proporcionarán no sólo ejercicios de aplicación de las reglas correspondientes, sino, recíprocamente, ejercicios de proyección a la realidad de datos numéricos, que por sí solos carecen de significación para el alumno.

Si, por ejemplo, como resultado de un ejercicio de cálculo del agua de lluvia caída en una ciudad (producto de la extensión por la altura del agua caída según datos meteorológicos) se llega a un resultado de 200.000 metros cúbicos, este resultado no dice absolutamente nada a la imaginación del niño, pero si se compara con la capacidad del edificio de la plaza de

FINES		DIDACTICA	GRADOS
Adquisición de técnicas elementales.	Reconocimiento y denominación de formas	Comparación de formas. Asociaciones motrices. Lenguaje geométrico	Párvulos y grados elementales.
	Construcción de formas	Dibujo libre. Recortes. Asociaciones estéticas. Trenzados, mosaicos, labores, etc.	Párvulos y grados elementales.
		Uso de instrumentos sencillos, cuerdas, reglas, compás, escuadras, plomada	Primaria elemental y media.
	Medición	Medición directa de longitudes y ángulos	Grados medio y super.
		Medición indirecta de longitudes. Relación pitagórica. Areas, volúmenes	Grados medio y superior.
Preparación para cultura superior	Cultivo de la intuición espacial... ...	Forma y posición. Movimiento. Simetrías. Traslaciones. Perpendicularidad. Paralelismo. Giros. Semejanzas ...	Grados medio y superior.
		Relaciones de magnitud. Mayor, menor. Estimación aproximada de longitudes. Asociación cinemática. Velocidades. Areas y volúmenes. Equivalencia. Puzzles.	Grados elemental, medio y superior.
	Iniciación al método lógico...	Descubrimiento de propiedades características y definición de figuras	Grado superior.
		Excepcionalmente, algún ejemplo de encadenamiento deductivo fácil	Grado superior.

toros y se llega a la conclusión de que el agua calculada podría llenarla dos veces, la cantidad calculada adquiere una imagen concreta que da vivencia precisa de su magnitud. Insisto en que es interesantísimo en todos los ejercicios de cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, proyectar luego los resultados en el mundo real o imaginativo del niño, con objeto de atender a la fase formativa de *concreción* de que hemos hablado en los comienzos de este artículo. Véanse resumidas en el anterior cuadro las ideas metodológicas y didácticas que forman la estructura del mismo, con indicación aproximada de los grados a que tales orientaciones didácticas pueden corresponder.

§ 2. SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA ARITMETICA EN LA ESCUELA PRIMARIA [1]

CRÍTICA DE LA ENSEÑANZA TRADICIONAL. LA DIFICULTAD DE LA CUESTIÓN

En el artículo precedente he tratado de ponderar las dos finalidades, formativa y utilitaria, de la enseñanza primaria. Quiero insistir ahora en el grave error que supone atender tan sólo a una de estas finalidades con olvido de la otra. La enseñanza tradicional de la Aritmética en la Escuela ha persistido durante largo tiempo en este error. Centrado todo su esfuerzo en adiestrar al niño en el mecanismo de las cuatro reglas, olvidó reflejar en su aprendizaje el proceso genético que les dió origen, así como las leyes dinámicas que las gobiernan; y de ello surgió una técnica enseñante iniciada con la torturante memorización de odiosas tablas, y desarrollada con separación radical de las cuatro operaciones; nada de simultanear ni relacionar su aprendizaje. Había que hacer del niño, en primer lugar, una máquina apta para sumar lo mejor posible muchos y largos sumandos; posteriormente se le iba convirtiendo asimismo en máquina de restar, de multiplicar, de dividir por una, dos, ... muchas cifras. Y el niño, convertido tras lento y penoso aprendizaje en autómata disparador de complicados reflejos adquiridos con interminables guarismos vacíos de significación, permanecía luego inerte como máquina ante cualquier problema aritmético de la vida, ante cualquier invitación al juego conceptual contenido en un enunciado. ¿Este problema, señor maestro, es de sumar, de restar, de multiplicar o de dividir?

Naturalmente, tal vacío conceptual no podía llenarse con las definiciones puramente verbalistas de los manuales escolares, definiciones repeti-

---

[1] Artículo publicado en «Vida Escolar», revista del Centro de Documentación y Orientación Didáctica de Enseñanza Primaria, núm. 7 y siguientes (1959).

das asimismo automáticamente ante el estímulo de la pregunta correspondiente. Aun en el supuesto de que el niño comprendiera tales definiciones memorizadas, seguía quedando un inmenso vacío entre ellas y la técnica operativa condensada en las reglas con las que manejaban a ciegas los guarismos decimales.

La humanidad había tardado muchos siglos en recorrer este camino y parecía inútil intentar la búsqueda de atajos por los que el niño pudiera caminar de modo parecido y abreviado para llenar ese vacío en corto tiempo. La enseñanza tradicional, impotente para fundamentar en un juego analítico adecuado a la infancia, la toma de conciencia y aún el descubrimiento de las reglas de acción operativa, optó por el cómodo recurso de anticipar su enunciado a su explicación. Sustituyó dicho análisis por simples órdenes con las que obtener imperativamente rápidos y fugaces rendimientos.

Pero este aprendizaje así impuesto, con tan enorme sacrificio de la espontaneidad del niño, engendraba como contrapartida natural, reacciones inhibidoras de defensa, cuando no la aversión definitiva hacia una disciplina tan duramente exigida. Y la enseñanza tradicional del cálculo se convirtió en el punto neurálgico de la escuela primaria, que todavía preocupa a educadores y pediatras.

He aquí, pues, condensado en difícil dilema, la grave cuestión que plantea la enseñanza de la Aritmética en la Escuela primaria: De un lado, la necesidad de la pronta adquisición de las técnicas elementales de cálculo, indispensables hoy al más humilde de los hombres civilizados; y de otro, la necesidad de que dicho aprendizaje no contradiga la evolución natural de conceptos e intereses del niño exigiendo de él un sacrificio tan estéril como contraproducente.

Veamos cómo la Escuela moderna ha tratado de resolver esta aparente antinomia, y de acercarse a una enseñanza que, lejos de castrar posibles aptitudes y vocaciones matemáticas, las favorezca y estimule. Pero antes digamos unas palabras sobre la influencia que las nuevas tendencias han ejercido en los manuales escolares.

LA ARITMÉTICA EN LOS MODERNOS MANUALES ESCOLARES

Aun cuando en la Escuela moderna el manual escolar ha perdido ya su antigua primacía, y hasta su razón de ser, es lo cierto que la realidad no puede evitar en muchos casos la enseñanza masiva, en la que un buen libro sigue siendo un elemento auxiliar útil, cuando no indispensable. La Escuela moderna, con sus métodos activos, su conducción eurística, su tendencia individualizadora, o de trabajo en equipos muy reducidos, resulta difícilmente aplicable a los grupos numerosos que siguen siendo por desgracia los que el déficit de escuelas impone todavía en muchos países. De aquí que el manual escolar no haya desaparecido, sino que haya tratado de adaptarse a las nuevas corrientes como elemento coadyuvante a una educación que si, por desgracia, no resulta ideal, se acerque todo lo posible a los principios que este ideal sustenta.

Justamente condenadas a desaparecer las vacías enciclopedias escolares exigidas de carrerilla, procuremos disponer, donde la ayuda y guía del libro resulte necesaria, de manuales concebidos a la manera de elementos sugeridores de la actividad del niño y administradores y ordenadores de ella. En este sentido, las ideas modernas en educación han influído notablemente en los manuales escolares del segundo cuarto de este siglo. Las hórridas tablas y cartillas repletas de series de ejercicios y de definiciones estereotipadas de escaso sentido, han dejado paso a libritos profusamente ilustrados, en los que se procura sugerir la noción de los números mediante imágenes variadas de múltiples conjuntos coordinables.

Si no se puede ejercitar la observación directamente sobre material adecuado en la escuela, será mal menor que se ejerza al menos sobre las estampas de un libro, estampas que el maestro cuidará de transferir a la vida real. El manual escolar de Aritmética ha pasado a ser hoy precisamente ésto: un amplio catálogo de sugerencias numéricas. Se penetra en el dinamismo operatorio mediante ejercicios seriados con gradación progresiva de dificultades; pero las cuatro operaciones ya no aparecen desligadas como en el sistema antiguo. Las inversas se estudian conjuntamente desde los primeros grados, y lo que marca el paso de un grado a otro no es ya el salto de una a otra operación, sino más bien la amplitud del campo numérico abarcado por la intuición del niño, hasta rebasar esta intuición llegando al mecanismo puramente abstracto en los últimos grados.

Extraídas de la vida las imágenes estimulantes iniciales, el retorno a esta misma vida en los ejercicios de aplicación no supone como antes un ejercicio de concreción exigido al margen de la disciplina de aprendizaje; el niño comprende mejor que antes las operaciones implicadas en los problemas que se le plantean.

La adquisición de una experiencia numérica, basada en imágenes concretas de los conjuntos que representan, supone un avance indiscutible sobre la simple agregación de unidades sucesivas a lo largo de la serie numérica memorizada con la tradicional operación de contar. Pero, como observa Piaget, la representación de los números en imágenes engendra una concepción estática de los mismos que no es la más adecuada para penetrar en el dinamismo operatorio del cálculo aritmético. Luego veremos cómo se consigue esto óptimamente con el material Cuisenaire. Pero antes analicemos los principios que han inspirado los diferentes tipos de Escuelas modernas y su influencia en la enseñanza de la Aritmética.

LA ARITMÉTICA EN LA ESCUELA MONTESSORI

Defensora, como nadie, de la libertad del niño en su evolución, la doctora Montessori la enfoca desde un punto de vista casi estrictamente *biológico.* La escuela es el ambiente que se crea alrededor del niño para favorecer su desarrollo y estimularlo, respetando su individualidad. La acción es sugerida, no impuesta por dicho ambiente. La maestra es tan sólo el enlace entre el niño y el ambiente escolar estimulante en el que se le ha colocado. Actividad, libertad e individualidad, son pues, los tres principios de la Escuela Montessori, y en ellos coinciden sustancialmente todos los educadores modernos. No así en lo que se refiere a la elección de estímulos para despertar la actividad del niño. El material montessoriano se propone cultivar actividades simples diversas, sensoriales, motrices e intelectuales, de cuya integración habrá de resultar el aprendizaje eficaz de las técnicas de cultura. Esta concepción, basada en un análisis y educación por separado de facultades (sentidos, movimientos, destrezas, memoria, imaginación, etcétera), se ha criticado modernamente. Sin embargo, las ideas básicas antes consignadas, dejaron profunda huella en los sistemas de educación de comienzos de siglo.

Ya hemos citado en el artículo anterior el interesante material empleado para la enseñanza de la Geometría. En lo que a la Aritmética se refiere, María Montessori introduce el material figurativo de los números enteros mediante barritas de longitudes proporcionales a ellos, marcando sus unidades con diferenciación de color. Tanto con este material como con otro similar, formado por conjuntos varios de cuentas de igual color ensartadas por alambres (variando el color de un número a otro) trata de dar personalidad a cada número, sin dejar por ello de hacer distinguibles sus unidades. En el material Montessori el número sigue siendo fundamentalmente un agregado de unidades, pero tal agregación no se relega a una operación mental, sino que se materializa presentando de momento inseparables las unidades que lo forman. La separación de dichas unidades y la simbolización de los conjuntos mediante cifras, se establece más tarde mediante nuevo material formado por husillos sueltos, reunidos en grupos de 1, 2, 3, ... y hasta 9, en casilleros rotulados con el símbolo numérico correspondiente. La actividad manual de agrupación, así iniciada, se prosigue luego dando origen a la numeración y a las operaciones aritméticas fundamentales.

Sin detenernos en más detalles, consideramos de interés cerrar esta brevísima reseña reproduciendo las razones que alega María Montessori en su *Manuale di Pedagogia Scientifica* (Ed. Alberto Morano, Napoli, 1935), justificando la presentación inicial de los diez primeros números mediante barras de longitudes variables de 1 a 10 dm., coloreando alternativamente las unidades componentes. Dice textualmente: «El reagrupamiento en un conjunto de las unidades que aparecen realmente separadas es un trabajo mental inaccesible de momento al niñito.» «La ventaja de este material consiste en poder presentar unidas, aunque distinguibles y numerables, las unidades componentes de cada número así representado.» Más adelante habremos de hacer alusión a estas observaciones.

LA ARITMÉTICA EN LA ESCUELA DECROLY

La escuela decrolyana procura ser, además de un medio *natural,* un medio *social* en el que el niño se desenvuelve experimentando estímulos análogos a los que han dado origen al desarrollo de la civilización humana a lo largo de los siglos. Consecuentemente con esta concepción, los programas siguen en cierto modo las necesidades bio-sociales derivadas de dichos estímulos. Las técnicas que a lo largo de dicho desarrollo aparecen (lectura, escritura, cálculo), quedan subordinadas al tráfico de ideas para el que fueron creadas. Este tráfico se favorece en el niño mediante el inevitable recurso del juego como actividad espontánea. Las ideas se desarrollan, además, de acuerdo con un orden psicológico natural según las tres etapas: de observación, asociación y expresión (abstracta, concreta). Estas son en líneas muy generales las características más acusadas de la escuela decrolyana.

No es nuestro propósito hacer aquí una crítica de ellas ni poner en tela de discusión la organización consecuente de la enseñanza mediante los centros de interés típicos de esta Escuela, los cuales se estructuran en torno a las necesidades primitivas del hombre: alimento, abrigo, defensa, etc., necesidades que estimamos ausentes de la consciencia del niño, por lo que, en busca de lo más natural y primitivo, se corre el riesgo de crear paradójicamente un clima de enseñanza artificioso. Con todo el respeto que nos merece la figura de Decroly, nos limitamos a exponer los fundamentos de su enseñanza para explicarnos la consecuencia más característica que de ello se deriva en el aprendizaje de la Aritmética y que es la introducción inicial de la noción de medida. Durante la etapa de observación, el niño aprecia *cualidades* (color, olor, gusto...) y entre ellas las que caracterizan magnitudes (grande, pequeño, alto, bajo, pesado, ligero...). De tales apreciaciones cualitativas pasa el niño insensiblemente a las primeras evaluaciones aproximadas como resultado de comparación (cuántas veces...). La operación de contar aparece así filial de la de medir. Las unidades de medida son primero unidades naturales o de la vida corriente: palmo, pie, peso de frutas secas, capacidad de vasos, cucharas, etc. Un proceso natural de perfeccionamiento y exactitud establece la transición a las unidades y sistemas convencionales adoptadas por el hombre civilizado.

Los problemas y las técnicas de cálculo necesarias surgen de la vida creada en el ambiente de la escuela: Peso, compra-venta y contabilidad de los alimentos necesarios a los niños, a los animales criados en la propia Escuela; compra de plantas para el jardín, de materiales para la fabricación de objetos, precio de coste de cada objeto, ganancias y pérdidas en los juegos, gráficas de temperatura, de agua caída, de pesos y tallas de los alumnos, de sus progresos en la rapidez de resoluciones, en la comisión de faltas y errores, etc.

Indudablemente una aritmética surgida así, de la propia vida creada en la Escuela no correrá el riesgo de inadaptación de la enseñanza clasicona, pero los documentos que sobre el método Decroly tenemos a nuestro alcance, no nos han ilustrado suficientemente acerca del modo como se ha resuelto en él la larga y difícil transición que va de los motivos espontáneos a los automatismos dominados, y mucho tememos que, tras el espejuelo de una motivación inicial más o menos atractiva para el niño, se venga a caer luego en los procesos de adiestramiento clásicos con todos sus defectos. Nos sugieren este temor las palabras que traducimos del libro de Decroly y Hamaïde: «Le calcul et la mesure au premier degré de l'Ecole Decroly», en el Capítulo VI, sobre la iniciación al cálculo cuando analiza el dilema sobre si se debe utilizar o no un material objetivo en los comienzos del aprendizaje del cálculo. Dice así: «A nuestro juicio, hágase lo que se haga, el niño, en general, en sus primeras ocasiones de manejar los números, está en contacto con objetos, con seres aislados y con cantidades que se esforzará para reducir en partes. Pero, por otro lado, la tendencia a la economía (sobre todo si está presente el ejemplo de los adultos en la vida diaria, para incitar a ella) logra pronto que el niño, si está suficientemente dotado, abandone los medios concretos para utilizar el cálculo mental cada vez más desprendido de toda intuición material; así se ve conducido a recurrir a las tablas aprendidas de memoria.»

LA ARITMÉTICA EN LA «MAISON DES PETITS», DE GINEBRA

La «Maison des petits», de Ginebra, inspirada asimismo en la idea de que la educación del niño debe seguir las etapas naturales de su evolución, caracteriza estas etapas en torno a su actividad espontánea, y estima que dicha actividad en un primer estadio es de pura manipulación. Es esta una etapa en la que la acción no implica una finalidad, en la que el niño hace por hacer, como simple y necesaria expansión de su vitalidad. Recorta, pega, amontona..., por el simple placer de recortar, pegar, amontonar... La fantasía superpone luego a lo construído los atributos y las finalidades que dicte su deseo. Poco a poco la acción sugiere el pensamiento, y en una etapa posterior termina dirigida por él. El niño, atribuyéndose ya finalidades concretas, construye tanteando, rectificándose, investigando para adaptarse a las exigencias exteriores. En una etapa final el trabajo se sistematiza y lleva a la formación de las nociones abstractas a través de las actividades esquemáticas derivadas de sus propias realizaciones (número, cálculo; forma, dibujo...).

Todo el sistema educativo de la «Maison des petits» parte, pues, de la *actividad constructiva* que apasiona al niño, y que, empezando por ser desordenada, se vuelve progresivamente metódica, racional, conduciendo finalmente a la abstracción matemática y a las técnicas auxiliares de cálculo.

Para no citar más que un ejemplo, la actividad de engarce de cuentas en un hilo empieza siendo una simple satisfacción motriz y termina imponiéndose una finalidad (la construcción de collares), con sus exigencias estéticas (ordenación de colores, disposiciones simétricas, etc.) y aun numéricas, como ocurrió en el caso notable de una niña, citado en el libro de Audemare, Lafendel *La Maison des petits* (Delachaux-Niestlé, Neuchatel, Suiza), que, por simple y espontáneo deseo, terminó engarzando, por este orden, una cuenta amarilla, dos verdes, tres rojas, cuatro azules, cinco violetas y seis naranjas. Sin sugestión exterior, la manipulación del material había despertado en esta niña el deseo de una satisfacción intelectual. Ello inspiró a los educadores de la «Maison» la construcción de ábacos especiales de bolas, sugeridores de actividades similares.

El referido libro nos ilustra sobre el material usado en la «Maison des petits» para despertar en el niño la apetencia de construcciones aritméticas análogas, conducentes a la toma de conciencia de la numeración y de las reglas y leyes de cálculo. Planchas con bolas de colores, pilas con discos coloreados ensartables, tablas pitagóricas materializadas con fichas, juegos de mosaicos, bloques de construcciones que conducen al niño hacia las nociones de medida y número: «Mi locomotora tiene tres cubos, la mitad de un cubo, un cuarto de cubo, un prisma grande y nueve pequeños.» «Llega un momento —dicen los autores— en que sólo el cálculo interesa al niño; se abstrae en adiciones según combinaciones múltiples. Descubre la multiplicación, la división, la sustracción, los números cuadrados, cúbicos...»

En la imposibilidad de detenernos en más detalles, cortamos aquí la reseña referente a la «Maison des petits» recogiendo de ella la posibilidad de llegar por vía concreta constructiva a la dinámica aritmética abstracta, proceso que hemos de detallar con mayor detenimiento en el método de los números en color.

MÉTODO DE PROYECTOS

Citemos sólo al paso el interesante movimiento pedagógico creado por Dewey en Norteamérica, llamado «Método de proyectos», que afecta más a la concepción general de la enseñanza en los grados superiores que a los detalles específicos de la didáctica del cálculo en los inferiores.

Partiendo de los mismos principios de activismo, en los cuales pensamiento y acción se involucran mutuamente, Dewey concibe la Escuela como un medio fundamentalmente social. El más adecuado acicate disparador de la acción pensante, o del pensamiento activo, en tal medio es la formulación de situaciones problemáticas llamadas «proyectos» vinculadas generalmente a la comunidad escolar: Organización de una fiesta con su presupuesto de gastos; de una visita escolar; de una excursión con estudio de itinerarios en planos y mapas; proyecto de un Banco escolar de ahorro; presupuestos de instalaciones varias en la Escuela; de limpieza de la misma, etc. El simple enunciado de tales cuestiones sugiere por sí solo la gran riqueza de estudios y técnicas adherentes y auxiliares necesarias para derivar de ellas un eficaz programa educativo en el que no sólo van a entrar en juego conceptos matemáticos, sino también geográficos, económicos, industriales, éticos, etc.

Desde un punto de vista pedagógico, la enseñanza así organizada, rompe, naturalmente, con todos los programas preconcebidos, ya que muchos de tales proyectos surgen ocasionalmente de la vida de la Escuela, y es de desear que así surjan en gracia al interés y a la espontaneidad de la propia enseñanza. Esta adquiere así un carácter no tan sólo social, sino estrictamente funcional y humano. Por otra parte la consecución del proyecto da amplio margen a la autocorrección durante su proceso, a la jerarquización y dependencia voluntaria de actividades y a la sensación de plenitud y logro una vez realizado. El ciclo que cada proyecto recorre: propósito, organización, realización, verificación, resulta así de la mayor eficacia educativa.

Solamente al paso hemos querido citar este interesante movimiento pedagógico, que, como hemos dicho, proyecta amplias perspectivas sobre la enseñanza en los grados superiores. Practicado por nosotros mismos en los primeros cursos del Bachillerato hemos obtenido con él resultados excelentes en orden al incremento de interés del alumnado, a su organización en equipos, a su contacto con las necesidades vitales del Instituto, al estímulo favorable a su conservación y cuidado, etc.

MÉTODO MACKINDER

Características muy distintas tiene el método de la profesora inglesa Mackinder en su esfuerzo por conseguir una enseñanza individualizada en clases numerosas. Particularmente interesante es el material usado para la enseñanza de la Aritmética en los párvulos, pero como lo consideramos ampliamente superado por el material Cuisenaire, al que hemos de referirnos en seguida, no haremos más que citarlo muy por encima. Se parte, en el método de Mackinder, de la asociación temprana de la cifra con los conjuntos que representa. El material invita a establecer esta correspondencia mediante un juego de colocación de tarjetones con las cifras impresas junto a los conjuntos representados, y viceversa. Se hace también uso del color para favorecer esta asociación.

Con las primeras cifras se introducen asimismo las primeras operaciones de suma y resta. Es interesante consignar algunas experiencias anotadas con el uso de este material, en lo referente a los procesos espontáneos de automatización del cálculo. Las operaciones son al principio resueltas por los niños mediante lentos procesos de recuento con los abalorios o fichas manejadas, que sólo al final se traducen en cifras; más tarde, los procesos se simplifican, sustituyendo los objetos por puntos, y finalmente escriben directamente el resultado en cifras, sin manipulación ni dibujo auxiliar intermedios. La numeración decimal se introduce más o menos como es natural hacerlo, es decir, utilizando los principios de agrupación y de valor relativo de las cifras según su posición. Las agrupaciones en decenas se realizan con cuentas enhebradas en alambres. Un juego de tarjetas favorece el aprendizaje de la lectura e interpretación de números de dos cifras. La multiplicación se inicia mediante manipulación de conjuntos de bandejitas (tantas como indica el multiplicando) en cada una de las cuales se colocan tantas cuentas o judías como indique el multiplicador. La memorización de los resultados se consigue por simple repetición de ellos en colecciones de tarjetas con numerosas multiplicaciones planteadas a modo de ejercicios. De dichas tarjetas se pasa a las de división invirtiendo el juego.

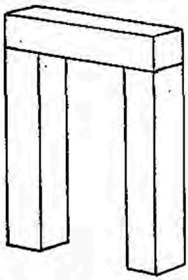
Interrumpimos aquí la reseña de este método, que constituyó una notable novedad hace unos treinta años, limitándonos a resaltar el respeto que se sigue guardando en él a la noción de número como agregado de unidades. Carácter más sutil, y acorde con las corrientes del pensamiento matemático actual, van a tener los números en el método que pasamos a exponer.

EL MÉTODO DE LOS NÚMEROS EN COLOR

Hemos visto cómo María Montessori señala agudamente las dificultades primeras del párvulo para reconocer los números como agregados de unidades. Por ello prefiere materializarlos en un principio, mediante barras de longitud proporcional, si bien pintando de colores alternados las unidades que integran cada longitud para distinguirlas. Más tarde se considera obligada a separar las unidades y a reagruparlas para materializar la numeración y las operaciones.

El profesor belga Cuisenaire representa también los diez primeros números mediante barritas de longitudes proporcionales a ellos (regletas prismáticas cuya sección es un centímetro cuadrado, y cuyas longitudes varían de centímetro en centímetro). Pero da un paso más audaz al reforzar la personalidad de cada número: 1.° No señalando las unidades que integran cada regleta. 2.° Pintando, por el contrario, de un mismo color todas las regletas de igual longitud y variando los colores de un número a otro (blanco para el 1, rojo para el 2, verde claro para el 3, rosa para el 4, amarillo para el 5, verde oscuro para el 6, negro para el 7, marrón para el 8, azul para el 9 y naranja para el 10). Con este material desarrolla Cuisenaire todo el aprendizaje de la Aritmética. El elemento físico de referencia que así queda asociado a cada número ya no es el conjunto de sus unidades (conjuntos que tantas confusiones originan al niño), sino más bien la doble adherencia de longitud y color, con lo que vista y tacto intervienen conjuntamente en el reconocimiento estereognósico del número. Cuisenaire, de este modo, no solamente logra suministrar al niño un soporte del número mucho más dúctil y manejable, sino que, de paso, dando a los números personalidad propia, y sometiéndolos a un juego perceptivo-activo adecuado, acierta a materializar el campo numérico y a desarrollar en él una dinámica aritmética desde la primera infancia que concuerda (tal vez sin proponérselo) maravillosamente con la concepción estructural de la matemática abstracta del siglo XX. Veamos someramente cómo se realiza tal milagro.

Al ofrecer a los niños un montón de regletas para que jueguen libremente con ellas, la inmensa mayoría se entrega inmediatamente a una actividad constructiva, y la primera y más frecuente construcción que realizan es un dintel con sus dos jambas (véase figura). No yerran al elegir éstas de igual color (por ejemplo marrón), ya que pronto han intuído,



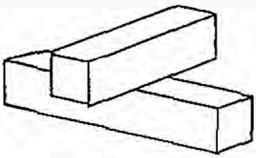
o comprobado adosándolas, que todas las regletas de un mismo color tienen igual longitud. Cuando no hallan regleta pareja de igual color pronto componen una jamba de igual altura superponiendo, bien alineadas, dos regletas (amarilla y verde clara) que sumen la misma longitud. Este simple ejercicio, espontáneo e inmediato, ha suministrado ya a los niños una rica experiencia: 1.ª La equivalencia de regletas de igual color. 2.ª La equivalencia de cada regleta con alineaciones compuestas de otras dos o más.

Las acciones de *adosar* y la de *alinear* han sugerido espontáneamente las nociones de *igualdad* y de *suma*. Pero al mismo tiempo el niño, al buscar la regleta que falta para completar con otra una jamba mayor, invierte la operación de suma, es decir, *resta* complementando. Los errores se rectifican por sí mismos. El material permite constantemente la autocorrección, lo que constituye una de sus más acusadas y apreciadas cualidades.

La formación de trenes de igual color, mediante alineación de regletas todas iguales, origina simultáneamente los conceptos de múltiplo, de divisor, de producto y de cociente. La estudiada asociación de colores con que se han teñido las regletas favorece esta relación de multiplicidad. Así los colores con pigmento encarnado (rojo, rosa, marrón) corresponden a las primeras potencias de dos: dos, cuatro, ocho; mientras los de pigmento azul (verde claro, verde oscuro y azul) corresponden a los múltiplos de tres: tres, seis y nueve; y los de pigmento amarillo (amarillo y naranja) corresponden al cinco y al diez. El uno, divisor de todos, queda en blanco, mientras el siete (que no admite otro divisor) se ha teñido de negro. Jugando a trenes, pronto se da cuenta el niño de que no todas las longitudes pueden descomponerse en regletas de igual color, como no sea echando mano de las blancas; queda así caracterizada la singularidad de los números primos.

En toda esta dinámica operatoria las propiedades asociativa y conmutativa de la suma se adivinan implícitamente intuídas en la misma conducta constructiva de los niños, los cuales asocian y permutan regletas indistintamente. En resumen, todas las longitudes que pueden obtenerse alineando regletas, forman un grupo conmutativo respecto de la operación de suma, y tal estructura es la que los niños practican, ejercitan y aplican intuitivamente desde sus primeros juegos aritméticos, realizados todavía al margen de toda representación simbólica. Saben, por ejemplo, que la verde clara más la rosa equivalen a la negra, que la marrón equivale a amarilla más la verde clara y a otras muchas combinaciones que han ido experimentando; los niños descubren una aritmética de longitudes y colores que, en el momento que el maestro juzgue oportuno, puede convertirse en la aritmética ordinaria mediante la aportación de las representaciones cifradas de los colores y longitudes.

Otros niños (los menos) empiezan su juego libre ordenando las regletas en escalera. De las manipulaciones efectuadas en esta ordenación se ve asimismo como intuyen pronto las propiedades características de los conjuntos bien ordenados. La estructura de orden es otra de las que el material Cuisenaire ejercita inmediatamente. Una vez formada la escalera de regletas, pronto se dan cuenta de que la altura de los peldaños es la de la regleta blanca (la misma que al formar trenes estaba exactamente contenida en todas las demás). Sobre los peldaños de esta escalera se pueden introducir las cifras y su expresión verbal. El número ordinal y el cardinal sinónimo surgen, pues, a la par (como orden y como agregado de regletas blancas). La limitación a diez del número de regletas diferentes sugiere más tarde la numeración decimal y la dinámica de la suma en ella.



Otros niños clasifican adosando unas al lado de otras las regletas de igual longitud. Forman así placas o pavimentos que pueden ser cubiertos igualmente por otro sistema de regletas en el sentido del ancho. Esta experiencia sugiere la conmutatividad del producto y la representación del mismo por los dos factores, es decir, por dos regletas cruzadas, una de cada sistema (multiplicando y multiplicador). La conmutatividad del producto se simboliza así por la inversión de la cruz, de modo que el brazo superior pase a ser inferior, y viceversa. Es maravillosamente rápida la asimilación por los niños de este primer lenguaje simbólico algebraico, utilizado por Cuisenaire para representar un producto y descubrir sus propiedades. A partir de cierta edad los niños, por sí solos, saben interpretar correctamente una cruz uno de cuyos brazos es suma de dos regletas, y llegan a la equivalencia con la suma de las cruces construídas sobre cada uno de los sumandos. La propiedad distributiva del producto queda así establecida mediante un juego que supone ya un considerable grado de abstracción. El grupo aditivo queda de esta suerte enriquecido con la multiplicación, cerrando la estructura en anillo característico del conjunto de los números enteros. Apilando regletas varias en cruz quedan simbolizados los productos de varios factores, y en particular, cuando son iguales, las potencias. La dinámica operatoria con los exponentes surge al superponer dos o más pilas. En grados superiores de primaria puede llegarse de esta manera hasta descubrir jugando las propiedades de las progresiones aritméticas y geométricas elementales [2].

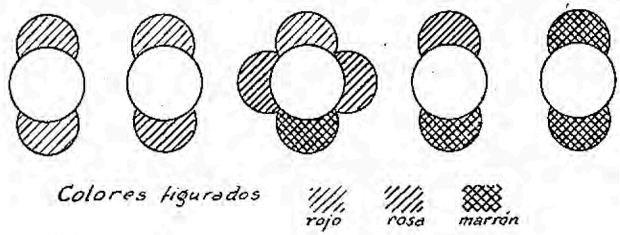
Pero, volviendo atrás, señalemos también el interés didáctico que tiene el material gráfico que acompaña a las regletas en el método de Cuisenaire.

La experiencia en la alineación de trenes de igual color que sugirió el concepto de número primo, sugiere asimismo la posibilidad de construir de modos diferentes un número compuesto. Se obtiene así un nuevo modo de descubrir la propiedad conmutativa (por ejemplo, un tren de tres regletas amarillas es igual a otro de cinco regletas verdes). Pero en ocasiones la posibilidad de soluciones es más rica, como en el caso de $12 = 3 . 4 = 4 . 3 = 2 . 6 = 6 . 2$ y de $20 = 4 . 5 = 5 . 4 = 2 . 10 = 10 . 2$, etc. La estructura multiplicativa de los varios números compuestos obtenidos por producto de dígitos (regletas) se resume en un cartel mural en el que se agrupan sucesivamente los múltiplos de dos, de tres, de cinco, de siete, etc.; cada número compuesto se designa simbólicamente mediante dos lunulas coloreadas con los colores de los factores que lo componen, lunulas que abrazan diametralmente un circulito en blanco en el que el niño coloca, jugando, el guarismo correspondiente a dicho número. Si alguno de tales productos admite dos descomposiciones en factores, el sistema de lunulas es también doble.

---

[2] Es más, en un experimento didáctico efectuado en el Instituto San Isidro con alumnos de 5.° curso de Bachillerato, partiendo de estructuras en escaleras y en pirámides, formadas con regletas, he conseguido desarrollar la teoría y cálculo de progresiones aritméticas de orden superior, con sus tablas de diferencias, logrando hacer en una lección aplicaciones al cálculo de la suma de cuadrados y cubos de los n primeros números, y al de las regiones en que n planos genéricos dividen al espacio.

A continuación indicamos en un grabado (simbolizando los colores mediante diversidad de rayados) el aspecto que ofrece la primera fila de figuras representativas de tales productos. Se trata de los productos :



$4 = 2 \cdot 2$	$8 = 2 \cdot 4$	$16 = 2 \cdot 8$ $= 4 \cdot 4$	$32 = 4 \cdot 8$	$64 = 8 \cdot 8$

Análogamente se disponen las restantes filas hasta completar el cuadro mural de productos siguientes, que, por comodidad, transcribimos en cifras.

$10 = 2 \cdot 5$	$20 = 2 \cdot 10$ $= 4 \cdot 5$	$40 = 4 \cdot 10$	$80 = 8 \cdot 10$
$6 = 2 \cdot 3$	$12 = 2 \cdot 6$ $= 3 \cdot 4$	$24 = 3 \cdot 8$ $= 4 \cdot 6$	$48 = 6 \cdot 8$
$9 = 3 \cdot 3$	$18 = 2 \cdot 9$ $= 3 \cdot 6$	$36 = 4 \cdot 9$ $= 6 \cdot 6$	$72 = 8 \cdot 9$

$25 = 5 \cdot 5$	$50 = 5 \cdot 10$	$100 = 10 \cdot 10$
$15 = 3 \cdot 5$	$30 = 3 \cdot 10$ $= 5 \cdot 6$	$60 = 6 \cdot 10$
$14 = 2 \cdot 7$	$28 = 4 \cdot 7$	$56 = 8 \cdot 7$
$63 = 7 \cdot 9$	$49 = 7 \cdot 7$	$81 = 9 \cdot 9$

$45 = 5 \cdot 9$	$90 = 10 \cdot 9$
$27 = 3 \cdot 9$	$54 = 6 \cdot 9$
$35 = 5 \cdot 7$	$70 = 10 \cdot 7$
$21 = 3 \cdot 7$	$42 = 6 \cdot 7$

Esta tabla de estructuras coloreadas, simbólicamente representativas de las diversas descomposiciones factoriales de los productos de la tabla de multiplicar, sustituye con enorme ventaja a ésta. En primer lugar porque habitúa al niño a reconocer y a memorizar visualmente tales estructuras por vía directa. Cada producto no es ya el término de un sonsonete fijado en la memoria auditivamente a fuerza de repetir la tabla en sentido irreversible. Cada producto tiene su personalidad propia (y a veces múltiple) dispuesta a ser aplicada en sentido directo o inverso, lo mismo en la multiplicación que en la división, y, lo que es más difícil, en la descomposición en factores. La fijación en la memoria no se fuerza, se deja que se establezca por sí sola según procedimientos necesarios de repetición amenizados mediante juegos de lotería y de cartas, cuyos símbolos lunulares (los mismos del cartel mural) tiene que interpretar el niño para reconocer si corresponde a su lote el número sorteado, o para saber si gana o pierde al evaluar las bazas en el juego con su compañero.

Los niños así ejercitados adquieren una riqueza tal de vivencias numéricas estructurales que el cálculo mental resulta para ellos infinitamente más fácil que para los instruídos según los sistemas anteriores. Su enorme facilidad sorprendió grandemente al profesor Gattegno, del Instituto de Educación de la Universidad de Londres, cuando, hacia el año 1952, acertó a pasar por Thuin (Bélgica), tomando contacto con el profesor Cuisenaire. Desde entonces Gattegno ha dedicado casi íntegramente su actividad a la propagación del método por el mundo entero. Sólo el convencimiento profundo de que tal método constituía la solución definitiva de la enseñanza del cálculo aritmético y la liberación de la tortura que esta enseñanza había supuesto hasta entonces para la infancia, pudo determinar a este matemático, tan eminente como psicólogo y educador, a llevar la buena nueva a todas las latitudes, efectuando miles de experiencias con niños de todas las razas y condiciones, llegando finalmente, en aras de su apostolado, a renunciar incluso a la estable y brillante situación de que gozaba en la Universidad de Londres. La enorme y variada experiencia acumulada en estos años le ha permitido profundizar en el método y dominarlo en tal forma que en varios aspectos, especialmente en los que se proyectan sobre la matemática del futuro, ha llegado mucho más lejos que el propio Cuisenaire. El es, en definitiva, quien ha sabido ver en el método de los números en color el lenguaje elemental adecuado a la matemática de hoy y de mañana.

Mención especial merece a este respecto la técnica que Gattegno propugna para la enseñanza de las fracciones con el material Cuisenaire. En la Aritmética clásica la fracción se introduce siempre como un operador que actúa sobre una unidad determinada descomponiéndola en partes equivalentes y reuniendo un cierto número de ellas. Sumar fracciones en Aritmética clásica es hallar la fracción operador que da directamente la suma de los resultados de los operadores sumandos aplicados a la misma unidad. La fracción producto no es otra cosa que el operador resultante de aplicar uno de los factores al resultado de aplicar el otro a la unidad. La equivalencia entre operadores, y el hecho de ser la suma y el producto independientes de la unidad a que se aplican, sugiere, en un segundo estrato de abstracción, el concepto de número fraccionario; de este concepto se suele pasar finalmente (en grados mucho más avanzados) al concepto mucho más abstracto de «par de números naturales dados en un orden».

Pues bien, el enfoque inicial del concepto de fracción que propugna Gattegno con el material Cuisenaire responde mucho más al de par ordenado de regletas que al de operador antedicho. Se comprende que así sea, puesto que las regletas son indivisibles y no cabe fraccionarlas, sino compararlas, con lo que el concepto de razón, que involucra el par, desplaza al de operador.

Si adosamos la regleta blanca a otra cualquiera de las demás, por ejemplo la amarilla, la comparación de ambas puede enunciarse diciendo: «si la blanca vale uno, la amarilla vale cinco; o, también, si la amarilla vale uno, la blanca vale un quinto, o bien es un quinto de la amarilla». Introducido este vocabulario, el niño contesta inmediatamente «dos quintos» a la pregunta: ¿qué es entonces la roja de la amarilla? Análogamente, la nomenclatura de un tercio, un séptimo, etc., permite contestar que la roja es los dos tercios de la verde clara y los dos séptimos de la negra; mientras la verde clara es los tres medios de la roja, y la negra los siete medios de la roja, etc. Cada regleta adquiere así nombre distinto según la que se le adosa como término de comparación, y también según el orden de comparación. Tal nombre es, pues, atributo del par de regletas y de su orden.

La suma roja + verde clara se interpreta $2 + 3$ si el término de comparación de ambas es la blanca, pero se interpreta $2/7 + 3/7 = 5/7$ si se comparan con la negra. La suma de fracciones de igual denominador se obtiene así por sí sola.

La equivalencia de fracciones $a/b = am/bm$ aparece también como consecuencia del mismo juego comparativo. Si la roja (2) es los $2/3$ de la verde (3), también la rosa (4) (formada de dos rojas) será los 2/3 de la verde oscura (6), formada de tres rojas. Análogamente, para establecer que $am/bm = a/b$ basta tomar la regleta m como término de comparación del nuevo numerador y denominador. Una vez establecida la transformación de fracciones por equivalencia, la suma de fracciones de denominadores distintos se reduce fácilmente al caso anterior.

Para el producto introduce Gattegno técnica análoga a la de la suma, observando la existencia de un caso trivial por el que se comienzan los ejercicios; es el caso en el que el denominador del primer factor coincide con el numerador del segundo: 1/3 de 3/5 es evidentemente 1/5; y en consecuencia 2/3 de 3/5 será 2/5, etc.; en general $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$. Si las fracciones dadas no verifican esta condición se pueden transformar en otras dos equivalentes a ellas que la verifiquen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bc} \cdot \frac{bc}{bd} = \frac{ac}{bd}$, obteniéndose la regla clásica.

Para más detalles y aplicaciones del método de los números en color remitimos al lector a los libros que los mismos Cuisenaire y Gattegno tienen publicados, bien sea por separado, bien en colaboración [3]. En ellos se ilustrará el lector de la forma en que los autores establecen el tránsito del aprendizaje con el material a los problemas aritméticos de la vida, tránsito interesante, dado el carácter semiabstracto del material.

Terminamos reproduciendo las palabras que el propio Gattegno estampa al final de uno de sus artículos sobre el método [4]:

«Estamos excesivamente atentos al modo cómo el niño asimila los conocimientos de los adultos, de tal forma que algunos juzgan escandaloso que el niño muestre saber algo sin que el adulto se lo haya enseñado. Sin embargo, cualquiera puede asegurarse de que el niño, en presencia de una

---

[3] En castellano puede consultar: G. CUISENAIRE y C. GATTEGNO, *Números en color*, publicado por la Sección de Publicaciones de la Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación Nacional, Madrid, 1956. Así como C. GATEÑO, *Aritmética con números en color*, libros primero, segundo, tercero y cuarto, Madrid, 1957-59.

[4] V. C. GATEÑO, *El estudio de la Aritmética con ayuda del color asociado a la longitud.—El método Cuisenaire*, «Gaceta Matemática», núms. 2 y 3; 1956. (Traducción del que con igual título publicó en el mismo año en «Le Courrier de la Recherche pédagogique».)

situación a su alcance, invierte todos los modos de hacer que le atribuyen y ofrece siempre al observador atento un punto de vista original.

»No temo equivocarme volviendo a decir que en el trabajo aritmético, la aparición del color tal como Cuisenaire la ha concebido, ha permitido liberar al niño de mil obstáculos situados en su camino por el adulto inhábil. Nuestros sabios psicólogos tendrán gran alegría en reanudar sus estudios sobre el pensamiento numérico del niño si aceptan no volver a preguntarle con intención de averiguar hasta qué punto piensa como ciertos adultos, y si utilizan por el contrario, para su edificación, una situación compleja en la que el niño se sienta absorbido y creador, como en las que nosotros le hemos ofrecido.

»Nuestros maestros hallarán también en el material Cuisenaire un medio radical de renovar su enseñanza, mantenida en su aridez durante siglos, a causa del predominio de la unidad, y de la ausencia de una verdadera comunicación con el espíritu investigador del niño, mucho más cercano de nuestras concepciones matemáticas modernas, en parte cualitativas.»

§ 3. LA DIDACTICA MATEMATICA A LO LARGO DE LOS CICLOS MEDIOS

DIFICULTADES DE LA PROGRAMACIÓN CÍCLICA

En otras ocasiones hemos hecho alusión a las ventajas del método cíclico, así como a la dificultad de la organización en ciclos de una materia, como la matemática, estructurada desde muy antiguo según unidades lógicas bien definidas: Aritmética, Geometría (organizadas por los griegos), Algebra, Trigonometría (árabes, Renacimiento), Geometría analítica y Cálculo infinitesimal (siglos XVII y XVIII). Claro es que, además de la ordenación jerárquica que la misma evolución histórica de tales disciplinas ha determinado, cada una de ellas se desarrolla a su vez según una amplia gradación de dificultades. Ello determina la inconveniencia de encasillarlas globalmente una tras otra, tomando como casillas los años que van de la niñez a la adolescencia, tal cual se hacía en el Bachillerato de comienzos de siglo. Los alumnos de Euclides no fueron niños; la Aritmética y la Geometría manejan conceptos, estudian problemas, y adoptan métodos que llegan a rebasar las posibilidades intelectuales de un niño de 10 a 12 años. Se hace, pues, necesario desintegrar tan venerables unidades lógicas para integrar otras según principios mejor adaptados a la evolución psicológica del escolar. Y ésta es la principal dificultad de la ordenación cíclica de materias y de la programación consiguiente, en la que es preciso equilibrar las tres exigencias en lucha: la exigencia científica de la materia en sí, la exigencia psicológica del niño, y la exigencia social que quiere hacer de él un ser útil.

La solución simplista consistente en recortar capítulos sucesivos de la Aritmética, Geometría, Algebra y Trigonometría clásicas, y en irlos pegando de nuevo alternadamente en los programas a lo largo del Bachille-

(*) Artículo publicado en la «Revista de Educación», números 95 y 97 (1959).

rato (como se hizo, por ejemplo, en nuestro plan de estudios de 1934), no podía satisfacer ni unas ni otras exigencias, esta mala interpretación del método cíclico motivó su descrédito y la añoranza con que muchos profesores recordaban las antiguas asignaturas.

La solución correcta exigía la total reestructuración de la materia según unidades nuevas de carácter funcional que vinieran a reemplazar las antiguas unidades de carácter lógico, con ventaja para la enseñanza. La historia misma, en su aspecto genético más que cronológico, puede ayudarnos a perfilar dichas nuevas unidades funcionales ya que, como he dicho en artículos anteriores, el proceso genético de formación de los conocimientos en el individuo guarda indudable relación con el que ha tenido en la especie humana.

LOS PRIMEROS CICLOS MEDIOS Y EL MÉTODO INTUITIVO

Actividades matemáticas primeras del hombre fueron sin duda las de contar, medir y construir. El hombre primitivo contaba sus rebaños, medía sus terrenos, construía sus cabañas. De tales actividades surgieron sus primeros conocimientos de Aritmética y Geometría. Hoy las generaciones que nos han precedido nos han legado dichos conocimientos estructurados y perfeccionados. Disponemos de un sistema de numeración que nos permite contar y calcular cómodamente, según técnicas que el niño aprende ya en la escuela primaria. Disponemos, asimismo, de un sistema de unidades y de instrumentos que nos permiten medir y construir con mayor perfección que antaño. Pero ello no altera la primigenia de tales actividades en la evolución funcional de la Humanidad. Parece, pues, razonable organizar un primer ciclo de matemáticas en el Bachillerato alrededor de estos tres verbos: contar, medir y construir.

Hablo, naturalmente, de contar en un sentido lato, que implique a la vez numeración y cálculo. Calcular no es, en el fondo, más que abreviar la operación de contar los conjuntos que se obtienen agregando, disgregando, reiterando, repartiendo..., la revisión razonada de la numeración y de las operaciones aritméticas con enteros y decimales constituyen, pues, un primer objetivo natural de la Matemática en el Bachillerato.

Al emplear el adjetivo «razonada» no queremos significar lo mismo que racional deductiva o reductiva. Toda la enseñanza matemática tiene que ser razonada, de otro modo se convierte en un empirismo recetario sin valor formativo. Pero una cosa es la organización racional de la ciencia matemática, que es esencialmente reductiva de unas verdades a otras; y otra cosa muy distinta es la búsqueda razonada del acceso directo a cada verdad a través de amplias realidades concretas. El niño puede llegar a comprender y hasta a descubrir por sí mismo la estructura de las operaciones que realiza y las verdades que aplica por acción directa, real o imaginada, sobre cosas y hechos que las evidencien [1]; y este tipo de enseñanza matemática, que es razonada sin ser abstracta, que es realista sin ser empírica, es la que hemos calificado de enseñanza intuitiva y la que propugnamos en los primeros ciclos del Bachillerato.

La actividad de agrupación de objetos aislados en grupos equivalentes; la de éstos en grupos de grupos según la misma cuantía (base, etc.), permite al niño penetrar fácilmente en la estructura de la numeración y de sus operaciones, y aun cuando pueda parecer inverosímil a los lectores que no lo hayan experimentado, los niños que han penetrado en tal estructura llegan en una sesión a operar en bases distintas de la decimal sin dificultad alguna.

La operación concreta de medida sugiere el concepto general de fracción cuando la unidad se divide en un número cualquiera de partes, y, en particular, sugiere la fracción decimal cuando se divide según potencias de 10, como ocurre en todo el sistema métrico decimal de medidas que se repasa minuciosamente en este ciclo. En este caso, las cifras decimales obedecen al mismo principio del valor relativo, subsistiendo la misma notación que para los números enteros, con la indicación, mediante una coma, de la unidad de referencia. En los *Elementos de Aritmética,* de la colección intuitiva que escribimos hace años en colaboración con mi querido maestro, don Julio Rey Pastor, antepusimos, por cierto, el estudio y manejo de las fracciones decimales al de las ordinarias. Y hemos seguido haciéndolo así en las adaptaciones sucesivas de nuestros textos, en atención a: 1.° La preponderancia que tienen las medidas decimales sobre las fraccionarias en los países como el nuestro, que han adoptado desde antiguo el sistema métrico decimal; 2.° La sencillez que se deriva de la aplicación inmediata del cálculo con números enteros sin más innovación que el aditamento de la coma colocada en su preciso lugar; 3.° La conveniencia didáctica de

[1] V. por ejemplo, en el capítulo siguiente cómo niños de diez a once años pueden descubrir la estructura de la radicación, manipulando material adecuado.

anteponer lo particular a lo general. Procedemos, pues, de esta suerte, sin perjuicio de presentar más adelante (segundo curso) las fracciones decimales y su cálculo como caso particular de las ordinarias, reduciendo unas a otras en ambos sentidos.

Las construcciones geométricas primeras, que en la más remota antigüedad se realizaron con la cuerda tirante como único instrumento (que aún usamos en el encerado en funciones de regla y compás a un tiempo), se enriquecen hoy con el uso de instrumental de dibujo que es ya del dominio corriente: regla, compás, juego de escuadras, papel de calco, y cuyo uso implica movimiento. Sobre la congruencia, o *transformación por movimiento,* parece, pues, natural edificar hoy los conocimientos geométricos primeros, y así lo venimos haciendo, siguiendo la concepción kleineana, desde la publicación de nuestros *Elementos de Geometría* de la mencionada colección intuitiva y en sus adaptaciones sucesivas a los primeros cursos del Bachillerato.

La Geometría estudia las propiedades intrínsecas de las figuras, es decir, las que no alteran con el movimiento de las mismas. A cada clase de movimientos corresponde una clase de propiedades y un instrumento que permite realizarlas. El concepto de perpendicularidad y sus propiedades surgen de la simetría axial, el de paralelismo se deriva de la traslación, las propiedades del círculo y de las figuras circulares y sus ángulos aparecen con la rotación o giro. La regla, el juego de escuadras y el compás se manifiestan en su momento oportuno como instrumentos propios de cada género de movimientos. Problemas imposibles o difíciles con ciertos instrumentos, resultan posibles o fáciles con otros. Ceñirse a un grupo reducido de ellos es, pues, limitar los recursos prácticos de la Geometría encerrando en pobres angosturas todo su alcance teórico. Así, por ejemplo, el papel de calco tiene, además de su evidente utilidad práctica, un gran interés teórico, porque permite efectuar de una vez ciertos tipos de movimiento, mientras que con la regla y el compás es preciso realizar para cada punto una construcción especial, y no aparece en ella el concepto de *grupo,* que es el fundamento de la Geometría elemental y también de las Geometrías superiores.

Con el estudio de los grupos de movimientos, la Geometría elemental y sus construcciones se encuadran en un marco vivo y moderno a un tiempo, respondiendo tanto a las exigencias de aplicación a la vida práctica y a los oficios (donde las formas geométricas se engendran por movimiento de máquinas), como a las exigencias teóricas que han removido los fundamentos de la Matemática en los últimos tiempos.

Continuando en torno a las operaciones primitivas mencionadas, si pasamos de la medición *directa* (generadora de las primeras generalizaciones del concepto de número) a la *indirecta*, la cultura matemática se enriquece considerablemente con la aparición de nexos relacionales o funcionales entre magnitudes: las que se pretende medir y las que en su lugar se miden realmente. No hicieron otra cosa los primitivos medidores de extensiones de terrenos, de volúmenes y pesos de bloques de piedras, de alturas, de distancias inaccesibles... cuando hubieron de acometer mediciones imposibles de realizar por procedimiento directo (aplicación de la unidad sobre la cantidad medida). La relación aritmética más sencilla usada a tal efecto es la proporcionalidad. Con la proporcionalidad simple o compuesta, y con su aplicación geométrica a la semejanza, puede lograrse la medición de distancias y alturas inaccesibles, y las de magnitudes geométricas y físicas de carácter compuesto, como las áreas, los volúmenes, las densidades, las velocidades, etc. Relaciones métricas derivadas de la semejanza o de la equivalencia, como es el teorema de Pitágoras, introducen asimismo la medición indirecta de diagonales, hipotenusas, catetos, etcétera, utilizando la radicación. Operación inversa es ésta que, juntamente a la directa de potenciación, puede ser presentada en el marco indicado, es decir, en el momento en que parece funcionalmente necesaria. Con todo lo apuntado, así como con la mejora progresiva de las técnicas de cálculo iniciadas en el ciclo anterior (reducción de fracciones a mínimo denominador común, con el estudio previo necesario de la divisibilidad) es posible estructurar racionalmente un segundo curso de Bachillerato (como así se ha hecho en el plan actual), en el que queda ya iniciado el concepto de función que ha de tener más amplio desarrollo en los ciclos sucesivos.

La teoría de la proporcionalidad se proyecta inmediatamente a los problemas de Aritmética mercantil de un lado, y a la teoría de la semejanza geométrica de otro, con sus aplicaciones a los mapas, planos, escalas, pantógrafos, etc. El rico contenido concreto de unas y otras aplicaciones sugiere abundantes motivaciones iniciales de arranque de las teorías para el ejercicio de la enseñanza intuitiva y eurística en este nuevo ciclo elemental. Innecesario parece añadir todo el interés educativo que tiene «el método de proyectos», así como las realizaciones constructivas de las escuelas primarias modernas Dewey, Decroly, Claparède..., métodos que son igualmente aplicables a los últimos grados de la primera enseñanza y a los primeros ciclos de la enseñanza secundaria, que, en nuestro país al menos, se solapan con aquellos.

LA INICIACIÓN AL CÁLCULO LITERAL Y AL ALGEBRA

El uso de letras en lugar de números para expresar las propiedades generales de las operaciones y las relaciones entre magnitudes no ofrece dificultades si se sabe graduar convenientemente y si se presenta en forma espontánea haciendo uso, por ejemplo, de letras iniciales de las palabras que designan los entes relacionados. Es posible hacer sentir como cosa viva la necesidad de su empleo al condensar en fórmulas literales todas las soluciones de problemas análogos, es decir, resolubles por un mismo proceso de cálculo. A través de la Aritmética aplicada puede, pues, el niño sentir el interés de una Aritmética literal general, y aun iniciarse en los razonamientos efectuados con letras en lugar de números, con lo que le situaremos a las puertas del Algebra. Esta es la forma funcionalmente justificada que preconizamos para iniciar al niño en la técnica algebraica en un tercer curso de Bachillerato.

El número negativo puede ser introducido en este curso, y aun en cursos anteriores sin inconveniente alguno. No faltan ejemplos de la vida práctica que inducen a la posibilidad de interpretar restas cuyo sustraendo es mayor que el minuendo: quedar, por ejemplo, con saldo deudor cuando se gasta más que lo que se tiene; bajar más pisos que los que se ha subido en un edificio con sótanos; descensos de temperatura por debajo de los cero grados... El concepto de cantidades y números opuestos surge así, espontáneo, permitiendo reducir a sumas las restas de cantidades relativas, así como justificar la regla de los signos interpretando el signo menos como operador consistente en tomar el opuesto, lo que implica su carácter involutivo (perder profundidades es lo mismo que ganar altura, la disminución de una deuda equivale a la percepción de igual ganancia, etc.).

Debe cuidarse de forma exquisita el método en la iniciación al cálculo literal. Toda formalización y verbalización prematuras y exageradas engendrarán los inevitables errores procedentes de extrapolaciones y confusiones tan características de los escolares de todo el mundo en este grado. Y es que la enseñanza matemática adolece universalmente del defecto de formalismo anticipado. La analogía entre las propiedades formales de la adición y de la multiplicación sugiere fácilmente en el alumno la confusión de una por otra en cuanto se simbolizan, y por tanto, también la confusión de sus respectivos elementos neutros cero y unidad. Los clásicos errores

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a}{b}; \quad \frac{a}{a}=o; \quad x^3+x^2=x^5; \quad (a+b)^n=a^n+b^n; \quad \sqrt{x^2+y^2}=x+y;$$

no reconocen otro origen. El niño, lanzado prematuramente a un complejo automatismo, cuyas reglas no ha elaborado ni descubierto por sí mismo, las confunde y las extrapola con facilidad; y transforma y simplifica erróneamente, por simple y explicable confusión con transformaciones similares perfectamente lícitas

$$(a+m)-(b+m)=a-b; \quad a-a=o; \quad x^3 \cdot x^2=x^5; \quad (a+b)n=an+bn;$$
$$\sqrt{x^2 \cdot x^2}=x \cdot y;$$

Se hace, pues, necesario en esta etapa, quizá más que en ninguna otra, que el niño vaya conquistando, paso a paso, su técnica de cálculo por un proceso propio de autocorrección que le habitúe a reconocer sus fallos, a rectificarlos, adquiriendo así seguridad y confianza en evitarlos. En nuestro librito sobre *Didáctica matemática eurística* hemos descrito varios ensayos de lecciones de cálculo literal desarrolladas según método eurístico, con el que los alumnos descubren por sí mismos las reglas operatorias (incluso la división de polinomios) obteniendo mucha mayor seguridad de cálculo que con los procedimientos usuales, fundados en la cómoda enunciación de reglas y en la anticipación consiguiente de automatismos irreversibles generadores de tanta rigidez como inseguridad.

Las mismas advertencias hechas a propósito de los comienzos del cálculo literal pueden repetirse en lo que se refiere a la iniciación a la teoría de ecuaciones. Es pena ver los estragos que ocasionan en nuestros alumnos los procedimientos recetarios de todos aquellos profesores que se dedican a preparar en vez de formar. La falta de todo criterio simplificador en la elección de variables a eliminar en un sistema, la rutinaria eliminación por sustitución de la x, aunque resulte mucho más complicada que cualquier otro recurso eliminatorio que salta a la vista, la invariable aplicación de la fórmula general que da las raíces de una ecuación completa de segundo grado, aunque la ecuación sea incompleta, etc., son defectos no imputables al niño, sino a la comodidad o a la inopia mental del profesor que los ha cultivado.

Una vez más hemos de insistir, pues, en la inconveniencia de anticipar las reglas y los automatismos al dominio previo de los procedimientos. El Algebra nació entre los árabes en busca, sin duda, de una economía de pensamiento al tratar de mecanizar la solución de los múltiples y complicados problemas de herencia a los que eran tan dados. Una vez que el hombre ha dominado la solución de varios problemas similares, busca una formalización de sus métodos resolutivos, es decir, una automatización de ellos que le libere de la repetición inútil de esfuerzos ante dificultades ya superadas. Tal proceso de economía intelectual no sólo es lícito, sino necesario para todo cerebro capaz de acometer nuevas dificultades con la energía así liberada. Pero anticipar los automatismos en un cerebro en formación es precisamente incapacitarle para todo esfuerzo autónomo, constituyendo en tal sentido un pecado de lesa pedagogía.

Por ello conviene no entregar demasiado pronto el alumno a la rutinaria comodidad del mecanismo algebraico, sino procurar que busque también caminos aritméticos de solución, por cierto algunas veces mucho más breves y directos que los algebraicos. Es clásico el problema del hortelano, llevando manzanas, que al encontrar a tres guardas da al primero la mitad de las que lleva más dos, al segundo la mitad de las que le quedan más dos, y al tercero la mitad de las sobrantes más dos. Sabiendo que al final le queda una ¿cuántas llevaba? Desandando lo andado, es decir, reconstruyendo los números de manzanas que iba teniendo en cada uno de los momentos del enunciado recorrido a la inversa, la solución aparece inmediata, mientras que el planteamiento algebraico da lugar a una incómoda ecuación.

El mecanismo algebraico de las ecuaciones y sistemas lineales puede concretizarse mediante ejemplos de equilibrios en balanzas, conseguidos con pesas y objetos de igual peso desconocido. Las manipulaciones que los mismos niños ejecutan en busca de equilibrios simplificados suministran una imagen muy provechosa de los procesos resolutivos. Estos surgen así como resultado de una investigación activa en vez de unos razonamientos abstractos o de unas simples reglas recetariamente suministradas. Particularmente instructiva y clara resulta la interpretación que se obtiene, con tales ejercicios, de los sistemas homogéneos obtenidos al plantear equilibrios entre varios objetos distintos de peso desconocido.

Es del mayor interés, no sólo por sus aplicaciones a la vida moderna, sino también por lo que tiene de formativo con vistas al estudio posterior de la Geometría analítica, ejercitar abundantemente al alumno en el uso de gráficas cartesianas representativas de las funciones que la Aritmética y los primeros rudimentos de Algebra han suministrado ya en los grados elementales. La vida ofrece ejemplos variadísimos que, de puro conocidos, es inútil repetir aquí; quizá entre los más complejos y educativos sean de citar las gráficas de móviles (ferrocarriles), con las que pueden lograrse lecciones llenas de interés para los muchachos, especialmente si se las sabe aderezar con el pretexto de cualquier episodio policíaco.

LOS CICLOS EVOLUTIVOS.—LAS FUNCIONES TRASCENDENTES Y LA TRIGONOMETRÍA

La complejidad creciente de las funciones que aparecen en el mundo físico y social marcarán los ciclos sucesivos en la etapa de transición de los cursos elementales a los superiores de Bachillerato. Las leyes físicas en las que intervienen funciones de segundo grado (la caída de los graves, por ejemplo) pueden dar motivo inicial para el estudio del trinomio de segundo grado, y para la resolución de las ecuaciones y problemas de segundo grado, con la necesaria introducción previa de los irracionales cuadráticos y del cálculo con radicales. El estudio de las progresiones geométricas y del interés compuesto y de sus aplicaciones pueden servir de introducción a las funciones y ecuaciones exponenciales, mientras las primeras mediciones indirectas de distancias y alturas mediante el uso del goniómetro darán ocasión propicia para comenzar el estudio de la Trigonometría. En nuestro libro sobre *Didáctica matemática eurística* indicamos diversos motivos de iniciación activa para la introducción de las funciones trigonométricas y la formación de tablas y gráficos en relación con problemas de mediciones al aire libre o en el interior de la clase.

Conviene descargar la Trigonometría del despliegue abrumador de fórmulas iniciales con las que se solía presentar antiguamente, y limitarse a deducir progresivamente las que van haciendo falta a medida que la complejidad de los problemas abordados lo exige. Así, la resolución de triángulos rectángulos en todos los casos es tarea que el mismo alumno realiza fácilmente con sólo recordar las definiciones de las funciones goniométricas, seno, coseno y tangente y disponer de unas tablas de ellas. El alumno mismo resuelve triángulos oblicuángulos eurísticamente descomponiéndolos en triángulos rectángulos y resolviendo éstos en el orden necesario. Como resumen del proceso resolutivo y espontáneamente descubierto por el alumno se obtienen entonces los teoremas y las fórmulas sintéticas llamadas «de los senos» y «del coseno».

Creemos que el empleo de estos dos teoremas es suficiente en un Bachillerato formativo ordinario. Ellos bastarán para resolver, con la aproximación exigible en unos ejercicios escolares, los ejemplos prácticos de aplicación realizados con sencillos aparatos en los alrededores del Instituto o Colegio y su localidad. Solamente en estudios medios de carácter profesional ligados a la topografía y a la navegación es aconsejable insistir todavía en el problema de la resolución de triángulos, problema minúsculo dentro del amplio cuadro de aplicaciones que aborda la matemática de hoy. La exagerada importancia que se sigue dando a la Trigonometría en los programas escolares tiene su origen en un hábito heredado de tiempos en los que la navegación, la topografía y la geodesia ocuparon un primer plano en las aplicaciones de la Matemática. El mejor conocimiento del geoide terrestre a que había conducido la elección de la unidad métrica, el incremento de las comunicaciones por mar y tierra, la construcción de carreteras y vías férreas, la organización de los Institutos geográficos y catastrales, habían llegado a crear una verdadera técnica calculística de resolución de triángulos con el empleo de fórmulas que redujeran al mínimo la búsqueda de datos en tablas logarítmicas y al máximo la exactitud (analogías, teorema de tangentes, fórmulas de Briggs). Pero todo Bachillerato esencialmente formativo ha de anteponer el cultivo de ideas y el alumbramiento de vocaciones a la adquisición de técnicas específicas, y aun en los estudios medios, en los que se trata de equilibrar lo técnico y lo formativo (estudios medios profesionales a los que modernamente se tiende para mejorar la formación de las clases sociales que han de vivir de la agricultura, de la industria, del comercio), es de tener en cuenta que dichas técnicas presentan hoy ya una multitud tan grande de problemas vitales, que su enfoque matemático se enriquece con amplias y nuevas perspectivas a las que hay que dar pronto cabida, sacrificando, si es preciso, capítulos trasnochados, por muy venerables que nos parezcan. Tanto desde el punto de vista técnico como del formativo consideramos, por ejemplo, mucho más interesante dar actualmente al bachiller una idea del funcionamiento de las máquinas de calcular, de las relaciones algebraicas que rigen las conexiones en circuitos eléctricos, del manejo estadístico de colectivos..., que abrumarle con fórmulas trigonométricas de utilidad casuística. Con las de adición de argumentos tendrá bastante para formular en su día el incremento del seno o coseno y poder calcular sus derivadas.

ELABORACIÓN INTERNA DEL ESPACIO EUCLÍDEO. TRANSICIÓN DE LO INTUITIVO A LO RACIONAL

El espacio intuitivo se elabora en el niño por un proceso interno de idealización del espacio perceptivo. Experiencias fáciles de realizar [2] permiten comprobar, por ejemplo, cómo el niño se forma espontáneamente los conceptos de plano infinito y de recta infinita, aun partiendo de limitadas representaciones materiales de los mismos. No hay, pues, peligro alguno en partir de tales representaciones para intuir las propiedades del espacio euclídeo, ya que, aun utilizando imágenes materiales, el niño las idealiza espontáneamente y elabora así su visión interna del espacio euclídeo. Es de todo punto contraproducente pretender edificar dicho espacio, como se hacía en los cursos clásicos de Geometría (lo que aún recuerdo con horror de mi niñez) a fuerza de golpes de reducción a lo absurdo. «Supongamos que esta recta no cortara al plano...», y el niño no podía suponer tal cosa porque estaba intuyendo que tenían que cortarse. Se le desconcertaba asimismo admitiendo por evidentes ciertas propiedades (axiomas) y haciendo depender de ellas a continuación, tras largos razonamientos, otras verdades no menos evidentes. El proceso lógico reductivo característico de la escuela griega no tiene interés alguno para el niño, el cual repugna a todo aquello que no obedece a una necesidad sentida. El niño tiene también *su lógica,* más funcional que reductiva, y dentro de ella es perfectamente consecuente.

La evidencia sensible precede necesariamente a la evidencia intuída y ésta a la evidencia lógica. La construcción racional del espacio requiere un cierto grado de madurez mental y a ella debe llegarse progresivamente. En un principio interesa sobre todo que el niño adquiera múltiples vivencias sensibles, que las interiorice convirtiéndolas en intuiciones, que fomente así la visión interna idealizada de las relaciones que ligan los

[2] V. Capítulo siguiente.

elementos del espacio a través de las operaciones típicas de la Geometría: prolongaciones, proyecciones, secciones, movimientos, etc.

El razonamiento deductivo se iniciará en su momento necesario para establecer aquellas primeras verdades que la intuición no alcanza o deja en duda. Surgirán así los primeros eslabones de cadenas deductivas, las cuales se irán prolongando a medida que se vaya accediendo por vía deductiva a verdades menos evidentes. Así, por ejemplo, al estudiar las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia y su medida (lo que se hace sin dificultad en un segundo curso), la relación con el ángulo central que permite dicha medición indirecta, se ha conquistado a través de la siguiente cadena de propiedades sucesivamente implicadas: suma de los ángulos de un triángulo, valor del ángulo exterior, propiedades del triángulo isósceles, relaciones entre los ángulos formados por dos paralelas y una secante, propiedades de la suma y diferencia de ángulos, estas últimas relaciones y propiedades directamente intuibles como consecuencia de las traslaciones, giros y simetrías. Tales razonamientos son perfectamente compatibles con la orientación de la enseñanza de los primeros ciclos. No contradicen la intuición; por el contrario, la ayudan donde aquélla no pueda llegar directamente, y van preparando paulatinamente la transición de esta fase primera a la fase última de penetración consciente en el método racional y de elaboración consecuente del espacio lógico.

En este proceso evolutivo de elaboración del espacio euclídeo en la mente del escolar puede haber momentos en los cuales se haga incluso precisa la dualidad de recursos: la llamada directa a lo intuíble (cuando no a lo perceptible, a lo visible y palpable) y acto seguido el razonamiento deductivo que confirma y consolida. La evolución mental de los muchachos en estos cursos de transición entre la niñez y la pubertad, es tan rápida y tan desigual entre unos y otros, que es frecuente la presencia en una misma clase de mentalidades sensibilizadas ya a la evidencia lógica y de otras todavía insensibles a ella. Haciendo en tales casos un uso discreto de la dualidad de métodos indicada, cada alumno adquirirá al menos *su* verdad en el grado de evidencia adecuado a su desarrollo.

En los estudios medios de carácter profesional y técnico, la edificación interna del espacio euclídeo debe completarse con la iniciación en el lenguaje descriptivo, y tienen perfecta cabida en este grado unas primeras y elementales nociones sobre los sistemas de representación más usados en los oficios y en el dibujo, a saber: los planos acotados, el sistema diédrico y la perspectiva caballera.

CICLO METODOLÓGICO.—PENETRACIÓN CONSCIENTE EN EL MÉTODO DEDUCTIVO

Alcanzado que sea por el alumno un cierto grado de madurez mental y acumulada suficiente experiencia deductiva a través de las cadenas que el estudio de la matemática le habrá ido ofreciendo a lo largo de cuatro o cinco cursos de Bachillerato, es llegado el momento de darle una idea de cómo se prolongan estas cadenas en ambos sentidos y de cómo se enlazan hasta conseguir la red multipolar de proposiciones característica de toda ciencia deductiva.

Pero el modo más eficaz de que el alumno penetre en este tejido no es precisamente presentándoselo ya elaborado, sino invitándole a su elaboración. Fue un grave error creer que el tránsito del método intuitivo al racional podía efectuarse de manera brusca, sometiendo, en un momento dado, *todos* los conocimientos elementales, intuitivamente adquiridos por el niño, a una revisión nacional que partiese nuevamente de la nada para reelaborarlos según nuevos cuadros rígidos formados por los clásicos axiomas, teoremas, corolarios... En este error incurrieron los programas italianos hace ya bastantes años, como consecuencia del movimiento revisionista de los fundamentos de la matemática de comienzos de siglo; y en el mismo error incurrió el plan español de 1934 al introducir el método racional en tercer curso para reexponer en forma deductiva el contenido de los dos primeros cursos desarrollados según método intuitivo. El niño no mostraba ningún interés por esta repetición, que le aburría soberanamente. No podía sentir tal interés puesto que el prurito reductivo de unas verdades a otras ni se presenta a esta edad ni el alumno tiene vocación reflexiva suficiente para que sea posible despertar en él este interés a través de una acción pensante sugeridora. De aquí la conveniencia de que el tránsito de lo intuitivo a lo racional sea gradual e insensible, adoptándolo a la natural evolución del escolar, y que convenga esperar el grado de madurez necesario y la experiencia deductiva suficiente para aflorar en el alumno la conciencia del método lógico reductivo, invitándole a participar activamente en su elaboración.

Esta participación activa no constituye ninguna utopía si no se pretende de ella más de lo que naturalmente puede dar de sí. Se inicia ante el recuerdo de cualquier propiedad y de su deducción, por ejemplo, la del mismo teorema de Pitágoras (el que acumula mayoría de respuestas ante la pregunta: ¿Quién recuerda un teorema?).

La sucesión encadenada de «porqués» espolea la actividad deductiva que se establece mediante un vivo diálogo con la clase. Tanto unos alumnos como otros van recordando, inventando y enlazando las implicaciones que se encadenan en las propiedades recordadas hasta llegar a verdades de carácter trivial, a cuyos «porqués» no saben contestar, ya que fueron admitidas en su día como resultado de percepciones o de intuiciones directas. Ejemplos varios de cadenas similares conducen a los mismos puntos iniciales, y es interesante procurar que los alumnos dibujen esquemas de enlace *(grafos)* que hagan bien visible la red de proposiciones que se ha tenido que entretejer para llegar desde tales puntos de partida a los teoremas analizados.

Con frecuencia los muchachos, al llegar a estos puntos de partida y al pretender asimismo deducirlos, se enzarzan en «porqués» que cierran círculos viciosos, cuya inconsistencia acaban descubriendo ellos mismos. Es el momento de justificar la introducción de axiomas y de distinguirlos de los teoremas o proposiciones demostrables o reducibles. El análisis de algunas de éstas permite adquirir conciencia de su estructura, así como de las relaciones lógicas entre teoremas directos, recíprocos, contrarios, contrarrecíprocos, de las condiciones necesarias y suficientes, de los lugares geométricos, de los métodos de reducción al absurdo, de los teoremas compuestos y del principio de reciprocidad...

Tal tejido deductivo se establece no sólo caminando en sentido regresivo hacia las verdades primitivas o axiomas, sino también y muy principalmente en sentido progresivo para el descubrimiento de nuevas verdades con las que se espolea la curiosidad investigadora del muchacho a través de motivos de interés sistemático u ocasional. La analogía, la inducción generalizadora, la inferencia plausible, aportarán nuevas fuentes estimulantes a la metodología, ofreciendo verdades presentidas al refrendo deductivo, cuya apetencia aumentará así progresivamente. Aun cuando parezca paradójico, los modelos, las filminas, los films o simplemente el material didáctico matemático que suele sugerir la misma vida, pueden contribuir poderosamente a la creación de este clima de interés deductivo en la edad propicia.

Toda esta participación activa del alumnado en la elaboración metodológica de la ciencia matemática a su nivel no puede ser objeto de impaciencias ni de precipitaciones que fuercen el ritmo natural del alumbramiento y satisfacción de los primeros deseos e intentos deductivos del muchacho. Si los principios son lentos, los avances ulteriores son recuperadores e incluso a veces sorprendentes. **La experiencia metodológica** realizada en el curso 1957-58 en el Instituto de San Isidro, con alumnos de 5.° curso, se prolongó durante más de un trimestre de clase alterna. La elaboración de nuevas proposiciones a partir de la semejanza y del teorema de Pitágoras permitió recorrer de nuevo, con regusto de nuevos detalles de originalidad deductiva, buen número de propiedades ya conocidas de los alumnos (teorema de Pitágoras generalizado, lugares de puntos cuya suma y cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos es constante, potencia, eje y centro radicales) hasta descubrir nuevos lugares geométricos y abordar temas que rozaron ya la matemática moderna: grupos de movimientos, áreas orientadas, conceptos de grupo, cuerpo y anillo, etc. El grupo de las traslaciones en el plano y el que forman los giros y homotecias con el mismo centro, me permitieron establecer una doble conexión operativa entre vectores planos, con lo que manejaron sin dificultad alguna el campo complejo. Supuesto admitido el número real, los vectores y los números complejos que representan resultan así mucho más asequibles que la propia génesis del número real (que en los ciclos elementales sólo puede rozarse de pasada), y del que nos ocuparemos en el ciclo medio superior.

La prolongada experiencia referida me confirmó una vez más en la idea, defendida con anterioridad en otras ocasiones ante la superioridad y ante mis compañeros de docencia, de que para la penetración consciente en la esencia del método racional o deductivo no se hace necesaria la revisión total del bagaje matemático que el alumno ha adquirido por vía intuitiva. Basta la adquisición consciente de la *calidad* racional a través de la actividad deductiva mencionada y, si se quiere, el desarrollo lógico sistemático de algún capítulo de la matemática que permita redondear el concepto de ciencia deductiva como tejido de proposiciones demostrables a partir de ciertas proposiciones iniciales simplemente admitidas, y elaboración de conceptos complejos a partir de conceptos simples indefinibles, enunciados tan sólo como expresión de percepciones idealizadas.

La precisión de lenguaje inherente al método lógico ha de adquirirse asimismo a través de un proceso que haga sentir al mismo alumno su necesidad, y el modo más natural de conseguirlo es fomentar el intercambio de ideas entre ellos y el deseo de convencerse mutuamente. Las interpretaciones torcidas que invariablemente sugieren los enunciados imprecisos o incorrectos obligan a la rectificación y a la precisión consciente. En el capítulo siguiente propongo varios procedimientos para despertar esta actividad de afinamiento y precisión de lenguaje matemático.

Por cierto que, al explorar el grado de penetración consciente con que los alumnos calaban en las estructuras demostrativas durante la experiencia citada, registré algunas respuestas que, por lo sorprendentes, considero de interés consignar aquí. Después de efectuado por un alumno el razonamiento que prueba la existencia del centro radical de tres circunferencias, como punto de concurso obligado de los tres ejes radicales resultantes de asociarlas dos a dos, se me ocurrió formular a toda la clase la pregunta: ¿Recordáis alguna otra propiedad que guarde alguna analogía o que se demuestre de manera análoga? Y cuando yo esperaba la alusión a alguno de los puntos notables de un triángulo (circuncentro, baricentro...), dos alumnos formularon (independientemente) respuestas aparentemente desconcertantes. Uno de ellos se refirió al hecho de que «dos segmentos iguales a un tercero son iguales entre sí», y el otro (simultáneamente y sin que influyera, por tanto, su compañero), al hecho similar de que «dos paralelas a una tercera son paralelas entre sí». También hubo varias alusiones a la analogía con el circuncentro; pero considero notabilísimo el hecho de que los aludidos muchachos (por cierto no entre los mejor calificados), saltando por encima de la analogía geométrica que parece más inmediata (concurrencia de tres rectas lugares de análoga propiedad respecto de pares de elementos de una terna), ascendieran a la esencia primera de su fundamento lógico común, que es, en efecto, *la propiedad transitiva de la relación de equivalencia* (igualdad de segmentos, igualdad de direcciones, igualdad de potencias...). Ello prueba que el adolescente, y aun el niño, tiene con frecuencia más poder de abstracción que el que se le atribuye. La dificultad estriba en traer a un plano consciente dichas abstracciones y sistematizarlas. Y ésta es precisamente la finalidad epistemológica del ciclo de iniciación racional.

LOS CICLOS SUPERIORES.—EL NÚMERO REAL Y LOS LÍMITES. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA, AL CÁLCULO Y A LA ESTADÍSTICA

La Geometría Analítica se inicia en el momento en que se utilizan las gráficas cartesianas para representar relaciones funcionales, y por consiguiente no puede considerarse privativa de los cursos superiores de Bachillerato. En el capítulo siguiente reseñamos una experiencia realizada con alumnos de primer curso de Bachillerato con objeto de explorar hasta dónde es posible llegar, en edades tempranas, en el camino de sugerir y de expresar relaciones lineales entre cantidades variables, y especialmente las que ligan las coordenadas de los puntos de un plano alineados con dos puntos dados en él. Cuantas experiencias he realizado en tal sentido (aun con niños de escuelas preparatorias) han conducido al mismo resultado: los pequeños acaban contando los cuadros del plano cuadriculado para caracterizar la alineación, consiguiendo expresar correctamente la relación que existe entre los números de cuadros contados en un sentido y en otro. Desde edades muy tempranas puede, pues, utilizarse el plano cartesiano para representar relaciones funcionales. Como hemos tenido ocasión de referir anteriormente, en tercero y cuarto cursos pueden representarse simultáneamente varias funciones lineales y aun de segundo grado (trinomios) y resolver así sistemas gráficamente.

Ninguna dificultad suele ofrecer entonces un estudio más detenido de los problemas relativos a rectas, así como los de paralelismo, perpendicularidad, ángulos y distancias en sexto curso; ni tampoco la ofrece la obtención de las ecuaciones de los lugares geométricos de segundo grado (circunferencia y cónicas). Las dificultades didácticas surgen en cuanto hay que aplicar el concepto de límite para el cálculo de tangentes, áreas, etcétera, es decir, con las primeras aplicaciones del cálculo.

Consideramos de indiscutible conveniencia la introducción de unas nociones de cálculo infinitesimal en el último curso de Bachillerato, ya que fueron los métodos infinitesimales los que determinaron el enorme progreso técnico logrado desde el siglo XVII hasta nuestros días. Pero este cálculo se funda en el concepto de límite, y éste a su vez en la teoría del número real, y en esta teoría radica la dificultad: la de usar un lenguaje científico que no desmerezca del nivel de un bachiller y que le sea al mismo tiempo asequible. Si los mismos matemáticos todavía no se han puesto de acuerdo sobre el modo riguroso de edificar el continuo, nada tiene de extraño que la dificultad suba de punto al pretender construir este edificio en la mentalidad de un adolescente.

Por anticipado puede considerarse no sólo inútil, sino contraproducente toda exageración de rigor dogmático en la exposición de la teoría del número real en Bachillerato, y hemos de contentarnos con que el necesario empleo de un lenguaje inteligible para el alumno no le sugiera errores que luego son difíciles de deshacer. A mi entender, la vía más natural de introducir el número irracional la suministra la misma medición de magnitudes escalares continuas. Ante la imposibilidad de expresar mediante número racional alguno la medida exacta de la diagonal de un cuadrado de lado unidad o la longitud de una circunferencia en él inscrita, etc., surge espontáneo el uso de las medidas aproximadas por defecto o por exceso en menos de las unidades decimales de órdenes sucesivos. En la vida real, en los oficios y en la alta técnica se adopta tan pronto una como otra de estas medidas, según la exactitud deseada, de modo que, en definitiva, lo que la humanidad conoce y maneja de cada una de tales medidas son dichos valores por defecto o por exceso. Parece, pues, natural considerar las sucesiones indefinidas que constituyen tales medidas y adoptarlas como definición de medida exacta. El concepto de exactitud adquiere así desde el Bachillerato la significación *potencial* que, en definitiva, prevalece a lo largo de todo el Análisis al manejar el concepto de límite: la posibilidad de hacer el error o diferencia tan pequeño como se quiera. Decimos estar en posesión de la medida exacta de una cantidad inexpresable racionalmente, cuando sabemos el modo de obtener medidas racionales aproximadas a ella por exceso y por defecto, tan cercanas entre sí como se quiera.

En resumen, la vía didáctica más sencilla para introducir el número real es el método de las sucesiones monótonas convergentes y en particular las sucesiones de infinitas cifras decimales. Las cortaduras o clasificaciones resultan conceptos, a nuestro parecer, excesivamente abstractos para un Bachillerato, y lo mismo cabe decir de cualquier procedimiento axiomático basado en las modernas estructuras algebraicas y topológicas.

El cálculo con números irracionales se reduce, con lo dicho, al cálculo con sucesiones de números aproximados que los representan. Para formar la suma, diferencia, producto o cociente de dos números reales, construiremos sucesiones de sumas, diferencias, productos, cocientes obtenidos con los términos correlativos de los datos, ordenándolos en forma de que su monotonía y convergencia quede asegurada. Se comprende, por lo tanto, el papel esencial que desempeñan aquí las leyes de monotonía de las operaciones, leyes cuya importancia suele desdeñarse de ordinario en la enseñanza. Todo el cálculo con números aproximados es en rigor un cálculo dual por defecto y por exceso, obtenido al combinar convenientemente los pares de datos aproximados para obtener siempre nuevos pares que contengan el resultado.

De lo dicho se infiere la importancia no sólo práctica, sino también teórica, que tiene el cálculo con números aproximados. Con esta convicción los hemos restituído en los actuales cuestionarios del Bachillerato Laboral. Claro es que el enfoque que nosotros damos a esta teoría de números aproximados es bien distinta de la que se le daba en los cursos clásicos de Aritmética y de Análisis. En primer lugar, entendemos que el objeto primordial de este cálculo es el cultivo de la noción de aproximación, tan necesaria al teórico como al hombre de acción. En segundo lugar, consideramos inoperantes las reglas clásicas usuales para determinar el número de cifras exactas del resultado de un cálculo, pues la grosera acotación del error que suministran determina la pérdida corriente de una cifra por cada operación efectuada, con lo que a las pocas operaciones ya no podemos garantizar la exactitud de cifra alguna del resultado. Se evita este grave inconveniente en el problema directo mediante el recurso natural de efectuar, como hemos dicho, las operaciones por duplicado, con objeto de obtener aproximaciones por defecto y por exceso del resultado. El problema inverso (determinación del número de cifras necesarias en los datos para obtener una aproximación prefijada en el resultado) tiene mayor dificultad, pero también se pueden mejorar considerablemente las reglas al uso mediante sencillos tanteos efectuados con los datos, haciendo uso de los límites de error relativo [3].

Observaciones análogas a las expuestas con relación a la teoría del número real cabe repetir para la teoría de límites, que en el Bachillerato no debe todavía «epsilonizarse» (permítasenos el uso de este atrevido neologismo, que tiene un significado bien definido para todo lector matemático; imposible, sin embargo, de resumir en pocas líneas). Puede sustituir-

---

[3] V. nuestro artículo «Sobre el problema inverso del Cálculo aproximado» Rev. Mat. Hispano-Americana, núm. 10 ; 1926.

se el «epsilonismo» por el manejo de variables infinitésimas. La tendencia a cero es un concepto de fuerte amarre intuitivo que esclarece y simplifica notablmente los teoremas corrientes sobre límites.

La noción de derivada debe exponerse en conexión con los conceptos geométricos y físicos que le han dado origen (tangentes, velocidades). Sin incurrir en inexactitudes, tampoco debe recargarse la imaginación del escolar con exhibición de excepciones eruditas, que despertarían un escepticismo prematuro y contraproducente en el principiante. Salvo los ejemplos de discontinuidades sencillas (saltos bruscos, puntos angulosos), las demás singularidades patológicas de curvas rebuscadas deben descartarse de la segunda enseñanza (por ejemplo, continuidad sin tangente alguna).

Hemos defendido en varias ocasiones, y reiteramos aquí la conveniencia de ilustrar la ventaja y sencillez que el uso de los métodos infinitesimales introdujo, presentando algún problema clásico, como el de la determinación de la ecuación de la tangente a una parábola, resuelto a la manera como se trataban estos problemas en los tiempos inmediatamente anteriores a la invención del cálculo infinitesimal: consideración de raíces dobles de las ecuaciones que determinaban los puntos de intersección de las curvas con rectas secantes. Los alumnos se dan así cuenta de la gran sencillez que introduce el concepto de derivada. La misma observación puede repetirse en lo que se refiere al cálculo de áreas de figuras planas, volúmenes de cuerpos geométricos corrientes, etc.

La iniciación al cálculo integral se vinculará así a los problemas que históricamente le dieron origen. No es necesario en Bachillerato llegar a adiestrar al alumno en una minuciosa técnica de derivación y menos aún de integración. Como ya hemos dicho, la finalidad específica del Bachillerato es más formativa que propiamente técnica; pero además es de notar que la simple derivación e integración de polinomios enteros permite atacar y resolver un número suficiente de problemas para que el alumno adquiera una idea clara del papel que el cálculo infinitesimal ha desempeñado en las aplicaciones. Es particularmente sugerente iniciar alguna lección haciendo observar el hecho de que la expresión que da la longitud de la circunferencia resulta al derivar la que da el área del círculo, y que asimismo la que expresa el área de la superficie esférica es la derivada de la que da el volumen de la esfera. Agradable sorpresa constituye para los alumnos comprobar este hecho y relacionarlo acto seguido con la posibilidad de calcular el área del círculo por suma de discos infinitesimales delgados y el volumen de la esfera por suma de hojas esféricas igualmente finas.

Los motivos de iniciación a la teoría de la probabilidad pueden enlazarse, mediante cualquier tema de apuestas conocido (quinielas, juegos de azar, etc.) al cálculo combinatorio necesario para obtener los casos posibles y los probables. Las distribuciones probabilísticas que interpretan aproximadamente las de frecuencia estadística, adquirirán un valor más convincente si se traducen en experiencias efectuadas realmente por los alumnos. Por ejemplo, si proponemos a cada alumno efectuar en su casa diez lanzamientos de diez monedas a cara o cruz y anotar en cada lanzamiento el número de veces que sale cara, se pueden acumular quinientas experiencias en un grupo de cincuenta alumnos, lo que constituye una base estadística suficiente para obtener histogramas de distribución del número de monedas que han caído de cara en cada lanzamiento. Su comparación con la distribución binominal de probabilidades teóricas, obtenidas por cálculo combinatorio, permitirá el ajuste de una por otra, así como el ajuste mediante la curva de distribución normal, límite de la binominal para un número infinito de lanzamientos. Si cada alumno construye el histograma de sus diez experiencias, se tendrán cincuenta histogramas muy diversos; pero si se agrupan separadamente las experiencias 1.ª, 2.ª, 3.ª ... de todos los alumnos, se obtendrán sólo diez histogramas que serán mucho más similares. El alumno puede darse cuenta con estas comparaciones del significado del teorema de Bernouilli. Y si forma finalmente el histograma de los cincuenta promedios de las diez experiencias de cada alumno y compara la dispersión de este histograma con los de los anteriores, se dará cuenta de cómo disminuye esta dispersión y de cómo aumenta la precisión al promediar las observaciones.

La comparación de tales histogramas con los que resultan de distribuir las tallas y los pesos de los propios alumnos (especialmente de los que son de la misma edad), y aún mejor, con la distribución de las evaluaciones a ojo de la talla del profesor, efectuadas por los alumnos [4], permitirá sacar jugosas consecuencias teóricas sobre la distribución masiva de los fenómenos en los que intervienen gran número de causas, y acerca de las aplicaciones de la probabilidad y la estadística a la teoría de errores.

La elección de parámetros estadísticos para caracterizar un colectivo, en lo que se refiere a una determinada medida (talla, peso, etc.), puede

[4] Sugerencia que agradecemos al profesor KENDALL.

conducirse eurísticamente iniciando una discusión acerca del número que convendría transmitir telegráficamente para dar idea, con un solo dato, de la talla o del peso de los alumnos de la clase. La elección del promedio, como primer parámetro representativo, surge de modo natural y espontáneo, aunque no falte quizá quien proponga la llamada «moda» (raramente la mediana). Ampliando el telegrama a dos datos, intuyen fácilmente los alumnos la conveniencia de caracterizar con el segundo dato el grado de separación o dispersión del conjunto alrededor de su valor medio, y el primer parámetro que se les ocurre tomar a tal efecto es la separación entre las medidas extremas. Al hacerles observar que en tal distancia sólo están representados los dos alumnos más alejados del promedio, es frecuente la propuesta de promediar los valores absolutos de las diferencias con la media. La media cuadrática de tales diferencias o «desviación típica» tiene que ser sugerida ante la consideración de los inconvenientes que para el cálculo tiene el uso de valores absolutos, por las discontinuidades que introducen. El cálculo de correlaciones es de más difícil conducción eurística aunque siempre pueden aportarse factores de interés en la consideración de correlaciones, si se plantean las que existen entre las calificaciones de los propios alumnos en clases de diferentes asignaturas, según su mayor o menor afinidad.

En resumen, la clase, como colectivo de sujetos medibles en un cierto aspecto y medidores en otro, suministra gran riqueza de situaciones para hacer atractiva la teoría y práctica de la estadística y, en este sentido, dicha disciplina constituye uno de los capítulos más privilegiados de toda la enseñanza matemática en lo que se refiere a la fácil creación a su alrededor de centros de interés didáctico.

CONSIDERACIONES FINALES SOBRE LA CUESTIÓN DE LOS PROBLEMAS [5]

Según los recientes congresos de los cibernetistas en Namur y Zurich, la Cibernética puede definirse como «El arte de la eficacia en la acción». Enfrentándonos con la cuestión de los problemas, nuestra principal *acción* como educadores no consiste en *resolverlos,* sino en *idearlos,* en *plantearlos,* y, paralelamente, no debemos considerarnos satisfechos con enseñar

[5] Publicado en la Revista «Enseñanza Media», números 33-36 (enero-febrero 1959).

simplemente a resolverlos, sino que también debemos ejercitar a nuestros alumnos en proponérselos, en disponer su planteo.

Resolver un problema *planteado* es buscar el camino a seguir para ir a parar a una solución hallada ya por el creador del problema; pero, en general, eso no es crear; o por lo menos es reducir a mínima expresión la libertad creadora formada de combinaciones y selecciones. De aquí sacamos una consecuencia que a primera vista, podrá parecer paradójica, y es que, siendo la actividad matemática de por sí un problema constante, toda educación matemática basada en la resolución clásica de problemas *planteados* resulta insuficiente.

La paradoja se aclara metafóricamente; no se aprende a jugar al ajedrez resolviendo los llamados «problemas» de ajedrez y, sin embargo, cada jugada es un problema. Ahora bien, cada jugada es un problema vivo, espontáneo, mientras que cada problema preparado es, generalmente, un problema artificial, muerto, raramente probable en el curso de una partida.

Algo parecido ocurre en Matemáticas. La actividad creadora del matemático se plantea constantemente problemas de inmensa variedad, naturales, vivos; mientras que los problemas al uso en la enseñanza no son más que manifestaciones particularísimas y a veces bien endebles de aquella actividad. Sin darnos cuenta de ello hemos ido reduciendo los fines de la enseñanza de la matemática al planear la mayoría de los problemas de las colecciones usuales y, consiguientemente, hemos reducido su eficacia.

En la adaptación de los medios al fin, es donde se encuentra, a mi parecer, la eficacia de toda acción. Para liberar la cuestión de los problemas de los márgenes, que la canalizan, hay que empezar, pues, por ensanchar la finalidad de su planteo y repasar cuáles han sido los fines que en tal empresa se han perseguido hasta ahora.

He aquí los más significativos:

1.° Explorar las aptitudes matemáticas en nuestros alumnos. Tal es el fin de los problemas «tests», cuya naciente técnica, que no es fácil, alimenta sus raíces de la misma matemática, de la psicología, y de la estadística.

2.° Excitar el interés de nuestros alumnos hacia las teorías nuevas y sugerir bajo forma activa las nociones a adquirir. Usaremos entonces los problemas «situaciones» que señalan la técnica didáctica del profesor.

3.° Afirmar la adquisición de las nociones y teorías repitiendo las ocasiones de aplicarlas, de fijarlas en la memoria y de dominar su uso. Son los problemas «ejercicios», los más usados en la enseñanza.

4.° Vigilar el aprendizaje del alumno. Problemas de pruebas o «exámenes».

5.° Comprobar la eficacia de los métodos de enseñanza. Problemas, «experiencias» en cierto modo análogos a los precedentes, pero cuyos sujetos no son ya los individuos, sino los colectivos.

No pretendo teorizar aquí sobre los caracteres diferenciales de estas varias especies de problemas y trazar una metódica de ellos, lo que ha constituído ya el objeto de múltiples obras, sin que se haya llegado a agotar el tema. Voy a limitarme a subrayar algún rasgo común que haga destacar su capital falta de eficacia educativa.

En cada prueba, «test», examen, experiencia o simple ejercicio, hay siempre varios elementos que actúan recíprocamente como elementos medidores y medidos. Si el profesor pretende medir a sus alumnos con el aparato de los problemas, no es menos verdadero que los alumnos se hacen a su vez mediadores de la eficacia de la prueba y ésta, como aquéllos juntos, resultan también medidores de la objetividad del examinador y de la eficacia del profesor y de su método de enseñanza.

Precisamente en esta reversibilidad de juicios radica una de las más graves consecuencias de la tecnificación de las pruebas: la aparición inevitable de una técnica paralela de *preparación*. La preparación para los exámenes acaba por adulterar y desplazar completamente el impulso formativo que debe tener toda pedagogía bien concebida. Para un preparador (tal como llega a ser todo profesor obsesionado por la reciprocidad de juicios antes citada) el fin de su acción no es ya la formación de sus alumnos, su éxito en la vida, sino más bien su acierto en el acto efímero de la prueba. He aquí, pues, un ejemplo elocuente, del campo social, en que la observación (examen) obra lesivamente sobre lo observado (enseñanza), provocando una grave debilitación de sus fines naturales.

Siendo el fin de la enseñanza de las matemáticas el cultivo en el alumno de la actividad creadora matemática, basta pensar en la inmensidad de factores que entran en esta actividad para comprender cuántos de ellos dejamos de lado al proponer los problemas clásicos. En el fondo, la causa es siempre la misma. Salvo en la minoría de problemas llamados de «situación» (desgraciadamente muy poco usados aún) se acostumbra a hacer de los otros asunto de corrección y de calificación que condiciona los enunciados y les da el carácter artificial comentado antes.

Así, si el problema no debe simplemente cumplir su estricto fin funcional educativo, sino que se le atribuye también el carácter de instrumento apto para medir algún factor de aprendizaje del alumno, su enunciado debe ser absolutamente preciso para que éste sepa, sin ambigüedad, lo que debe buscar y los datos de que dispone. Un enunciado con datos redundantes, por ejemplo, será juzgado como un acto de estupidez o de mala intención del que proponga el problema. El alumno acostumbrado a la «buena fe» y a la «infalibilidad» de los examinadores, tratará de agotar todos los datos buscándoles aplicabilidad por suponerlos necesarios. Y ¡ desgraciado de él si no lo hace ! Será entonces él quien será juzgado estúpido.

Este solo ejemplo pretende ilustrar cuanto hay de artificio en ese clima de enunciados tan ajustados en que se mueven los alumnos. No critico su uso, ni tampoco su necesidad; pero sí su exclusividad, tan alejada de las imprecisiones y redundancias de los datos que se ofrecen a la curiosidad o a las necesidades del investigador en funciones.

Tal vez, gracias a esa artificiosidad de los problemas usuales, se puede especular sobre su morfología. El mismo Polya ha concretado en su libro *How to solve it* un cuadro de consejos para el ataque de sus soluciones. No falta en él la inevitable pregunta: «¿Has utilizado todos los datos, todas las condiciones del enunciado?», seguida de otras no menos juiciosas que apelan a la perfecta comprensión previa, a la semejanza posible con otros problemas de solución conocida, etc.

Desde el punto de vista creador, todo cuanto se llega a sacar de esta metodología clásica de los problemas, es una cierta costumbre de trazar, de tender caminos que enlacen la solución buscada a las premisas establecidas en la red más o menos vasta de implicaciones lógicas en que están inmersas. Pero a medida que el campo se ensancha y los puntos de partida y de llegada se alejan de las perspectivas corrientes, estos sabios consejos metodológicos muestran una insuficiencia pareja a su generalidad.

Ciertamente, no es débil resultado de educación lógica conseguir que el alumno adquiera un cierto dominio en esta ordenación implicativa. Pero, como he dicho en otras ocasiones, el espíritu lógico no es el único fin que hay que lograr en la formación de nuestros alumnos. Si pasamos del campo artificial descrito más arriba al dominio natural de la actividad creadora matemática, tanto pura como aplicada, encontraremos un sin fin de matices imprecisos al establecer las generalizaciones, las analogías, las combinaciones conceptuales intuitivamente presentidas. ¡Qué abundancia de datos, de condiciones, nos obligará a aguzar nuestra intuición de lo esencial para retener solamente lo indispensable de entre ellos!

Todos sabemos que aprender a plantear bien un problema es recorrer el principal camino para resolverlo. ¿Por qué, pues, alejamos esta actividad en el aprendizaje de nuestros alumnos, proponiéndoles siempre volver a seguir caminos preparaditos? La limitación de su libertad de selección facilita, sin duda nuestra tarea de corrección, situándola en el camino de las implicaciones necesarias, que nos resulta cómodo, pero ello va en perjuicio de la formación matemática completa de los alumnos, que no puede manifestarse en lo que tal vez pudiera tener de más personal y creador.

El mismo Polya, después de escribir el librito antes citado, al servicio de la tradición escolástica, sintió la necesidad de completarlo con una hermosa obra en dos volúmenes: «Mathematics and Plausible Reasonnig», en la que el razonamiento implicativo cede su lugar al razonamiento plausible fundado en la inducción, en la analogía en la inferencia... Y, a mi modo de ver, en esta obra se muestra mejor que en la primera el verdadero genio de Polya, bien conocido además como el de uno de los mejores proponentes de problemas.

Estimo que hay, en resumen, toda una interesante tarea a promover y a realizar, reconsiderando cuidadosamente los problemas en uso en nuestra enseñanza, poniendo en primerísimo plano su finalidad esencialmente educativa y desligándola de la de calificación que le ha sido añadida artificiosamente. Una vez bien asegurado este deslinde, es de desear que una mayor libertad de selección y de combinación deje manifestar y desarrollar las facultades creadoras del alumno fuera de los términos habituales de los enunciados y aun invirtiéndoles de forma que se consideren como metas o soluciones a alcanzar los enunciados que hay que proponer.

CAPITULO VI

EL MATERIAL

§ 1. LO CONCRETO EN LA ENSEÑANZA MATEMATICA [1]

EL MOMENTO ACTUAL DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA EN ESPAÑA

España se halla actualmente en plena evolución industrial. No puede quedarse rezagada. Le urge colocarse al nivel de los pueblos que tienen una ciencia y una técnica propias, y aportar en lo posible su esfuerzo al progreso universal. Ello exige, ante todo, una adecuada formación matemática de nuestra juventud. No he de insistir ahora en el papel fundamental que la matemática desempeña en el progreso técnico de la humanidad. La técnica es en definitiva el dominio de las fuerzas naturales y no puede lograrse tal dominio sin un conocimiento profundo de las fuentes de energía y de las leyes con que se gobierna. Energética y cibernética, en sus aspectos nuclear y electrónico, respectivamente, son los grandes campos de actividad técnica presente y futura, y ya sabemos la magnitud del instrumental matemático que tales técnicas necesitan.

Para la obra técnico-matemática del futuro se precisarán cuadros cada vez más amplios de investigadores agrupados en equipos de estructura piramidal, es decir, edificados en estratos que vayan desde una amplia base

[1] Extractamos bajo este título varios fragmentos de la Conferencia que el autor pronunció en el acto inaugural de la XI Reunión de la Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza matemática, que, acompañada de una extensa Exposición internacional de Material Didáctico, se celebró en Madrid del 21 al 27 de abril de 1957.

humana de eficiencia realizadora hasta singulares cúspides creadoras de elevada perspectiva.

A nosotros los educadores nos corresponde asegurar toda la elevación posible de estas estructuras empezando por consolidar y amplificar sus bases en cantidad y calidad. Hacer la cultura elemental y media asequible al mayor número de inteligencias, no sólo en el sentido político de equiparación cultural de clases sociales, sino también en un sentido amplificador de accesibilidad pedagógica. La Matemática ha constituído tradicionalmente la tortura de los escolares del mundo entero. Y la humanidad ha tolerado esta tortura como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario. Pero la enseñanza no debe ser nunca una tortura. Y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces.

La coyuntura matemática actual está clamando por una revisión profunda de modos y métodos de enseñar que permitan ensanchar los campos de eficiencia matemática de nuestra juventud.

LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Para esta conferencia inicial se me ha sugerido el tema «El papel de lo concreto en la Matemática», título que yo gustosamente invertiría, ya que me parece más justo referirse al «Papel de la Matemática en lo concreto». Trataré de explicarme sin pretender definir «la Matemática» ni «lo concreto».

Para acotar un poco los términos de la cuestión diré que quisiera referirme a la Matemática como actividad mental y no como cúmulo de conocimientos adquiridos mediante ella, y que, ante la imposibilidad de definir «lo concreto», me referiré a este algo «inconcreto» que en lenguaje vulgar se contrapone a veces indebidamente a «lo abstracto». Prescindiendo del juego paradójico de adjetivos, quiero precisar, pues, que abandono todo intento de definición de lo concreto y de lo abstracto y que quiero referirme tan sólo a la disyuntiva o a la simple comparación que los relativiza.

Pero aun así surgen difíciles interrogantes: ¿Qué debemos entender por actividad matemática? ¿En qué consiste la distinción comparativa que permite situar en cada caso a un lado lo concreto y al otro lo abstracto? Las respuestas que demos a estas preguntas acaso marcarán un sello específico a nuestra enseñanza.

Si consideramos como actividad matemática estrictamente la operatoria relacional entre conceptos ya elaborados, hemos de situarnos inicialmente en un mundo de entes idealizados, bien sea considerándolos como innatos, como indirectamente definidos por sus relaciones o como resultantes de procesos de idealización que caen fuera de la actividad matemática. Este es el punto de vista del matemático puro. Que no es ciertamente el mío como educador. Como tal, yo no puedo dejar de pensar que la actividad matemática de la gran mayoría de mis futuros alumnos se desenvolverá partiendo de situaciones bastante menos depuradas que al paso les ofrezca la realidad concreta. Y aquí hacemos uso, por primera vez, del adjetivo concreto asociándolo al ambiente real en torno al hombre futuro que será nuestro escolar. De poco le servirá entonces toda la dinámica operacional abstracta o semiabstracta si no encuentra para su aplicación los entes ya depurados con los que se le adiestró.

Es axioma de la moderna educación que el educador debe analizar sus propios procesos de aprendizaje para tenerlos en cuenta al guiar el de sus alumnos. Pues bien, yo me di cuenta por primera vez del vacío creado por la enseñanza matemática tradicional al comprobar las dificultades de planteamiento que encontraba en el estudio de los fenómenos de la técnica del ingeniero. Analizando tales dificultades comprendí que procedían del hábito de razonar sobre entes demasiado perfectos y que difícilmente podía encajar en el complejo cuadro que la técnica me ofrecía. Para una tal adaptación precisaba atrevidas simplificaciones y una cierta intuición apriorística de su posibilidad dentro del margen de aproximaciones que tal técnica permitía. Comprobé que todo mi bagaje de cálculo y de ecuaciones diferenciales me servían de muy poco para la labor de planteamiento, cuando no me estorbaban induciéndome a la consideración de sutilezas innecesarias.

Toda la educación matemática de que me ufanaba no me había enseñado a efectuar procesos eficientes de abstracción, de selección de causas predominantes, en los que juega más la intuición que la lógica. Y no se escuden los profesores puristas en que ésta es tarea de educación tecnológica posterior. Existe una cuestión de «hábito» que es preciso educar desde el principio, sin que con ello pretendamos los profesores de matemáticas invadir el campo específico de tales tecnologías. Si no se educa este hábito desde un principio, difícilmente el alumno podrá construir por sí mismo esquemas lógicos con buen sentido de aplicación, y aun los que se le presenten aparecerán ante su sentido crítico, exigente de pureza, como artificios que ha de admitir sin convicción. La técnica necesita fundamentalmente el cultivo de estas facultades esquematizadoras, y no ejercitarlas desde un principio entre los alumnos de nuestras escuelas superiores es incapacitar a quienes en ellas se forman para toda labor posterior de auténtica creación.

Y al ver esto claro en mi aprendizaje como técnico, aprendizaje que simultaneaba con mis primeros años de ejercicio como profesor de Matemáticas de Instituto, comprendí que este fallo era general en toda la educación matemática elemental y tal vez uno de los importantes factores contribuyentes a la general aversión de la juventud hacia el estudio de las Matemáticas; su desconexión con la realidad, en este caso, naturalmente, la realidad infantil; su apartamiento del mundo de sus intereses concretos, intereses que no coinciden con los primarios vitales del adulto, como algunas escuelas han preconizado; su desconocimiento del mundo de sus percepciones sensibles y de sus actuaciones, con las que juega y aprende a un tiempo inconscientemente.

SOBRE LO CONCRETO Y LO ABSTRACTO

Lo concreto empieza siendo para el niño lo que percibe. Sobre estas percepciones primeras actúa elaborando analogías de las que surgen conceptos más generales, más abstractos, llegando a veces a procesos de abstracción de rapidez insospechada.

La percepción y la acción parecen constituir el binomio sobre el que se desarrolla el aprendizaje matemático. Con su doble juego el niño, y también el adulto (niño, al fin, en tanto aprende), elabora conceptos y relaciones válidas para clases de entes cada vez más generales. Y si en un principio la base concreta parte de las percepciones sobre el mundo físico, los estratos siguientes de elaboración generalizadora parten ya de las primeras idealizaciones, que si representaron abstracciones resultantes de los primeros procesos son luego a su vez base concreta sobre la que se apoyan los procesos ulteriores.

De aquí se infiere que lo concreto y lo abstracto no son términos absolutos, sino relativos, en función del salto de cada estrato al siguiente. De aquí también que podamos hablar de percepción en un sentido no sólo sensorial, sino también intelectivo. La percepción intelectiva sería así como el alumbramiento de las tomas de conciencia de los sucesivos estratos de abstracción. Y lo virtual, que es muchas veces la esencia del pensamiento matemático, pasa a ser, a los efectos de concreción consciente, tan real para el matemático puro como pueda serlo para el físico el mundo experimental.

En los procesos matemáticos de abstracción ha desempeñado un papel decisivo la simbolización. Es la condensación simbólica y la formalización del razonamiento matemático lo que ha hecho posible la rápida y formidable progresión de abstracciones y generalizaciones crecientes que constituyen la Matemática desde Vieta hasta nuestros días. Expresados los conceptos mediante símbolos y traducidas las relaciones que los ligan mediante leyes formales entre los mismos, puede descansar la mente matemática de los contenidos y operar sobre las simbolizaciones. De su combinación surgen entonces conceptos nuevos que se expresan mediante nuevos símbolos, unidos por nuevas leyes, y así sucesiva e indefinidamente.

La forma en Matemáticas ha ido de este modo adquiriendo tal preponderancia que al fin, la ley formal operante, ha terminado teniendo más fuerza que los propios conceptos operados. Empezó anticipándose a ellos en el Renacimiento con la resolución ciega de ecuaciones cúbicas mediante radicales imaginarios, cuando éstos carecían de todo sentido matemático, y ha terminado dejando reducidos los entes matemáticos a meros ropajes concretos con los que pueden revestirse las estructuras. Pero cada estructura, no deja de ser, a su vez, un nuevo concepto, base de ulteriores especulaciones dentro de un cuadro de superestructuras más amplias. El Algebra de Boole, que admite ropajes concretos tan diversos como las clases, las proposiciones, los conjuntos, los circuitos de interruptores y de conmutadores, conexiones de válvulas de vacío en las máquinas electrónicas de cálculo, no pasa de ser a su vez un ejemplo muy singular dentro de las familias más generales de estructuras algebraicas con doble ley de composición.

La Matemática, que empezó desnudando al mundo físico de sus atributos sensoriales para edificar sus primeros contenidos matemáticos conceptuales (número, espacio euclídeo, medida, etc.), ha terminado desnudándose a sí misma de estos contenidos y quedándose en las simples estructuras pragmáticas que los relacionan. Pero este proceso de generalizaciones y de abstracciones no se sabe a ciencia cierta cuándo empezó ni cuándo terminará... Sólo sabemos que el mundo físico y social, que paralelamente evoluciona, estimula de tanto en tanto estos procesos, sugiriendo conceptos abstractos nuevos, que el matemático se afana luego en depurar y en combinar para la creación de nuevos conceptos derivados, y que también este mismo mundo físico se beneficia posteriormente de las creaciones abstractas puras, hallando para ellas nuevas e insospechadas adaptaciones. (Para no citar más que un ejemplo, recuérdese la misma Algebra de Boole antes citada.)

Ningún profesor de Matemáticas debe olvidar esta monumental e interminable simbiosis con la que mutuamente se alimentan la matemática y la filosofía natural. Con ello, no sólo podrá vivificar los conceptos matemáticos puros proyectándolos sobre la realidad física, sino que sabrá buscar en ésta los trampolines para nuevos saltos de elaboración abstracta.

EL PAPEL DEL MATERIAL DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA

Nuestra XI Reunión tiene como finalidad el estudio del material moderno de enseñanza matemática. Este material: modelos, films, filminas, visto por los matemáticos situados desde la elevada perspectiva abstracta, son meras concresiones ilustradoras, simple ropaje conveniente para facilitar, momentáneamente, compresiones dificultosas; pero, para el educador matemático que no pierda la perspectiva de los procesos iniciales de abstracción, este material es mucho más; representa algo sustancial en su función educativa. Este material estructurado en forma de modelos tiene no sólo la función de traducir ocasionalmente ideas matemáticas, sino también la de originarlas, de sugerirlas.

Hemos de estudiar la manera más acertada, pedagógicamente, de conseguirlo, y también los materiales más dúctiles para su realización. Pero, puesto que la percepción y la acción son fundamentales en toda educación matemática, hemos de conseguir también que los modelos sean capaces de provocar una y otra, de modo que traduzcan o sugieran creando situaciones activas de aprendizaje. Para ello habrá que ir sustituyendo los clásicos modelos de vitrina, de contemplación pasiva, por modelos multivalentes de nueva concepción, manipulados por el propio alumno, y determinantes de una actividad sugeridora del conocimiento que se trata de inculcar. La vida misma, un simple juguete, nos lo ofrece a veces insospechadamente. Y tanto mejor si esta actividad se manifiesta en la creación de nuevos modelos ideados por el propio alumno, ya que así no sólo ejercitará la concreción de la idea matemática a ilustrar o traducir, sino que también, al presentar su modelo a sus compañeros, tendrá que pensar en que sea capaz de sugerir en ellos la abstracción de la que él partió. Véase por dónde la confección de modelos puede ser vehículo natural y eficiente para la práctica feliz de las dos actividades de abstracción y concreción que, como he dicho tantas veces, forman parte de la integral actividad matemática educativa

§ 2. GENERALIDADES SOBRE LOS MODELOS [1]

SU SIGNIFICACIÓN EN LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA

En el artículo anterior hemos dicho que los adjetivos «concreto» y «abstracto» tienen un valor más relativo que absoluto y que los conceptos matemáticos se ordenan según jerarquías de abstracción creciente y concreción decreciente, de tal modo que un concepto puede ser a la vez abstracto con respecto a los que le preceden en la escala, y concreto con respecto a los que le siguen. Pues bien, de acuerdo con esto, y desde un amplio punto de vista, «modelo» en Matemáticas es toda particularización de una idea más general, toda interpretación concreta de un concepto más abstracto. Todo modelo supone, pues, un descenso en los planos jerárquicos de abstracción aludidos. Así decimos, por ejemplo, que el conjunto de los números enteros en un «modelo» de *anillo* conmutativo; que los múltiplos de un número entero constituyen un «modelo» de *ideal* dentro de aquel anillo; que el espacio interior a un elipsoide y las transformaciones proyectivas que dejan invariante dicha cuádrica constituyen un «modelo» de espacio no-euclídeo y de geometría hiperbólica.

En lo que sigue no nos referiremos a un concepto de «modelo» tan general, cuyo estudio nos llevaría demasiado lejos. Teniendo en cuenta que el primer eslabón concreto, del que parte el niño para empezar a edificar sus abstracciones, es el mundo visible y tangible, nos referiremos a «modelos» tomados del mundo material o realizados en él, bien sea con objeto

---

[1] Resumen de las ideas esenciales del artículo del autor titulado «Modéles prêts et modéles faits», publicado junto a otros por la Comisión internacional para el estudio y mejora de la enseñanza matemática en el libro *Le Matérial pour l'Enseignement des Mathématiques* (Ed. Delachaux-Niestlé, París, Neuchatel).

de interpretar conceptos matemáticos o, lo que es mejor, de lograr que el modelo los sugiera. En resumen, entenderemos aquí por «modelo matemático» todo material capaz de *traducir* o de *sugerir* ideas matemáticas.

Ahora bien, concebida la enseñanza como guía de aprendizaje, en el que la acción desempeña tan importante papel como la percepción, habrá que procurar que los modelos provoquen una y otra de tal modo que las interpretaciones o sugerencias de que son portadores no sean meramente contemplativas, sino que despierten la actividad necesaria en el acto de aprender. En otros términos, los modelos deberán *traducir* o *sugerir,* creando además *situaciones activas* de aprendizaje.

CARACTERÍSTICAS DEL MATERIAL MODERNO. DINANISMO Y MULTIVALENCIA

La actividad del alumno ante los modelos confeccionados *estáticos,* se desarrolla principalmente en el sentido de abstraer de varios de ellos el contenido matemático subyacente común, lo que exige una multiplicidad de modelos. En cambio, un modelo *dinámico* lleva en sí mismo la multiplicidad de sus configuraciones y la génesis de los conceptos matemáticos derivados de los caracteres que permanecen invariantes durante su transformación, especialmente si ésta puede efectuarse de modo continuo. De aquí la gran ventaja de los modelos dinámicos sobre los estáticos para sugerir conceptos matemáticos y para ejercitar la actividad de *abstracción.*

Pero si proponemos al alumno la traducción de tales conceptos en nuevos modelos, la creación y la realización de ellos pondrá en juego la actividad inversa de «*concreción*», tan interesante como aquélla. Esta actividad creadora del alumno se favorecerá grandemente si se le suministra material *multivalente* adecuado, es decir, elementos constructivos capaces de servir para múltiples realizaciones (varillas, articulaciones, fichas, mosaicos, bloques, barras, regletas, gomas, plastilina, etc.). Este material tiene además la ventaja de prestarse al juego libre como puro y simple deseo de expansión activa, con lo que muchas veces termina asignándose dicha actividad un fin intelectual que suele ir de lo estético a lo matemático. La lección experimental que sobre progresiones aritméticas de orden superior describimos en el capítulo siguiente tuvo su origen en una actividad de esta índole: formación de pirámides con regletas de colores varios; actividad que, conducida inicialmente por valores puramente plásticos, terminó sugiriendo una multitud de relaciones matemáticas contenidas en la teoría de tales progresiones aritméticas de orden superior.

VENTAJAS DE LA CREACIÓN Y DE LA REALIZACIÓN DE MODELOS SOBRE SU SIMPLE UTILIZACIÓN

Los modelos así realizados no sólo cultivarán la actividad de «concreción» o traducción de ideas matemáticas en el alumno que los ha creado a tal fin, sino también la actividad de abstracción o de sugerencia de tales ideas en los que hayan de contemplarlos o manejarlos después. Si el alumno creador del modelo se sitúa, pues, desde el primer momento, en este doble punto de vista, es decir, pensando que el modelo tendrá que sugerir luego su propia idea a los demás, practicará a un tiempo las dos facultades de abstracción y de concreción que tantas veces hemos ponderado como esenciales en una formación matemática completa.

Así, por ejemplo, el simple y vulgar hecho de dibujar un triángulo en el encerado para ilustrar un razonamiento *general para todos los triángulos,* obliga a presentar un modelo de triángulo que no tenga propiedades especiales que sugieran generalizaciones falsas. ¡Cuántos errores de razonamiento se deben al hecho de haber creado en la figura dibujada un modelo inconveniente para su ilustración, por llevar implícitamente caracteres no especificados en las hipótesis! No incurriríamos en tales errores, ni haríamos que los demás incurrieran en ellos, si, al crear el modelo traduciendo o concretando una idea abstracta, pensáramos que hay que utilizarlo inmediatamente como sugeridor de propiedades no particulares de dicho modelo, sinó genéricas de todos los análogos, es decir, propiedades asimismo abstractas.

Esta sola consideración realza la ventaja de la creación de modelos sobre el simple uso, ventaja que no se obtendrá sin la contrapartida de algún inconveniente, como es el del tiempo consumido en los detalles de su confección y acabado. Desde un enfoque, estrictamente matemático, es preferible, en este aspecto, cuidar las ideas sobre los detalles, sin que ello signifique que sean despreciables, ni mucho menos, los factores educativos que en otro orden de ideas (educación del gusto, de la destreza manual, etcétera), puedan obtenerse de la perfección en el acabado. Este segundo aspecto de la cuestión resulta particularmente interesante en las enseñanzas de carácter mixto formativo-profesional. La ponderación entre uno y otro aspecto dependerá, en definitiva, del carácter que prepondere en la enseñanza.

Sea como fuere, no cabe duda de que la realización de modelos con elementos de material multivalente favorecerá notablemente una y otra finalidad, permitiendo al alumno un considerable ahorro de tiempo y la posibilidad de favorecer la facultad creadora, sin mengua de la realizadora que resulta así mucho más rápida.

MODELOS CREADOS BAJO CONDICIONES. APRENDIZAJE DE PROYECTOS

La realización de modelos permitirá además al alumno ejercitarse tempranamente en la creación técnica. Todo proyecto técnico supone la creación y realización de una estructura (máquina, construcción, instalación) destinada a cumplir determinadas funciones. Estas imponen ciertas condiciones que las leyes físicas suelen traducir en ecuaciones matemáticas, dando lugar a cálculos que determinan los elementos característicos de la estructura proyectada.

En la modesta esfera que le corresponde, un alumno de enseñanza media puede también realizar modelos sujetos a determinadas condiciones que basten para determinar indirectamente sus dimensiones. Así, en Geometría del Espacio, en lugar de proponer a un alumno que realice en cartón un modelo cilíndrico o cónico de dimensiones dadas, será preferible proponerle la construcción, a escala conveniente, de la maqueta de un depósito cilíndrico o cónico de capacidad dada y del que se conozca además una dimensión (por ejemplo, la altura) impuesta por condiciones de emplazamiento. Más tarde, cuando el alumno, iniciado en los métodos del cálculo diferencial, sepa resolver problemas de máximos y mínimos, puede proponérsele la construcción de modelos de proyectos que obedezcan a determinadas condiciones económicas: gasto mínimo de material para una capacidad dada, volumen máximo para una área dada, o bien para un desarrollo recortable de una placa prefijada, etc.

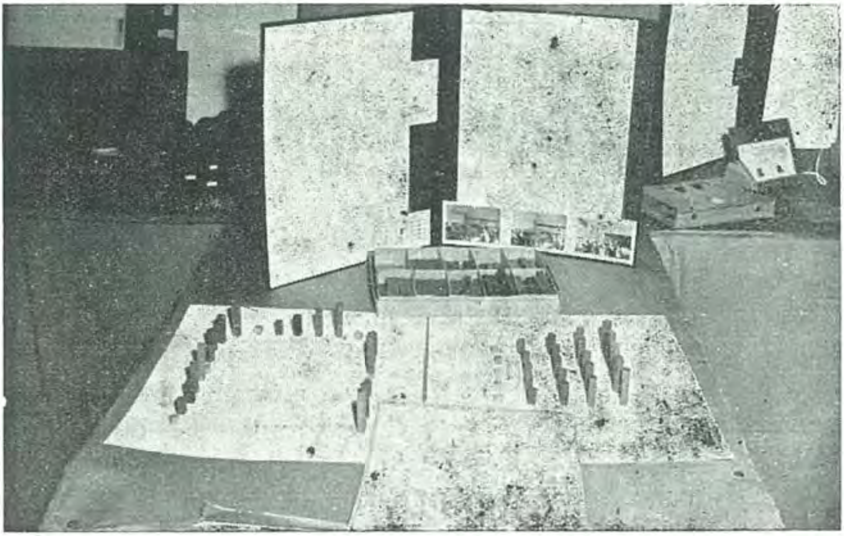
Al calcular y realizar así sus proyectos y maquetas, los alumnos jugarán a ser anticipadamente ingenieros. Su interés por los problemas que realizan aumentará considerablemente, beneficiándose con ello la calidad de su trabajo, ya que los cálculos que para ello desarrollan no tienen por meta la obtención de unos resultados numéricos que les dejan indiferentes, sino de las dimensiones que necesitan para llevar a término una realización tangible efectiva.

§ 3. ALGUNOS EJEMPLOS DE MATERIAL DINAMICO MULTIVALENTE

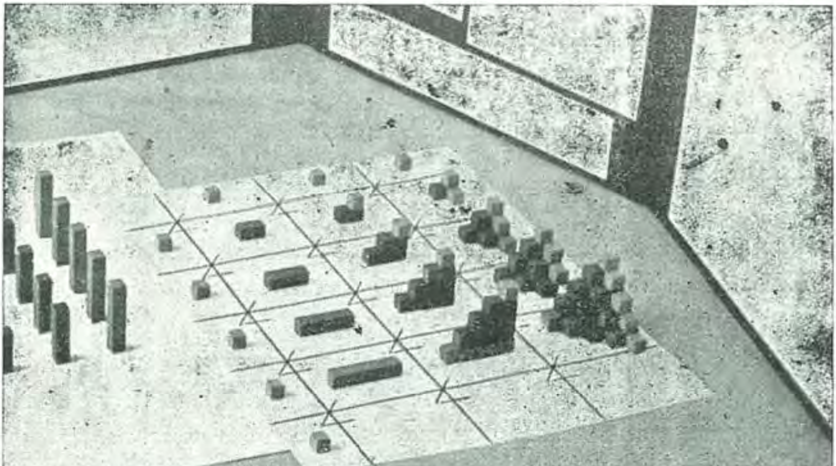
No es nuestro propósito describir en este artículo los múltiples materiales utilizables para la confección de modelos: cartón, cartulina, tablex, plexiglás y otros materiales plásticos, alambre, agujas metálicas, plastilina, cola, bandas adhesivas, etc., ni la técnica de tal construcción con el manejo de utensilios adecuados a este fin. Nos limitaremos a recomendar al lector interesado en tal fabricación, la lectura de los artículos destinados a dicho tema en la obra *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques,* ya citada con anterioridad, publicada por la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (Edit. Delachaux-Niestlé, Neuchâtel-Paris), y especialmente el interesante artículo del profesor J. W. Peskett, «Méthodes de fabrication de modèles et matériaux nécéssaires», que constituye el capítulo X de dicho libro.

Aunque más adelante nos hemos de referir a los modelos matemáticos que nos ofrecen los objetos que nos rodean en la vida diaria, solamente citaré aquí, al paso, algunos elementos aprovechables como material multivalente para la construcción de modelos dinámicos diversos: tubos de cartón, botes de hojalata, cajas circulares, anillas, aros, bobinas de cintas de máquinas de escribir, carretes de hilos, depósitos cilíndricos de material plástico de lápices y plumas estilográficas, carpetas, agujas de tricotar, pinzas y ojetes metálicos, varillajes de paraguas viejos, material eléctrico vario que oportunamente detallaremos, etc. De todos estos elementos hemos hecho amplio uso en los modelos y lecciones que describimos en el capítulo siguiente.

Quisiéramos en este artículo referirnos tan solo a unos contados materiales, cuya eficacia y multivalencia está plenamente demostrada en la enseñanza de la Aritmética y de la Geometría.



Utilización de las regletas de Cuisenaire en la enseñanza de las congruencias



Estructuras con regletas para ilustrar progresiones aritméticas de orden superior

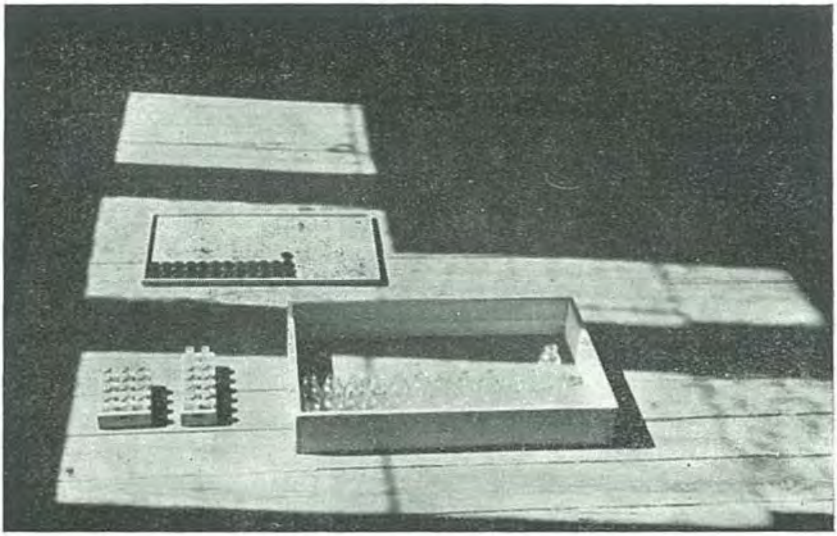
REGLETAS

Ya hemos visto en el capítulo anterior todas las posibilidades de las regletas coloreadas de Cuisenaire en la enseñanza moderna de la Aritmética. Este material constituye por sí solo uno de los ejemplos más significativos de los caracteres de multivalencia y activismo exigibles a todo material didáctico moderno. Hemos descrito cómo invita a la acción, sugiriendo, a través de ella, el dinamismo aritmético y algebraico. Pero también ciertos temas de Geometría, de cálculo combinatorio y de progresiones, son abordables con dicho material; lo que constituye prueba palpable de su mencionada multivalencia. Para más detalles puede consultar el lector el artículo del profesor Gattegno, «Les matériels multivalents», que constituye el capítulo XII del libro antes citado. Vean además la lección 9 del capítulo siguiente.

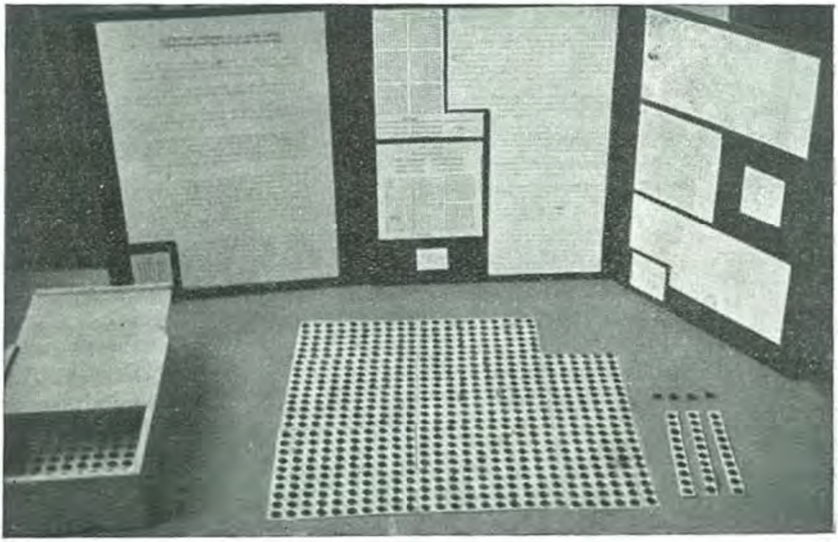
Material de fichas coloreadas de las Escuelas del Sagrado Corazón, de Valladolid

FICHAS, BOTELLINES, ETC.

Para una enseñanza de la Aritmética concebida más a la manera clásica, es decir, como dinámica de relaciones entre conjuntos de unidades separa-



Fichas y botellines ilustrando las nociones de números primo y compuesto



Cartones con cierres automáticos ilustrando la estructura operatoria de la raíz cuadrada das, un material adecuado lo constituyen las fichas circulares corrientes en los juegos, especialmente si son coloreadas en varios tonos que permitan distinguir los conjuntos unos de otros. La Rvda. Madre Dolores Puig, del Juniorado de las Escuelas del Sagrado Corazón, de Valladolid, ha descrito interesantes muestras del uso de este material en la Revista «Enseñanza Media», número 33-36, material que expuso asimismo en la Exposición de Madrid en 1957.

Pero el comercio mismo suministra conjuntos ya agrupados (botones, automáticos, alfileres, botellines, etc.), de cuyas agrupaciones puede obtenerse provecho en distintos temas de enseñanza. Así, por ejemplo, la actividad de encajonar un cierto número de botellines en disposición rectangular, sugiere la distinción entre número primo y número compuesto, y aun la técnica para su discriminación.

La disposición en grupos de los cierres automáticos de ciertas marcas nos ha brindado eficaz oportunidad para iniciar a los alumnos en la técnica de la descomposición en factores [1]. Finalmente, la agrupación de estos mismos elementos en tiras de diez, y cartones cuadrados de cien, permite desarrollar a través de una actividad geométrica la estructura de la regla de la raíz cuadrada (ver la lección que se describe en el capítulo siguiente).

VARILLAS ENGARZADAS Y ARTICULADAS

Pasando al campo de la Geometría, las varillas de distintos tamaños, acompañadas de dispositivos convenientes para su engarce y su articulación, constituyen el material multivalente más adecuado para la construcción de polígonos y poliedros, para la ilustración de sus propiedades y aun para materializar transformaciones geométricas diversas.

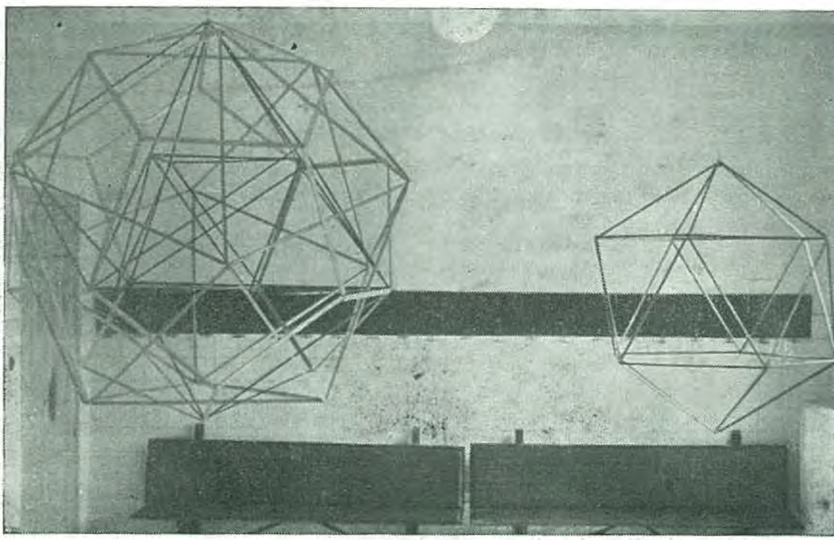
Así, por ejemplo, con treinta varillas de madera, iguales, terminadas con hembrillas circulares que permitan atarlas de cinco en cinco, concurrentes en un mismo vértice, y encadenarlas tres a tres en cada cara, formaremos rápidamente un icosaedro regular desmontable.

La construcción de este modelo surgió de un comentario en clase, después de haber aparecido destrozados antiguos modelos de dodecaedro y cubo regulares (construídos con varillas metálicas soldadas) mientras el tetraedro, octaedro e icosaedro, de la misma colección, se conservaban en

[1] Véase P. PUIG ADAM: «Didáctica Matemática Eurística», lección sobre descomposición en factores primos.

buen estado. La diferencia de resistencia, no debida al azar sino a la rigidez estática del triángulo, originó una alusión instructiva a las estructuras reticuladas triangulares corrientes en la técnica (puentes, postes, etcétera). Y, en efecto, los alumnos comprobaron la rigidez del icosaedro como estructura triangular, obtenida como hemos dicho, sin necesidad de soldar los vértices, sino de atarlos simplemente.

En cambio, un dodecaedro construído de análoga manera carece de rigidez. Para dársela hubo que sostenerle mediante un icosaedro formado por

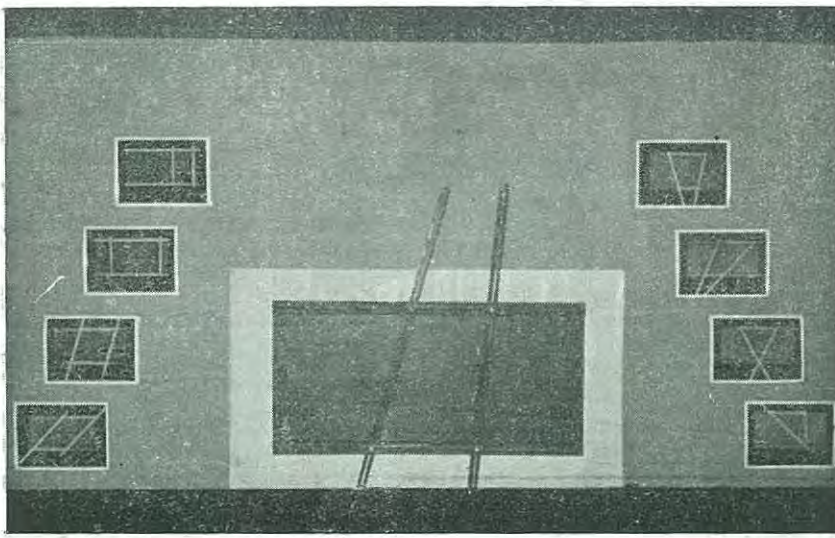


El omnipoliedro regular construído en el Instituto de San Isidro

aristas que cruzaran ortogonalmente las del dodecaedro en sus puntos medios. Es fácil obtener la relación entre las aristas de uno y otro poliedro: la arista del dodecaedro es la sección áurea de la del icosaedro cruzado.

Para obtener análogamente un cubo rígido bastará insertar en sus caras las seis diagonales formando las aristas de un tetraedro regular inscrito en él. Si se inscribe un cubo en el dodecaedro antes formado (sostenido por el icosaedro correspondiente), en el cubo un tetraedro, como hemos dicho, y en este tetraedro el octaedro regular cuyos vértices son los seis puntos medios de sus aristas (es decir, los centros de las caras del cubo), obtendremo un modelo rígido desmontable de los cinco poliedros regulares sosteniéndose mutuamente y que pueden destacarse entre sí pintando sus aristas de colores bien diferenciados. Las longitudes de estas aristas están en la relación: cubo, 1; tetraedro, $\sqrt{2}$; octaedro, $\sqrt{2}/2$; dodecaedro $(\sqrt{5} - 1)/2$; icosaedro, 1. Este modelo fue bautizado con el nombre de «omnipoliedro regular» por los propios alumnos que lo construyeron, en el Instituto de San Isidro.

Quede consignado lo anterior como un ejemplo vivido de cómo el material multivalente de varillas permite la rápida construcción de un modelo,

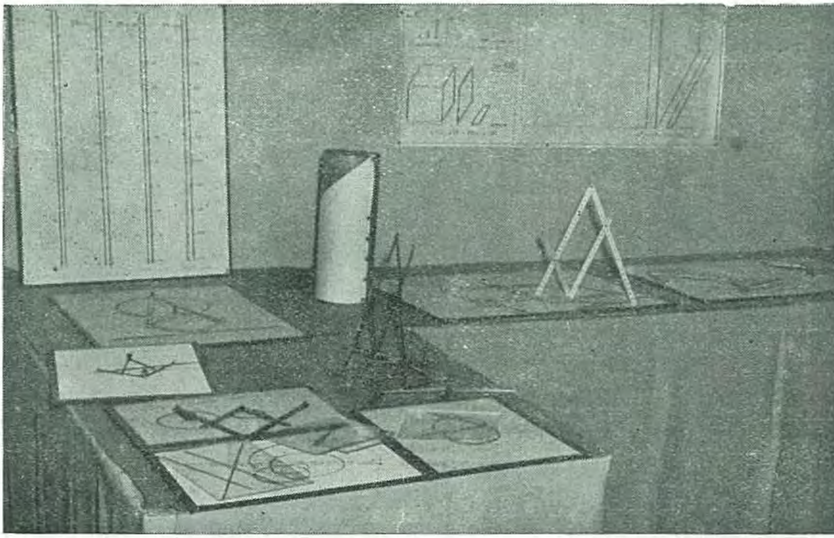


Construcción dinámica de cuadriláteros con varillas articuladas y deslizantes (material belga)

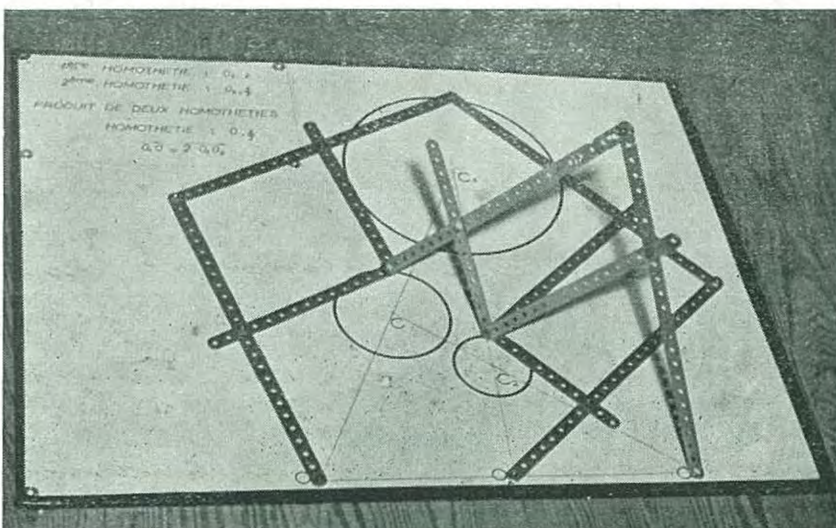
y cómo esta construcción puede surgir del comentario a un hecho ocasional de la misma vida escolar. La citada Rvda. Madre Puig, de Valladolid, ha realizado con sus alumnas construcciones análogas de modelos de poliedros regulares estrellados [2].

Cuando los sistemas no son rígidos se obtienen estructuras deformables con ciertos grados de libertad. Condicionando éstos convenientemente (fijación de determinados elementos, deslizamiento de otros, etc.), pueden establecerse relaciones de posición entre los vértices variables del sistema

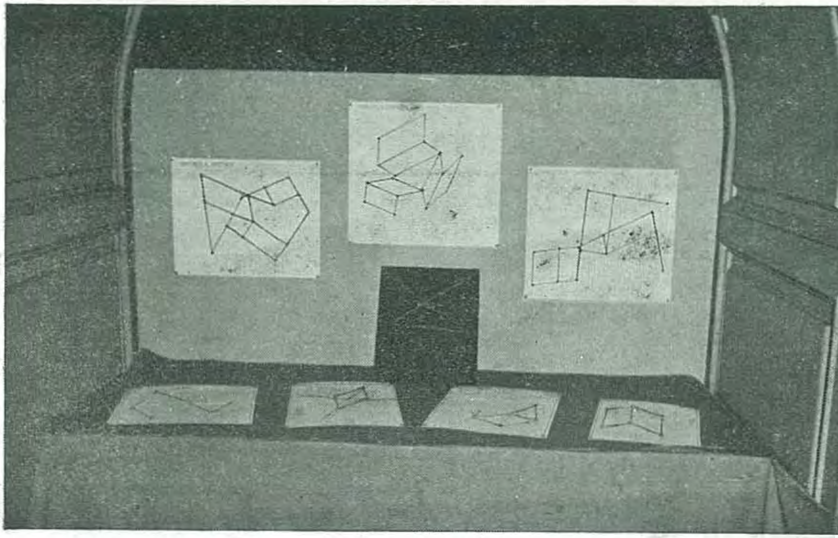
[2] Véase Revista «Enseñanza Media», núms. 29-32.



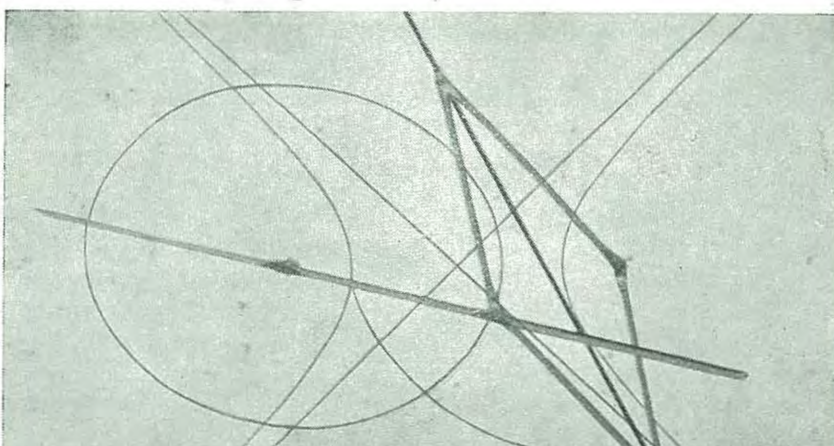
El material de varillas articuladas del profesor Biguenet (Francia)



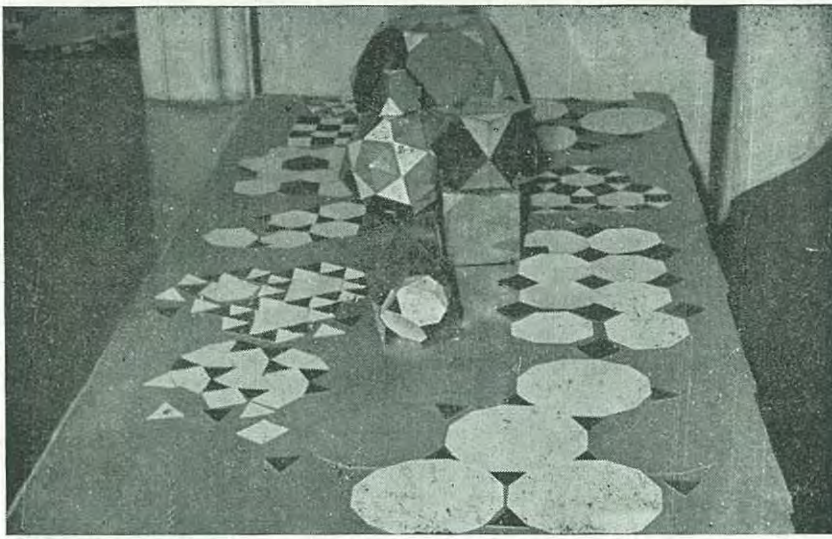
Detalle de uno de los modelos del profesor Biguenet : el que realiza
el producto de dos homotecias



Modelos dinámicos articulados para ilustrar transformaciones geométricas varias : traslaciones, giros, semejanzas, homotecias y sus productos (Bosteels-Bélgica)



Generación puntual y tangencial de la hipérbola (sistema de deslizamiento y articulación (Servais-Bélgica) que traduzcan transformaciones geométricas conocidas. El profesor francés Biguenet y el belga Bosteels, han hecho amplio uso de estos sistemas articulados para ilustrar transformaciones geométricas en el plano y sus productos: traslaciones, giros, homotecias, semejanzas, inversiones, polaridad respecto al círculo...



Mosaicos varios obtenidos con polígonos regulares (profesora Carleer-Bélgica)

Como ejemplo típico de material geométrico multivalente, encuadrable dentro de este párrafo, citaremos, por último, el famoso juguete meccano de cuyos elementos se ha valido precisamente el profesor Biguenet para sus realizaciones [3].

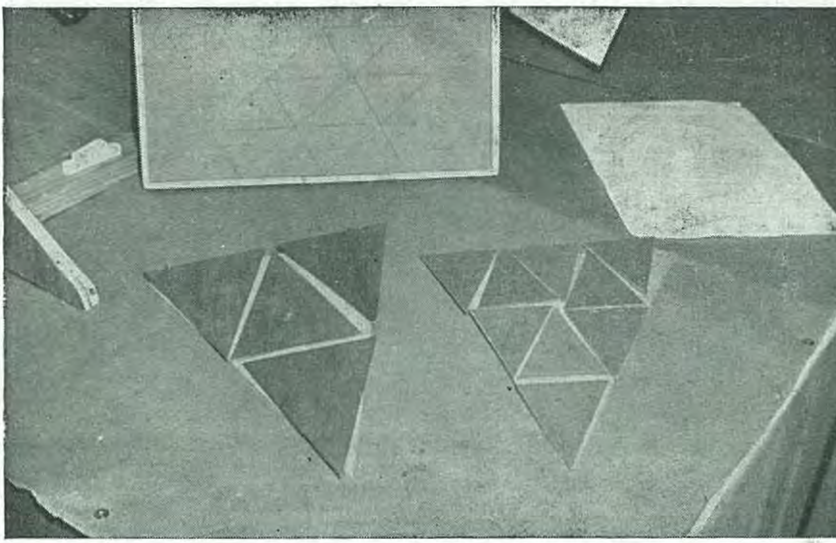
MOSAICOS Y PUZZLES GEOMÉTRICOS

En el dominio de la extensión plana es también del máximo interés didáctico el uso de figuras planas recortadas, acoplables entre sí, o en sus

[3] No queremos cerrar este párrafo sin mencionar el vistoso material de varillas articuladas de plástico presentado en la referida Exposición por el profesor del Instituto Laboral de Ayamonte, don Juan Fernández.

huecos correspondientes; las distintas actividades de ajuste, acoplamiento, formación de mosaicos, etc., que motivan, permiten sugerir variados conceptos matemáticos.

Como veremos en el próximo capítulo, las distintas formas de ajuste de tales figuras en sus huecos, puede servir como punto de partida para establecer los conceptos de simetría en el plano. El acoplamiento en mosaico de cuadriláteros irregulares iguales puede relacionarse con el valor de la



El material del profesor Pascual Ibarra, de Valladolid, para la iniciación a la semejanza de triángulos

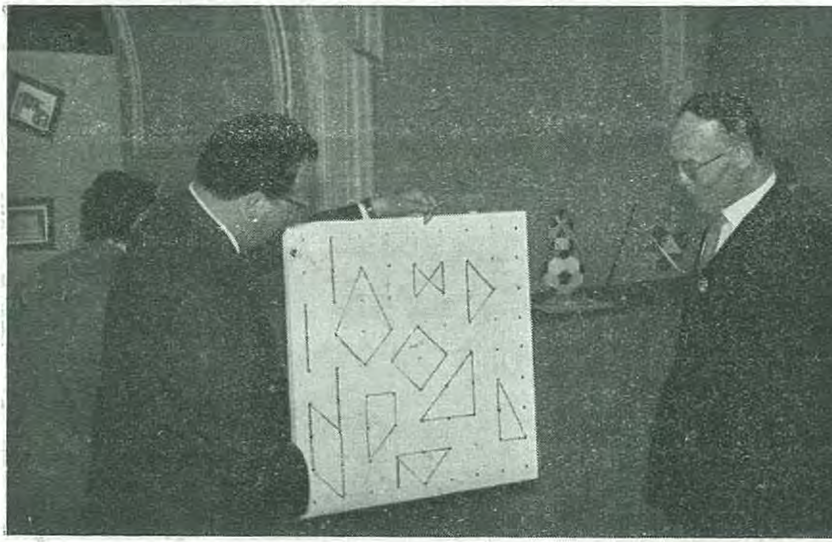
suma de sus ángulos y también con las simetrías alrededor de los puntos medios de sus lados. Los mosaicos formados de triángulos escalenos permitirán no sólo el descubrimiento de sus relaciones angulares, sino también la génesis de triángulos semejantes y sus propiedades [4]. Finalmente, el juego de mosaicos llamado *rombo* nos sugirió una bonita e inesperada lección sobre irracionales cuadráticos que describiremos en seguida.

---

[4] Véase la lección y el material del profesor PASCUAL IBARRA descrita en Revista «Enseñanza Media», núm. 11.

EL GEOPLANO

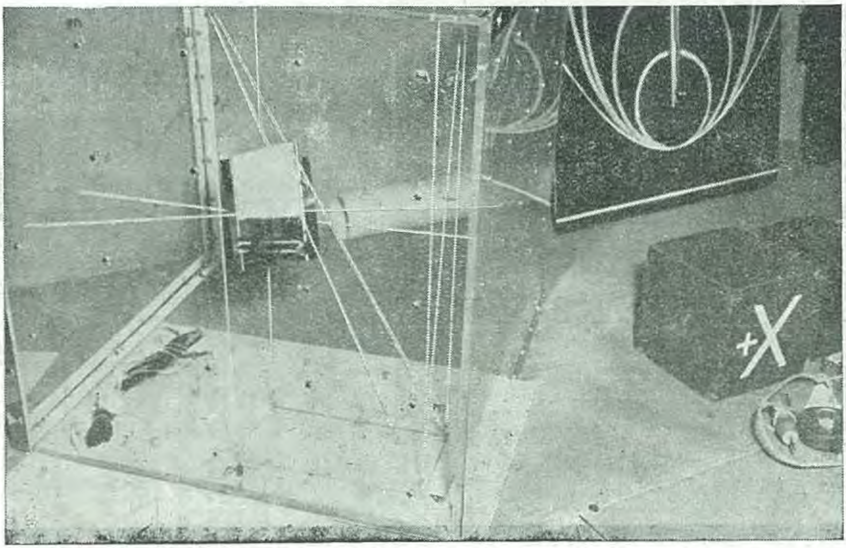
Para la construcción rápida de los más variados modelos de figuras planas, formadas por rectas y segmentos, es de gran eficacia didáctica la utilización de gomas coloreadas, tendidas entre los clavos de una red dispuesta sobre una tabla plana. Tal es el fundamento de los llamados «geoplanos» del profesor Gattegno. Con una simple red cuadriculada de 5 por 5



Figuras realizadas con gomas en un geoplano del profesor Gattegno

clavos (7 por 7 ó 9 por 9) puede realizarse gran variedad de figuras geométricas planas, con las siguientes ventajas sobre el encerado: 1.ª, la rapidez en la formación, transformación y anulación de las figuras, y 2.ª, la muy importante ventaja de la movilidad del geoplano y, por consiguiente, de las figuras en él construídas. Presentando cada figura en posiciones diversas del geoplano, se habitúa el niño a percibirla desde distintos ángulos visuales y a reconocerla independientemente de su posición, lo que no suele ocurrir con el encerado. Todos los profesores hemos observado la dificultad de los niños en reconocer, por ejemplo, un rombo cuyas diagonales no sean precisamente horizontal y vertical, como lo ha visto tradicionalmente dibujado en el encerado y en los libros, y asimismo la dificultad de reconocer un trapecio cuyos lados paralelos sean, por ejemplo, verticales.

Si cada alumno, o pequeño grupo de ellos, dispone de un geoplano, la actividad en la construcción de estas figuras despertará el interés en la averiguación de sus propiedades. Para los polígonos regulares y las propiedades relativas al círculo, se utilizan geoplanos con distribución circular de



Detalle del geoespacio de Pescarini

clavos *ad hoc*. Las posibilidades de este material se hallan descritas en distintos artículos y en especial en el antes citado *Les matériels multivalents* del propio profesor Gattegno (v. «Le matériel pour l'enseignement des mathématiques», Delachaux-Niestlé, pág. 191).

GEOESPACIOS

Ampliaciones al espacio de la idea del geoplano han sido realizadas por los profesores Pescarini (Italia), Schiavone (Uruguay) y el autor de estas líneas.

Las figuras espaciales se materializan por sus aristas realizadas mediante gomas o cordeles tendidos entre puntos (orificios, ganchos...) distribuidos en las paredes de un recinto espacial (geoespacio).

La principal dificultad a resolver aquí es la de la visibilidad de la figura a través de las paredes del recinto que la contiene.

Pescarini resuelve la cuestión construyendo dichas paredes de plástico transparente, lo que encarece el modelo. Nosotros hemos preferido hacer uso de enrejados de varillas o telas metálicas, según los modelos requeridos [5].

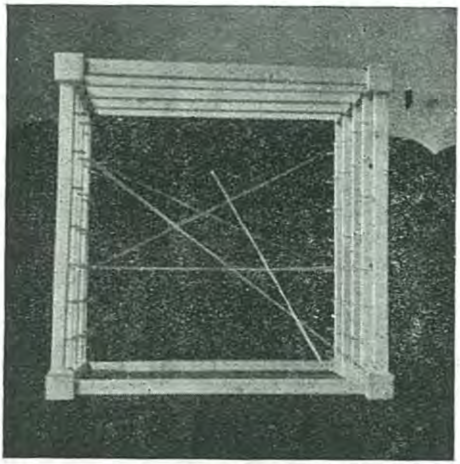


Fig. 1

Para su uso individual, cualquier alumno puede, en rigor, construirse un geoespacio disponiendo de cualquier caja de embalar de dimensiones no inferiores a 25 cm.

Suprimida una de sus caras de mayores dimensiones, con objeto de poder manipular cómodamente en su interior, atorníllense, en cada una de las otras, redes de tornillos con gancho, distribuídos uniformemente (o colocados en lugares precisos, si se quieren lograr figuras espaciales métricamente predeterminadas). Tendremos así, en toda la superficie interior de la caja, materializados, un conjunto de puntos entre los cuales podremos tender gomas elásticas o cordeles, que tan pronto tendrán la significación de rectas indefinidas, en problemas de carácter proyectivo, como representarán aristas de figuras poliédricas transparentes, aptas para estudios de carácter métrico. La variedad de modelos que así puede componer e idear el alumno, tienen la ventaja, sobre los clásicos, de poderse hacer y deshacer con suma facilidad.

Las figuras que se detallan a continuación representan varios modelos en dos cajas, una fija y otra desmontable, especialmente confeccionadas

[5] Véase el artículo del autor «Un nuevo material para la enseñanza eurística de la Geometría del Espacio», publicado en Revista «Enseñanza Media», número 3, del que reproducimos la parte descriptiva.

en el modesto taller de trabajos manuales del Instituto de San Isidro [6], con listones estrechos, con objeto de conseguir una visibilidad del modelo desde cualquier punto de vista exterior a la caja. Los listones de las caras pueden sustituirse, con el mismo fin, por telas metálicas resistentes.

1. En el modelo de la figura 1 se materializaron dos planos mediante dos pares de gomas, partiendo cada par de un mismo gancho, y dispuestos en forma de que ambos planos se cortaran en el interior de la caja. Se propuso a los alumnos colocar una aguja de tricotar en la recta de intersección. Pese a su aparente trivalidad, este ejercicio da bastante juego a la intuición y a la acción de alumnos jóvenes (doce años) hasta lograr colocar la aguja en la posición debida. Difícilmente se les ocurre a los muchachos resolver el problema visualmente, es decir, colocando la vista de modo que ambos pares de gomas se confundan visualmente en sendas rectas, y más les sorprende todavía observar cómo, dejando caer simplemente la aguja en el interior del diedro superior de los formados por ambos planos, la misma gravedad se suele encargar de situarla en su posición preci- . Se pueden dar análogamente tres planos para determinar su punto de intersección, discutiendo los casos posibles.

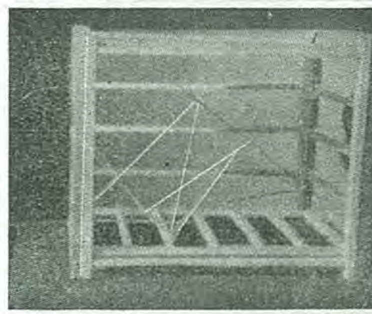


Fig. 2

Conviene razonar el hecho de que tres pares de rectas no paralelas, coplanarias dos a dos, pero no las tres, concurren en un punto

2. En la figura segunda se presenta un modelo en el que se ha materializado primeramente el teorema de Desargues, en un ensayo de iniciación entre alumnos del curso preuniversitario. Los lados de los dos triángulos homológicos T_1 y T_2 (no coplanarios), izquierda y centro de la figura respectivamente, vienen materializados por ternas de gomas de distinto color cada terna, por ejemplo, los tres lados del triángulo T_1 en azul y los del otro T_2 en rojo. El eje de homología es la alineación de tornillos de un listón de la base, y las tres rectas, concurrentes en el centro de homología O_3, que unen los pares de vértices homólogos, se materializan me-

[6] Es de justicia agradecer al prestigioso maestro nacional, especializado en trabajos manuales, don Mariano Fernández, la eficaz ayuda prestada en la realización de estos modelos, en la que asimismo han colaborado alumnos del Instituto.

diante tres agujas de tricotar. La adición de un tercer triángulo T_3 (amarillo, a la derecha), homológico de los anteriores con el mismo eje de homología, permite realizar el teorema de las tres homologías, comprobando la alineación de sus centros O_3 (de T_1 T_2), O_1 (de T_2 T_3), O_2 (de T_1 T_3). Situando T_3 no coplanario con T_1, ni con T_2, el tercer centro de homología O_2 puede comprobarse visualmente colocando la vista en forma de que se superpongan las imágenes de T_1 y T_3, con lo que aparecen entonces asimismo superpuestas las imágenes de O_1 y O_3; se evita así un excesivo enjambre de varillas.

Esta misma realización suministra un modelo de *dos tetraedros homológicos,* los determinados por O_3 T_1 y por T_3 O_1, cuyo plano doble de homología es el de T_2; los lados T_2 y el eje de homología de T_1 T_2 T_3 son ahora las rectas del plano doble en que se cortan los cuatro pares de caras homólogas; y el centro de homología de ambos tetraedros es el punto O_2, en que concurren los pares de vértices homólogos de T_1 y T_3, así como la recta O_3 O_1, en virtud del teorema de las tres homologías. Al colocar la vista en dicho centro de homología se perciben ambos tetraedros como dos cuadrivértices coincidentes.

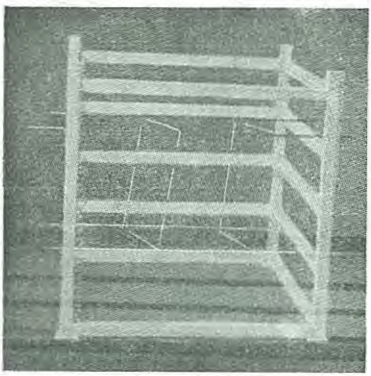


Fig. 3.ª

3. Pasando de los problemas de carácter proyectivo a los de índole métrica, la figura tercera muestra la realización de un modelo deformable de paralelepípedo, obtenido combinando varillas rígidas y gomas. El paralelepípedo comienza siendo recto y rectangular; pero por movimiento de las gomas primero, y de las varillas después, termina siendo oblicuo, de base paralelográmica. En cada deformación, los alumnos *ven* palpablemente cómo se agrega por un lado un volumen igual al que se quita por otro, conservándose en las sucesivas deformaciones (traslaciones de una cara en su plano) el volumen total del paralelepípedo y la ley que lo determina (base × altura). La supresión de una arista (varilla) reduce el paralelepípedo a un prisma triangular de volumen mitad, volumen que se obtendrá, por tanto, según la misma ley; la agregación de nuevas aristas paralelas, abrazadas

por las gomas básicas, permitirá generalizar dicha ley a prismas cuadrangulares, pentagonales, etc., por adición de prismas triangulares sucesivos. Me parece interesante consignar aquí que un alumno, ante la figura del prisma triangular recién obtenido, enunció espontáneamente esta otra regla de obtención del volumen, desconocida para él: producto del área de una cara lateral por la mitad de la distancia a la arista opuesta.

4. La figura cuarta representa la descomposición del prisma triangular en tres pirámides equivalentes, realizada mediante gomas. La movilidad

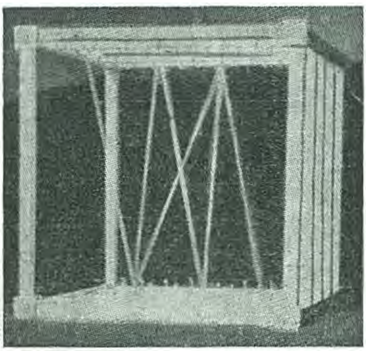


Fig. 4.ª

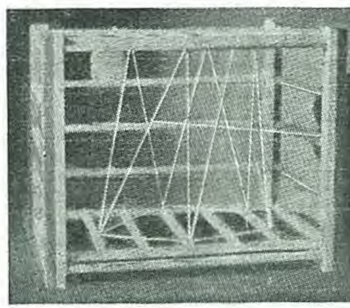


Fig 5.ª

del modelo permite variar sus posiciones para hacer más fácilmente perceptibles las pirámides parciales y su equivalencia.

5. La figura quinta presenta un modelo de prismatoide realizado con cordel continuo, de modo que ninguna arista se recorre dos veces. Las bases se sitúan en las caras inferior y superior de la caja, la sección media puede obtenerse mediante varillas o agujas apoyadas en los travesaños medios. La caja se completa entonces con la cara anterior (igual a la posterior), de quita y pon. Un punto interior a dicha sección media puede materializarse mediante la cabeza de una aguja de tricotar, completándose imaginativamente sin dificultad el razonamiento conducente a la determinación del volumen.

6. La realización del prismatoide mediante cordel resulta más rápida que la realización mediante gomas, y lo mismo ocurre con todos aquellos poliedros que tengan considerable número de aristas. Ahora bien, no todos los poliedros pueden realizarse tendiendo un cordel continuo sucesivamente

entre sus vértices, sin pasar dos veces por una misma arista; tal imposibilidad ocurre con los prismas y pirámides corrientes. ¿Cuáles podrán construirse así y cuáles no? Se trata de un problema topológico análogo al de los puentes de Königsberg, que intriga a los muchachos, dando lugar a que discurran soluciones ingeniosas. Uno de mis alumnos, por ejemplo, intrigado por mi afirmación de la imposibilidad de construir pirámides de esta suerte, urdió la solución de añadir las diagonales de la base en una pirámide cuadrangular (con lo cual hizo concurrir en todos los vértices un

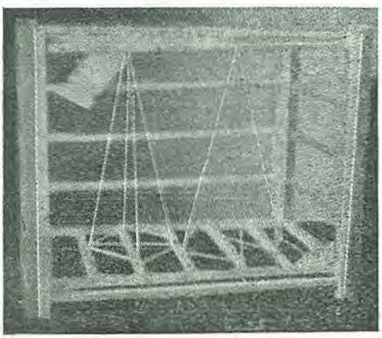


Fig. 6.ª

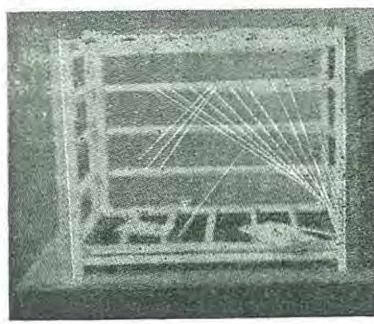


Fig. 7.ª

número par de segmentos). La réplica fue proponerle la solución con una sola diagonal. (Véase la figura 6.ª).

7. Si se varía la disposición y frecuencia de los ganchos, pueden realizarse incluso superficies regladas (figura 7.ª), curvas alabeadas como aristas de retroceso de superficies desarrollables (figura 8.ª).

8. La figura octava reproduce una variante de nuestro geoespacio, con paredes de reja metálicas que permiten una mayor densidad de generatrices; la figura contiene las tangentes a una curva alabeada, la superficie desarrollable que forman y el triedro intrínseco en un punto. Hemos construído, por último, un modelo móvil plegable, que ilustra transformaciones afines continuas.

Como se ha dicho, las figuras citadas pueden realizarse en modelos construídos por los alumnos en cajas de embalar. La inscripción en ellas de poliedros determinados por condiciones métricas y de posición, podrá dar lugar a cálculos interesantes, con aplicación, incluso, de trigonometría esférica, al objeto de determinar previamente la posición de los vértices o puntos donde colocar los ganchos. Finalmente, forrando con cartulina continua el suelo, el fondo y una cara lateral de la caja, podremos pro-

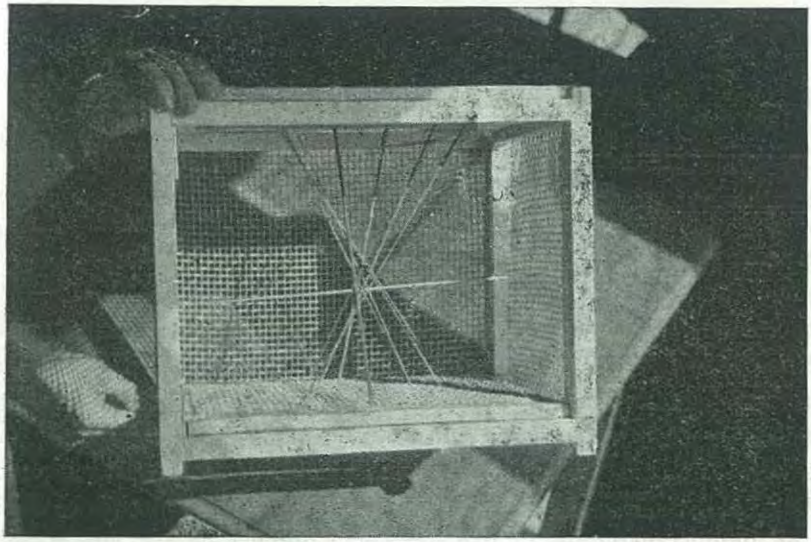


Fig. 8.ª

yectar sombras de las figuras realizadas, iluminándolas mediante lámparas de bolsillo o mediante focos lejanos más potentes, materializando así proyecciones paralelas que permitan aclarar las construcciones características de la geometría descriptiva.

§ 4. MATERIAL DIDACTICO MATEMATICO EXTRAIDO DE LA VIDA

Sin darnos cuenta de ello, vivimos rodeados de modelos matemáticos, y el hecho es natural. La técnica que nos suministra el confort está impregnada de Matemática. Los ingenieros, al proyectar, y los obreros al realizar lo proyectado, hacen constantemente uso de ella. Corresponde al profesor de Matemáticas volver a hallar el contenido matemático de las cosas que nos rodean y jugar con este contenido a efectos didácticos. He aquí una actividad, en cierto modo inversa de la del técnico, que los profesores de Matemáticas debemos ejercer y también hacer ejercer a nuestros alumnos.

Ya en el artículo anterior nos hemos referido a las posibilidades didácticas de algunos materiales de uso corriente: botones, cierres automáticos, botellines, carretes, bobinas, etc. Queremos en este artículo proyectar perspectivas más amplias en este mismo orden de ideas, presentando ejemplos variados de los conceptos y de las actividades matemáticas que pueden sugerir objetos diversos de la vida corriente.

LA VENTANA

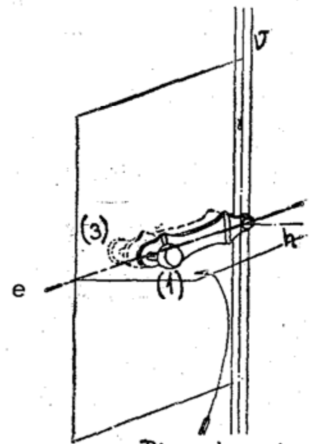
Una simple ventana, por ejemplo, suministra infinidad de modelos, no sólo los de más trivial acceso, como son las figuras planas de sus marcos y vidrios, sino también los que se derivan de sus movimientos, del ajuste de batientes en sus marcos, etc. (giros, ángulos diedros, determinación de planos, traslaciones en las ventanas de autobuses y vagones de ferrocarriles, etc.).

El error cometido en el cálculo de la superficie de los cristales cuando no se tiene en cuenta la parte cubierta por la masilla o por las pestañas de los marcos, puede ofrecer una oportunidad para dar reglas de acotación de este error, así como para introducir una noción de diferencial ordinaria o logarítmica suficiente (aunque grosera) a los efectos de la enseñanza elemental.

La existencia de intersticios entre las hojas de la ventana y entre éstas y el marco, pueden servir también para ofrecer problemas de mínimo enfriamiento, según las hipótesis que se formulen acerca de dicho enfriamiento (proyecto de una ventana de enfriamiento mínimo para una superficie de iluminación dada, suponiendo, por ejemplo, el intersticio central de doble enfriamiento, por metro lineal, que los intersticios de los bordes).

La proyección del exterior sobre la superficie plana del cristal, permitirá ilustrar las propiedades de la proyección cónica con sus puntos de fuga, escalas armónicas, etc.

Si la ventana tiene persiana, la proyección estriada del espacio exterior, en el que puede desplazarse una mira topográfica vertical, permitirá ilustrar los principios de la telemetría óptica.



Plano de simetría de la falleba

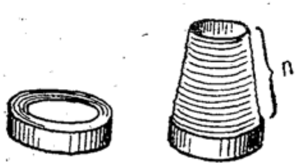
SIMETRÍAS REALIZADAS CON UNA FALLEBA

Siempre en relación con la ventana y sus accesorios, se puede utilizar la falleba y sus movimientos para obtener interesantes consecuencias sobre simetrías en el espacio. Si se compara, por ejemplo, la posición inicial (1) con la final (3) de una falleba corriente después de dos movimientos de simetría alrededor primero de un eje horizontal h, y luego de un eje vertical v, la mayor parte de los observadores estiman que la relación entre estas dos posiciones es una simetría con respecto a un plano que pasa por el eje vertical. Ahora bien, ningún movimiento es capaz de realizar una simetría plana en el espacio; el zapato derecho no puede convertirse en otro para el pie izquierdo por mucho que se le mueva. La simetría que existe entre ambas posiciones es otra: precisamente la simetría con respecto a un eje e, perpendicular a los v y h. Si analizamos el error cometido nos daremos cuenta de que se debe al hecho de que corrientemente la propia falleba tiene un plano de simetría, con lo que hemos ilustrado a la vez dos teoremas: 1.°, el producto de dos simetrías respecto a dos ejes h y v, perpendiculares entre sí, es otra simetría con respecto a un tercer eje e, perpendicular a los precedentes, y 2.°, el producto de esta simetría por la simetría (de la falleba) con respecto a un plano que pasa por e, es a su vez una simetría con respecto a un plano que pasa por este eje y es perpendicular al plano de simetría precedente. Es precisamente esta última simetría la que primero salta a la vista, induciendo al engaño comentado.

Realizando nuevas manipulaciones [1] podemos relacionar las simetrías con respecto a los ejes mencionados, con la simetría respecto al centro en que concurren. En resumen: La falleba constituye un ignorado y excelente modelo para ilustrar las transformaciones que definen el grupo de simetrías con respecto a los elementos de un triedro trirectángulo. Permite también ilustrar otros muchos movimientos, obtenidos mediante productos de giros alrededor de los ejes horizontal h y vertical v, lo que asimila sus grados de libertad a los que tiene el teodolito, pero nos hemos limitado al grupo de simetrías mencionado por su interés y vistosidad.

PROGRESIONES EN LAS PERSIANAS, TAPICES Y SERPENTINAS ARROLLADAS

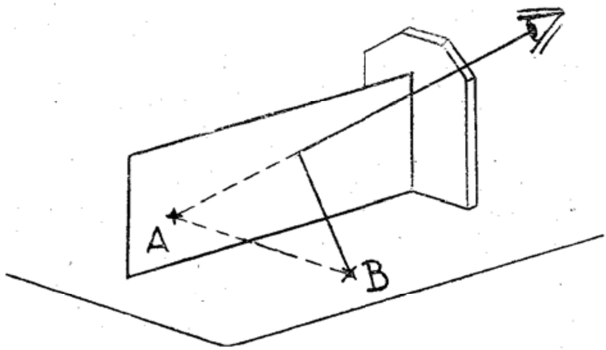
Me he referido más arriba a la persiana desplegada como modelo ilustrador de la telemetría. Pero la persiana arrollada, así como un tapiz arrollado o una simple serpentina, ofrecen un problema interesante a la curiosidad del alumno: ¿Qué longitud tendrán una vez desarrolladas? Los alumnos suelen esquematizar acertadamente los arrollamientos como circunferencias en progresión aritmética, y el problema se resuelve sumando los términos de la progresión. Los términos inicial y final se obtienen fácilmente por medición directa de los diámetros interior y exterior; el número de términos se obtiene contando simplemente las capas superpuestas (para facilitar este recuento se puede estirar la serpentina a modo de cucurucho, de modo análogo a como se deslizan oblicuamente las cuartillas de un montón para contarlas). Todos estos modelos improvisados suministran la estructura algebraica común a la suma de los términos de una progresión aritmética, al área del trapecio, y al área de la corona.



[1] Véase P. PUIG ADAM: *Didáctica matemática eurística* y Revista «Arquimedes», núm. 5-6.

LA GEOMETRÍA QUE PUEDE HACERSE CON UN VIDRIO OSCURO

Ya hemos dicho que la Geometría se concibe modernamente como el estudio de propiedades invariantes de las figuras con respecto a ciertos grupos de transformaciones. Los instrumentos que realizan estas transformaciones son, pues, los instrumentos naturales de la Geometría moderna: juego de escuadras para la traslación, papel de calco o transparente para los movimientos, etc. Un trozo de vidrio plano (con borde rectilíneo), situado perpendicularmente al plano del dibujo, es el instrumento natural para



realizar simetrías en el plano. Si el vidrio es de color oscuro, pero transparente, al mirar la cara anterior del vidrio, se reflejará en ella la parte anterior del plano del dibujo, superponiéndose la imagen reflejada de dicho semiplano anterior con la imagen transparentada del semiplano posterior. Esto permite realizar fácilmente las operaciones fundamentales siguientes:

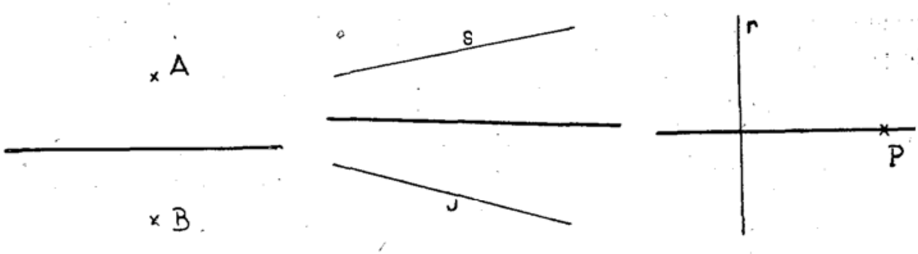
1. *Hallar el eje de simetría de dos puntos* (mediatriz del segmento que los une) *o de dos rectas* (bisectriz del ángulo que forman).

Basta mover el vidrio hasta que queden superpuestas la imagen reflejada de uno (o una) de ellos con la imagen transparentada del otro (otra). El borde marcará entonces el eje. La operación es aplicable a la construcción de la bisectriz, sea o no accesible, en el dibujo, el vértice del ángulo.

2. *Trazar la perpendicular a una recta r por un punto P.*

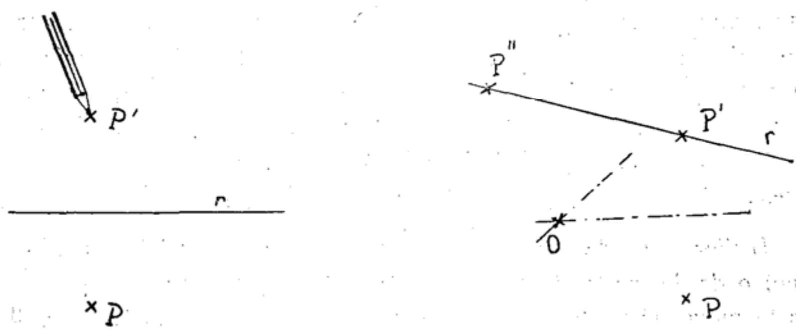
Basta situar el borde sobre este punto (esté o no sobre la recta), de manera que la imagen de la semirrecta anterior al borde, coincida con la visión transparentada de la semirrecta posterior. Reiterando la operación, se pueden trazar paralelas.

3. *Hallar el simétrico P' de un punto dado P respecto de un eje dado r.* Situando el borde del vidrio en *r* bastará colocar la punta del lápiz del lado contrario a P, hasta que su imagen transparentada (o reflejada) coin-



cida con la imagen reflejada (o transparentada) de P. Punto por punto pueden obtenerse así figuras simétricas.

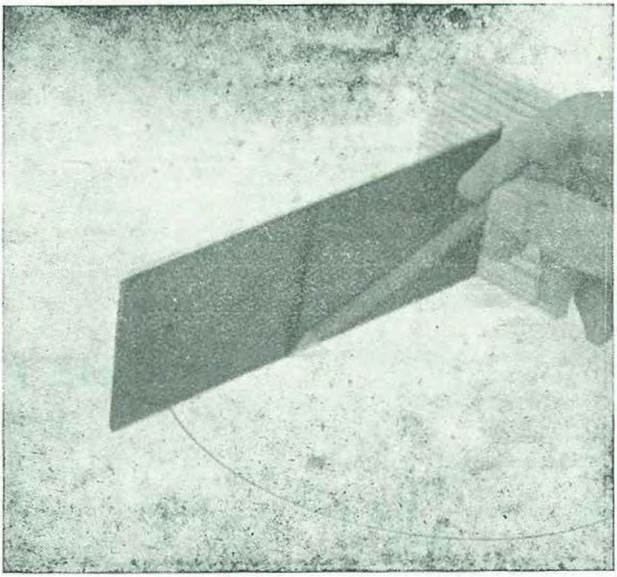
4. *Hallar la intersección de una recta dada con una circunferencia definida por su centro O y un punto P.*



Bastará situar el borde, pasando por O, de modo que la imagen de P se sitúe sobre *r*, o bien que la imagen de *r* pase por P. En ambos casos, el punto P', simétrico de P, se situará sobre *r*, proporcionando la solución. Hay, naturalmente, dos soluciones correspondientes a dos posiciones del vidrio.

Este problema es equivalente al de trazar por O las tangentes a la parábola definida por su directriz r y su foco P. Estas tangentes son, en efecto, las posiciones del borde del vidrio en las dos soluciones del problema anterior. Recuérdese que la directriz es el lugar geométrico de los simétricos del foco respecto de las tangentes a la parábola.

Mediante estas construcciones básicas, en las que el borde sirve también de regla, se puede probar la posibilidad de efectuar con dicho instru-



mento todas las construcciones realizables con la regla y el compás de la Geometría clásica. Claro es que no es el instrumento más adecuado para algunas de ellas. Por ejemplo, la construcción de un triángulo dados sus tres lados, equivalente al de hallar la intersección de dos circunferencias de centros y radios dados, resulta particularmente complicada. En cambio, otras construcciones son tan sencillas como puedan serlo las clásicas, cuando no las aventajan, y no nos referimos solamente a los problemas en los que el uso de la simetría constituye la clave del problema, sino también a otras, como la construcción del conjugado armónico, o del punto inverso de uno dado conocidos el centro y el radio de inversión, problemas que parecen muy alejados de las posibilidades del aparato. Resulta particularmente elegante la construcción de cónicas como envolventes mediante dicho instrumento combinado con el compás.

EL PARAGUAS, MODELO MULTIVALENTE

El juego de varillas y el eje de un paraguas, nos ofrecen un modelo matemático, del que extraer muchas lecciones geométricas intuitivas. Presentamos algunos ejemplos:

Relaciones sencillas entre los lados y los ángulos de un triángulo

Observemos el triángulo ABC formado por el eje del paraguas, una varilla corta b y el segmento a de varilla larga comprendido entre la cúspide B y la articulación C.

1. Cuando el paraguas está cerrado $AB = a + b$, sin que se forme triángulo. Para que éste exista, es preciso abrir el paraguas, disminuyendo la longitud AB. Luego $AB = c < a + b$.

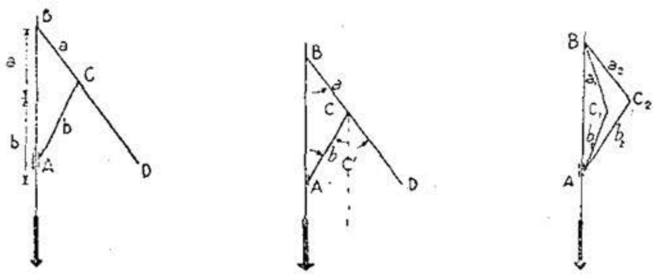
2. Abriendo el paraguas, el lado AB disminuye al mismo tiempo que el ángulo opuesto C: *Propiedad de los triángulos con pares de lados respectivamente iguales.*

3. Se observa la igualdad de todos los triángulos formados sobre la misma porción de eje AB: *Igualdad de los triángulos con tres lados iguales.*

4. Si $a = b$, los dos sistemas de varillas a y b se abren del mismo ángulo. Todos los triángulos formados son isósceles. Pero si $a \gtrless b$, las varillas b se abren $\left\{\begin{matrix}\text{más}\\ \text{menos}\end{matrix}\right\}$ que las varillas a: *Relación entre los ángulos y los lados opuestos de un triángulo.*

5. Si b es mayor que a, el paraguas puede invertirse, formándose ángulos obtusos en B. Estos ángulos no son posibles si b es menor que a, pero entonces, a partir de la posición de b perpendicular al eje, el paraguas se cerrará, de tal modo, que se podrá obtener una misma abertura del paraguas con dos longitudes AB: *Ambigüedad de un triángulo definido por dos lados y el ángulo opuesto al menor.* Relación entre los ángulos A en ambas posiciones.

6. Mantengamos fijo el punto C y abramos el paraguas conservando el eje vertical. La varilla *a* gira en un sentido, describiendo un ángulo igual al B. La varilla *b* gira en sentido contrario, describiendo otro igual



al A. Luego, el ángulo exterior C' es igual a B + A. Y también A + B + C = C' + C = 180°.

Triedros y ángulos poliedros

7. Consideremos dos juegos de varillas *a, b,* articuladas consecutivas y los dos planos en que están situados. Estos dos planos forman un diedro. ¿Aumenta este diedro cuando se abre o cierra el paraguas? ¿Disminuye? La naturaleza capciosa de estas preguntas provoca a veces res-

puestas erróneas, de las que se puede obtener provecho didáctico. La corrección del error se sugiere de una manera natural, preguntando cuántos de estos diedros componen los 360° en torno al eje. Los alumnos se ven entonces obligados a reconocer la invariancia de estos diedros. ¿Qué es, por tanto, lo que aumenta o disminuye? Las *secciones oblicuas* de ese diedro.

8. Observación de los triedros (isósceles) formados por el eje y los pares de varillas *a* (consecutivas o no). Idem con las *b*.

9. ¿En qué posición quedarán las varillas *a* situadas en el mismo plano? ¿Cuál será entonces el valor de la suma de los ángulos formados por estas varillas (consecutivas o no)? ¿Qué modificación sufren estos ángulos cuando se cierra el paraguas? *Límite superior de la suma de las caras de un ángulo poliedro.*

10. Consideremos una tela extendida entre 3 varillas a_1, a_2, a_3, consecutivas o no. Si se suprime la varilla intermedia a_2, ¿se mantendrá extendida la tela? *Propiedad de la cara* $a_1 a_3$ *de un triedro de ser inferior a* $a_1 a_2 + a_2 a_3$.

Simetrías, rotaciones, homotecias

11. Observación de las simetrías del paraguas abierto.

12. Observación del grupo cíclico de rotaciones, según el número de sistemas articulados.

13. Observación de la homotecia existente entre el sistema de puntos de articulación C y los extremos libres D de las varillas *a*.

Algunos problemas que se pueden proponer sobre la variación de magnitudes, producida al abrirse el paraguas por desplazamiento de A

Llamaremos x al desplazamiento del punto A a partir de su posición correspondiente al paraguas cerrado. Supondremos, además, el caso más simple: $a = b$.

14. Variación de los ángulos A y B en función de x.

15. Variación de la separación entre dos articulaciones consecutivas C (siendo n el número de sistemas articulados).

16. Variación del ángulo de las caras del ángulo poliedro formado por las varillas *a*.

17. Variación del ángulo sólido S limitado por ese ángulo poliedro.

18. Variación del área y del volumen de la bipirámide definida por las varillas *a* y *b*.

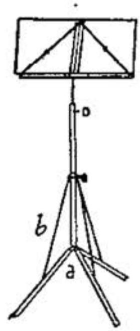
19. Máximo del volumen anterior.

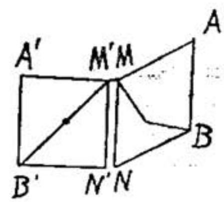
20. Cálculo del desplazamiento x correspondiente a un polígono regular (formado por los extremos libres) de perímetro dado.

LA GEOMETRÍA DEL ATRIL

Triángulos, triedros, problemas diversos

El pie del atril tiene la misma estructura geométrica que un paraguas (invertido) con tres pares de varillas articuladas. Se pueden obtener de él las mismas situaciones didácticas expuestas en los párrafos anteriores





Movimientos espaciales

El deslizamiento de la varilla central a lo largo del eje, permite imprimir al atril movimientos de translación a lo largo de este eje, movimientos de rotación en torno a él y movimientos helicoidales.

Deformaciones que ilustran las propiedades del arco capaz

El atril propiamente dicho, está constituído por dos rombos articulados, unidos por un lado. Este doble rombo proporciona varias situaciones didácticas. Es un sistema articulado que hemos utilizado en alguna lección [2] sobre los ángulos inscritos y el arco capaz, de tal modo que si se fija la posición de dos lados NB, N'B' (o bien MA, M'A'), dejando un solo grado de libertad a la deformación, y se suponen confundidos MN y M'N',

[2] V. P. PUIG ADAM: «El Material Didáctico matemático actual», pág. 132.

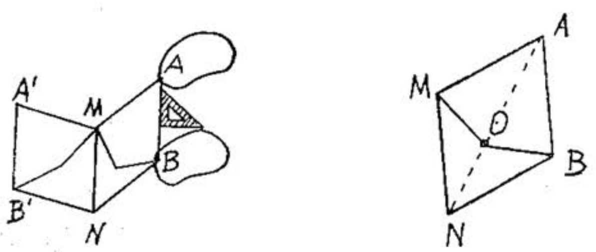
los ángulos B'MB y A'NA son invariantes durante esta deformación y el punto M (o el N) describe el arco capaz de B'MB (o A'NA) sobre BB' (o AA').

Translación plana

Si fijamos el lado A'B', queda un sistema articulado con dos grados de libertad, que permite describir al punto A una figura cualquiera (entre ciertos límites). Simultáneamente, el punto B describirá una figura igual, transformada de la anterior por la translación AB.

Inversión

Finalmente, consideremos el sistema articulado MOB, que enlaza los vértices M, B, de uno de los rombos; sistema formado por dos varillas de longitud igual a la mitad de la diagonal del cuadrado obtenido por

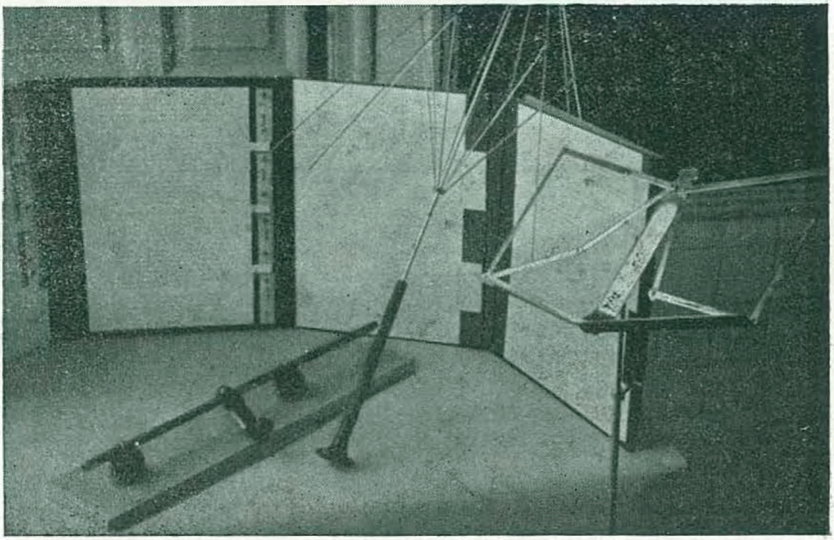


deformación del rombo. Si fijamos en el plano el punto O, el rombo NBAM posee dos grados de libertad que permiten describir al punto A una figura plana cualquiera (entre ciertos límites), y la figura descrita por el vértice opuesto N es inversa a la descrita por el punto A, respecto al centro O, con potencia de inversión igual a $-\frac{1}{2}MA^2$ (puesto que el producto OA . ON es la potencia de O respecto del círculo de centro M y radio MA y vale $MO^2 - MA^2 = \frac{1}{2}MA^2 - MA^2$).

LA MATEMÁTICA DE LOS ESCOMBROS

Finalmente, entre los escombros, en los resíduos de cosas rotas que ya aparentemente de nada sirven, pueden hallarse problemas interesantes al reconstruir parcialmente las figuras geométricas a las que aquellos trozos pertenecían.

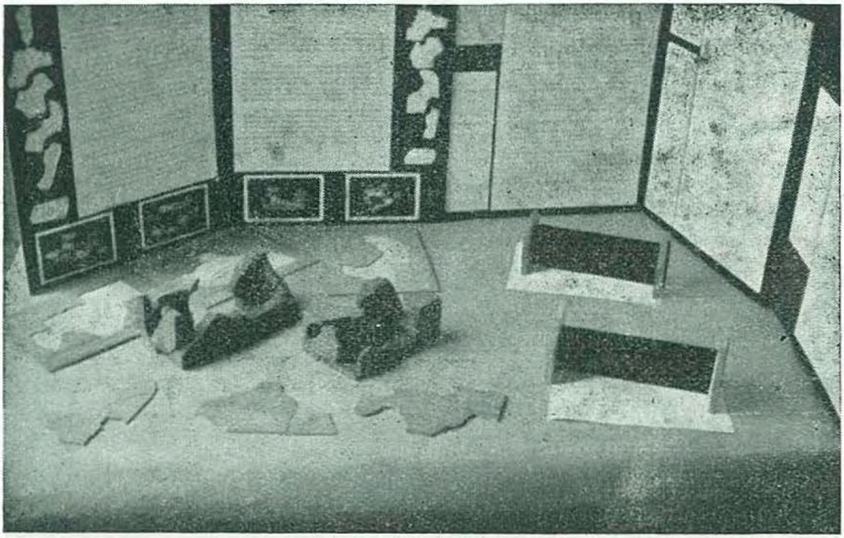
Cada figura geométrica se caracteriza por un cierto número de parámetros, de tal suerte que si todos ellos están presentes en el trozo parcialmente



La falleba, el paraguas y el atril, modelos matemáticos extraídos de la vida

reconstruído, la reconstrucción total será una cuestión de pura y simple geometría. Cada información que se propone obtener a los alumnos sobre la figura buscada (ángulos, perímeros, áreas, volúmenes) dará lugar a construcciones y a cálculos que el alumno acometerá con interés en virtud del clima de misterio creado a su alrededor.

La Arqueología no tiene otro objeto que la reconstrucción de antiguas civilizaciones a partir de los resíduos que se han descubierto en las excavaciones. Los problemas que plantean tienen, pues, a menudo, carácter eminentemente matemático, no solamente en relación con las formas geométricas que su arte nos ha legado, sino también en la reconstrucción de su escritura, de su lengua, de su técnica de cálculo, etc. En este terreno, los problemas tienen una determinación mucho menos precisa, y la Estadística desempeña en ellos un papel particularmente importante. Baste re-



La geometría con un vidrio oscuro. Problemas de reconstrucción geométrica con trozos de cascote

cordar a este propósito las relaciones existentes entre la criptografía y la moderna teoría de la información, relaciones a las que nos hemos referido en el artículo que sobre esta teoría hemos reproducido en el capítulo segundo de esta obra.

§ 5. LA MATEMATICA EN EL JUGUETE

Una clasificación de los juguetes

Si la vida corriente suministra tantos modelos y situaciones aptas para la enseñanza matemática, es natural que busquemos, asimismo, modelos matemáticos en los juguetes que tan esencial papel desempeñan en la vida del niño, promoviendo su más espontánea actividad. Este acercamiento entre matemática y juguete nos suministrará, sin duda, amplias sugerencias para alcanzar la meta ideal de nuestra enseñanza, que es la de convertirla recíprocamente en un juego para el niño.

Según el género de actividad que preponderantemente desarrollan, podemos establecer varios géneros de juguetes, sin que ello signifique una separación tajante de actividades que, en general, aparecen superpuestas en un mismo juego; por ello hemos antepuesto el adverbio «preponderantemente». Distinguiremos, pues:

1.° Juguetes de *ejercicio físico*: pelotas, balones, aros, triciclos, bicicletas, patines, patinetes...

2.° Juguetes de *destreza*: bolos, billar, ping-pong, diávolo, tiro al blanco, arcos y flechas, bolavá, trompos, cometas, planeadores, etc....

3.° Juguetes de *ritmo y sonido*: trompetas, tambores, pianitos, guitarras, cítaras, xilófonos...

4.° Juguetes de *compeción inteligente* (con o sin azar): dominó, damas, asalto, ajedrez, mandarín, parchís, cha-cha-chá, juego de quince, de cinco en línea, ruletas, loterías...

5.° Juguetes de *creación constructiva:* rompecabezas, mosaicos, mecanos, cajas de arquitectura, juegos de plastilina, imprentillas, carpinterías...

6.° Juguetes de *observación contemplativa:* (estáticos): caballos de cartón, muñecas, muebles, cocinas, barcos, soldaditos, circo...; (dinámicos): trenes, coches y demás autómatas con cuerda, balanzas y pesas...

No nos vamos a detener, por lo triviales y sabidas, en alusiones a las formas geométricas que aparecen en tales juguetes: rectángulos (billar, dominó), cuadrados (damas, ajedrez), triángulos, rombos (mosaicos), figuras circulares (aros, fichas, bicicletas, ruedas), esféricas (balones, pelotas), cilíndricas (patines, tambores), cónicas (trompetas, diávolo), troncocónicas (bolavá), etc. De ellas puede sacar partido cualquier maestro para urdir problemitas en relación con el juego respectivo, por ejemplo, número de golpes de pedal necesarios para desplazarse de un punto a otro en un triciclo, etc. Deseamos abreviar, asimismo, las referencias al provecho que puede obtenerse de los juegos de lotería combinándolos acertadamente con problemas de índole aritmética (véase lo dicho en el capítulo anterior a propósito de los lotes en el método de los números en color), así como de la contribución que las disposiciones en filas de fichas y soldaditos pueden aportar a la enseñanza de temas aritméticos diversos, como son las propiedades formales de las operaciones, las de los múltiplos y divisores, números primos y compuestos (véase el artículo anterior y los ejemplos alusivos en nuestra colección de libritos didácticos elementales), etc.

JUGUETES DE ANÁLISIS Y JUGUETES DE SÍNTESIS. JUGUETES CON DINAMISMO RELACIONAL

Considerando el juguete desde un punto de vista matemático algo más elevado, queremos fijar nuestra atención especialmente en los tres últimos grupos, por la oportunidad que vemos en ellos de cultivar actividades mentales estrechamente relacionadas con la actividad matemática. Así, hablando en líneas generales, se entiende, llamaríamos a los juguetes del grupo 6.° juguetes de *análisis*; a los del grupo 5.°, juguetes de *síntesis,* y a los del grupo 4.°, juguetes de *dinamismo relacional,* y nadie pondrá en duda de que, tanto el análisis, como la síntesis, como el dinamismo relacional, son actividades esencialmente integrantes de la actividad matemática. Pero justifiquemos estas denominaciones:

Juguetes de análisis.—Los juguetes contemplativos, y muy en especial los dinámicos, son un excitante desafío a la curiosidad del niño: ¿Cómo está hecho? ¿Cómo funciona? Tarde o temprano el juguete sucumbe a tal curiosidad, y en buena hora sucumba si resulta en provecho intelectual del pequeño. Analizando, descomponiendo, aunque sólo sea mentalmente, satisfará el niño su legítima curiosidad. Y es, en este análisis o descomposición mental o real, cuando el niño puede hallar los posibles valores matemáticos del juguete cuya simple contemplación no bastaba a satisfacerle. En la mayor parte de los juguetes mecánicos late en el fondo una idea matemática. En sus movimientos de avance y giro hallaremos múltiples oportunidades para establecer relaciones de proporcionalidad entre longitudes y ángulos, para calcular velocidades lineales y angulares, etc. Los juegos de engranajes de tales juguetes mecánicos permitirán asimismo ilustrar problemas de múltiples comunes y de m. c. m.

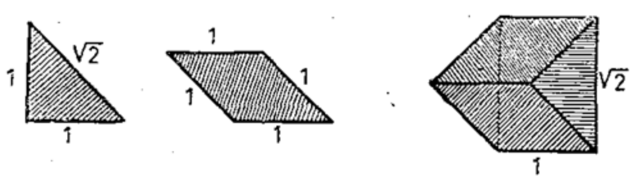
Juguetes de síntesis.—Mayor campo permiten a la fantasía creadora del niño los juguetes constructivos o de síntesis, entre los cuales ya hemos tenido ocasión de citar el Mecano como juguete multivalente, inapreciable para la síntesis de figuras geométricas, tanto estáticas como dinámicas. Es del mayor interés que el niño no se limite a reproducir con el Mecano los modelos de catálogo, sino que sea él mismo creador de formas y combinaciones dinámicas nuevas a las que su fantasía empezará superponiendo objetivos funcionales imaginarios, hasta que estos objetivos terminarán dominando y conduciendo la acción creadora. Lo mismo podemos decir de los variados tipos de juguetes constructivos constituídos por bloques, placas, arcos, vallas, y demás elementos de evocación arquitectónica y urbanística, o simplemente decorativa como mosaicos, anillas, ganchos, bolitas coloreadas colocadas sobre redes de orificios, etc. En particular, los rompecabezas (lo mismo que la actividad de recomposición de piezas rotas aludida en el artículo anterior) cultivan grandemente el reconocimiento de formas geométricas ajustables. Simplemente el modo de formar mosaico plano con cuadriláteros irregulares iguales entre sí, es un juego que puede improvisarse en cualquier momento y que contiene infinidad de enseñanzas no triviales. Cabalgando entre este tipo de juegos sintéticos y el de juegos relacionales, cabe catalogar el material de regletas coloreadas de Cuisenaire, que se presta tanto a la síntesis constructiva como al juego dinámico generador de las leyes de la Aritmética y del Algebra.

Juegos de dinamismo relacional.—Variadas y amplias estructuras relacionales ofrecen los juegos citados de competición inteligente. Cada uno de ellos se funda en reglas dinámicas de transformación (y, por tanto, *algebraicas* en sentido lato) interesantes de analizar, ya que ofrecen no pocas oportunidades a la educación matemática moderna. Para el matemático moderno (me refiero concretamente a los de la escuela algebrista-formalista) la creación matemática es algo así como un juego en el que se suponen dados ciertos elementos (símbolos), así como ciertas reglas de juego que los relacionan (leyes formales), con las cuales le basta al matemático para crear, jugando con ellas y cuidando de no transgredirlas. El contenido conceptual de tales símbolos y de tales relaciones es algo que el matemático formalista puro deja a un lado. Mientras no llegue a dos jugadas contradictorias el juego es válido y la estructura teórica edificada sobre este juego tiene toda la firmeza y estabilidad derivada de la no contradictoriedad de sus leyes formales fundamentales.

Presentamos a continuación tres ejemplos de auténticos juegos que van a ofrecernos considerable riqueza de estructuras matemáticas, y empezaremos concretamente con un juego mosaico, es decir, con un juego no catalogado precisamente entre los de competición, sino entre los constructivos, con lo que nos brinda otro ejemplo de material educativo multivalente [1].

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS EN UN JUEGO MOSAICO [2]

Material: Una o dos cajas de mosaicos de colores, con piezas de dos clases; triángulos rectángulos isósceles iguales entre sí y rombos con ángulos agudos de 45° y lados iguales a los catetos de los triángulos. Estos mosaicos de juguete se venden en los bazares con el nombre de «Rombo». La inconmensurabilidad de las áreas de estas piezas me sugirió una lección activa sobre irracionales cuadráticos y su cálculo, que conduje del siguiente modo:



Empecé distribuyendo entre los alumnos (de 3.° y 4.° de Bachillerato) piezas de las dos clases, y preguntándoles los valores de sus ángulos, el

[1] En nuestro librito sobre «Didáctica matemática eurística» hacemos también uso del juguete llamado «Bolaoá», clasificado entre los de destreza, para urdir una divertida lección sobre parábolas y trinomio de segundo grado.

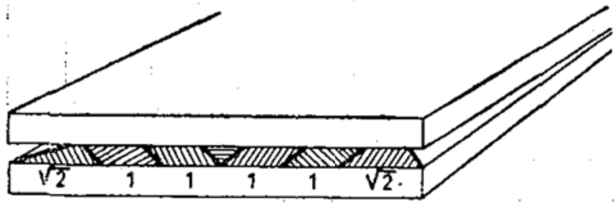
[2] Artículo del autor publicado en la revista belga «Mathematica & Pedagogica», núm. 10, 1956-57.

de la hipotenusa del triángulo (tomando el cateto como unidad); y el del área de una y otra pieza. No es raro que la del rombo ofrezca alguna pequeña dificultad. Se puede ayudar a resolverla componiendo la figura adjunta o dejando simplemente que averigüen la altura del rombo por aplicación del teorema de Pitágoras.

Resultados: Area del triángulo, $1/2$; área del rombo, $\sqrt{2}/2$.

Los escribo en el encerado y propongo la siguiente cuestión: «Con estas piezas del mosaico se pueden construir multitud de figuras diversas. Si formamos, aparte, figuras sólo con triángulos y figuras que solamente contengan rombos, ¿será alguna de las primeras equivalente a alguna de las segundas? De otro modo: ¿Se puede sustituir un número de triángulos por un número de rombos de modo que las áreas sustituídas sean equivalentes?»

Los alumnos con los que operé ya sabían por aritmética la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$. Tuve, sin embargo, que recordar su significado: Imposibilidad de que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ o, de otro modo, imposibilidad de que $n\sqrt{2}$ sea igual a m unidades (m, n enteros). Con este recuerdo, conseguí ya que, algunos de los alumnos, vieran la imposibilidad análoga de que un cierto



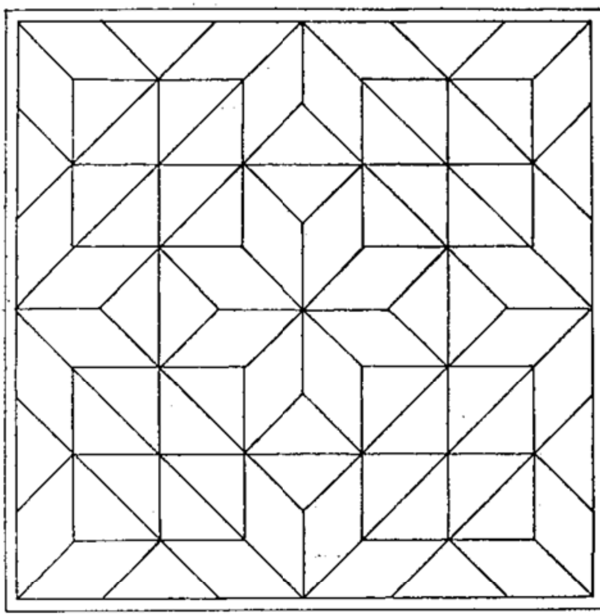
número de veces $\sqrt{2}/2$, área del rombo, equivalga a otro cierto número de veces el área del triángulo $1/2$. Recalqué, diciendo: «Las áreas de los triángulos y las de los rombos son como dos mundos aparte no intercambiables. Toda figura compuesta de triángulos y de rombos tendrá un área con una parte racional procedente solamente de los triángulos que contiene y una parte irracional, procedente de los rombos.»

Después de llegar a esta consecuencia, abro ligeramente una de las cajas cuadradas del juego con objeto de dejarles ver solamente un borde. En él ven la constitución de uno de los lados del cuadrado, cuya longitud consta de cuatro lados de rombos (1) y dos hipotenusas de triángulos ($\sqrt{2}$) e inmediatamente les propongo averiguar cuántas piezas de cada clase contiene la caja, es decir, hay en el cuadrado.

Tras breve reflexión calculan el cuadrado de $4 + 2\sqrt{2}$

$$(4 + 2\sqrt{2})^2 = 16 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 24 + 16\sqrt{2}$$

de lo que resulta que la caja contiene 48 triángulos y 32 rombos.



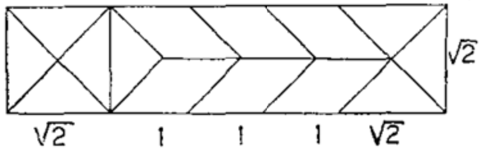
Repito la cuestión para cajas de distintos tamaños y aun para rectángulos que los mismos alumnos pueden idear. Por ejemplo, el rectángulo de dimensiones $3 + 2\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$ exige 14 triángulos y 10 rombos, como se obtiene fácilmente calculando el producto

$$(3 + 2\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 3 + 2 \cdot 2 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$$

El cálculo previo del número de piezas necesarias de una y otra clase facilita mucho la construcción efectiva, con la que puede terminar en forma de juego instructivo la lección.

Nota I.—Es preciso que los rectángulos propuestos sean efectivamente de posible construcción; lo son efecto, excepto aquellos que tienen una dimensión racional, y la otra irracional. Es fácil ver que la irracionalidad en una dimensión exige el empleo de triángulos rectángulos (la $\sqrt{2}$ sólo procede de hipotenusas), lo que implica la aparición de otra dimensión irracional (su mitad) en la dirección perpendicular.

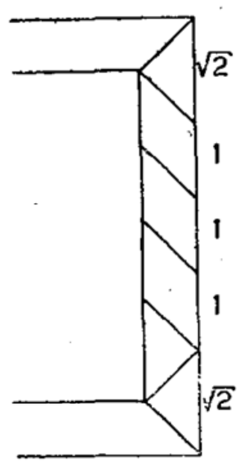
Pero, demostremos que esta condición es suficiente. La construcción efectiva de los rectángulos con dos dimensiones racionales es inmediata,



así como la de los rectángulos de dimensiones de la forma $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$ (a, b, enteros). Tanto unos como otros, no exigen más que el empleo de triángulos.

La construcción de rectángulos de dimensiones de la forma $m + n\sqrt{2}$ y $p\sqrt{2}$ puede reducirse a la de p bandas de dimensiones $m + n\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, que pueden obtenerse por medio de $2m$ rombos y $4n$ triángulos cada una, como muestra la figura en el caso particular $(3 + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$, fácil de generalizar.

Para estudiar el caso general $(m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2})$ analicemos, ante todo, la construcción de un cuadrado de lado $m + n\sqrt{2}$. Colocando, contigua a cada uno de sus lados, y hacia el interior, una banda trapezoidal de altura $\sqrt{2}/2$, formada de m rombos y de $2n - 1$ triángulos, el problema se reduce a la construcción del cuadrado de lado $m + (n - 1)\sqrt{2}$. Una nueva banda de m rombos y de $2n - 3$ triángulos reducirá el lado del cuadrado central a $m + (n - 2)\sqrt{2}$, y así sucesivamente, llegaremos a dejar en el centro la construcción de un cuadrado de lado m, constructible mediante $2m^2$ triángulos. Es fácil comprobar que el número total de triángulos y de rombos utilizados en esta construcción es respectivamente $2m^2 + 4n^2$ y $4mn$, lo que corresponde al cálculo algebraico previamente efectuado.



La misma técnica permite construir todos los rectángulos de la forma

$$(m + n \sqrt{2})\ (m' + n \sqrt{2})$$

dejando en el centro el rectángulo mm' orlado con n bandas.

El caso general $(m + n \sqrt{2})\ (m' + n' \sqrt{2})$ en el que $n' = n + p$ puede reducirse a los precedentes mediante la descomposición en dos rectángulos como sigue:

$$(m + n \sqrt{2})\ (m' + n' \sqrt{2}) =$$
$$(m + n \sqrt{2})\ (m' + n \sqrt{2}) + (m + n \sqrt{2})\ .\ p \sqrt{2}$$

Un estudio semejante puede ser hecho para figuras con forma de rombo, trapecio o más complicadas. No es de esperar que los alumnos de la edad indicada descubran los procedimientos deductivos de construcción expuestos. En general, aciertan después de reiterados tanteos.

NOTA II.—Los lados y las áreas de los triángulos estudiados, constituyen un ejemplo simpático de lo que en Algebra moderna se llama anillo de integridad, salvo interpretación de elementos negativos que podrían realizarse por medio de piezas en negro. Si se efectúa, en efecto, las construcciones sobre fondo negro, la superposición de piezas negras produce el mismo efecto visual que la supresión de la figura cubierta.

Pero entonces, la posibilidad de las construcciones se complica.

ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS EN UN JUEGO SOLITARIO [3]

1. En esta nota me propongo ilustrar cómo la consideración de ideas de simetría y dualidad, permite guiar la solución de un juego solitario, bastante difundido y de cierta dificultad cuando se intenta resolverlo sin una conducción racional de su estrategia. Este juego se expende en el comercio con el absurdo nombre de «Cha-cha-chá».

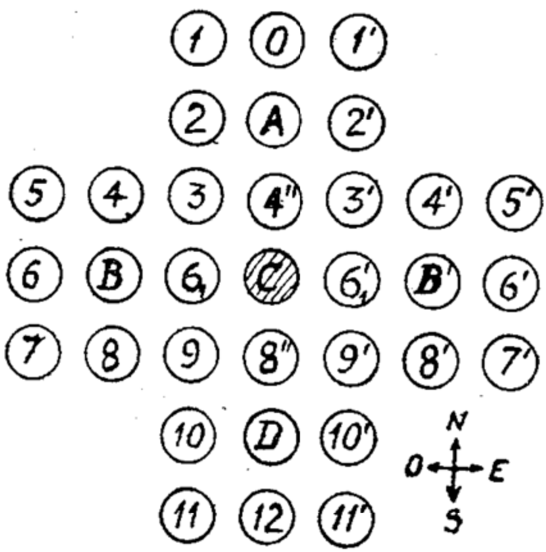
2. El juguete consta de una placa con 33 orificios dispuestos en estructura de cruz, como indica la figura, a los que se ajustan otras tantas fichas o peones.

Suprimida la ficha del orificio central, el juego consiste en eliminar fichas saltando sobre ellas con otras en las cuatro direcciones, que llama-

[3] Estudio publicado en «Gaceta Matemática», 1.ª serie, tomo IX, núm. 1.

remos, para abreviar, N, S, E, O, como si se tratara de los puntos cardinales de un mapa. Los saltos en diagonal están prohibidos. *Es preciso llegar a conseguir que quede una sola ficha en el orificio central.*

Con objeto de describir la estrategia, designemos los orificios por los números y letras de la figura; números que permiten establecer criterios de equivalencia aritmética, que sean reflejo de los de equivalencia resultante de las reglas de juego.



3. Considerando, en efecto, equivalentes los orificios que una misma ficha puede recorrer por saltos (no hay en el juego otra clase de movimientos) o las fichas que pueden ir a parar a un mismo orificio por saltos, vemos que éstos orificios o fichas quedan clasificados en las cuatro clases de equivalencia siguientes (los caracteres idéntico, transitivo y recíproco de dicha equivalencia son evidentes):

1.ª	12 esquinas con números impares (congruentes, mod. 2)	1.er grupo
2.ª	5 centros de cuadrados con letras A, B. B', C, D	
3.ª	8 puntos medios de lados con mult. de 4, cero incluído.	2.° grupo
4.ª	8 ídem con números congruentes con 2 mod. 4	

4. Se observa que:

I. Las fichas del primer grupo (formado por las dos primeras clases) son las que saltan sobre las del segundo (formado por las dos últimas), suprimiéndolas, y recíprocamente. Será, pues, táctica prudente mantener equilibradas a lo largo del juego las fichas de uno y otro grupo para que la falta de elementos de un grupo, no acarree como consecuencia la imposibilidad de supresión de las del otro. Claro es que no es regla indispensable, ya que un salto múltiple puede en ciertos casos restituir el equilibrio.

II. Suprimida inicialmente la ficha central, las otras cuatro, A, B, B', D, son *las únicas* que podrán ocupar finalmente el orificio central. Habrá, pues, que conservar alguna de estas fichas hasta el final. La inadvertencia de este hecho condena a la esterilidad la mayor parte de las tentativas; por ello destacamos estas fichas de las demás, designándolas mediante letras.

III. Observando las múltiples simetrías del sistema de orificios, que son las mismas del cuadrado central, y de las que resulta la invariancia de la figura respecto a un giro de 90 grados, parece natural tenerlas en cuenta en la estrategia; es decir, seguir esquemas de movimientos de tendencia simétrica o giratoria. Y digo sólo de tendencia, por cuanto la simetría ha de perderse necesariamente en todo movimiento que desplace de su eje las fichas situadas en él. En la figura hemos realzado la simetría respecto al eje NS, dando la misma designación a ambos lados, acentuando los signos del lado derecho.

IV. Pero no solamente existen las simetrías geométricas mencionadas, sino que el juego presenta también otra especie de simetría temporal que resulta de su reversibilidad. Una estrategia correcta empieza, en efecto, con un solo orificio en el centro y termina con una sola ficha, también en el centro. Bastará, pues, partir de esta ficha central y retroceder invirtiendo los saltos y colocando una ficha nueva sobre cada orificio saltado (en vez de suprimirla como en el proceso directo) para volver a llenar toda la estructura, menos el orificio central. Ahora bien, esta estrategia dual lo mismo puede seguirse en blanco (fichas) que en negro (orificios); es decir, partiendo nuevamente de un orificio central e invirtiendo simplemente el orden de los saltos de la estrategia primitiva. Cada solución que obtengamos suministrará, pues, automáticamente, otra solución dual. Y será buena norma estratégica vigilar las primeras estructuras de orificios obtenidas para intentar llegar al final a estructuras análogas de fichas que conduzcan inversamente a la posición central deseada.

5. Con el precedente análisis estructural del juego y con las normas estratégicas generales que de él han resultado, podemos ya iniciar los ensayos y conducir las jugadas. Describiremos éstas indicando simplemente la ficha suprimida en cada una, mediante la designación del lugar ocupado por ella en la figura. Cuando pueda haber ambigüedad sobre la ficha que salta, añadiremos a continuación la dirección del salto (N, S, E, O). Intercalamos las indicaciones que guían la estrategia seguida en relación con las observaciones anteriores.

Primera jugada: 4'' o cualquiera de sus tres equivalentes simétricas.

Segunda: Parece natural 3 (o su equivalente 3'). Se pierde la simetría.

Tercera: Ensayemos 4''N en atención a la mejor posibilidad que ofrece para jugadas sucesivas. Obsérvese ahora la estructura asimétrica de los cuatro orificios vacíos, estructura en forma de L con el extremo del lado corto en el centro.

Cuarta: 3', restituyendo la simetría y equilibrando las fichas pares e impares.

Siguen naturales los saltos sobre 2 y 2', así como 3O, A y 3', restituyendo nuevamente la simetría. En este momento ha quedado suprimido todo el cuadrado superior.

La sucesión de jugadas simétricas que siguen surgen de modo tan natural que apenas necesitan justificación: 4, 4', 6, 6', BN, B'N, 3N, 3'N, 4, 4', 3, 3'. Quedan ahora las fichas del cuadrado inferior y las dos laterales próximas al orificio central.

En este momento hay que movilizar la ficha 8'', renunciando ya a la simetría (los saltos sobre las fichas 6_1 $6'_1$ colocarían fichas en las posiciones 3 y 3', sin posibilidad ulterior de retroceso). Hemos de conservar ahora la ficha D, única que puede ir al centro. No podemos saltar sobre ella, pero sí rodeándola. Finalmente, en atención a la observación IV, procuraremos llegar a obtener una estructura de cuatro fichas en forma de L con el extremo del lado menor en el centro. Estas normas permiten salvar este único momento, de cierta dificultad, continuando con las siguientes jugadas: 9, 10, 12, 9S, 10, 9, 8''N.

Llegamos a la estructura en L deseada, dual y simétrica, respecto de la diagonal NE, de la obtenida después de la tercera jugada. Las tres jugadas finales serán, pues, duales y simétricas de las tres primeras, en orden inverso: $6'_1$ E, 9', $6'_1$, y termina el juego.

Claro es que saltando en la última jugada sobre B' terminaríamos con la ficha en 6'. En consecuencia, aplicando la estrategia dual podemos partir de un orificio único en 6' y llegar a una ficha única en el centro.

6. Sin pretender hacer un análisis exhaustivo de todas las soluciones posibles, indicaremos otras para dar idea de diferentes estrategias posibles. Pasamos por alto, por consiguiente, las variantes que resultan de la estrategia anterior o de su dual por aplicación de alguna de las simetrías o giros del tablero de juego.

Otra solución que conserva una cierta simetría respecto de una diagonal, es la siguiente: 4'', 3, 4''N, A, 2, 3O, 3', 2', 4'', 3N, 4, 3, 6_1N, B, 6_1, 9, 8, 9S, 10, 9, 12, D, 10, 9, 9', 8', 6', 9'E, 8', 9' y $6'_1$. Y su dual inversa $6'_1$, 9', 8', etc.

Otra solución que barre circularmente los cuadrados: 4'', 3', 4''N, A, 2', 3'E, 3E, 2, 4'', 6_1E, 9, 8, 6, 9S, 10, 9, 8, 9', 8'', DN, 9', 10', 9'S, 8', 9', 3'N, 4', B', $6'_1$, 3', $6'_1$. Y su dual inversa.

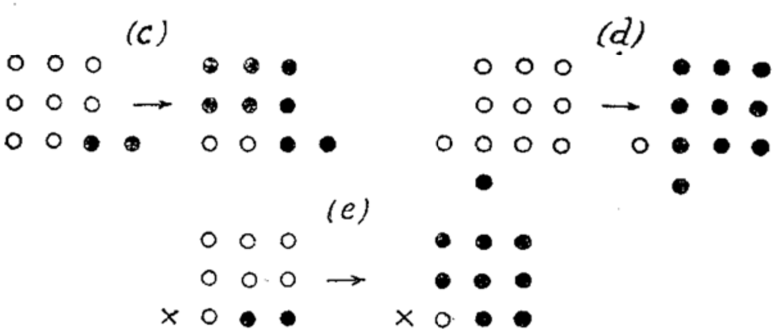
Otra solución que nos comunica amablemente el profesor Pascual Ibarra y que, además de reflejar estructuras simétricas respecto de una diagonal (jugadas 18 y 22), tiene la particularidad de conservar hasta el final las cuatro fichas marcadas con letras (con el desequilibrio consiguiente de grupos) es: 4'', 3, 4'', 2, 0, 2', 4', 3, 3', 2, 2', 9, 8, 6, 9O, 8, 9, 10, 9'N, 8', 9', 10', D, 9, B, 3, 3', B'O, $6'_1$, 3', 4''.

7. Nos parece todavía interesante añadir que el juego es realizable partiendo de orificios distintos del central. Al final del párrafo 5 ya hemos hecho alusión a la posibilidad de partir de un orificio vacío en 6', o cualquiera de sus simétricos 6, *0,12,* terminando asimismo el juego con una ficha en el centro.

Finalmente, partiendo de un orificio vacío en cualquier otro punto del tablero, puede resolverse el juego terminando con una ficha en el mismo orificio de partida. Con objeto de simplificar el descubrimiento y la descripción de la estrategia en cada caso, todavía haremos aplicación de otro carácter general de la actividad matemática: La combinación de estructuras simples (leyes formales de las operaciones, por ejemplo) para la consecución de estructuras más complejas (multiplicación de polinomios, por ejemplo). Aquí la estructura operatoria simple es el salto. La combinación de saltos permite obtener las reglas de transformación indicadas en las figuras (*a*) y (*b*) y sus equivalentes por simetría o rotación.

Por combinación de éstas se desprenden, a su vez fácilmente, las transformaciones más complejas expresadas en las figuras (*c*), (*d*) y (*e*), y sus equivalentes por simetría o rotación.

Esta última transformación es realizable, exista o no ficha en el orificio señalado con una cruz. Si existe ficha en él, se empezará suprimiendo la terna vertical por (*a*) y luego se aplica (*b*). Si no existe ficha se saltará primero sobre la ficha central del cuadrado, se suprimirá luego la terna vertical y un salto doble termina la transformación.



La aplicación sistemática de estas transformaciones permite resolver el problema de un orificio inicial descentrado, terminando con una ficha en idéntica posición. Exceptuamos las posiciones axiales 0, 12, 6, 6', en las que, como hemos dicho, se termina con ficha en el centro o en los extremos del eje perpendicular. Bastará estudiar las posiciones 4'', 3, 4, 5 y A, ya que cualquier otra se reduce a éstas por simetría. He aquí las soluciones :

Orificio en 4'' : Suprimir todas las fichas del cuadrado E (*d*). Dejar sólo la ficha 3 en el cuadrado N (*e*). Dejar sólo 9 y 8'' en el cuadrado S (*c*) Suprimir el cuadrado O (*d*). Saltar sobre C.

Orificio en 3: Saltar sobre 4''. Dejar sólo 3 en el cuadrado N (*e*). Dejar $6'_1$ y 9' en E (*c*). Suprimir todo el S (*d*). Dejar 3 y 6_1 en el O (*c*). Suprimir la terna 6_1, C, $6'_1$ (*a*).

Orificio en 4: Saltar sobre 3 y 2. Suprimir todo el E (*d*). Dejar 3 en N (*e*). Dejar 9 y 8'' en S (*c*). Dejar 3 en O (*e*). Saltar sobre C y 3.

Orificio en 5: Saltar sobre 4, 6_1, 3O, 4, B, 8. Suprimir E. Dejar 3 en N. Dejar 9 y 8' en S. Saltar CN, 3, 6_1, 4.

Orificio en A: Saltar 4''. Suprimir E. Dejar 3 en N. Dejar 9 y 8'' en S. Saltar 9, 8, 9O, 6, 8, 9, 3, 6_1, 4''.

Claro es que puede terminarse también con una sola ficha en posiciones diferentes a las del orificio de partida, pero las posiciones terminales están asociadas con las del orificio de partida, pudiendo elegirse entre ellas, pero no entre las demás. Es decir, y se comprende que así sea, con un orificio inicial en un lugar no puede terminarse con una ficha en cualquier otro lugar. No es difícil ver las asociaciones, pero como el objeto de este artículo no es un estudio del juego en sí, sino de las aplicaciones que en él pueden efectuarse de ideas matemáticas para su simplicación y generalización, damos por terminado este artículo estimando nuestro propósito suficientemente logrado.

ESTRUCTURA DE GRUPO EN EL JUEGO DE LAS QUINCE FICHAS

Es bien conocido el juego (llamado «Taquin» en Francia, «Solitario del 15» en España, etc.), consistente en ordenar en una forma determinada quince fichas cuadradas iguales, numeradas del 1 al 15, en un cuadrado de cabida para dieciséis, partiendo de una ordenación cualquiera de las quince fichas, y corriéndolas en forma de que vayan ocupando las posiciones del hueco sobrante; de modo que en cada posición el hueco sólo puede ser ocupado por las fichas colaterales al mismo.

De antiguo se sabe que no es posible la solución en todos los casos y que solamente la mitad de las 16! colocaciones posibles, pueden ser transformadas de este modo en una ordenación prefijada. Objeto de esta nota es dar una breve demostración de este hecho, relacionándolo con la teoría de grupos de sustituciones. Dado lo muy divulgado que ha sido el juego y la naturaleza del mismo, sin duda no será ésta la primera aplicación que se haga de dicha teoría al juego; pero es también posible que esta demostración tenga alguna novedad de enfoque, por lo que, sin ánimo de emplear tiempo en consultas bibliográficas, dada la escasa importancia del asunto, la divulgamos a efectos puramente didácticos, como un ejemplo más de aplicación de ideas matemáticas a los juegos [1].

Todas las transposiciones de fichas que se pueden obtener mediante los movimientos del juego, forman evidentemente un *grupo,* y vamos a ver que es precisamente un subgrupo del grupo (simétrico) de sustituciones entre 16 elementos: el que conserva la paridad del número de inversiones de los guarismos grabados en las fichas, al considerar éstas invariablemente ordenadas, según un orden fijo de lugares. Precisamos este concepto:

Cada ficha lleva inscrito un número y ocupa al mismo tiempo un lugar. Establezcamos un orden invariable de lugares, por ejemplo, el orden

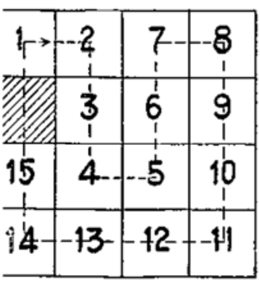


Fig. 1.ª

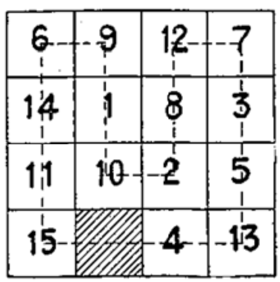


Fig. 2.ª

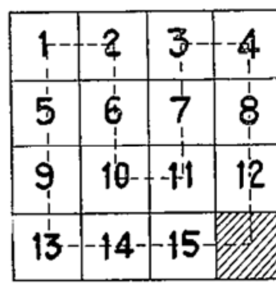


Fig. 3.ª

marcado en la figura 1.ª, en el que el primero y último lugares son colaterales, así como los consecutivos, cerrando un circuito de recorrido. Fijado este orden, observemos, en cada disposición de las fichas, la sucesión de sus signos numéricos en el orden de lugares convenido y contemos las inversiones de esta sucesión.

Llamaremos *par* o *impar* la *ordenación,* según que sea par o impar este número de inversiones.

Por ejemplo, en la disposición de fichas de la figura segunda, que en el orden convenido es: 6, 9, 1, 10, 2, 8, 12, 7, 3, 5, 13, 4, 15, 11, 14, el

[1] El libro *Matemáticas e Imaginación,* de KASNER y NEWMAN, hace especial mención de este juego (que hizo furor en el siglo pasado) y cita como primer tratamiento matemático del mismo el de Johnson y Story, en «American Journal of Mathematics» (1879).

número total de inversiones es 35, mientras en la disposición de la figura 3.ª, de ordenación 1, 2, 6, 10, 11, 7, 3, 4, 8, 12, 15, 14, 13, 9, 5, el número de inversiones es 31. Ambas ordenaciones son, pues, impares.

Demostremos ahora que:

Todas las transformaciones obtenidas por movimientos del juego conservan la paridad de la ordenación de las 15 fichas.

Se observa, en efecto, en la figura 1.ª, que los números de orden de lugares colaterales son de distinta paridad, lo que implica que cualquier movimiento de ficha a un hueco colateral, si es inmediato anterior o posterior en el orden prefijado, no altera dicho orden, y si no es inmediato, dicho movimiento equivale a permutar la ficha sucesivamente con las de lugares intermedios, que son en número *par*, con lo que tampoco se altera la paridad del número de inversiones. (Recordemos que al permutar dos fichas consecutivas, sólo se altera en una unidad el número de inversiones, puesto que varía el orden relativo de dichas fichas sin modificar el orden de ellas respecto de las demás, y por tanto, un número par de permutaciones de parejas consecutivas no altera la paridad de la ordenación.)

Recíprocamente: *Todas las ordenaciones de fichas de igual paridad son obtenibles mediante movimientos del juego, partiendo de una cualquiera de ellas.*

En efecto, por corrimiento de las fichas en un sentido de recorrido del circuito ordenador, haremos correr el hueco en sentido contrario, con posibilidad de colocarle en cualquier posición. Después de intercalar de esta forma el hueco entre dos fichas consecutivas cualesquiera del circuito, podemos correr toda la culebra de fichas del mismo hasta colocar dicho hueco en posición colateral de cualquier ficha no inmediata a él, cuyo lugar en el circuito difiera del ocupado por el hueco en un número impar de lugares. Entonces el corrimiento de la ficha al hueco dará como resultado la intercalación de dicha ficha entre las dos que lo abarcaban. Mediante movimientos del juego podemos, pues, alterar la posición de una ficha cualquiera en el circuito, saltando un número par de fichas intermedias, y todo ello sin alterar el orden de las demás fichas en el circuito. En particular, un salto de dos lugares equivale a una permutación circular efectuada en el grupo de tres fichas: la que salta y las saltadas. De todo ello resulta la posibilidad de llevar cada ficha al lugar deseado, mediante un número par de transposiciones de fichas consecutivas, y, por tanto, la posibilidad de transformar una ordenación en otra de la misma paridad.

Estos teoremas nos permiten así predecir la posibilidad de la transformación de una ordenación en otra, sin más que observar si ambas son de igual paridad. Por ejemplo, la ordenación de la figura 2.ª es transformable en la de la figura 3.ª, y he aquí indicados los primeros movimientos que resultan de aplicar la estrategia indicada en el razonamiento anterior: Colocación del hueco en el lugar 16, o sea, junto a la ficha 6 (por movimiento de las fichas 15, 11, 14). Corriendo a él la ficha 1, hemos permutado circularmente las fichas 6, 9, 1, obteniendo la nueva ordenación 1, 6, 9, 10, 2, 8, etc. (empezando en el lugar 16). La ficha 2 no

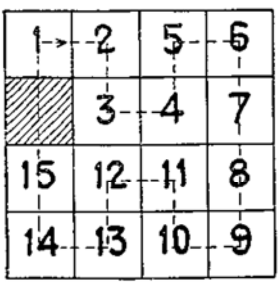


Fig. 4.ª

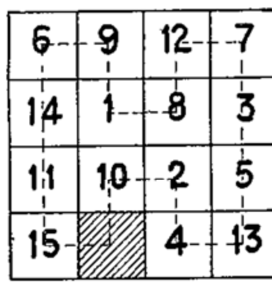


Fig. 5.ª

podrá ahora pasar a continuación de la 1, conservando el orden relativo de las demás fichas, por ser necesarias para ello *tres* transposiciones consecutivas. Pero pasando la ficha 8 delante de la 2 y de la 10, por corrimiento de la misma al hueco, la nueva ordenación será 1, 6, 9, 8, 10, 2, etc., y queda preparada la ficha 2 para pasar al segundo lugar mediante *cuatro* transposiciones consecutivas. La sucesión de fichas movidas para alcanzar este resultado, según la línea estratégica indicada, es 2, 10, 8, 9, 6, 1, 14, 11, 15, 4, 13, 5, 3, 7, 12, 2, 10, 8, 9, 6, 2. Se comprende la posibilidad de proceder análogamente para colocar las fichas restantes. Si el cambio de lugar de cada ficha equivale a un número par de saltos consecutivos, basta correr la culebra de fichas hasta enfrentar el hueco a ocupar con la ficha a transponer. Si equivale a un número impar de saltos, transpóngase previamente la ficha anterior o posterior de dos lugares, por encima de la que se desea transponer, y procédase luego como en el caso anterior.

Se comprende que esta estrategia, por su misma uniformidad, nos ha sido útil para demostrar brevemente la posibilidad del juego, pero no da en general un proceso práctico, por exigir excesivo número de movimientos. Así para avanzar o retroceder un lugar toda la culebra hacen falta 15 movimientos. Se ve fácilmente en cada caso la posibilidad de establecer circuitos parciales oportunos que permitan colocar las fichas en su lugar con menos movimientos y aun con el mínimo de ellos, problema que no enfocamos aquí.

Observación.—Añadiremos únicamente que la paridad o imparidad de una ordenación depende, naturalmente, del orden establecido para los lugares de referencia, de tal modo que al variar este orden puede variar la paridad de determinada ordenación de fichas. Pero, en cambio, se *conserva invariante la igualdad o desigualdad* de paridades entre dos ordenaciones. Así, si en lugar de considerar como fundamental de referencia el orden de lugares de la figura primera consideramos como tal el de la figura cuarta, las disposiciones de fichas de las figuras segunda y tercera pasan a tener las ordenaciones siguientes:

6, 9, 1, 8, 12, 7, 3, 5, 13, 4, 2, 10, 15, 11, 14, con 38 inversiones
1, 2, 6, 7, 3, 4, 8, 12, 15, 11, 10, 14, 13, 9, 5, con 28 inversiones

también ambas de la misma paridad, aunque distinta de la anterior.

Se comprende que así resulte, interpretando la nueva ordenación de lugares, como una transformación de la ordenación anterior, y, por tanto, perteneciente al grupo total de permutaciones posibles de las fichas (dando al 16 el significado de hueco). Por el carácter multiplicativo del grupo, las dos nuevas paridades serán, pues, producto de las anteriores por la paridad de una misma transformación, y por ello conservan la igualdad de carácter. Variar la ordenación fundamental de referencia equivale en el fondo a aplicar al grupo un automorfismo, lo que explica la invariancia de las relaciones.

Nueva demostración del recíproco anterior.—La ordenación de lugares de la figura 4.ª sugiere otra demostración de la posibilidad de realizar las transformaciones de igual paridad. En efecto, en cualquier posición del hueco (que puede recorrer, como antes, todo el casillero sin alterar el orden de las fichas en el nuevo circuito) éste forma con las tres fichas que le preceden, o que le siguen, un cuadrado en el que podemos permutar circularmente las tres fichas sin alterar la ordenación relativa de las demás. Así, en el cuadrado de la figura 5.ª, formado por las tres fichas 10, 2, 4, y el hueco, llevando a éste la ficha 4 obtenemos la permutación circular 4, 10, 2; mientras por los movimientos 10, 2, 4, 10, obtenemos la permutación 2, 4, 10.

Combinando estos movimientos podemos, pues, permutar circularmente todas las ternas de fichas consecutivas que queramos, previa colocación del hueco en lugar adecuado. Como cada permutación circular de tres fichas equivale a dos permutaciones de parejas consecutivas, podemos también, de esta suerte, alcanzar cualquier otra ordenación que conserve la misma paridad. Toda transformación que conserva la paridad de la ordenación puede, en efecto, obtenerse multiplicando permutaciones circulares de ternas consecutivas.

§ 6. LOS FILMS MATEMATICOS

FILMS Y FILMINAS

Quisiéramos referirnos ahora tanto a los films fijos o filminas como a los móviles. Los primeros sustituyen a las antiguas proyecciones diapositivas y ya no se utilizan simplemente para comodidad del profesor en sustitución del encerado; si así fuera, representarían más bien un retroceso, ya que el dinamismo combinado de acción y comentario sobre la figura dibujada en el encerado durante la explicación, difícilmente puede sustituirse por la simple proyección de figuras preparadas. La eficacia ventajosa de las filminas sobre el encerado, debe buscarse en la multiplicidad de figuras, difícilmente realizables en una sesión ante el alumnado, bien sea por su número o por su complejidad, y, sobre todo, en su ordenación en secuencias sugeridoras de procesos de transformación o de relaciones que conduzcan a una enseñanza determinada. Siempre que no sea indispensable o conveniente la continuidad de tales transformaciones, siempre que el movimiento o deformación continua no sean sustanciales en el proceso, pueden realizarse filminas eficaces. En cambio, la filmina fracasa en cuanto pretende reemplazar al film móvil en todas aquellas ocasiones en que la expresividad del movimiento es insustituíble.

Lamentamos no poder suministrar aquí al lector una amplia información sobre las características y calidades de las filminas matemáticas existentes en el mercado internacional. Durante la única oportunidad que pude tener de conocer multitud de ellas, a raíz de la XI Reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática, fui honrado con la dirección de uno de los Grupos de trabajo sobre Modelos matemáticos, lo que me impidió la asistencia al Grupo especialmente dedicado a filminas. Nos remitimos por ello a los comentarios que, de segunda mano, hubimos de transcribir en nuestro libro sobre *Material didáctico matemático actual,* varias veces citado.

EL FILM MATEMÁTICO Y LA INTUICIÓN. MOVIMIENTO Y CONTINUIDAD

Pasando, pues, de lleno al tema del film matemático, veamos ante todo el papel que en la educación matemática le asigna el profesor suizo Nicolet, uno de los primeros y más eficaces entre sus creadores. Para Nicolet no hay conocimiento matemático pleno que no tenga una base previa en la intuición; intuición matemática que define como una «contemplación de imágenes» según procesos sugeridos por el subconsciente en el caso de un espíritu creador, o aportados por el agente docente externo en el caso del aprendizaje matemático estimulado. La certeza intuitivamente descubierta es la que, según Nicolet, despierta la necesidad de la demostración. La lógica aparece, según él, como un proceso límite de la intuición. Mientras ésa persuade, aquélla demuestra, complementándose ambas en vez de oponerse.

El mejor agente intuitivo externo para despertar en el alumno el alumbramiento de las verdades geométricas es, para Nicolet, el dibujo animado. La certeza así intuída adquiere de paso valores estéticos esenciales en la educación.

No ha de extrañar al lector que, entre los temas más indicados para su desarrollo fílmico, figuren aquellos en los que el movimiento es fundamental en la génesis de la figura. Concretamente se cuentan entre las más felices realizaciones aquellas relativas a *lugares geométricos* y sus propiedades. La génesis del lugar (arco, capaz, cónica, cardiode, estrofoide, etcétera) surge con una elocuencia, derivada del propio dinamismo generador y de su continuidad, que no admite comparación ni aun con la de los modelos dinámicos más apropiados.

En la generación del arco capaz, la misma continuidad ofrece de manera natural la transición a los casos límites extremos, en los que el ángulo pasa de inscrito a semi-inscrito. La inclusión de los puntos extremos del lugar, que deductivamente es preciso razonar aparte, con nueva demostración específica, aparece natural y convincente en el proceso genético descrito. La profesora Castelnuovo [1] ve por ello en el film matemático la

[1] Profesora italiana del Liceo Tasso, de Roma, autora de un notable libro de *Geometría intuitiva* concebido según un criterio historicista. Miembro de la Comisión Internacional para el Estudio y mejora de la Enseñanza Matemática.

considerable ventaja de introducir en la arquitectura euclídea el *principio de continuidad,* del que tanto uso se permitía hacer Poncelet, para generalizar ciertas propiedades proyectivas de figuras, pasando a posiciones límites mediante deformaciones proyectivas continuas.

A este respecto, es particularmente impresionante la elocuencia del film de Nicolet sobre generación de las tres cónicas cuando, en el caso de la hipérbola, el finísimo detalle de la regulación de velocidades del punto generador llega casi a dar material realidad a la imagen idealizada de los puntos del infinito.

DINAMISMO, GENERALIZACIÓN Y PARTICULARIZACIÓN

Pero no es solamente en la generación de lugares geométricos en donde el film matemático puede aportar valores didácticos definitivos. Al *animar* la figura relativa a una propiedad, variando, por ejemplo, las magnitudes o las posiciones de ciertos elementos, la figura adquiere una riqueza expresiva mucho mayor que la que puede derivarse del frío razonamiento euclídeo efectuado sobre ella. Puede así aparecer ante los ojos extasiados del alumno como una particularización dentro de un cuadro mucho más vasto de posibilidades, afirmándose indeleblemente, como vinculadas a tal particularización, las singularidades características de la propiedad que se trata de realzar. La posibilidad de tránsito continuo de lo particular a lo más general, o recíprocamente, con la pérdida o ganancia consiguiente de propiedades específicas, es lenguaje gráfico que sólo estaba reservado al film, o al dibujo animado.

Para no citar más que un ejemplo muy sencillo, haremos referencia al film tal vez más elemental de Nicolet y, sin embargo, lleno de sugerencias del orden dicho en torno al hecho simplicísimo de quedar una circunferencia determinada por tres puntos. Estos tres puntos aparecen brillantes sobre el fondo negro de la pantalla. Surge por un lado una pequeña circunferencia que circula libremente por el plano hasta que tropieza con uno de los tres puntos y queda prendida en él. Ha perdido parte de su libertad, pero todavía puede balancearse alrededor de este punto, y puede agrandarse y achicarse, hasta que queda prendida por otro de los puntos fijos dados. Entonces todavía puede variar, pero sólo su radio, hasta que queda sujeta por el tercer punto, sin que ya entonces sea posible ulterior variación. La experiencia se repite con varias circunferencias que, de todos tamaños y por todos lados, van apareciendo, pasando por vicisitudes similares. Queda entonces patente la pérdida progresiva de los grados de libertad de una circunferencia cualquiera, a medida que queda obligada a pasar por uno, dos o tres puntos dados. Todas las circunferencias terminan coincidiendo en una sola. El film no llega a durar dos minutos, pero ¡ cuánta riqueza de experiencia visual suministra ! La determinación de un circunferencia por tres puntos, no sólo ha quedado visiblemente sugerida, sino que lo ha sido en una forma y con una significación que no puede darle el clásico razonamiento sobre una figura estática. La única circunferencia que pasa por los tres puntos, no es ya la que tiene el centro y radio que el razonamiento euclídeo y la construcción consiguiente determinan; adquiere una riqueza psicológica en la mentalidad del niño infinitamente mayor : es nada menos que el estado final a que llegan *todas* las circunferencias imaginables en el plano cuando van perdiendo sus posibilidades de movimiento y deformación al ser sujetadas sucesivamente por los tres puntos dados.

De ahora en adelante, cuando se hable al niño de una circunferencia *cualquiera* que pase por un punto dado, ya no verá solamente la que él o su profesor puedan trazar en el encerado, para apoyar el razonamiento que sobre ella quiera efectuarse, sino que pensará en todo el conjunto de posibilidades de posición y tamaño de aquella circunferencia variable del film, cuando solamente estaba prendida por un punto. El concepto de *elemento geométrico genérico* adquiere, pues, todo su valor en cuanto un film ha materializado su variación, mostrando imágenes evolutivas de sus infinitas posibilidades. Cultivar la intuición de variedades de elementos genéricos es función de la mayor importancia en la educación matemática de la juventud.

En relación con lo dicho, haga el lector la siguiente experiencia con un grupo de niños de segundo o tercer curso de Bachillerato. Formúlense las clásicas preguntas sobre cuántas rectas o cuántos planos perpendiculares a un plano dado (materializado con una carpeta) pueden pasar por un punto dado (extremo de un lápiz) y los aciertos son frecuentes. Pregúntese, en cambio, si por una recta *cualquiera* dada (sin señalar) pasa siempre un plano vertical, y los aciertos serán raros. En el primer caso, el niño ve el plano, ve el punto, y la intuición hace lo demás. En el segundo caso, tiene que imaginar no un dato, sino la infinidad de datos posibles contenidos en el concepto una recta *cualquiera* (genérica). Si piensa, por ejemplo, en una recta vertical, se aferrará a esta representación y no cuidará de variarla si no lo ha hecho antes; verá, entonces, infinidad de planos verticales pasando por la recta. Si no coloca la recta vertical es posible que no acierte a ver plano vertical alguno. Cultivemos, en cambio, la intuición de la variación del dato con imágenes animadas (por ejemplo, mostrándole una carpeta apoyada por su doblez en una aguja de tricotar, colocada en su interior) y la contestación será mucho más fácil. Después de haber visto cómo en *cualquier* posición oblicua de la aguja la carpeta encuentra por sí sola un posición de equilibrio estable vertical, mientras que, al colocarse la aguja vertical, la carpeta puede bailar locamente a su alrededor, la distinción entre el caso genérico y el caso singular es algo que ha penetrado por los sentidos. En este sencillo ejemplo el modelo material aventaja, sin duda, a cualquier imagen fílmica del mismo; pero no lo hemos traído como guión de un posible film, sino como ilustración del interés didáctico que tiene el cultivo de los conceptos genéricos en la enunciación de las propiedades y como ponderación de la ayuda que en este aspecto pueden proporcionar los films en casos menos directos y triviales, suministrando la posibilidad de ilustrar la variación de los elementos de referencia. Esta misma posibilidad facilitará grandemente la ardua tarea de las llamadas *discusiones* en las soluciones de los problemas, mostrando toda la posible variación de los datos de los mismos.

TÉCNICA DIDÁCTICA DEL FILM

Volviendo a las ideas básicas de Nicolet insistiremos en que para él el dibujo animado es el medio más eficaz para hablar a la imaginación del niño, aguzando de paso su percepción sensorial e intelectiva. Nicolet intenta con sus films que el niño recorra las etapas del conocimiento científico por las que ha pasado el matemático creador, y por ello reserva al film el papel de simple alumbrador de intuiciones. Sobre el recuerdo visual del film se operará la acción comentadora, descriptiva y analizadora, facilitando el paso de lo concreto a lo abstracto, y de lo intuído a lo razonado. Es en este momento, en que el niño pasa de receptor a agente crítico y analista, cuando el film ejerce su más beneficiosa influencia educadora.

Para conseguir todo ello, elige Nicolet hechos geométricos muy concretos y simples, de modo que la mayor parte de sus películas son extremadamente cortas. El hecho es presentado escuetamente, en toda su mayor pureza y sobriedad. Nada de letras, ni de rótulos, ni de comentarios escritos que distraigan la atención del niño sobre la figura misma. Esta y su dinámica han de hablar por sí solas. El lenguaje gráfico así empleado resulta universal y directo.

El film se proyecta una o varias veces; las que sean precisas para la memorización y descripción por parte del niño. Es impresionante la receptividad de sus sentidos recién abiertos y ávidos de información. El niño describe lo visto, y entonces el maestro puede sugerir con preguntas el proceso analítico. ¿Dónde se movía el centro de la circunferencia cuando se balanceaba alrededor del primer punto que la prendió? ¿Sabrías construirme este lugar en el encerado? ¿Qué línea describía el centro cuando la circunferencia prendida ya por dos puntos se agrandaba y achicaba? ¿Sabrías trazarlo en el encerado? ¿Y, si en lugar de estar prendida por estos dos puntos, lo fuera por estos otros dos? Y si lo está por los tres, ¿dónde está entonces el centro de la circunferencia?

Como puede apreciarse, a través de estas leves insinuaciones, el film ni es una mera ilustración de la propiedad, ya que está todo él presente en la génesis de la misma, ni puede reemplazar al maestro que, por el contrario, se vale del film para la conducción genética de la enseñanza. El film vivifica la geometría y permite la iniciación de un diálogo entre maestro y alumnos, después de haber hablado silenciosamente a la intuición de todos ellos. Nicolet coloca en el término de este proceso la aparición de la demostración lógica como necesidad que el mismo comentario analítico del film haya despertado.

HACIA UNA SÍNTESIS EXPRESIVA DEL FILM

El profesor inglés Fletcher, entusiasta del film matemático y creador de varios de ellos, quiere llegar más lejos que Nicolet en el alcance didáctico de este medio visual de enseñanza; pretende hacer del film un órgano o instrumento autónomo de comunicación o información, mediante el empleo de sus propios medios: signos y símbolos. Con ello plantea un interesantísimo problema: el de la sintaxis expresiva del film como figura dinamizada.

Analicemos con Fletcher el papel de la figura (estática) en la geometría griega. Era simplemente el soporte de los encadenamientos deductivos verbales conducentes a demostrar la propiedad que ilustraba. En la perfección lógica de tales encadenamientos y no en la elocuencia gráfica de la figura, era donde radicaba la fuerza persuasiva y convincente de los argumentos euclideos. Desde los griegos, el rigor se ha hecho inseparable del contexto lógico verbal. Pero ¿acaso las palabras no son también símbolos y como tales sujetos a espejismos? ¿Con qué derecho hemos atribuído a los símbolos verbales la exclusividad del rigor? ¿Existe en verdad un rigor absoluto?

En estos o parecidos términos viene a colocar Fletcher el dedo en la llaga de un problema eterno: el del rigor matemático. Al pasar de la figura al lenguaje, acaso los griegos no hicieron más que liberarse del riesgo de un género de falacias (de figura) para caer en otro peligro más sutil: el de las falacias lógicas. Quien haya profundizado en los fundamentos de la lógica matemática y haya calado las dificultades de sus teóricos modernos para darle una base sólida, comprenderá la profunda verdad de este valiente reparo al exclusivismo del contexto verbal que se ha enseñoreado de los hábitos científicos desde los griegos.

Fletcher justifica esta preferencia en el hecho de que la figura estática tradicional no era en verdad elocuente; carecía de expresividad sintáctica; pero piensa que, en cuanto la figura se dinamiza, pueden los procesos transformativos operados en ella, hacerla «hablar» y darle una sintaxis expresiva capaz también de demostrar y de convencer. Así, pues, para Fletcher el film no sólo puede dar pie a una demostración lógica sugiriendo su necesidad (Nicolet), sino que puede llegar a ser capaz de *demostrar* por sí mismo con igual derecho con que lo hace la lógica verbal. Esto, naturalmente, plantea el problema de crear una sintaxis expresiva del film, una especie de lógica gráfica con sus reglas lícitas de transformación del simbolismo geométrico empleado.

Se me ocurre pensar, por ejemplo, que si describimos en un film el trazado de una elipse por el procedimiento del jardinero y repetimos luego la secuencia, prolongando uno de los radios vectores en un segmento ostensiblemente igual al otro, aparecerá en esta segunda secuencia engendrado, junto a la elipse, el círculo focal correspondiente al foco del radio vector prolongado. Todavía podemos repetir nuevamente la secuencia, dibujando ahora, en cada posición, la circunferencia variable que tiene por centro cada uno de los puntos de la elipse, y por radio, el radio vector transportado. Esta circunferencia aparecerá tangente en cada posicion a la focal, y la elipse como lugar de sus centros, es decir, l. g. de centros de una circunferencia variable que pasa por un punto fijo (foco) y es tangente a una circunferencia fija (la focal). La imagen dinamizada lo habrá así expresado todo y lo habrá dicho rigurosamente, en un lenguaje gráfico que no necesita del complemento del contexto lógico, aventajándole en su carácter universalmente inteligible.

Pienso, además, que esta expresividad sintáctica del film, puede ser lograda, no sólo en los films de carácter geométrico, sino también en otros capaces de *demostrar* propiedades aritméticas o algebraicas. Creo que no se ha obtenido todavía en los films matemáticos todo el fruto que puede lograrse de los fundidos, desvanecidos, superposiciones, tan empleados como recurso estético en los films espectaculares corrientes. Estimo que un uso acertado y sistemático del desvanecido permitiría, por ejemplo, en muchas ocasiones *concretizar* (si vale la palabra) *la operación mental de abstracción.*

Así, por ejemplo, si sobre una figura que represente un tejado trapezoidal (dibujo o fotografía), superponemos a cada teja un punto bien visible y desvanecemos luego las tejas dejando los puntos, habremos materializado una abstracción, la que sustituye el conjunto de tejas por el más abstracto de sus puntos representativos. De cada teja sólo ha quedado representada su pura y esencial condición de existir, la única que interesa para la operación de recuento. Ésta puede, a su vez, efectuarse por un segundo proceso de abstracción, reemplazando cada fila por el número de sus elementos representativos. Surgirá así el concepto de sucesión de números (uno para cada fila) en progresión aritmética, como segundo grado de esquematización abstracta del conjunto de tejas del tejado. Las propiedades relativas a la equivalencia entre la suma de los términos extremos y las de los equidistantes de ellos y la que da directamente el cálculo de la suma total de la progresión, pueden visualizarse en el grado de abstracción puntual, imprimiendo un dinamismo de desdoblamiento al conjunto, seguido de un giro alrededor del punto medio de uno de los lados oblicuos del trapecio, de tal modo, que al duplicar el conjunto, lo transforma en otro de filas todas iguales (y a la suma de los términos extremos). La fórmula que da la referida suma aparecerá así con toda su prístina sencillez y podrá asociarse, además, a las que resuelven los problemas análogos : determinación de áreas de trapecios, coronas, etc., mediante un dinamismo de imágenes que acerque los procesos. La asociación de tales imágenes sugerirá así una fecunda noción de isomorfismo que quedará indeleblemente grabada en la mentalidad del espectador del film. (Brindamos este proyecto de guión a quien tenga tiempo y medios de realizarlo).

SOBRE LOS PROBLEMAS DE ESTÉTICA Y DE REALIZACIÓN

Fletcher busca en sus films el empleo de un simbolismo que pueda ser universalmente admitido. Primer intento de tal simbolismo lo constituye el uso del blanco y del negro en el trazado de líneas sobre un fondo gris (en vez de negro como es en las realizaciones de los films de Nicolet hechas por Motard) para distinguir unas de otras cuando desempeñen papeles que interesa diferenciar. El problema de tales diferenciaciones está íntimamente ligado al de los procesos de realización material y a los problemas estéticos inseparables.

Muchas veces, el objeto primordial de un film, puede no ser el de demostrar, sino el de *componer,* a la manera como combina motivos y armonías un compositor musical, o valores plásticos un arquitecto, un pintor o un coreógrafo. De aquí el valor trascendental, ya considerado por Nicolet, de los valores estéticos del film aun en los específicamente matemáticos.

En relación con el problema de la belleza expresiva del film, íntimamente ligado con el de sus posibilidades de realización, Fletcher busca un amplio apoyo en la teoría de grupos y simetrías, tanto en el plano como en el espacio. La confección del film es para Fletcher resultante de una adaptación mutua de idea y material. La realización técnica queda así vinculada a los problemas expresivos y estéticos, y la identificación entre el proyectista y el realizador acaba por crear un verdadero clima de investigación en la tarea realizadora, clima de espectación ante lo imprevisto, que le ha llevado a él mismo mucho más allá de la intención primera, a lo largo del desarrollo mismo de la idea originaria.

Fletcher ha realizado hasta el momento presente tres interesantes films de longitud y alcance mayor que los antes descritos de Nicolet: uno, de carácter mecánico sobre las configuraciones teóricas de una cuerda vibrante; otro, sobre la recta de Simpson, y otro, sobre la cardiode. En ellos acusa una técnica ya muy depurada de realización y una considerable densidad de contenido matemático. La experiencia adquirida en estas realizaciones y los numerosos estudios realizados sobre los films de otros creadores, le ha permitido escribir un profundo y sustancial artículo «Les problèmes du film mathématique» que constituye el capítulo V de la obra tantas veces citadas sobre *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques* de la editorial Delachaux-Niestlé. A este artículo remitimos al lector interesado en detalles y consejos técnicos de realización.

CAPITULO VII

MUESTRAS DE ENSEÑANZA EURISTICA

§ 1. SOBRE SISTEMAS DE NUMERACION

Hemos dicho en el capítulo V que cuando los niños se dan cuenta de la estructura del sistema de numeración, llegan fácilmente a operar en bases distintas de la decimal. Queremos empezar este capítulo ilustrando tal afirmación con la reseña breve de las experiencias realizadas en este sentido en nuestra cátedra de Metodología y Seminario Didáctico anejo, con niños de primer curso del Instituto de San Isidro.

La primera experiencia fue realizada por una alumna de dicha cátedra, doña Evelia Ruiz de Castro, quien utilizó para tal fin el material de regletas coloreadas de Cuisenaire. La lección, una vez retocada y redactada en francés, fue enviada en testimonio de homenaje al propio Cuisenaire, quien la ha comentado con grandes elogios. No es exactamente aquella experiencia la que reproducimos aquí, sino un resumen de otras realizadas posteriormente, inspiradas en la misma técnica de empleo de las regletas.

Empiezo proponiendo a los niños que formen, con regletas, longitudes de números sencillos de dos cifras, tales como 13, 26, 45... Sin titubear colocan, una a continuación de otra, tantas regletas de color naranja como decenas y a continuación la regleta correspondiente al valor de las unidades, o en su lugar tantas blancas como indican estas unidades. Les hago explicar detenidamente cómo han construído los números, con objeto de que adquieran conciencia de la agrupación en decenas, y pregunto:

¿Cuántas cifras distintas necesitamos para escribir los números, incluyendo el cero? ¿Cuántos colores de regletas para formarlos? ¿Por qué os parece que se les ocurrió a nuestros antepasados agrupar de diez en diez las unidades, y no de siete en siete, o de cuatro en cuatro? ¿Es que el diez significa un número importante para el hombre? ¿Lo lleva acaso encima? Si no saben responder, formulo la pregunta apoyando ostensiblemente mis dos manos sobre la mesa, con los dedos bien abiertos. ¿Y las decenas, cómo se agrupan? ¿Qué significa el 2 en 205? ¿Qué es una centena? Cuando las contestaciones de los niños acusan consciencia clara del papel fundamental de la base 10 en las agrupaciones, formulo nuevas preguntas:

Si las gallinas tuvieran su aritmética, ¿contarían también en decenas? ¿Cuántas dedos tienen en cada pata? ¿Cómo agruparían las unidades? Todos los niños convienen en que las gallinas contarían por «ochenas» (no ha faltado quien propuso la palabra «octena»). ¿Qué cifras necesitarían, pues, las gallinas? ¿Cómo escribirían el ocho u octena? ¿Qué clases de regletas necesitarían?

Se separan grupos de regletas necesarias en el país de las gallinas y organizo un juego con dos bandos frente a frente: el bando decimal y el bando gallináceo, de base ocho. Cada sujeto de uno de los bandos forma una longitud con sus regletas, que el sujeto del bando enfrentado iguala con las suyas. Por ejemplo, la longitud formada con dos regletas naranja y una amarilla en el bando decimal (25) es igualada por tres regletas marrones y una blanca en el bando de las gallinas (31), y recíprocamente la longitud 27 del bando gallináceo es igualada con la longitud 23 del bando decimal, etc. En un momento se obtienen, así, jugando, multitud de equivalencias entre pares de expresiones de números; equivalencias que los niños escriben en su papel o en el encerado después de haberlas construído materializadas con regletas:

$$25_{10} = 31_8\ ;\ 27_8 = 23_{10};\ 40_8 = 32_{10};\ 50_{10} = 62_8\ ;\ \text{etc.}$$

El ejercicio se presta a variantes según quien toma la iniciativa en la formación o escritura previa de los números a transformar. Tan pronto puede ser un bando como el otro, como puede ser el maestro quien escribe un número en el encerado, especificando la base para que lo traduzcan en regletas en el bando correspondiente y lo transformen en su sistema los del bando opuesto, escribiendo el otro miembro de la equivalencia...

Tras algunos ejercicios de traducción directa e inversa de esta naturaleza es llegado el momento de prescindir de las regletas y de efectuar *mentalmente* las transformaciones. Descubierta por los niños, con el juego concreto anterior, la dinámica de tales transformaciones, no les ofrece dificultad alguna convertirlas en operaciones mentales, mientras los ejemplos se desarrollan en ámbito reducido que sólo exija el uso de dos cifras. Fácilmente razonan que 35_8 significa 29 en nuestra base, ya que son 3 ochenas (24) y 5 unidades. Y asimismo invierten directamente $18_{10} = 22_8$, dándose cuenta de que en 18 caben dos ochenas sobrando dos unidades. Es curioso, sin embargo, que los niños no parecen manifestar consciencia de la división efectuada al explicar este resultado, que suelen justificar por proceso directo de multiplicación y suma. Así justifican haber escrito 22_8 porque dos «ochenas» más 2 unidades dan 18 [1].

Empiezan a aparecer dificultades en cuanto se manejan números de más de tres cifras. Por ejemplo, al intentar traducir en base 8 el número 67_{10} es natural que escriban los niños 83_8. Sólo al caer en la cuenta de que la cifra 8 es desconocida de las gallinas la sustituirán por una ochena, es decir, por 10, escribiendo finalmente 103_8. Análoga dificultad ofrece inicialmente la interpretación recíproca de 135_8, por ejemplo. Algunos alumnos del bando decimal lo interpretan como $13 . 8 + 5$, y es preciso hacerles ver que 13 también está escrito en base 8, significando, por tanto, $8 + 3 = 11$, con lo que rectifican escribiendo correctamente $135_8 = 11 . 8 + 5 = 93_{10}$. Análogamente, escrito el número 253_8, hago interpretar primero el número total de ochenas 25_8, que es $2 . 8 + 5 = 21$, y luego continúo $21 . 8 + 3 = 171$. Si se trabaja con niños mayores se puede dejar indicado el esquema total de operaciones $(2 . 8 + 5) . 8 + 3$, que puede continuarse añadiendo más cifras a la derecha del número. Se inicia así la estructura de la regla de Ruffini para el cálculo de valores numéricos de polinomios como sucesión de productos (por el mismo factor) y sumas (de coeficientes). La inversión del proceso por sucesión de divi-

---

[1] No es de extrañar esta dificultad en la adquisición de consciencia del proceso recíproco, ya que es propio de toda inversión. Cualquier operación inversa implica un tanteo (más o menos sistematizado, pero tanteo al fin) efectuado en la operación directa que la define. No nos debe, por tanto, causar extrañeza que en el estadio inicial del conocimiento en el que la operación inversa se está gestando, lo que la consciencia del niño refleje sea el auténtico tanteo que la define.

siones y restos da asimismo la regla general de transformación inversa en cursos más avanzados.

Continuando con los ejercicios de traducción, entre dos bandos de bases diferentes, se puede hacer entrar en juego (siempre con números pequeños) nuevas bases, y aun jugar a traducir entre ellas sin pasar por la base decimal. Propongo, por ejemplo, al bando decimal pasar a pertenecer a un imaginario país de caballos contadores, cuya base natural convienen inmediatamente en que sería cuatro. Los caballos contarían por «cuatrenas», sólo necesitarían las cifras 0, 1, 2, 3 y las regletas blanca, roja, verde clara y rosa. Se proponen transacciones de algarrobas entre el país de las gallinas y el de los caballos. Por ejemplo, un número de algarrobas escrito por las gallinas 43_8 ¿cómo lo escribirían los caballos en su sistema?

Formado por el bando de las gallinas la longitud de cuatro regletas marrón y una verde clara, el bando de los caballos forma la misma longitud con ocho rosas y la verde, con lo que los niños proponen, de momento, escribir 83. Pero recordando objeciones análogas anteriores, no falta entre ellos mismos quienes, ante mi pregunta de si es correcta tal escritura en el país de los caballos, caen en la cuenta de que no existe en él la cifra 8, que es preciso representar como dos cuatrenas, es decir, 20, escribiendo, en definitiva, 203_4; o sea

$$43_8 = 203_4$$

Cualquier maestro puede repetir la experiencia en la forma transcrita o con las variantes que aconseje la misma marcha de ella. Comprobará la facilidad con que los niños realizan estos ejercicios en un campo numérico discreto. Cuando éste se extiende y es preciso reiterar el proceso para efectuar agrupaciones de agrupaciones, con objeto de obtener números de más de dos cifras, es cuando surgen las primeras dificultades y es preciso tratarlas eslabonadamente, dada la dificultad infantil de concebir directamente los complejos operativos que comportan tales estructuras.

§ 2. SOBRE CONGRUENCIAS Y CLASES RESIDUALES

Describo a continuación la primera experiencia, realizada solamente ante 24 alumnos de tercer curso de Bachillerato. Su objeto era explorar hasta dónde son capaces los niños de intuir estructuras que parecen reservadas a cursos superiores. Se trata aquí de la estructura en anillo de los números congruentes respecto de un mismo módulo y de las clases residuales que los agrupan. Hago también uso del material Cuisenaire, utilizando solamente regletas de 1 centímetro (blancas), 2 centímetros (rojas), 3 centímetros (verdes), 4 centímetros (rosas) y 5 centímetros (amarillas), en número suficiente.

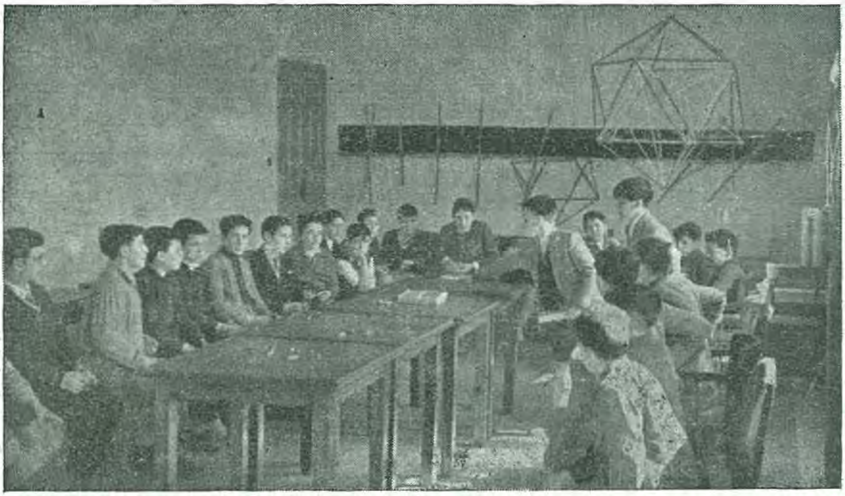
Agrupados los 24 alumnos alrededor de una mesa larga, dejo primero que se fijen en los colores y longitudes de las regletas, desordenadamente distribuídas a lo largo de la mesa, y que las ordenen por orden de longitud.

Dispongo primero que los alumnos se numeren y ordenen, del 1 al 24, y empiezo el juego entregando al primero una regleta blanca, al segundo una roja, al tercero una verde, al cuarto una rosa, al quinto una amarilla, al sexto de nuevo una blanca, al séptimo de nuevo una roja, y aquí interrumpo las entregas que todos han visto. Pregunto al número 17 qué color de regleta le corresponderá. Acierta. Repito la pregunta al 24. Y finalmente ordeno que cada cual tome de la mesa una regleta del color que le corresponde. Ordeno que me las enseñen y compruebo, haciendo que rectifiquen ellos mismos los desaciertos, si los hay. (No los hubo en aquella ocasión.)

«¿Qué habéis hecho para coger la regleta precisa? ¿Cómo habéis acertado el color?» Las respuestas son variadas. Uno ha contado tantos cincos como ha podido delante de él, otro ha dividido directamente por 5..., resulta difícil conseguir que alguno diga explícitamente que es el resto lo que les ha sugerido el color. Establezco entre los alumnos un vínculo que transfiero asimismo a sus números, el vínculo de *hermanos en color* (sobre cinco colores). En aritmética, les digo, se llaman *números congruentes respecto al módulo 5*.

«¿Qué son, pues, números congruentes respecto al módulo 5?» No les cuesta explicitarlo y escribirlo en el encerado: Son los que divididos por cinco dan el mismo resto. Les indico el uso del signo $\equiv$.

Reparto cuartillas y ordeno que cada cual escriba números congruentes con el suyo (respecto al módulo 5) mayores que 50. El número 2 sólo



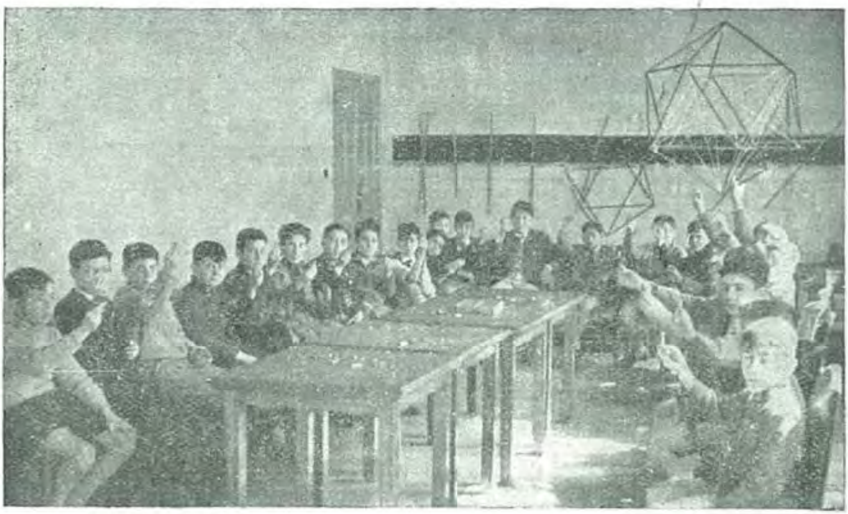
me escribe los terminados en 2: 52, 62, 72...; le pregunto si no sabe otros que no terminen en 2. Añade entonces 57, 67, etc. Todos aciertan.

Más difícil les resulta escribir números congruentes con uno dado (12, 28, 64) y mayores que otro número dado (85, por ejemplo). Parece como si al despersonalizar el punto de partida perdiera la cuestión un punto de referencia intuitivo conveniente. Lo que persigo, con todo esto, es, naturalmente, que apliquen directamente el criterio del resto, sin ir agregando cinco unidades sucesivamente. (Este salto resultó particularmente difícil en alumnos menos adelantados, véase observación final.)

Pero después de recorrer tres veces el grupo (limitándome a dar mi conformidad o disconformidad con las soluciones) conseguí que me escribieran un segundo miembro correcto (mayor que 85) a las congruencias planteadas en el encerado

$$12 \equiv \qquad 28 \equiv \qquad 64 \equiv$$

«Ahora, restadme de cada uno de vuestros segundos miembros el primero y leedme los resultados.» Los leen en voz alta. «¿Qué observáis?» La contestación es inmediata: «Todas las diferencias son múltiples de 5.»



Se escribe en el encerado esta observación: La diferencia de dos números congruentes (mód. 5) es múltiple de 5.

«¿Se verificará siempre esta propiedad? ¿Será independiente del módulo?»

«¿Os parece que esta propiedad ha quedado demostrada, o simplemente comprobada en unos casos particulares?» Todos convienen en esto último. Veamos, pues, si es posible idear un razonamiento que nos haga ver su validez general.

Ordeno a los alumnos que se formen en filas de a cinco, es decir, los cinco primeros por su orden en la primera fila, los cinco siguientes por su orden en la segunda, etc. Pregunto al número 12 en qué fila le corresponderá estar (o mejor, cuántas tendrá delante) y en qué lugar de dicha fila estará. La misma pregunta al número 18, al número 21... «Colóquense, pues, todos en formación.» Lo hacen con sólo dos confusiones, que se resuelven.

«¿Cómo se hallan ahora colocados los hermanos en color?» La contestación es inmediata, señalando las columnas. Comprobación, enseñando las regletas del mismo color que aún conservan en su poder. «¿Por qué resulta así?» Por la igualdad de restos. Estar en la misma columna signi-

fica diferir en un número exacto de filas, lo cual es cierto, cualquiera que sea la longitud de la formación. Pregunto:

«Si con los mismos cinco colores os hubiéseis colocado en filas de a 6, ¿seguiríais estando en columna los hermanos en color? ¿Cómo estaríais colocados?» Uno contesta inmediatamente: «En diagonal.» Insisto: «¿Y si estuviéseis formados de a cuatro?» También contestan en seguida: «En diagonal, pero al revés.» Es digna de notarse la rapidez de estas contestaciones que parecen difíciles a esta edad.

«¿Cuántos colores tendríamos que haber tomado para que siguieran estando en columna los hermanos en color formados de a seis? ¿Y de a cuatro?» Reconocen así la generalidad de la propiedad para todos los módulos, así como la necesidad y suficiencia de la condición de ser la diferencia de dos números congruentes múltiple del módulo, aun cuando no se especifiquen todavía los conceptos de necesidad y suficiencia.

Termino la experiencia con la siguiente serie de preguntas significativas:

«Un número tiene color blanco, ¿qué color tiene su doble? ¿Y su cuádruple? ¿Y el doble de su cuádruple? ¿Por qué?» No sólo han sido convincentes las respuestas, sino su explicación.

«Un número tiene color rojo, ¿qué color tiene su triple?»

«Un número tiene color verde (rosa), otro tiene color blanco (rojo), ¿qué color tiene su suma?»

«Un número tiene color *cualquiera* y otro amarillo, ¿qué color tiene la suma?» La contestación ha sido precisa: «el mismo *cualquiera*».

«Un número tiene color verde (rosa) y otro rojo (verde), ¿qué color tiene el producto?»

«Un número tiene color *cualquiera* y otro blanco, ¿qué color tiene el producto?»

«Un número tiene color *cualquiera* y otro tiene color amarillo, ¿qué color tiene el producto?»

Las contestaciones a estas preguntas han resultado mucho más precisas y ágiles de lo que yo podía sospechar. Me han hecho ver que los muchachos de esta edad no tienen gran dificultad en penetrar en la esencia de la estructura en anillo (conmutativo con unidad) de los números en relación de congruencia. El manejo directo del «conjunto cociente» representado por la gama de colores, en el que cada color representa todos los números hermanos congruentes, supone el reconocimiento implícito de que el color del resultado de una operación es independiente del hermano en color elegido en cada dato, lo que equivale en definitiva a relacionar operativamente no sólo pares de congruencias, sino las infinitas congruencias que relacionan entre sí todos los hermanos de cada color. El razonamiento que me ha hecho un alumno, al pedirle explicaciones, ha sido particularmente claro y preciso: «Si me fijo sólo en las unidades... al sumarlos tendrá un número que terminará en... y al multiplicarlos en...»

Las preguntas en las que hago intervenir un dato de color *cualquiera* tienen por objeto detectar la intuición de los elementos *neutros* o *idénticos* de la suma (amarillo) y del producto (blanco).

Observación I.—Repetida esta experiencia con alumnos más atrasados (primero y segundo cursos), el resultado fue muy parecido, salvo acaso la explicación consciente de los resultados últimamente consignados. En alguna ocasión he tenido que anticipar la formación en filas para acelerar la captación de la relación de congruencia. En otras, por el contrario, se ha explicitado rápidamente la igualdad del resto: «el número más pequeño de todos los hermanos en color», según dijo un niño. En un grupo de 10 niños de singular inteligencia me atreví a preguntar: «Un número morado ($\equiv 4$) multiplicado por otro da un producto blanco ($\equiv 1$), ¿qué color tiene este otro?» La contestación «morado» ($\equiv 4$) fué inmediata y correcta. [La pregunta no puede, naturalmente, efectuarse con módulos no primos.]

Observación II.—Puede utilizarse la misma disposición de los alumnos en la clase según filas de pupitres, para dar, desde el primer día, la noción de números congruentes respecto a un módulo igual al número de alumnos de cada fila. La misma técnica descrita para la colocación en filas de a cinco, sirve para la colocación automática de los alumnos en la clase según filas iguales al módulo indicado. Los números congruentes quedan dispuestos en columnas.

§ 3. OTRA LECCION SOBRE CONGRUENCIAS Y DIVISIBILIDAD

(Módulo 9)

En las experiencias que acabamos de reseñar para dar forma activa y eurística a la enseñanza de la congruencia y sus propiedades, son los alumnos los que personalizan los números, mientras la clase residual viene representada por las regletas que se les distribuye o por los órdenes de colocación en las filas que forman. Este modo de proceder da, por ello, buen resultado en clases numerosas, pero resulta poco adecuado para grupos pequeños. Ello me movió a ensayar otro recurso, en el que son los propios niños los que materializan la clase residual mientras son los números los que se reparten [1]. Si se elije el módulo 9 se puede, al mismo tiempo que se practican relaciones de congruencia, hacer descubrir el carácter de divisibilidad por nueve.

Pero antes conviene intrigarles con un juego de adivinación. Se hace escribir a cada niño un número de varias cifras en su cuartilla; se les dice que alteren el orden de las cifras, formando así otro número, y que resten los dos números formados. Táchese luego una cifra distinta de cero de la resta así obtenida, y el profesor, sin haber visto ningún dato, adivinará la cifra tachada si se le da la suma de las restantes. Por ejemplo, a la suma 21 corresponde la cifra tachada 6, a la suma 18 corresponde la cifra 9, a la suma 34 corresponde la cifra 2, etc. Pronto descubren los niños el «truco» de la adivinación y se dan cuenta de que la cifra adi-

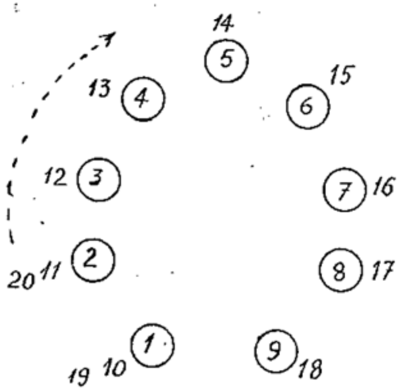
---

[1] Efectué, por vez primera, este ensayo en la lección experimental que desarrollé públicamente en el Instituto de San Isidro, con niños de primero y segundo curso de Bachillerato del Liceo Francés de Madrid, ante los miembros de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática, en su XI Reunión Internacional. Véase *El Material Didáctico Matemático Actual,* por P. Puig Adam. Publicado por «Revista Enseñanza Media».

vinada es la que hay que añadir a la suma dada para obtener el primer múltiplo de nueve inmediato superior. Pero no les basta el descubrimiento; la curiosidad suele calar más hondo y desean saber «por qué». Es el momento de iniciar la actividad eurística aludida.

Fórmese un corro con nueve niños, detrás de los cuales pueden situarse otros nueve, a los que se les asigna la misión de comprobar las respuestas de los primeros. En la experiencia realizada en San Isidro, los nueve niños del corro eran de primer curso y los nueve situados detrás de ellos de segundo curso.

Se les dice que se les va a distribuir *todos los números,* y es preciso que presten atención, ya que siendo infinitos los números a distribuir, a pesar de ello cada uno le tocará a un solo alumno, y cada alumno tiene que saber muy bien los números que le tocan. Entonces se va diciendo en rueda: a ti te toca el 1 a ti el 2, a ti el 3..., a ti el 9; y volviendo a empezar la rueda se le dice al primero: a ti te toca el 10, y al segundo, a ti el 11, y siguiendo la rueda, a ti el 12, a ti el 13, etc. Termina por segunda vez la rueda en el 18, y se continúa unos pocos números más. Acto seguido se formulan las preguntas siguientes en este orden:



«¿A quién le toca el 29?, ¿y el 30?, ¿y el 39?, ¿y el 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 109, 110, 119, 120, 130, 140, 150, 190, 199, 200, 299, 300, 399, 400, 500, 600, 900, 1.000, 1.999, 2.000, 3.000?, ¿a quién el 3.200?»

Como puede verse, la sucesión de números está graduada en forma de que insensiblemente los mismos niños vayan tomando consciencia de que agregando 9 o múltiplos de nueve, como 99, 999..., se queda el número en el mismo poseedor, mientras que al agregar 10 se corre un lugar, lo mismo que al agregar 100 ó 1.000..., y, por tanto, se corren dos lugares al agregar 20, 200, 2.000..., y tres lugares al agregar 30, 300, 3.000, etc. Al formular, pues, la pregunta relativa al poseedor del 3.200 ya empiezan a sumar los órdenes de lugar 3 y 2. Particularmente elocuente de esta toma de consciencia fue la rectificación de un alumno a su compañero, que había señalado el de segundo lugar: «No hombre, ahora tienes que empezar a contar dos después de éste, señalando el poseedor del 3.000.» Adquirida esta consciencia, sea en forma de corrimiento sucesivo de origen o de *suma* equivalente *de órdenes* de lugares, sin dificultad se señalan los poseedores de números de más cifras significativas. ¿A quién el 3.240? ¿A quién el 3.245? ¿Cómo lo habéis adivinado?

¿A quién corresponde ahora el 2.435? ¿Por qué corresponde al mismo niño? ¿A quién el 7.264? ¿A quién el 4.267? (Mejor escribirlos en el encerado.)

Señalando a un niño: «A ti te corresponde un número a. ¿A quién el 20? ¿A quién el $a + 20$? ¿A quién el $a - 20$?» Señalando a otro: «A ti te corresponde el número b. ¿A quién le corresponde la suma $a + b$? ¿A quién le corresponde la diferencia $a - b$?»

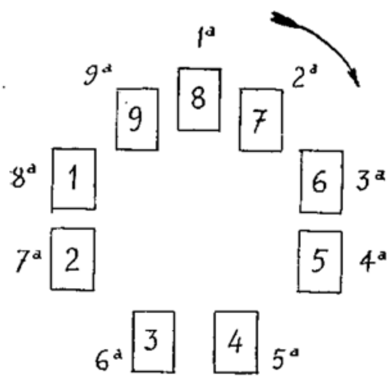
«Ve diciendo los números que te corresponden a ti. Y a ti. ¿Cómo los formáis?» Aquí se puede dar la noción de números congruentes, si no se ha dado con anterioridad, ya que son congruentes (mód. 9) todos los números correspondientes a un mismo niño. «¿Qué números son los que corresponden a este niño (señalando el noveno)? ¿Qué condición tendrá que cumplir la suma de las cifras de un número para que le corresponda a este niño?»

«A ti te corresponde un número y a este niño (señalando el noveno) le corresponde otro, ¿a quién corresponde la suma? A ti te corresponden muchos números, ¿a quién le corresponde la *diferencia* entre dos de ellos? (Propiedad de los números congruentes.)»

«¿A quién le correspondió el 7.264? ¿Y el 4.267, formado por las mismas cifras? ¿A quién corresponde la diferencia? Y si fueran otros dos números que también tuvieran las mismas cifras uno y otro, aunque en otro orden, ¿a quién correspondería la diferencia? ¿Qué propiedad tiene, pues, la diferencia entre dos números formados por las mismas cifras? Si sumáis las cifras de esta diferencia, ¿qué podéis decir de ella? Si tachamos una cifra de esta diferencia y os digo la suma de las restantes ¿cómo me adivinaréis, pues, la cifra tachada? ¿Qué duda podría haber si esta suma fuera un múltiplo de 9? ¿Por qué dije, al empezar el juego, que tachárais una cifra *distinta de cero*?

Con esta sucesión de preguntas (con intercalación de algún eslabón intermedio en caso necesario, improbable) se consigue la explicación del por qué del «truco». Pero de paso los niños han tenido ocasión de descubrir la regla de divisibilidad por nueve, y (lo que es más interesante todavía) la estructura anular del álgebra módulo 9.

NOTA.—*Material concreto con el que puede amenizarse la adivinación de la cifra tachada.*—El juego inicial antes descrito, consistente en la adivinación de la cifra tachada en un número múltiplo de nueve (diferencia entre dos de iguales cifras) por ser la necesaria a añadir a la suma de las cifras restantes para completar el múltiplo de nueve más próximo, puede presentarse en forma todavía más amena con el auxilio de naipes, de alguno de los siguientes modos que se me ocurrieron al realizar experiencias análogas entre alumnos y personas mayores.



Sobre un trozo de cartón o tabla se fijan por el borde superior, con cinta adhesiva, nueve naipes de valores 1 a 9 (si la baraja no tiene ochos ni nueves se asignan estos valores a sotas y caballos) vueltos de cara al cartón, en el orden y según los valores que se indican en la figura. La sujeción por un solo borde se hace a efectos de poder llevar el cartón preparado y poder girar cada naipe de forma que se vea su anverso. Pero tampoco hay inconveniente en preparar los naipes sobre la mesa a la vista de los alumnos. (No se trata de un juego de prestidigitación, sino de un motivo de reflexión aritmética.)

Al preguntar a un alumno la suma de las cifras no tachadas, por ejemplo 13, se cuentan 13 (o en su lugar $1 + 3 = 4$) lugares a partir de la carta primera en el orden de la flecha; y la carta 13.ª (o en su lugar la 4.ª) vuelta del anverso dará el valor (5) de la cifra tachada, complemento a 18 (a 9). El hecho, patente en la figura, de ser complementos a nueve los valores de las cartas y sus números de orden cíclico suministra la fácil explicación de la validez general del resultado.

Entre personas mayores es todavía de mayor efecto llevar una baraja ordenada en ciclos de uno a nueve. Después de cortar (sin mezclar) repetidas veces y dejar que al final corte la misma persona interrogada, se le ruega que añada al valor de la carta descubierta al cortar (por ejemplo 6) la suma de las cifras no tachadas (13) (total 19, es decir, una decena y nueve unidades). Se levanta del paquete que queda debajo del corte una carta por cada decena y por cada unidad de esta suma (o sea 10 en total). La última carta descubierta da precisamente la cifra tachada (5).

En efecto, el sumando 6, valor de la carta descubierta al cortar, indica el número de cartas que hay que levantar (valores 5, 4, 3, 2, 1, 9) para recaer en la carta 9, a partir de la cual iremos obteniendo como valores los complementos a nueve de los números de cartas que se levanten, o de sus restos módulo 9.

§ 4. SOBRE LA «ESTRUCTURA OPERATORIA DE LA RAIZ CUADRADA»

Exponemos en esta lección el uso de uno de los ejemplos de material didáctico multivalente aludido en el capítulo anterior.

MATERIAL

Varios centenares de broches automáticos dispuestos en tiras de diez (decenas) y en cuadrados de 10 × 10 (centenas). Durante cerca de una hora me estuvo ayudando un grupo de alumnos de primer año a disponer de esta forma unos 800 broches, habiéndoles prometido enseñarles ¡ como premio ! la manera de extraer raíces cuadradas [1]. Es ésta una cuestión cuya enseñanza tradicional ofrece dificultad por lo que es corriente suministrar la regla operatoria sin razonamiento alguno.

LA NOCIÓN DE RAÍZ CUADRADA ENTERA Y DE RESTO

Sentado con mis operarios alrededor de una mesa empiezo preguntándoles, uno a uno, el valor de los productos de factores iguales como : 5 . 5; 6 . 6; 8 . 8; ... «Se llaman *cuadrados*.» Repito las preguntas en la nueva forma : «Cuadrado de 5, de 6; de 8; de 3, etc.» varias veces.

Luego invierto las preguntas: «Número cuyo cuadrado es 49, 36, 25, etc. Se llaman *raíces cuadradas*.» Hago repetir los resultados : «Raíz cuadrada de 25, de 49, de 16, etc.»

Súbitamente : «¿ Y la raíz cuadrada de 40 ?» Unos dicen : «No tiene. Está entre 36 y 49.» Pero no falta quien propone (acaso recordando la división entera) : «La raíz es 6 y sobran 4.»

---

[1] No ironizo. Quien conozca el insaciable deseo de actividad del niño, comprenderá bien que, para el grupo a que me refiero, todo ello fué motivo de interés y regocijo.

Puede, desde este momento, explicitarse la noción de *raíz entera y de resto* o esperar todavía a que se desarrolle la acción posterior.

Repetí preguntas análogas: «Raíz cuadrada entera de 21, de 42, de 63, etc.», hasta obtener seguridad en la respuesta de las raíces y de los restos. Estas respuestan exigen ya bastante trabajo mental.

A modo de descanso: «¿Tenéis hermanitos? ¿Cuántos años tiene el más pequeño? ¿Sabe contar?»—«Sólo hasta 10.»—«Pues bien, tu hermanito puede extraer raíces cuadradas sin saber la tabla de multiplicar. Modo de hacerlo: Id formando, como yo, con los broches, cuadrados sucesivos de 4, de 9, de 16...» Después de completar un cuadrado pregunto, de paso, cada vez: «¿Cuántos broches necesito para formar el cuadro siguiente?»

No es raro que den como solución el doble de unidades del lado formado, olvidando la unidad de la esquina. Pero rectifican pronto añadiendo dicha unidad. (Es muy importante no olvidar *la esquina* en toda esta lección.)

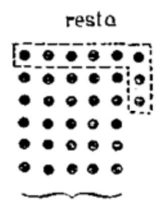


FIG. 1

«Con 33 broches ¿qué cuadrado podría formar tu hermanito? El de 25 es el mayor que se puede formar. La raíz 5 se obtendrá contando los broches que tiene cada lado. Los 8 broches que han sobrado forman el resto.

«¿Y si sobraran 11?» La contestación es espontánea: «Entonces se podría formar un cuadrado mayor de 6 unidades por lado.»

«Para que no se pueda formar un cuadrado mayor, el resto tiene, pues, que ser menor que ¿...?» Se anota la propiedad en el encerado.

RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO CON CENTENAS

Continúa el diálogo: «Dejemos esos ejercicios fáciles para vuestros hermanitos y vamos nosotros a extraer la raíz cuadrada de un número mayor, tal como 674» (fig. 2).

Les presento los 674 broches dispuestos en 6 cuadrados de 100, 7 tiras de 10 y 4 broches sueltos. «Para hallar la raíz cuadrada, ¿hará falta deshacer la tarea que hemos hecho antes de agruparlos en centenas, volviendo a los broches sueltos, para proceder como el hermanito pequeño?» La protesta es general. Al más torpe se le ha ocurrido agrupar en cuadro los cartones cuadrados; es decir, las centenas. La figura 3 da la configuración del material sobre la mesa en este momento de la acción comentada (cada cartón cuadrado tiene 100 broches en cuadro y cada tira 10 en fila). «A vosotros mismos se os ha ocurrido hacer con las centenas lo mismo que antes hacíamos con los broches sueltos. Hemos formado así un cuadro de 2 decenas por lado.» Los niños ven la imposibilidad de poder obtener un cuadro de 3 decenas por

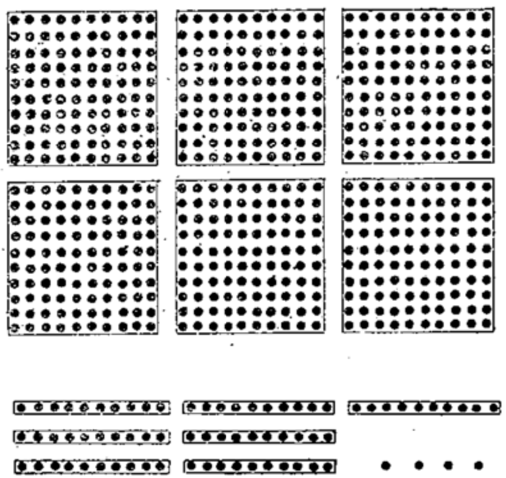


Fig. 2

lado, por no disponer de las 5 centenas más que harían falta. Y como 2 es la raíz cuadrada entera de 6, anotamos:

La raíz cuadrada entera de las centenas da el número de decenas de la raíz.

Han sobrado 2 centenas, 7 tiras y los 4 broches sueltos; es decir, 274 broches. Escribimos en el encerado el comienzo del esquema clásico de la operación.

Pero los niños no se conforman con esto. Están impacientes porque ven que aún se pueden añadir tiras a uno y otro lado del cuadrado formado para engrandecerlo. «¿Qué haremos para poder formar cuadrados mayores?»

La respuesta es también espontánea: «Sacaremos tiras de las centenas que han sobrado.» Con ellas y con las tiras sueltas dispondremos de 27 decenas (lo que en el esquema operativo se traduce en la separación de las unidades del resto 274).

Un alumno advierte atinadamente: «Mejor dividir por la mitad cada centena y probar.» Este pequeño ha visto dos cosas a un tiempo: el desdoblamiento impuesto por la necesidad de cubrir simultáneamente dos lados del cuadrado formado y la suficiencia de dividir por la mitad cada centena al disponer de dos de ellas. Así aparecen cinco decenas pegadas,

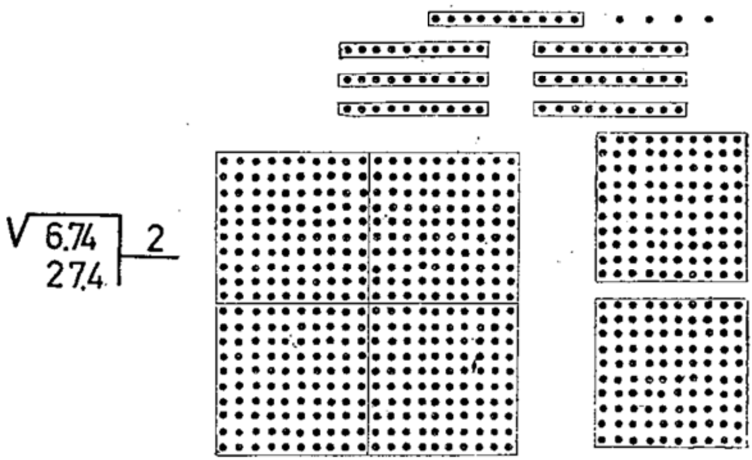


Fig. 3

en vez de sueltas, en cada mitad. Después de colocadas, aún podemos añadir una hilera más por cada lado. En este momento, la configuración del material es la de la figura 4.

«¿Hasta cuántas filas y columnas podemos añadir con las 27 decenas disponibles?» Como cada lado necesita por hilera tantas tiras como decenas tiene la raíz hallada y son dos los lados a cubrir, el número de hileras añadidas es el cociente de dividir 27 por el duplo de la raíz hallada. 27 entre 4 da 6, y nos sobran 3 tiras (27 — 6 . 4 = 3), y, además, los 4 broches sueltos, en total 34 broches.

La cuestión que queda por resolver es si con éstos podremos rellenar el cuadrado que ha quedado vacío en la esquina. Como éste necesita

6 . 6 = 36 broches, no tenemos bastante y, por tanto, no podemos añadir 6 hileras. La raíz tendrá menos de 6 unidades.

El procedimiento que acabamos de exponer y que es, sin duda, el más espontáneo en la investigación de los niños, equivale a efectuar la multiplicación de 46 por 6, empezando por la izquierda, y sustrayendo simultáneamente del resto precedente (274) las decenas de este producto (24) y sus unidades (36). Pero si se efectúa la multiplicación empezando por la derecha, como es costumbre, y no se verifica la sustracción hasta el final, se obtiene el esquema operatorio clásico. Repitiendo el tanteo de esta forma con la cifra 5 se ve que la sustracción es ya posible, dando el resto 49.

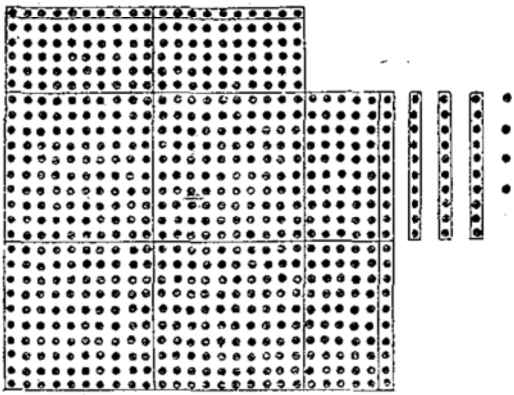


Fig. 4

Observación.—Este procedimiento eurístico espontáneo suministra una demostración intuitiva [2] de la regla de extracción de la raíz cuadrada, que

$$\begin{array}{r|r} \sqrt{6.74} & 26 \\ \cline{2-2} 274 & 46 \\ \underline{24} & 6 \\ \cline{2-2} 34 & \\ 36 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|r} \sqrt{674} & 25 \\ \cline{2-2} 274 & 45 \\ \underline{225} & 5 \\ \cline{2-2} 49 & 225 \end{array}$$

es, a nuestro juicio, tan rigurosa como pueda serlo la demostración abstracta tradicional y que penetra, en cambio, mucho más hondamente en la

[2] V. *Matemática Elemental*, núm. 2, año 1932. P. PUIG ADAM, «Demostración intuitiva de la regla de la raíz cuadrada».

Esta lección, en forma eurística, fué presentada por el autor en la reunión de la UNESCO, en Ginebra (julio de 1956); uno de cuyos temas fué: «La enseñanza de la Matemática en las escuelas secundarias».

estructura interna de la operación. No siempre una demostración basada en la reducción a verdades anteriores, cualidad característica de las demostraciones de la escuela griega, es la que traduce las esencias de la propiedad demostrada, ni mucho menos la más adecuada desde un punto de vista didáctico. Para los matemáticos orientales, demostrar era reducir a la evidencia directa, la cual percibe el niño mejor que un encadenamiento lógico, del que no suele ver ni el alcance ni la necesidad.

§ 5. SOBRE LAS «NOCIONES DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA»

He aquí otra cuestión que el profesorado considera unánimemente como de difícil enseñanza. He llegado a pensar si la presentación de la proporcionalidad mediante ejemplos concretos de la vida, en los que se manejan simultáneamente números y unidades, contribuye más bien a embrollar los puras leyes estructurales que la caracterizan. Por ello me decidí a ensayar un planteamiento activo de la cuestión, sustituyendo el interés que pueda despertar una aplicación real por el interés suscitado mediante un simple juego de entretenimiento, desarrollado en un terreno puramente abstracto.

Empecé escribiendo en el encerado las dos sucesiones de números

2	4	6	10	12	
0,5	1	1,5		3	4

y después de indicar a los alumnos que las copiaran en su cuaderno, les dije que llenaran los dos lugares vacíos (superior e inferior) con los números que creyeran habían de convenir para el caso.

La lucha de los niños con el misterio suscitado por los dos huecos, ha resultado sumamente interesante. Dos de ellos han acertado inmediatamente; pero a los demás no les resulta tan fácil, y lo atribuyo a un posible defecto de planteamiento. La sucesión 0,5; 1; 1,5 suscita una idea de progresión que invita a poner 2 a continuación. Resulta muy curioso que, al darse cuenta de que este 2 ya no corresponde al 10 de encima, intercalan entre el 6 y el 10 un 8, completando las progresiones así:

6	8	10
1,5	2	2,5

con lo que ya aciertan con el número 2,5 correspondiente al hueco inferior. Asimismo muchos empezaron escribiendo en el hueco superior 14, en vez de 16, arrastrados por la progresión 10, 12. Sin impaciencias he terminado logrando que acierten los doce alumnos de primer año con los que opero, salvo uno.

Mientras los rezagados rectificaban sus errores, he propuesto otras dos sucesiones para los adelantados

0,3	0,9	1,5	3		6
1	3		10	15	20

que han resuelto bien.

La pregunta «¿Cómo habéis resuelto el problema?» ha originado las contestaciones más variadas e interesantes, en las que aparece latente toda la teoría de la proporcionalidad, que los niños no habían estudiado todavía, y que ha surgido al calor de la situación planteada.

La solución por progresión rectificada ha sido la más general y espontánea, pero las equivocaciones que ha originado han suscitado, como generalización natural, la comparación por razón entre números de cada sucesión. Así, un niño me dice: «Veo que 4 es el doble de 2 y que 1 es también el doble de 0,5. Veo que 6 es el triple de 2 y que 1,5 es también el triple de 0,5. Como 10 es cinco veces 2 debo escribir debajo cinco veces 0,5.»

Otros niños, en cambio, se fijan en las razones entre números que se corresponden en vertical y me dicen: «0,5 es la cuarta parte de 2 y también 1 es la cuarta parte de 4. Debajo del 10 debo escribir la cuarta parte 2,5. Encima del 4 debo escribir cuatro veces 4.»

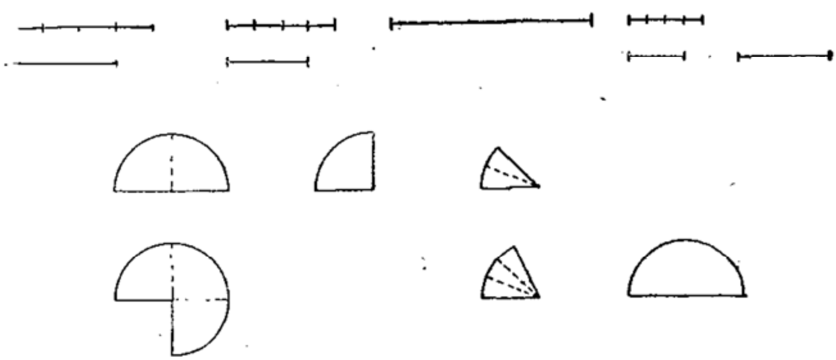
Otro observa que 6 *es la suma* 2 + 4 de los números que le preceden en la fila y que también debajo 1,5 es la suma de 1 + 0,5. Como 10, me dice, es la suma 4 + 6, he escrito debajo la suma 1 + 1,5 = 2,5.

Se ve, en resumen, que, con este juego, *los niños han descubierto: 1.°) la igualdad de razones entre pares de números de las dos series, 2.°) la razón constante entre los números correspondientes de una y otra serie y 3.°) la correspondencia en la suma.*

El profesor puede hacer explícitas estas propiedades o contentarse en el primer curso con la adquisición implícita de ellas y su aplicación correcta. Como se ve, los niños van mucho más allá de lo que podemos figurarnos; la dificultad principal a estas edades es la manifestación consciente y explícita de sus poderosas intuiciones; pero, ¿qué prisa hay en ello? Los adultos tenemos tendencia a confundir el saber con el saber expresar. Y aunque es cierto que quien sabe expresar un concepto con claridad lo domina, no es menos cierto que, al forzar prematuramente una expresión correcta *no espontánea,* no se consigue otra cosa que fomentar un memorismo palabrero vacío de sentido para el niño.

Por mi parte me limité de momento a escribir las igualdades de razones que los niños habían descubierto, a llamar *proporciones* a tales igualdades de razones y a decir, en consecuencia, que las dos sucesiones de números se llaman *proporcionales*.

Como quiera que el ejercicio se había desarrollado en un plano completamente abstracto me pareció necesario un complemento de proyección concreta. Les propuse, por ello, a continuación ejercicios análogos con magnitudes geométricas, segmentos y sectores, dibujando en la pizarra los dos pares de sucesiones de figuras siguientes:



Supieron hallar los segmentos con bastante facilidad. En cambio, los sectores ofrecieron dificultades. No es de extrañar. Lo mismo niños que adultos estamos mucho más acostumbrados a comparar cantidades longitudinales que cantidades angulares

A la pregunta: «¿Tienen algo que ver estos problemas con los que antes os propuse con números?», me contestaron: «Es lo mismo.»

Termino proponiéndoles que me den ejemplos prácticos de la vida en los que se correspondan las dos series de números puestas al principio. Obtengo contestaciones realmente notables. Un niño propone: «2 billetes de 25 son lo mismo que 0,5 del billete de 100, 4 de 25 son lo mismo que

1 de 100...». Otro dice: «2 naranjas valen 0,5, mientras 4 naranjas valen 1, y 6 valen 1,5...». «A un chico que vende caramelos le dan 1,5 pesetas por cada 5 pesetas que vende (ejemplo correspondiente al segundo par de sucesiones propuestas).»

Ha durado esta experiencia cuarenta y cinco minutos.

Con los mismos niños realizo una segunda experiencia, dos días después con objeto de iniciarles en la proporcionalidad inversa.

Vuelvo a recordarles las dos sucesiones iniciales

2	4	6	10	12	
0,5	1	1,5		3	4

y a preguntarles cómo se llenaron los huecos. Se hace explícito el hecho de que

Al *multiplicarse* un valor de la primera serie por un número, el valor de la segunda serie queda *multiplicado* por el mismo número.

También se recuerda que el *cociente* entre dos números correspondientes es *constante*.

Ahora les propongo llenar los huecos en las dos series

2	4	6	10	12		1
60	30	20		10	4	

Sólo lo resuelven correctamente dos de los doce alumnos, un tercero parecía acercarse a la solución. Los restantes estaban desconcertados. (Me pregunto si fué acertado anteponer el ejemplo de proporcionalidad directa, lo que hice a efectos de comparación posterior, pero ¿no había insinuado con ello la idea de la posible existencia de una relación del mismo tipo en las nuevas series?) En vista de la desorientación general dejo que se explicaran los dos solucionistas. Uno y otro dicen haberse dado cuenta de que el producto 2.60 es igual al 4.30 y asimismo a los demás, lo que les ha permitido acertar. Sólo ante esta declaración aciertan ya también los demás alumnos.

Se explicitan entonces las propiedades de esta segunda correspondencia.

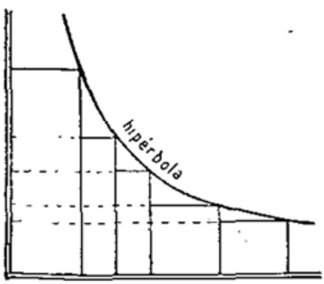
Al *multiplicar* un valor de la primera serie por un número, el valor de la segunda serie queda *dividido* por el mismo número.

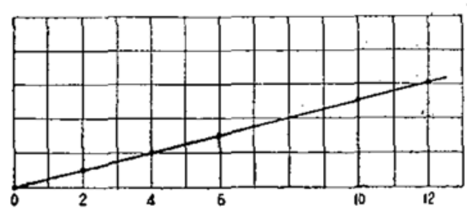
El *producto* de dos números correspondientes es *constante*.

Insisto:

En el primer caso *proporcionalidad directa*	Cociente constante	Si se multiplica en una de las series se multiplica en la otra.
En el segundo caso *proporcionalidad inversa*	Producto constante	Si se multiplica en una de las series se divide en la otra.

Al finalizar la experiencia les propongo que me traigan para el próximo día rectángulos de papel de dimensiones diferentes y de igual área que la cuartilla que doy a cada uno (todas las cuartillas son iguales). Puesto que el producto de ambas dimensiones es constante, ambas son inversamente proporcionales. Colocados todos los rectángulos adosados a





los lados de un marco rectangular, los vértices están en una curva lugar geométrico que se dibuja y se llama *hipérbola*.

En los azulejos de la clase hago señalar sobre una misma horizontal, y a partir de un mismo punto, segmentos varios, por ejemplo, tomando por unidad el lado del azulejo, los representativos de la serie numérica primera: 2, 4, 6... y levantar, en los extremos, perpendiculares de dimensiones iguales a los números correspondientes en la segunda serie: 0,5, 1, 1,5... Señalando en tiza los extremos de estas perpendiculares, ¿en qué línea están situados?

Con estas experiencias han obtenido los niños un avance de las representaciones gráficas que desarrollarán más ampliamente en cursos sucesivos.

NOTA.—De intento he respetado la redacción de la experiencia sobre proporcionalidad directa, tal cual la efectué por vez primera, incurriendo en el defecto de establecer términos en progresión aritmética, lo que interfirió algo desfavorablemente la nitidez del concepto de proporcionalidad, ofreciendo, en cambio, una muestra muy interesante de los recursos usados por los mismos niños para rectificarse. En repeticiones posteriores de esta experiencia he evitado la aparición de progresiones escribiendo, por ejemplo, las sucesiones

4	2	6	8	12	16	—	—
—	0,5	1,5	2	—	4	5	5,5

Sin dificultad se dan cuenta los alumnos de que los números de la segunda sucesión son la cuarta parte de los de la primera, y éstos cuatro veces los de la segunda. Para hacer surgir la consciencia de la correspondencia en la suma escribo a veces en la línea superior 100, a continuación 64 y luego (con orden de que contesten en seguida) 164. Otras veces duplico, triplico un mismo número de una fila, con lo que duplican, triplican el correspondiente; finalmente, he escrito en la línea superior, por ejemplo, $8a$, $2x$, y han escrito correctamente debajo $2a$, $0{,}5x$, dándose cuenta de que al multiplicar el 8 de la fila superior por a, había que multiplicar asimismo por a el 2 de la inferior, y análogamente con el factor literal x.

§ 6. UNA INICIACION AL EMPLEO DE LETRAS

Una de las dificultades de la transición al Algebra, cuando en Aritmética apenas se ha hecho uso de la designación literal de los números, es la interpretación que suele tener el escolar de los signos de las operaciones como órdenes ejecutivas de las mismas. Para todo niño acostumbrado a tal interpretación forzosamente ha de resultar turbadora una operación indicada entre letras, que es tanto como una orden que no pueden cumplir. Todos los profesores sabemos el trabajo que cuesta lograr que los niños dejen las operaciones indicadas cuando así conviene a la resolución numérica de un problema que se presta a ulteriores simplificaciones. El prurito de efectuar, sin dilación, los cálculos numéricos parece algo irresistible. Por esta causa aconsejo en el curso de Aritmética proponer problemas con datos tales que se presten a notables simplificaciones que les impresionen [1]. Se trata con ello de hacerles valorar la ventaja que supone el dominio de la dinámica operacional al ver que permite transformar ciertas órdenes en otras equivalentes, más sencillas de cumplir.

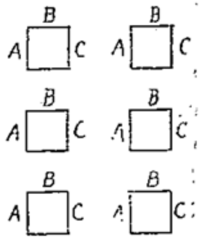
Las transformaciones de esta dinámica son la base del Algebra, pero no conviene didácticamente presentar este cálculo algebraico, como se hace de ordinario, desligado de la cuna aritmética que le dio origen. Por ello he aconsejado, en el Cap. V, § 3, la iniciación al cálculo literal a través de procesos de generalización y condensación en fórmulas de las soluciones de problemas aritméticos genéricos, especialmente los de la Aritmética mercantil. Un ensayo en este sentido podrá hallar el lector en nuestra colección de obras didácticas de Enseñanza media, escrita en colaboración con don Julio Rey Pastor [2].

---

[1] Véase en el § 13 de este capítulo un ejemplo de una de tales simplificaciones impresionantes, aunque relativa a un problema de permutaciones.

[2] Véase, por ejemplo, *Ciclo matemático*, tercer curso, Bachillerato laboral elemental.

A continuación describimos una breve lección experimental, concebida dentro de la misma línea intencional pero en otro ámbito de ideas. Se trataba de crear ante alumnos de doce años, desconocedores del cálculo literal, una situación sugeridora del empleo espontáneo de letras y del manejo de expresiones literales. Tenía los alumnos sentados, de tres en tres, en mesitas, según la colocación que indica la figura, en la que designo con la misma letra todos los alumnos de colocación similar. Luego de entregar una cuartilla en cada mesa, hago pensar a los alumnos A un número dígito y les ordeno que lo dupliquen y añadan cinco unidades, entregando la cuartilla con el resultado al alumno B de la misma mesa. Ordeno a los B que multipliquen por cinco el número entregado y pasen el resultado a C. Ordeno a los C que agreguen a dicho resultado un número dígito libremente elegido por ellos, y que me digan el resultado final obtenido. Con el resultado de cada mesa «adivino» los números dígitos elegidos por A y C. ¿Cómo descubrir el «truco»?



He aquí una situación fuertemente estimulante. No es fácil que descubran la clave los alumnos en tiempo breve. Se les facilitará notablemente el descubrimiento si en lugar de agregar inicialmente 5 se agrega 4. Ya no es difícil que se den cuenta entonces de que las cifras adivinadas son precisamente las decenas y unidades después de restar 20 del resultado final enunciado en cada mesa. Pero, aun acertado el «truco», ¿cómo explicar el por qué del mismo?

Uno de los alumnos va a escribir en el encerado las operaciones que se han ido efectuando en cada mesa con los números pensados por A y C. Pero ¿cómo podremos efectuar un razonamiento que valga para todas las mesas? ¿Cómo designar el número pensado por cada alumno A? Proponen designarlo por a o por x. Al fin se acuerda la x. Se expresan entonces de una vez las operaciones que se han hecho en todas las mesas, y el alumno escribe $2x + 4$ el resultado que A entrega a B (en la segunda versión del juego), y $(2x + 4) . 5$ el resultado que B entrega a C. ¿Cómo designar ahora la cifra elegida por C? Se propone y. Pregunto: «¿Por qué no llamarla también x?» Contestan correctamente: «Porque puede ser diferente.» En definitiva, el resultado final es $(2x + 4) . 5 + y$, que se transforma en $10x + 20 + y$. Restándole 20 queda $10x + y$, que representa un número de decenas igual a la cifra pensada por A y un número de unidades igual a la elegida por C.

Repetido el proceso según la versión primera resulta

$$(2x + 5) \cdot 5 + y = 10x + 25 + y$$

¿Qué habrá que restar ahora del resultado final? Aplíquese a los distintos resultados suministrados por las mesas.

El juego puede complicarse con intervención de más alumnos y adivinación de más cifras. Por ejemplo: A piensa una cifra x, la duplica y añade 5; entrega el resultado a B, quien multiplica por 5 y suma otra cifra y; entrega el resultado a C, quien duplica y agrega 5; éste entrega, finalmente, el resultado a D, quien multiplica por 5 y suma otra cifra z. La secuencia de operaciones se indica ahora

$$\{[(2x + 5) \cdot 5 + y] \cdot 2 + 5\} \cdot 5 + z = \{(10x + 25 + y) \cdot 2 + 5\} \cdot 5 + z =$$
$$= (20x + 2y + 55) \cdot 5 + z = 100x + 10y + z + 275$$

¿Qué regla corresponde aplicar para adivinar las tres cifras x, y, z, conocido este resultado?

Estimamos que sería muy conveniente que, con anterioridad al estudio de las ecuaciones se ejercitara a los alumnos en la expresión de secuencias análogas de operaciones indicadas, partiendo de supuestos datos desconocidos designados mediante letras. De esta forma quedaría considerablemente facilitada la tarea posterior de planteamiento de ecuaciones, ya que éstas se obtienen invariablemente sin más que aplicar a la expresión literal de la incógnita (o incógnitas) el conjunto de operaciones que se desprenden del enunciado, para comprobar el cumplimiento de las condiciones contenidas en el mismo.

§ 7. MULTIPLICACION Y DIVISION DE POLINOMIOS

En el capítulo V hemos hecho alusión a la conveniencia de conducir eurísticamente los procesos operativos del cálculo literal, y hemos afirmado la posibilidad de que los alumnos descubran las reglas, incluso la de la división de polinomios.

Con objeto de no alargar excesivamente este capítulo omito la conducción de los primeros pasos (reglas de signos, operaciones con monomios, suma y resta de polinomios), que el lector puede ver en nuestra obrita tantas veces citada (*Didáctica Matemática Eurística*), y reproduzco de ella la lección sobre multiplicación y división de polinomios, que empieza con la multiplicación y división por un monomio.

«Os acordáis de aquel país maravilloso en el que había tres clases de monedas: almendras, a; bombones, b; castañas, c? Un alumno gana cada día $7a$, pierde $3b$ y pierde c. ¿Qué ha ganado y perdido en cinco días?» Aciertan todos.

«¿Qué habéis hecho, pues, para multiplicar por 5 el polinomio $7a - 3b - c$ obteniendo

$$(7a - 3b - c) \cdot 5 = 35a - 15b - 5c\text{?»}$$

«¿Qué haréis ahora para multiplicar el mismo polinomio por el monomio $5ab$?» Contestan correctamente:

$$(7a - 3b - c) \cdot 5ab = 35a^2b - 15ab^2 - 5abc$$

Más complicado aún: $(-3x^2 + 2xy - 5y^2) \cdot (-4x^3) = 12x^5 - 8x^4y + 20x^3y^2$.

Les hago hacer ejercicios propuestos por ellos mismos de multiplicación de binomio por monomio, permutando en cada mesa los proponentes de los datos y los calculadores del resultado.

Calculan ahora todos el siguiente producto propuesto en el encerado:

$$(-ax^2 + 3a^2xy + 2xy^3) \cdot (+5x^2y) = -5ax^4y + 15a^2x^3y^2 + 10x^3y^4.$$

Y a continuación propongo reconstruir el primer paréntesis, que borro, dejando el segundo y el resultado. Ellos mismos deducen la división.

Otra propuesta más difícil. Borro todo el primer miembro y propongo formar un producto de trinomio por monomio equivalente al segundo. Dan varias soluciones. Pido *sacar el factor común* más elevado que se pueda. La regla estructural ¡es la misma que la del m. c. d.!, y surge espontáneo el descubrimiento.

Nuevo ejercicio de descomposición en factores, sacando el máximo factor común.

$$6x^2y^3 - 3x^2y + 9x^4y^2 = 3x^2y(2y^2 - 1 + 3x^2y)$$

El término -1 es ¡muy interesante!, porque la mayoría *no lo pone* $(3x^2y : 3x^2y = 0)$. Insisto en la diferencia entre *factor* 1 (que no se escribe, pero que no es 0) y *sumando* 1, que hay que escribirle. Hay que insistir bastante en ejercicios de esta naturaleza.

Progongo ahora la primera multiplicación de polinomios: $(7a - 3b - c) \cdot (a + b)$; tengo aquí que ayudarles escribiendo $a + b$ recuadrado considerándolo como símbolo o letra $7a \boxed{a + b} - 3b \boxed{} - c \boxed{}$, al que restituyo inmediatamente su significado para aplicar nuevamente la propiedad distributiva.

Repito ejercicios $(7a - 3b - c) \cdot (a - b)$; $(7a - 3b - c) \cdot (a^2 - b)$; $(5x^2 - 2x + 3) \cdot (4x - 2)$; $(3x^3 - 4x^2 - 2x) \cdot (5x^2 - 3x)$, que ya resuelven solos y bien.

Les indico la disposición práctica de la multiplicación de polinomios ordenados, haciéndoles ver que *el término de mayor grado del producto es el producto de los términos de mayor grado del multiplicando y multiplicador.*

Empiezo aplicando el esquema al producto de un polinomio por un *binomio*

$$\begin{array}{rrrr}
15x^5 & -20x^4 & -10x^3 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
3x^3 & -\ 4x^2 & -\ 2x & \\
 & 5x^2 & -\ 3x & \\
\hline
15x^5 & -20x^4 & -10x^3 & \\
 & -\ 9x^4 & +12x^3 & +6x^2 \\
\hline
15x^5 & -29x^4 & +\ 2x^3 & +6x^2
\end{array}$$

y, una vez efectuado y comprobado, les recojo las cuartillas donde lo han desarrollado y les planteo la siguiente situación: «Deseo conservar intacta esta operación en el encerado para continuar la explicación el próximo día, pero imaginad que el bedel, mientras estoy distraído, la ha borrado casi toda y que sólo llego a tiempo de impedir que borre el multiplicando y el producto.» Borro yo mismo todo lo demás y dejo solamente lo dicho en el encerado, para que lo copien en nuevas cuartillas:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Multiplicando} & 3x^3 & -\,4x^2 & -\,2x & \\
\text{Multiplicador (?)} & & \bullet & \bullet & \\
\cline{2-4}
\text{Productos parciales (?)} & \bullet & \bullet & \bullet & \\
 & & \bullet & \bullet & \bullet \\
\cline{2-5}
\text{Producto} & 15x^5 & -\,29x^4 & +\,2x^3 & +\,6x^2
\end{array}
$$

«Estudiad en vuestras casas ¿cómo podríamos reconstruir toda la operación?» Les doy la idea clave del jeroglífico planteado diciéndoles: «Recordad cómo hemos dicho que se obtiene el término *de mayor grado* del producto.»

Reanudada la experiencia al siguiente día todos afirman traer la solución y haberla obtenido «sin trampa», es decir, como yo les aconsejé, sin mirar en el libro la lección de división [1].

De todos modos, para convencerme, ruego a uno (de los menos inteligentes) que nos explique lo que ha hecho. Resultó sorprendente la lógica reconstructiva del muchacho. El primer término del multiplicador se halla dividiendo el primero del producto por el otro factor que lo forma: primero del multiplicando. Una vez hallado el primer término del multiplicador, reconstruye el primer producto parcial, y por resta, el otro, que le da, en seguida, el segundo término del multiplicador.

---

[1] A uno de ellos se le escapa, sin embargo, el comentario: «Además, el libro tampoco lo trae.» Inmediatamente cazan el gazapo cometido los otros y se ríen al ver la ingenuidad con que ha revelado su intención «tramposa». Ha sido un bonito «test». Ciertamente el libro no podía ayudarles gran cosa, por cuanto necesitan mayor inteligencia para adaptarlo a la situación que para resolver ésta directamente.

Intervengo ahora, complicando el producto con un término más en el multiplicador. Borro, como el otro día, toda la operación, dejando sólo

$$
\begin{array}{rrrrr}
3x^3 - & 4x^2 - & 2x & & \\
5x^2 - & 3x - & 2 & & \\
\hline
15x^5 - 20x^4 - & 10x^3 & & & \\
- & 9x^4 + & 12x^3 + & 6x^2 & \\
& - & 6x^3 + & 8x^2 + & 4x \\
\hline
15x^5 - 29x^4 - & 4x^3 + & 14x^2 + & 4x &
\end{array}
$$

el multiplicando y el producto. La reconstrucción del primer término $5x^2$ del multiplicador es inmediata, y siguen, como antes, multiplicando $5x^2$ por todo el multiplicando y restando el primer producto parcial así obtenido del producto dado, con lo que obtienen $-9x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 4x$.

¿Cómo seguir? Aquí les tengo que ayudar: «Si del producto total hemos restado el producto del multiplicando por *el primer término,* lo que me queda, ¿qué representa?» No les cuesta decir que es el producto del mismo multiplicando por los *términos restantes* del multiplicador. Entonces escribo aparte el $5x^2$, lo borro del esquema y he reducido el problema a la reconstrucción de una multiplicación con un término menos.

Completan ya fácilmente la operación que luego esquematizo en la forma clásica de división, haciéndoles ver cómo dicho esquema reproduce paso a paso el proceso que ellos mismos han ideado, aunque disponiendo las operaciones de otra forma hasta obtener nula la última diferencia o resto parcial.

Finalmente les digo que hemos obtenido resto nulo porque hemos partido de un producto efectuado previamente. Ahora bien, el esquema de operación puede repetirse con un dividendo modificado: por ejemplo, $15x^5 - 29x^4 - 4x^3 + 16x^2 - x$ y entonces la diferencia nula de antes se convertiría en $2x^2 - 5x$, que por ser de *grado inferior* al divisor $3x^3 - 4x^2 - 2x$, ya no permite seguir dividiendo. Como este resto r procede de restar sucesivamente del dividendo D los productos de los términos de cociente c por el divisor d, este resto será $r = D - dc$ y tenemos la misma identidad que para la división de números: $D = dc + r$, que permite hacer la prueba de la división.

Les propongo *efectuar esta prueba* como ejercicio.

§ 8. SOBRE «ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS»

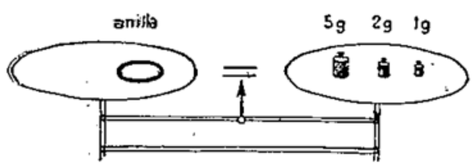
Reproducimos a continuación una síntesis de experiencias realizadas con alumnos de primero y segundo curso de Bachillerato, con objeto de iniciarles en la resolución de ecuaciones, partiendo de situaciones activas creadas mediante equilibrio de balanzas. No hay que decir que los alumnos carecían de toda noción previa sobre álgebra.

Material empleado: 1.°) Dos balanzas con sus pesas. No conviene que sean excesivamente sensibles para que puedan realizarse con prontitud las operaciones de equilibrado. 2.°) Objetos múltiples de varias clases y tamaños (anillas, clavos, monedas...) de tal modo que los objetos de una misma clase y tamaño tengan *el mismo peso*.

1. Empiezo presentando a los niños una balanza y pregunto si saben pesar con ella.

Ejercicio 1.° Pesar una anilla (de 8 gramos).

En general efectúan la pesada colocando las pesas en un solo platillo (figura).



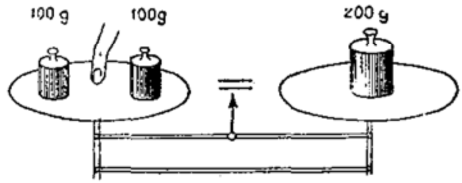
Si al repetir los ejercicios se ve que no se les ocurre simplificar las pesadas por resta, es decir, utilizando pesas en ambos platillos, se les puede sugerir la idea mediante una experiencia que les resulta bastante divertida:

2. Partiendo del equilibrio de dos pesas de 100 gramos, colocadas en un platillo con otra de 200 gramos colocada en el otro, invito a un alumno a que coloque un dedo sobre el primer platillo a modo de tope que impida su subida al colocar nuevas pesas en el otro. Le hago cerrar los ojos y, quitando una de las pesas de 100 gramos, simulo, con un ligero golpe dado

simultáneamente en el otro platillo, la colocación en él de una pesa equivalente. A la pregunta «¿Qué he hecho?», todos los sujetos experimentados responden al engaño creyendo que, en efecto, he colocado una pesa en el segundo platillo, en vez de quitarla del primero. La sorpresa recibida al abrir los ojos contribuye a la fijación de este hecho, que se escribe en el cuaderno:

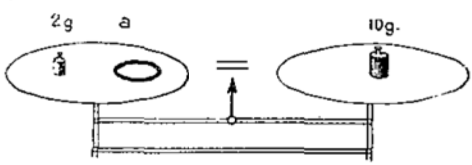
Da lo mismo *quitar* un peso en un platillo que *añadirlo* en el otro.

Otra experiencia que también he realizado en el mismo orden de ideas, consiste en empujar hacia arriba el platillo sostenido a tope por el alumno,



mientras simulo igualmente la colocación de pesas en el otro platillo. La consecuencia es ahora: Una fuerza hacia arriba (signo —) en uno de los platillos equivale a otra equivalente hacia abajo (peso de signo +) en el otro.

3. Hecho lo anterior, equilibro la misma anilla mediante dos pesas de 10 gramos y 2 gramos colocadas como indica la figura. (Si esta disposición



de equilibrio y pesada surgen espontáneamente de los propios alumnos, huelgan las anteriores experiencias, y más vale obtener la consecuencia antes indicada mediante la propia explicación del alumno que la haya sugerido.)

Designando por a el peso desconocido de la anilla se escribe la igualdad de pesos en ambos platillos

$$a + 2 = 10$$

que se denomina *ecuación,* en la que a es la incógnita. «¿Cuánto vale ésta?» Los dos gramos añadidos en el primer platillo equivalen a dos sustraídos del segundo. Por lo tanto,

$$a = 10 - 2 = 8 \text{ (gramos)}$$

De otro modo: Se puede restar a los dos miembros de una ecuación un mismo número. Hemos obtenido así el peso de la anilla = 8 gramos.

4. Intentemos ahora pesar una peseta (3,5 gramos).

Como las pesas más pequeñas de que disponemos son de un gramo, fallan los tanteos. Sugiero: «¿Por qué no pesáis dos o más pesetas a un tiempo, a ver si así podéis lograr un equilibrio?» Ensayan con dos pesetas y obtienen el equilibrio (x peso de la peseta)

$$2x = 7 \text{ (gramos)}$$

«¿Cuánto pesa, pues, una peseta?» «La mitad»,

$$x = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ (gramos)}$$

y anotan de paso: Se puede dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número.

5. Formo ahora, al azar, un equilibrio con clavos de igual tamaño y pesas, de modo que hayan clavos y pesas en los dos platillos.

Primer platillo	Segundo platillo
$100 + 5x$	$127 + 2x$

«¿Qué haréis para averiguar lo que pesa un clavo? ¿Por qué no empezar simplificando el equilibrio de modo que no hayan más que clavos en un platillo y pesas en el otro (equilibrio análogo al que nos permitió antes pesar la peseta). ¿Cómo conseguirlo?»

A los mismos alumnos se les ocurre fácilmente suprimir primero cien gramos de cada platillo (les hago escribir el nuevo equilibrio)

$$5x = 27 + 2x$$

y luego dos clavos, con lo que queda

$$3x = 27$$

de donde, finalmente

$$x = 27 : 3 = 9 \text{ (gramos)}$$

6. Repetimos (ahora ya sin balanza) problemas análogos: «Ocho anillas y 25 gramos han equilibrado 12 anillas de igual tamaño y un gramo. ¿Cuánto pesa cada anilla?» Por analogía con lo hecho antes operan ya en abstracto a través de los mismos pasos: $8x + 25 = 12x + 1$; $8x + 24 = 12x$; $24 = 4x$; $x = 24/4 = 6$.

Pueden añadirse a continuación problemas sobre precios, en lugar de pesos, y aun enunciados de ecuaciones puramente abstractas.

7. Finalmente formo con las dos balanzas un par de equilibrios en los que intervienen pesas y dos clases de objetos, por ejemplo, anillas (peso x) y monedas de níquel (peso y). Los equilibrios obtenidos en ambas balanzas, que coloco reunidas en la misma posición del esquema de ecuaciones, son

$$\begin{aligned} &\text{Primera balanza: } 2x + y = 10 \text{ (gramos)} \\ &\text{Segunda balanza: } 4y = 2x + 10 \text{ (gramos)} \end{aligned} \qquad (1)$$

Después de observadas las balanzas y de escritas las ecuaciones en el encerado, mi pregunta «¿Podríamos obtener, por combinación de estos equilibrios, un equilibrio nuevo en el que no hubiera más que monedas y pesas?», suscita una animada discusión, a lo largo de la cual surge la idea de reunir los contenidos de los primeros platillos y de los segundos, es decir, de sumar las ecuaciones miembro a miembro. En el nuevo equilibrio obtenido

$$2x + 5y = 2x + 20 \text{ (gramos)}$$

es inmediata la supresión de las anillas (eliminación de la x), con lo que queda

$$5y = 20 \qquad \text{de donde} \qquad y = 20 : 5 = 4 \text{ (gramos)}$$

Al saber ahora el peso, 4 gramos, de cada moneda, éstas nos pueden servir igualmente de pesas, y puesto que en la primera balanza teníamos en un principio

$$2x + y = 10 \text{ (gramos)}$$

es lo mismo que $2x + 4$ g. $= 10$ g., de donde $2x = 6$ g. $\quad x = 3$ g.

8. Restituyendo los dos equilibrios iniciales (I), intenté luego ver si se les ocurría el modo de eliminar la y. Pero mi nueva pregunta: «¿No podríamos obtener ahora análogamente un equilibrio sin monedas, es decir, sólo con anillas y pesas?», no obtuvo solución espontánea de los alumnos. Tuve que ayudarles, sugiriéndoles la idea de igualar la cantidad de monedas en ambas balanzas, como antes estaban igualadas las anillas. Para ello es preciso cuadruplicar ambos platillos en la balanza primera (idea tal vez demasiado artificiosa para la edad de los niños con los que operé). Resultan los equilibrios

en la 1.ª balanza: $8x + 4y = 40$ g. ; $4y = 2x + 10$ g. en la 2.ª

y aun así hube de invertir luego el orden de los platillos de una de ellas para que vieran clara la suma y la eliminación como antes.

9. Las experiencias pueden completarse manejando sistemas homogéneos, obtenidos mediante equilibrios con tres clases de objetos (sin pesas). Por ejemplo, con anillas de dos clases x (3 gramos), y (8 gramos) y clavos z (9 gramos) hemos obtenido los equilibrios

1.ª balanza: $3z = x + 3y$
2.ª balanza: $2z + 2x = 3y$

Sumando los contenidos de los platillos cruzados

$$3z + 3y = 2z + 3x + 3y$$

se elimina la y y queda

$$z = 3x \quad \text{o bien} \quad x = \frac{1}{3} z$$

Duplicando la 1.ª y sumando, se elimina la x y queda

$$8z = 9y \quad \text{o bien} \quad y = \frac{8}{9} z$$

Las ecuaciones sólo permiten expresar dos de los pesos incógnitos en función del tercero, como si éste fuera la unidad de medida. En este caso hemos operado como si la unidad de peso fuese el peso z de un clavo, en cuya unidad hemos pesado las dos clases de anillas. Análogamente podemos pesar los clavos tomando por unidad la anilla x o la y. Así $z = 3x$

$z = \dfrac{9}{8}y$, y finalmente de $3x = \dfrac{9}{8}y$ resulta $x = \dfrac{3}{8}y$, $y = \dfrac{8}{3}x$.

Observaciones y comentarios.—Como se ha visto, el uso de balanzas para la iniciación eurística a la teoría de ecuaciones, parece tener indiscutibles ventajas por la poderosa imagen concreta que ofrece a la transformación por suma o resta de términos iguales, pero tiene asimismo una limitación indudable: la de permitir solamente la interpretación directa de ecuaciones cuyos términos son todos positivos. Habida cuenta de tal limitación, mientras he manejado las balanzas, he evitado usar el concepto de *transposición* o *paso* de un término a otro, para no sugerir la posible confusión de transponer pesas u objetos de un platillo a otro. Claro es que el cambio de signo inherente a toda transposición va sugerido en la experiencia realizada al empujar hacia arriba el platillo sujetado por el alumno; experiencia cualitativa que habría de completarse comprobando la equivalencia cuantitativa de las fuerzas transpuestas. Esto podría lograrse mediante un sistema adicional de hilos y poleas que invirtieran el sentido de los pesos, tirando hacia arriba de los platillos; pero resultaría ridículo tanto armatoste para tan modesto alcance teórico.

Es interesante recalcar que, en las experiencias sobre sistemas, la eliminación por reducción es espontánea y eurística cuando los coeficientes de la incógnita a eliminar están ya igualados y los términos representativos situados en platillos *enfrentados*. La igualación previa de coeficientes no parece fácil de lograr espontáneamente y si, además, los términos igualados están en platillos colaterales, suele resistírseles aún la simple idea de invertir los platillos de una de las balanzas, o de sumar sus contenidos cruzados. Claro es que también se resiste, en general, la idea de la inversión de la igualdad, con parecernos tan sencilla a los adultos. Y es que la noción de reversibilidad suele ser característica de un desarrollo mental algo elevado [1].

Finalmente, debo advertir otro inconveniente que limita bastante el uso de este recurso didáctico: La dificultad de conseguir colecciones de

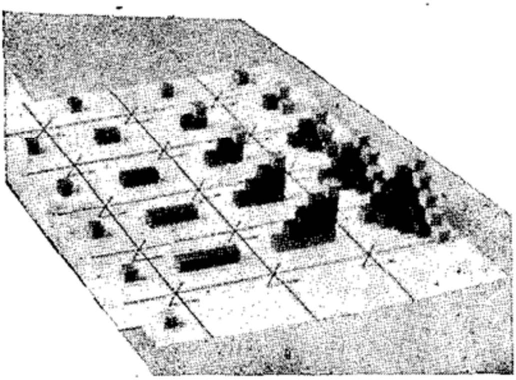
[1] Véanse los trabajos de PIAGET, por ejemplo: «De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent».

objetos de peso *muy igualado*. (Esta es la causa por la que he echado mano de monedas.) Aun cuando las diferencias de pesos individuales no rebasen la sensibilidad de la balanza, al repetir los objetos en uno y otro platillo, la tal sensibilidad queda con frecuencia rebasada, con lo que se corre el riesgo de que la balanza contradiga entonces, aparentemente, nuestras previsiones, desorientando al niño.

En resumen: parece eficaz y aconsejable el planteamiento inicial eurístico de la solución de ecuaciones lineales y aun de sistemas *muy sencillos,* mediante equilibrios en balanzas; pero una vez obtenida por vía concreta y espontánea la validez de ciertas transformaciones y traducidas éstas en esquemas operatorios, conviene desprenderse pronto de tal adherencia concreta para poder actuar imaginativamente y generalizar sin las trabas de tal situación.

§ 9. PROGRESIONES ARITMETICAS DE ORDEN SUPERIOR

Esta lección [1] constituye un ensayo un tanto audaz efectuado ante los alumnos más adelantados de sexto curso de Bachillerato, con objeto de probar hasta dónde eran capaces de llegar eurísticamente en un tema considerado hasta ahora (al menos en España) fuera de los límites de la Enseñanza media. Quise provocar para ello un fuerte atractivo inicial materializando progresiones aritméticas de los tres primeros órdenes mediante estructuras construídas con las regletas coloreadas de Cuisenaire, descritas en otro lugar. He de advertir, para los lectores no conocedores del plan de estudio de Bachillerato, que tales alumnos conocían ya las propiedades y cálculo de los números combinatorios que forman el triángulo de Tartaglia.



Sobre un hoja de papel dividida en casillas rectangulares disponemos, como indica la figura, números materializados con regletas, de tal manera que:

1.° Las casillas que encabezan las columnas y las filas contienen simplemente la unidad, es decir, un cm^3 de madera.

[1] Presentada, entre otras, por el autor en la XIX Conferencia Internacional de Instrucción Pública, convocada por la UNESCO y por la Oficina Internacional de Educación, en Ginebra, julio 1956.

2.° El número estructurado en cada casilla se obtiene agrupando (sumando) los de la casilla de encima y de la izquierda. En este agrupamiento y formación de estructuras me han ayudado los mismos alumnos que, con sólo verme construir las primeras de cada columna, han inducido inmediatamente la ley.

Quedan así en la primera columna los números de la serie o progresión natural 1, 2, 3, 4, 5...; mientras cada casilla de la columna segunda, tercera..., contiene, de acuerdo con la ley de formación, la suma de la unidad en cabeza y de los números de la columna a su izquierda, sucesivamente sumados. Los números de tales columnas segunda, tercera..., formarán de esta suerte progresiones aritméticas de segundo orden (sumas de las de 1.°), de tercer orden (sumas de las de 2.°), etc.

El esquema es, naturalmente, reversible, es decir, que, dada una columna podemos ir formando la anterior por cálculo de las diferencias sucesivas de sus términos y escribiéndolas a la izquierda. Las diferencias de dichas diferencias darán los números de la nueva columna de la izquierda, y así sucesivamente.

Mi pregunta a los alumnos, una vez que hemos observado y discutido en común la formación reversible de tales estructuras, es la siguiente: «¿Cómo podríamos expresar y calcular de una vez un término cualquiera de este cuadro, supuesto prolongado, por ejemplo, el término n^o de la progresión aritmética de orden k (columna k^a)?» Les inclino la hoja de modo que las diagonales del cuadro queden paralelas a la vista (horizontales); y si tardan en darse cuenta, les indico abiertamente que observen las diagonales. Tanto los valores numéricos como su ley de formación sugieren entonces el recuerdo del triángulo de Tartaglia y los alumnos reconocen la presencia en el cuadro de los números combinatorios [2]. No hay más que contar el orden de la diagonal $(n + k - 1)$ a que pertenece el término n^o de la columna k^a (o también, observar el siguiente cuadro) para ver que:

El término n^o de la progresión k^a es el número combinatorio

$$\binom{n+k-1}{1}.$$

[2] En caso de desconocimiento de ellos, se les puede definir mediante

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

comprobando que esta definición verifica la ley de formación

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

Una vez hallado esto, la generalización a progresiones de primeros términos cualesquiera y de diferencias iniciales no iguales a la unidad, no ofrece grandes dificultades y puede lograrse, ya en un plano abstracto,

	k=1	k=2	k=3	k=4
	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	
1	5	15		

	k=1	k=2	k=3	k=4
	1	[illegible]	1	1
1	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{5}{4}$
1	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{6}{4}$
1	$\binom{4}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{7}{4}$
1	$\binom{5}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{7}{3}$	

formando el cuadro más general que sigue y que los mismos alumnos desarrollan fácilmente:

	a	b	c	d
r	$r + a$	$r + a + b$	$r + a + b + c$	$r + a + b + c + d$
r	$2r + a$	$3r + 2a + b$	$4r + 3a + 2b + c$	$5r + 4a + 3b + 2c + d$
r	$3r + a$	$6r + 3a + b$	$10r + 6a + 3b + c$	$15r + 10a + 6b + 3c + d$
r	$4r + a$	$10r + 4a + b$	$20r + 10a + 4b + c$	$35r + 20a + 10b + 4c + d$

Conviene escribir en tizas de distintos colores, los coeficientes de r, de a, de b, etc., con objeto de que resalte la siguiente observación: Si prescindimos de los primeros términos a, b, c..., de las progresiones (lo que equivale a considerar el término n° de cada progresión como si fuera el $(n - 1)^{\circ}$), se observa que:

Los coeficientes de r forman el mismo cuadro precedente de números combinatorios.

Los coeficientes de a, b, c..., son estos mismos números desplazados, de uno, de dos, de tres..., lugares a la derecha. De ello resulta:

El término n^o de la progresión k^a es ahora un polinomio de la forma

$$\binom{n+k-2}{k}r + \binom{n+k-3}{k-1}a + \binom{n+k-4}{k-2}b + \binom{n+k-5}{k-3}c + \ldots$$

Por ejemplo, para $k = 4$ la expresión general del término n^o de la progresión de 4.° orden ($k = 4$) es

$$\binom{n+2}{4}r + \binom{n+1}{3}a + \binom{n}{2}b + (n-1)\,c + d$$

mientras para $k = 3$ resulta

$$\binom{n+1}{3}r + \binom{n}{2}a + (n-1)\,b + c.$$

APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LA SUMA DE LOS CUADRADOS Y CUBOS DE LOS n PRIMEROS NÚMEROS NATURALES.

I. *Suma de cuadrados.*

	1	1
2	3	4
2	5	9
2	7	16
2	9	25

Si colocamos en columna la sucesión de los cuadrados, obtenemos como diferencias a su izquierda la sucesión de números impares, cuya cabeza es 1. Luego $a = 1$, $b = 1$, mientras las segundas diferencias son constantes $r = 2$. La sucesión de cuadrados es, pues, una progresión de segundo orden, y sus sumas una de tercero, en la que $c = 1$, $k = 3$. Sustituyendo estos valores más arriba, resulta:

$$\sum_1^n \nu^2 = \binom{n+1}{3}\cdot 2 + \binom{n}{2} + (n-1) + 1 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

II. *Suma de cubos.*

	0	1	1
6	6	7	8
6	12	19	27
6	18	37	64
6	24	61	125

Partiendo de la sucesión de cubos y procediendo análogamente hasta formar las diferencias terceras constantes $r = 6$, y completando las diferencias primeras y segundas hasta hallar sus cabezas $a = 0$, $b = 1$, $c = d = 1$ bastará sustituir estos valores en la expresión el término general antes obtenida para las progresiones de 4.° orden y resulta:

$$\sum_1^n \nu^3 = \binom{n+2}{4} \cdot 6 + \binom{n}{2} + (n-1) + 1 = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)$$

§ 10. LA DIVISION DEL ESPACIO EN REGIONES

En repeticiones posteriores de la lección experimental anterior, efectuada siempre con alumnos del curso superior de Bachillerato, he aprovechado el descubrimiento de la estructura y cálculo de las progresiones aritméticas de orden superior para mostrar a continuación la aplicación de las mismas al cálculo del número de regiones en que un cierto número de rectas dividen al plano, y un cierto número de planos dividen al espacio [1].

Empiezo preguntando a los alumnos: «¿En cuántos trozos dividen la recta un punto, dos puntos, tres, etc., de ella?» Las respuestas son inmediatas. Se explicita que cada nuevo punto divide uno de los trozos anteriores en dos, es decir, agrega un trozo más, con lo que se prueba la generalidad de la ley: los números de trozos forman una progresión aritmética de razón 1; n puntos dividen la recta en $n + 1$ trozos. Les invito a que formen la tabla I de correspondencia.

n puntos		dividen la recta en $n+1$ trozos	
1	»	2	»
2	»	3	»
3	»	4	»
4	»	5	»

TABLA I

n rectas		dividen el plano en P_n regiones	
1	»	2	»
2	»	4	»
3	»	7	»
4	»	11	»

TABLA II

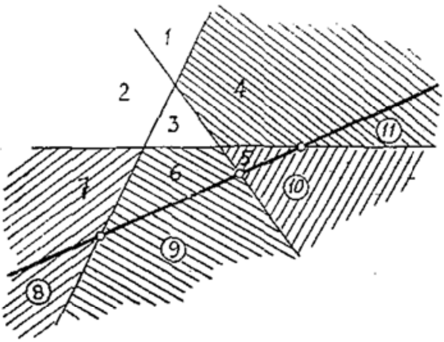
n planos		dividen el espacio en R_n regiones	
1	»	2	»
2	»	4	»
3	»	8	»
4	»	15	»

TABLA III

Formulo ahora pregunta análoga referente a la división del plano por rectas secantes dos a dos, pero que no sean concurrentes tres a tres. Directamente (o por construcción de la figura) contestan fácilmente que una

[1] He seguido, en líneas generales, la línea inductiva expuesta en el interesante libro de G. POLYA «Induction and Analogy in Mathematics».

recta divide el plano en dos regiones, dos rectas secantes en cuatro regiones, tres rectas en siete regiones, cuatro rectas en once regiones (ver figura). Para mayor número de rectas el recuento directo se hace más



difícil y se impone el descubrimiento de una ley. Invitados los alumnos a formar la tabla II y a observarla, no tardan en descubrir que los números de regiones forman una progresión aritmética de segundo orden cuyas diferencias son los de la primera (o también los números de trozos de recta de la tabla I, corridos un lugar). Así $4 = 2 + 2$, $7 = 4 + 3$, $11 = 7 + 4$... Llamando P_n al número de regiones en que el plano queda dividido por n rectas, se induce, pues, la ley

$$P_n = P_{n-1} + n$$

Pero, ¿existe alguna relación geométrica que permita *deducirla*?

Antes hemos razonado la validez del número $n + 1$ de regiones en que n puntos dividen la recta, observando que cada nuevo punto parte en dos una sola de las regiones anteriores, es decir, introduce una sola región nueva. Análogamente podemos obtener P_n añadiendo a P_{n-1} el número de regiones nuevas que introduce la recta n^a, es decir, el número de regiones atravesadas por ella, que es precisamente n, puesto que las líneas divisorias serán precisamente los trozos que en esta nueva recta determinan los $n - 1$ puntos de intersección con las anteriores. Así (ver la figura anterior), si tres rectas han dividido al plano en siete regiones, una cuarta secante de ellas atravesará cuatro, y solamente cuatro de estas regiones, por ser precisamente cuatro el número de trozos que en ella determinan las intersecciones con las tres rectas anteriores (trozos en negro en la figura). La ley descubierta es, pues, completamente general, y aplicando la fórmula que da el término de n^o de una progresión de segundo orden se obtiene ($k = 2$, $a = 1$, $b = 2$)

$$P_n = \binom{n}{2} + (n - 1) + 2 = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

que da, en efecto, $P_3 = 7$, $P_4 = 11$, y permite calcular $P_5 = 16$, $P_6 = 22$, etcétera.

Generalicemos ahora el problema al espacio, considerando planos secantes dos a dos, pero no concurrentes tres a tres en una misma recta, ni cuatro a cuatro en un mismo punto. Los alumnos enuncian fácilmente que uno, dos, tres planos dividen al espacio, respectivamente, en dos cuatro, ocho regiones. Más difícil les resulta *ver* las regiones en que queda dividido el espacio por cuatro planos. Con auxilio de un modelo de tetraedro e imaginando prolongadas sus caras, llegan a contar correctamente quince regiones. (La interior, cuatro triedros opuestos por los vértices, seis diedros opuestos por las aristas, y las regiones exteriores contiguas a las cuatro caras.) Para mayor número de planos, la imaginación se pierde y se impone, como antes, la inducción de una ley que dé el número de regiones R_n en que n planos dividen al espacio y la deducción subsiguiente. Invitamos a formar la tabla III y a comparar su segunda columna R_n con la segunda columna P_n de la tabla II, los alumnos no tardan mucho en descubrir que cada número de R_n es la suma de los precedentes de ambas columnas. Así, $4 = 2 + 2$, $8 = 4 + 4$, $15 = 8 + 7$. ¿Será también general esta ley? Es decir, ¿podremos obtener invariablemente el número R_n sumando al número anterior R_{n-1} (de regiones en que el espacio queda dividido por $n - 1$ planos) el número P_{n-1} de regiones en que $n - 1$ rectas dividen al plano? Con lo que precede, fácil es concebir el camino para la demostración de esta fórmula

$$R_n = R_{n-1} + P_{n-1}$$

la cual será cierta si, una vez dividido el espacio en R_{n-1} regiones por $n - 1$ planos, el plano n^o añadido atraviesa P_{n-1} de estas regiones. Y, en efecto, así es, puesto que los tabiques de separación introducidos son precisamente las regiones que en el plano n^o divisorio introducen las $n - 1$ intersecciones del mismo con los planos anteriores.

Demostrada la validez de la ley y puesto que las diferencias de R_n son los números P_n de una progresión de segundo orden, los números de R_n formarán una de tercero, cuyas diferencias pueden disponerse como indica el siguiente cuadro:

	0	1	2
1	1	2	4
1	2	4	8
1	3	7	15
1	4	11	

del que resulta ahora $k = 3$, $r = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, y aplicando la fórmula general de la lección anterior

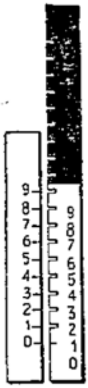
$$R_n = \binom{n+1}{3} + (n-1) + 2 = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6).$$

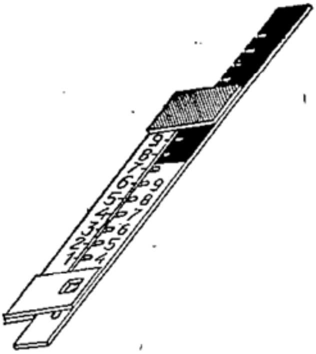
§ 11. INICIACION A LAS MAQUINAS DE CALCULAR

Esta lección va destinada a alumnos de doce a trece años, con intención de darles ideas muy esquemáticas y gradualmente ordenadas que les permitan llegar a concebir progresivamente la posibilidad de realizar mecánicamente las operaciones aritméticas. Las cuestiones de detalles constructivos se han omitido deliberadamente (y aun a veces ligeramente falseado) con objeto de aclarar los caracteres esenciales de los esquemas.

MÁQUINAS PARA SUMAR Y RESTAR

Máquinas de escalas móviles.—Hacemos construir a los alumnos modelos de cartón o madera, formados por dos escalas adosadas como indica

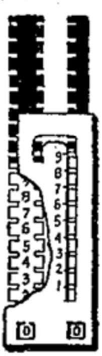




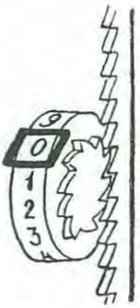
la figura. La escala de la izquierda va fija con divisiones equidistantes de centímetro en centímetro y numeradas de cero a nueve. En la escala de la derecha los trazos se sustituyen por orificios o ranuras en las que penetra la punta de un punzón que le imprime el movimiento de deslizamiento.

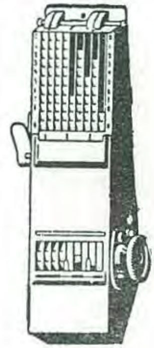
En esta segunda regleta se inscriben asimismo las cifras de cero a nueve, pero desplazadas de suerte que el cero aparece en la pequeña ventanita abierta en el borde inferior del chasis de soporte cuando los dos orígenes de las escalas coinciden.

Desplazando, por ejemplo, la escala móvil dos centímetros hacia el borde inferior el número 2 aparece en la ventanita. La suma 2 + 5 se realiza automáticamente por medio de dos traslaciones consecutivas de 2 + 5 centímetros obtenidas colocando el punzón en los orificios sucesivamente situados delante del 2 y del 5 de la escala fija de la izquierda y empujándolo hasta el borde inferior. El número 7 aparece así en la ventana. Sería, naturalmente, imposible sumar indefinidamente del mismo modo. Si queremos, por ejemplo, añadir 6 unidades al 7 recién obtenido, como la sucesión de números de la escala no llega sino al 9, nos deberemos limitar a obtener la cifra de las unidades de 7 + 6. Esto equivaldría a descender 6 y subir 10, lo que equivale a subir 4, complemento de 6, hasta el tope superior. La decisión subir o bajar el punzón según que la suma alcance o quede por bajo de 10 se automatiza observando el color de la regleta móvil (blanco, negro) frente al número a añadir. Así, por ejemplo, en la suma anterior se observa que el orificio situado frente al 6 está en zona negra; hay, pues, que subir el punzón. En resumen: hay que bajar el punzón si la ranura está *en blanco*, y subirle si está *en negro*, hasta el borde inferior o superior respectivamente. El número de golpes de punzón dados sobre el borde superior será el número de decenas transportadas. Con este pequeño modelo podemos, pues, efectuar sumas de columnas de cifras, si retenemos en la memoria el número de golpes superiores. Pero este transporte de decenas puede también automatizarse, si colocamos a la izquierda de la escala móvil otra escala igualmente ranurada y graduada y si deslizamos el punzón a lo largo de una ranura en forma de cayado de la parte superior que haga penetrar dicho punzón en la escala móvil de la izquierda haciéndola descender de un centímetro por cada decena transportada. He aquí el fundamento de las maquinitas de escalas móviles corrientes en el comercio.

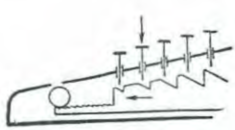


Máquinas de cilindros registradores.—Si la escala de cifras de 0 a 9 se inscribe sobre la superficie lateral de un cilindro, las cifras de las unidades se reproducirán periódicamente y no habrá necesidad de cambiar el sentido del movimiento. Pero sería incómoda la manipulación del punzón girando alrededor del cilindro; la mano pide un movimiento rectilíneo cómodo. Solución: transformar este movimiento en movimiento circular mediante una cremallera cuyos dientes engranen con diez dientes de la rueda (un diente por cada unidad). Cuando la suma exceda de 9, las cifras 0, 1, 2, 3, ... reaparecen, y la decena se transporta al cilindro inmediato mediante cualquier dispositivo saliente de la rueda móvil que impulse a cada vuelta un solo diente de la rueda siguiente.



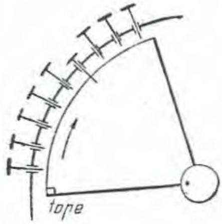


Las indicaciones anteriores sobre los modelos expuestos son suficientes para hacer comprender a los alumnos la mecanización de la adición decimal. Los perfeccionamientos de estas ideas que conducen a las máquinas

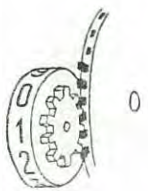


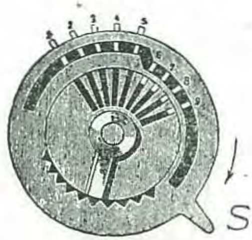
de teclas, a las cajas registradors de los almacenes, etc., son más fáciles de concebir, pues añaden la automatización de un desplazamiento o de un giro proporcional a la cifra inscrita en la tecla pulsada.

Máquinas para multiplicar y dividir.—Con las máquinas para sumar, la multiplicación puede efectuarse mediante adiciones repetidas. Pero en lugar de repetir los desplazamientos aditivos se pueden disponer ruedas motrices cuyo número de dientes pueda variarse a voluntad de 0 a 9, y que engranen directamente con los cilindros registradores. Así, si hacemos sa-

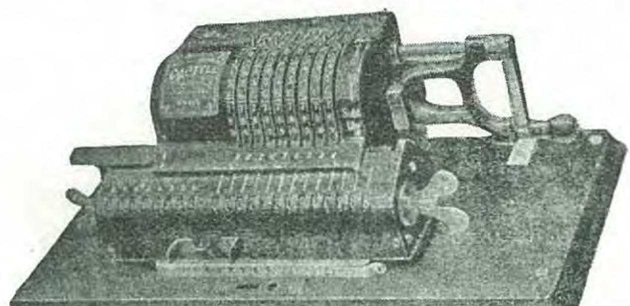


lir 5 dientes de la rueda motriz, siete vueltas completas de la misma harán el mismo efecto que siete desplazamientos consecutivos, con lo que





se registrará el producto 5 . 7. Varios cilindros registradores con sus ruedas correspondientes permitirán así ir sumando consigo mismo un número



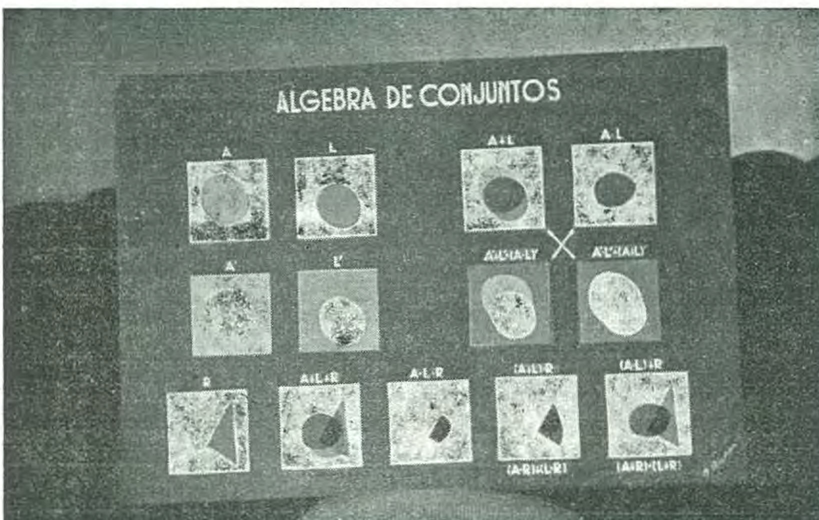
de varias cifras, tantas veces como vueltas se dé al bloque de ruedas motrices donde se halla inscrito. La multiplicación por un número de varias cifras se obtendrá realizando los productos parciales y adicionándoles progresivamente después de desplazar el grupo de cilindros registradores de un lugar decimal a la derecha luego de efectuada la adición del producto parcial anterior.

La división se efectúa inversamente, registrando el dividendo en el grupo de cilindros registradores y el divisor en el grupo de ruedas motrices. Las cifras del cociente se obtienen por el número de vueltas que se puede dar al bloque motor en sentido inverso (sustración) antes de agotar el dividendo o sus restos parciales. Un simple contador de vueltas registra las cifras de dicho cociente.

§ 12. INICIACION AL ALGEBRA DE CONJUNTOS

Presento a los alumnos (5.° a 6.° curso) el tablero que reproduce la figura, donde figuran trozos de celuloide coloreado sobre cuadrados blancos de un decímetro, y les propongo las siguientes cuestiones:

Antonio y Luis tienen sendas colecciones de sellos, y convienen en reunirlas para formar una sola. Representaremos con el cuadrado de un de-



címetro la colección de todos los sellos existentes en el mundo; por A, la colección de Antonio; por L, la de Luis. Indicad las porciones representativas de: 1.° El conjunto (A') de los sellos que no tiene Antonio. 2.° El conjunto de los sellos que no tiene Luis (L'). 3.° La colección que resulta de la reunión de ambas (designada por A + L). 4.° La colección de sellos repetidos (designada A . L). 5.° El conjunto de los sellos que no tienen ninguno de los dos. ¿Cómo designarlo? 6.° El conjunto de los sellos que faltaban a alguno de los dos. ¿Cómo designarlo? 7.° El conjunto de los sellos que faltan a la colección reunida. ¿Cómo designarlo? 8.° El de los sellos que faltan en la colección de los repetidos. ¿Cómo designarlo?

Comparar 5 y 7. Comparar 6 y 8. Deducir las leyes formales de la suma o reunión y del producto o intersección de colecciones complementarias:

$$(A + L)' = A' . L'; \qquad (A . L)' = A' + L'$$

Roberto tiene también una colección que reúne con las precedentes. Esquema de esta reunión en el tablero. Esquema del conjunto de sellos comunes a las tres colecciones (intersección). Comprobar el carácter asociativo y conmutativo de las reuniones y de las intersecciones.

Comprobación de la propiedad distributiva de cada una de estas operaciones respecto a la otra (ver esquemas en el tablero):

$$(A + L) . R = (A . R) + (L . R) \qquad (A . L) + R = (A + R) . (L + R)$$

Si el conjunto de todos los sellos del mundo se representa por «1», y el conjunto nulo por «0», escribir los segundos miembros de

$$A + A = \qquad A . A = \qquad A + A' = \qquad A . A' =$$
$$A + 1 = \qquad A . 1 = \qquad A + 0 = \qquad A . 0 =$$

Encontrar las porciones que interpretan $A . L'$ y $A' . L$; escribir el complemento de su suma $A . L' + A' . L$, e interpretarlo en el tablero.

NOTA.—En esta lección hicimos uso de la notación de suma y producto para las operaciones de *unión* y de *intersección* a efectos didácticos de comparación con las propiedades de la suma y producto del álgebra ordinaria. Pero sabido es que las notaciones corrientes en álgebra de conjuntos son $\cup$ para la unión de conjuntos, $\cap$ para la intersección y $\complement$ para el complemento.

§ 13. SOBRE PERMUTACIONES

Al hablar a los niños de la propiedad conmutativa de la suma, en el primer curso de Bachillerato, varias veces he propuesto como ejercicio ordenar de todos los modos posibles tres sumandos de una suma, y he podido notar que casi todos aciertan en la formación de las seis permutaciones posibles; pero no falta, además, quienes las forman sistemáticamente, mejor diría *reductivamente,* colocando en el primer lugar cada uno de los sumandos y permutando luego los otros dos. Es curioso consignar el hecho de que tales niños (los menos), al preguntarles sobre la seguridad de sus soluciones sistemáticas, no vacilan en afirmar que no les falta ninguna nueva ordenación y que tampoco han repetido ninguna; mientras los que han procedido por tanteos dudan, vuelven a comprobar, a veces añaden permutaciones ya consideradas, etc.; y se ha dado el caso de resolver la duda ideando para ello un proceso sistemático no seguido espontáneamente en el primer intento.

Estas observaciones me indujeron a repetir y a prolongar la experiencia formulándola en su pura esencia combinatoria, es decir, sin manejar datos numéricos ni operaciones con ellos. Se trata, por ejemplo, de formar con lápices o tizas de color todas las banderas posibles de franjas verticales, empezando con sólo dos colores, amarillo y blanco, por ejemplo. Los alumnos pintan las dos banderas fácilmente, que luego se designan abreviadamente ab y ba, utilizando las iniciales de las palabras que designan los colores amarillo y blanco.

Añadiendo otro color designado por c (inicial de colorado), ¿cuáles serán ahora las banderas posibles con los tres colores a, b, c? Les indico que escriban la designación de las banderas unas debajo de las otras, en columna, y he aquí reproducidas algunas soluciones de los niños (de diez a once años):

1.ª	abc	2.ª	abc	3.ª	abc	4.ª	bac	5.ª	bac	6.ª	abc
	cba		cab		bca		abc		cab		acb
	bca		bac		cba		cab		abc		bac
	cab		cba		cab		cba		cba		bca
	bac		acb		acb		bca		bca		cab
	bca		bca		bac		acb		acb		cba
	acb										
	cba										

La primera solución fué corregida por el propio alumno en cuanto formulé la pregunta si tenía la seguridad de no haber repetido alguna bandera. En la solución quinta se aprecia el método seguido de dejar en cada dos consecutivas el mismo color central invirtiendo el sentido de ordenación. Tanto este niño como el de la solución sexta afirmaron estar seguros de haber puesto todas las soluciones sin repetir ninguna. El niño de la solución cuarta rectificó siguiendo la solución sexta en cuanto se le inquirió tal seguridad. «¿Por qué estás seguro ahora y no antes? Explícalo a tus compañeros.» Con ello aprecian todos la ventaja de seguir un método.

Hago intervenir ahora otro color, que designo por *d* (sin preocuparme ya de que responda a la inicial de nombre de color, lo que los niños aceptan sin dificultad alguna). El método que un alumno explicó para tres cunde rápidamente y ya todos van formando las permutaciones que empiezan por *a*, luego las que empiezan por *b*, etc. En este punto pregunto si me pueden anticipar cuántas banderas distintas llegarán a obtener. El alumno de la solución sexta no tarda en decirme al oído: «Dieciocho», y tras breve pausa: «No, veinticuatro.» Espero a que los demás vayan formando las permutaciones, para preguntar al final: «¿Cómo pudo adivinar vuestro compañero que serían veinticuatro antes de concluir de hacerlas?» «¿Cuántas empiezan con el color *a*?» «¿Por qué son seis?» «¿Cuántas empiezan por *b*?» «¿Cuántos grupos de seis formamos así?»

Continúo: «Y con cinco colores *a, b, c, d, e,* ¿cuántas banderas pueden formarse?» «¿Cuántas empiezan por *a*?» «¿Y por *b*?» «¿Cuántos grupos de veinticuatro tendremos?» «¿Cuántas en total?» «¿Y cuántas banderas se podrán formar con seis colores?» Al llegar a este punto la generalización inductiva suele alcanzarse ya, con gran alegría de los pequeños, quienes calculan incluso mentalmente las sucesivas factoriales de 6, de 7 y hasta de 8.

Varío de imagen concreta: «¿Quién me sabe decir ahora de cuántas ordenaciones diferentes pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa? ¿Y siete? ¿Y seis?» Les digo que estas ordenaciones se llaman *permutaciones* y su número se designa 2!, 3!, 4!, 5!... Hago resumir el cuadro de valores obtenidos hasta 8!. «¿Qué operación hemos hecho cada vez?» «¿Qué producto define 3!? Dejadlo indicado. ¿Qué habrá que hacer con él para obtener 4!? Dejadlo indicado. ¿Quién me sabe escribir directamente el producto que define 5!? ¿Y los que definen 6!, 7!, 8!, 9!?»

Algunas veces he terminado la experiencia proponiéndoles (con la finalidad apuntada en la lección sexta) el siguiente problema: «Nueve personas quieren sentarse de todos los modos posibles alrededor de una mesa. En cada minuto se sientan de cuatro modos diferentes. ¿Cuántas semanas tardarían actuando día y noche?»

Pero antes es conveniente prepararles con algún ejercicio previo sencillo, como, por ejemplo: «Si el producto 120 . 8 lo dividís por 8, ¿qué obtendréis? Si el producto 8 . 120 lo dividís por 8, ¿qué obtendréis? Si el producto 4 . 5 . 11 lo dividís por 4, ¿qué quedará? ¿Y si lo dividís por 5? ¿Y si lo dividís por 20? ¿Qué quedará después de dividir 2 . 3 . 5 . .6 . 11 por 6? ¿Y por 10? ¿Y por 60?»

Con estos ejercicios previos se conduce fácilmente la rápida solución del problema planteado, que los niños se sienten tentados de resolver calculando, ante todo, el producto

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$

que da el número de ordenaciones posibles, y dividiéndolo luego sucesivamente por 4, por 60, etc. «No multipliquéis todavía. Dejad el producto indicado. Si nos dicen que forman cuatro permutaciones en cada minuto, ¿cuántos minutos tardarán? ¿Cómo efectuar la división por 4?» Los niños tachan el 4 del producto indicado. «¿Cuántos minutos tiene la hora? ¿Cómo obtendremos las horas que tardarían? ¿Cómo dividiremos por 60? Este resultado es el número de horas. ¿Cómo obtendremos el número de días? ¿Cómo dividiremos por 24? ¿Cómo obtendremos, finalmente, el número de semanas? ¿Qué resultado da?» Los mismos niños han ido tachando sucesivamente los factores hasta quedar reducido el producto al factor 9. Resultado: 9 *semanas*. «¿Habríais terminado tan pronto si hubierais efectuado el producto en vez de dejarlo indicado?»

OTRO PROCEDIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE EL MISMO TEMA

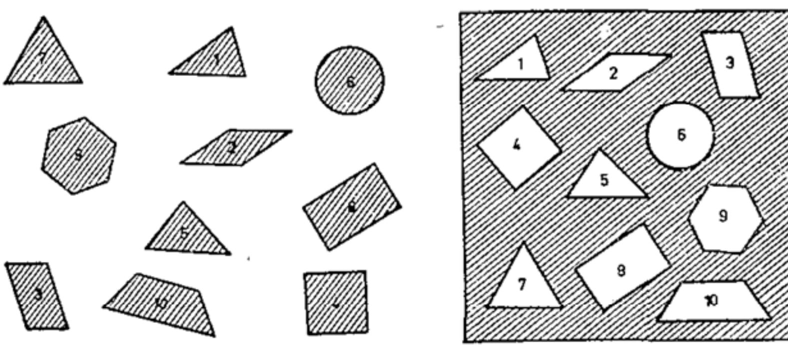
El empleo de colores, letras u otros símbolos tiene la ventaja de que se pueden repetir éstos cuantas veces se quiera y, en consecuencia, se pueden tener simultáneamente presentes todas las permutaciones formadas, lo que invita al método espontáneo de formarlas colocando sucesivamente en primer lugar cada uno de los símbolos, constituyéndose así grupos afines que facilitan el recuento. Pero cabe también personificar los elementos mediante los propios alumnos, y realizar las permutaciones posibles con dos de ellos, con tres, con cuatro..., y así sucesivamente. La dinámica formativa cambia entonces instintivamente de procedimiento con la agregación de alumnos. Estos, al buscar sus posibles colocaciones, en los grupos precedentes, sugieren una nueva ley de formación, que se generaliza con igual o mayor rapidez.

Puede organizarse la lección en forma de juego del siguiente modo: Colocado con mis alumnos frente a un banco, ordeno que se sienten en él dos alumnos y pregunto de cuántos modos se pueden ordenar. Lo hacen. Sentados en una de las dos ordenaciones invito a un tercer alumno a que se siente con ellos y que lo haga de todos los modos posibles. «¿En cuántos lugares te puedes sentar?» Se coloca antes y después de la pareja. «¿No puedes sentarte de otro modo?» No falta entre los presentes quien indica que puede sentarse también en medio de ellos. «Estando como están los dos anteriores, ¿de cuántas maneras puede, pues, agregarse a ellos el tercero?» De tres. «¿Y de cuántas maneras podía ordenarse la pareja anterior?» De dos. «¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse los tres?» Luego de ligeras vacilaciones, complementando el razonamiento con la acción si es preciso, dicen: «De seis.» En una de estas ordenaciones de tres agrego un cuarto alumno y le pregunto: «¿De cuántas maneras puedes agregarte tú a este grupo de tres, sin que ellos se cambien entre sí?» Cuenta los huecos y los extremos y dice sin vacilar: «De cuatro.» «¿Y de cuántas maneras hemos dicho que podían cambiarse entre sí los tres?» Entonces, ¿de cuántas maneras os podéis colocar en total los cuatro?» No tardan en acertar: «De veinticuatro.» «En cada una de estas maneras de sentarse los cuatro, ¿de cuántas maneras puedes agregarte tú? (señalando un quinto alumno)» «¿De cuántas maneras pueden, pues, sentarse cinco alumnos en el banco.» La solución 120 ha sido dada casi instantáneamente por un alumno de los presentes. Desde este momento la inducción ha sido alcanzada y los cálculos se continúan sin dificultad mentalmente, como en la experiencia anterior.

§ 14. INICIACION A LAS SIMETRIAS EN EL PLANO [1]

Un comentario al paso sobre las distintas posibilidades de colocación en su hueco de una loseta, cuadrada o exagonal, lisa, sin dibujos, me sugirió una lección de carácter eurístico sobre la iniciación a las propiedades de las simetrías en el plano, entre niños de primer curso.

El material empleado no puede ser más sencillo: De un simple trozo de cartón o placa de madera se recortan diversas formas geométricas, como



las indicadas en la figura. Los mismos niños pueden ayudar a dibujar y a practicar los cortes, cuando se efectúa el modelo en cartulina. Conviene un juego de cartulina, cartón o placa, con sus huecos y las figuras recortadas correspondientes a ellos, para cada alumno o grupo de dos o tres, con objeto de que todos ellos tengan posibilidades de manipular.

Distribuídos los cartones y echadas en montón las figuras recortadas, los huecos parecen atraerlas, y los niños se dedican inmediatamente a re-

[1] Esta lección fué presentada en la XIX Conferencia Internacional de Instrucción Pública organizada en 1956 por la UNESCO y por la Oficina Internacional de Educación, y fué publicada en la Revista «Archimede» con el título «Una lezione attiva sull'iniziazione alle simmetrie nel piano», año VIII, núm. 4-5. La presente versión se amplía con resultados de experiencias posteriores.

llenar cada hueco con la figura correspondiente, sin necesidad de indicarlo expresamente. La búsqueda de las figuras origina preguntas y ruegos entre ellos: «¿Tienes el trapecio? Acércame el cuadrado...», las cuales me permiten iniciar el diálogo con todos para precisar la nomenclatura de las figuras (que suelen ya conocer). Se establecen, con tal motivo, las distinciones entre los tres triángulos: isósceles (1), equilátero (7) y escaleno (5), así como entre el rombo (2), el paralelogramo (3), el rectángulo (8) y el trapecio (10).

El encaje de piezas planas (de planchas de hierro) en sus huecos fué un hábil recurso utilizado por María Montessori para que los párvulos asocien, jugando, la forma de las figuras con su percepción visual y hasta táctil (haciéndoles operar a ciegas). Proponemos aquí el empleo de esta actividad, años más tarde, en un sentido mucho más amplio, como dinamismo creador de las nociones de simetría, para lo cual no sirve ya el material Montessori, no tanto por la limitada selección de formas, sino por la imposibilidad de inversión de cara, operación esencial en la génesis del concepto de simetría con respecto a un eje. (Las plaquetas Montessori llevan un botoncito adherido a una cara para su más cómoda manipulación, botón que constituiría aquí un impedimento.)

SIMETRÍAS CON RESPECTO A UN EJE

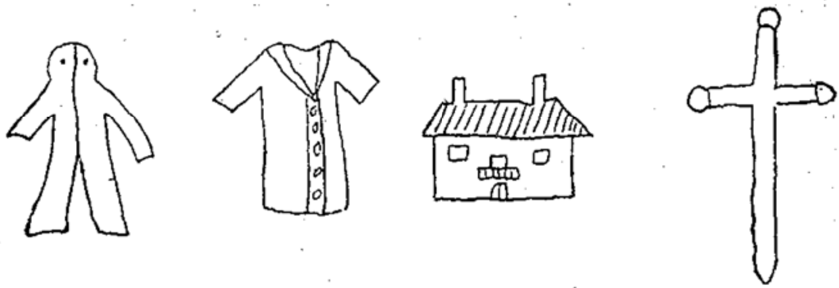
La actividad investigadora de los niños se inicia con la pregunta:

«¿De cuántas maneras puede colocarse el triángulo isósceles en su hueco?»

La respuesta y manipulación consiguiente les resulta fácil: «De dos», y ponen tan pronto una como la otra cara encima. Entonces llamamos (provisionalmente) *simétricas* todas las figuras planas que pueden colocarse de dos maneras en su hueco, cambiando de cara. «¿Existen otras figuras simétricas en el juego?» Las analizan fácilmente. Todas resultan simétricas, menos el paralelogramo y el triángulo escaleno.

Una vez efectuada por ellos esta investigación previa, les pido que me dibujen en su cuaderno figuras simétricas más complicadas, libremente. A continuación reproduzco algunas de las muchas figuras que dibujaron (la fantasía de los niños es inagotable; además de las que aquí reproducimos, dibujaron árboles, puertas, ventanas, estrellas, hojas, mariposas, etc.).

Por mi parte, les presento un monigote simétrico de papel recortado de una cuartilla plegada y les pregunto cómo he acertado a hacerlo tan perfectamente simétrico. Descubren el doblez y recortan otros del mismo



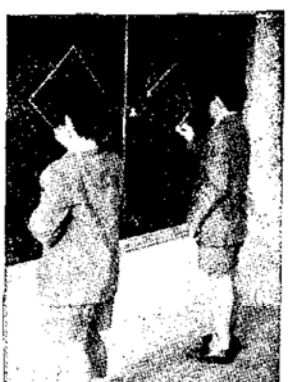
modo. Este doblez da la noción de *eje de simetría*, y la figura se llamará desde ahora simétrica respecto de dicho eje. «Señaladme los ejes de simetría de las figuras que antes habéis dibujado.» Lo hacen fácilmente, y entonces descubren que algunas tienen más de un eje de simetría.

«¿Cuáles son las figuras del juego que tienen también más de un eje de simetría?» Después de animada discusión, las descubren y van señalando los ejes que encuentran. «¿Cuántos ejes de simetría tiene el triángulo equilátero? ¿Cuántos el cuadrado? ¿Cuántos el exágono regular? ¿Cuántos ejes de simetría tiene el círculo? ¿Se pueden contar?»

Muchos ejercicios e ideas derivadas pueden intercalarse aquí, si se desea, sobre el manejo de ejes de simetría. Por ejemplo: indicar letras del alfabeto con un eje, con dos ejes de simetría; forma que tendrá la figura obtenida por un corte practicado en una cuartilla doblemente plegada (con dos dobleces perpendiculares); dibujar dicha figura antes de desdoblar la cuartilla, etc.

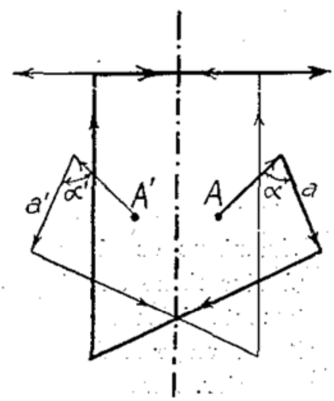
Pero es conveniente llevar en este momento la acción al encerado para cultivar la intuición de la simetría de elementos geométricos mediante el siguiente dinamismo: Empiezo trazando un eje vertical y un punto A exterior a él. «Si en este punto A cae el pulgar de la mano derecha de un monigote simétrico con respecto al eje trazado, ¿dónde caerá el pulgar de la mano izquierda?» No les cuesta dificultad señalarlo a ojo, con aproximación satisfactoria. La dificultad empieza a presentarse cuando repito el ejercicio inclinando el eje. Es frecuente que algunos alumnos intenten situar también ahora la mano simétrica en una misma horizontal, tal es la persistencia implícita de la noción de verticalidad del hombre. «Pensad que un monigote puede tomar muchas posiciones y advertid cómo he marcado su eje.» No les cuesta gran trabajo rectificar, y entonces se precisa y se discute la mayor o menor inclinación de la línea de referencia sobre la que se situará el punto simétrico y la distancia del mismo al eje, hasta explicar en forma precisa y concreta, con la intervención de todos, la posición de dicho punto simétrico. Es curioso comprobar una vez más que la mayor dificultad en estas edades no es tanto intuir la verdad como adquirir consciencia de ella y lograr expresarla. Se consigna en los cuadernos que «Dos puntos simétricos respecto de un eje están en una misma perpendicular a él y a igual distancia».

Un juego muy interesante, desde el punto de vista formativo de la intuición de simetrías y que suele divertirles mucho, es el siguiente: Señalado un eje vertical en el encerado, sitúo un alumno a su derecha y otro a su izquierda, y propongo a uno de ellos que dibuje libremente y poco a poco una figura de trazos rectilíneos, ordenando al otro que vaya dibujando la figura simétrica. Cuando compruebo que lo sabe hacer sin errores de concepto (aunque con la inevitable torpeza de movimientos) invierto los papeles, de modo que sea él quien conduzca la acción para que el otro regule los movimientos simétricos. A lo largo de este juego pueden surgir los comentarios instructivos sobre la igualdad de longitudes y ángulos simétricos. «Si el operador que «manda» cruza el eje, ¿qué hará el otro?» (Eje como lugar de puntos dobles en la simetría.)



Si el operador que «manda» es el propio profesor, puede conducir la actividad del niño que le hace réplica con miras a la más rápida explicitación de las propiedades de la simetría, al tiempo que estudia y analiza las reacciones del niño que le sigue y de la clase entera. Es importante *cruzar* el eje de simetría; cuando el compañero de juego se da cuenta de tal intención acelera su trazado para concurrir en el eje simultáneamente. Latente está, pues, la intuición de que el eje es el lugar de puntos dobles. Trazado un dibujo como el que la figura indica, la réplica fue correcta (salvo las naturales imperfecciones del trazado a pulso), como asimismo fueron correctas la contestaciones a las siguientes preguntas (pese a su enunciación capciosa y a las imperfecciones de diseño mencionadas):

«¿Qué segmento es mayor, el *a* o el *a'*?» «¿Qué ángulo es mayor el α o el α'?» «¿Qué podemos decir de los segmentos simétricos?» «Idem de los ángulos simétricos.» «Si una recta es paralela al eje, ¿qué podemos decir de la simétrica?» «Si dos rectas simétricas no son paralelas, ¿dónde se cortan?» «Y si una recta es perpendicular al eje, ¿cuál es su simétrica?» No ha costado trabajo a los niños responder que «ella misma». Con el trazado han adquirido la intuición de la existencia de rectas dobles perpendiculares al eje.



Señalo ahora dos puntos simétricos O y O' y manipulo con un cordel como si me dispusiera a trazar una circunferencia de centro O, pero sin llegar a trazarla. Pregunto si han adivinado lo que voy a dibujar y quién es capaz de dibujarme la circunferencia simétrica. Inmediatamente un niño ha cogido otro cordel, lo ha ajustado al mío para igualar su radio, y se dispone a trazarla. Le interrumpo y antes de trazar una y otra circunferencia pregunto a la clase dónde se cortarán. La respuesta es inmediata: «En el eje.» Entonces borro dicho eje y pregunto cómo podríamos reconstruirlo. Las circunferencias son trazadas inmediatamente y unidos los puntos de intersección. En esta forma enlazo las propiedades de la simetría con las construcciones clásicas de trazado de mediatrices, perpendiculares, bisectrices, ... con regla y compás. Por cierto que al señalar en una cuartilla dos puntos A y A', diciendo que son simétricos, y al preguntar «¿Dónde está su mediatriz o eje de simetría?», no ha faltado un chiquillo avispado que ha resuelto instantáneamente la cuestión plegando la cuartilla en forma de que quedaran superpuestos A y A'.

SIMETRÍAS CON RESPECTO A UN CENTRO

La forma de conducir la actividad anterior sugerirá fácilmente al lector, sin necesidad de fatigarle con más detalles, el modo de iniciar el concepto de simetría respecto a un punto y sus propiedades. Se puede partir ahora de la colocación del paralelogramo (3) en su hueco (única de las figuras del juego que tiene simetría central, sin tenerla axial). «¿De cuántas maneras se le puede colocar?» También de dos, pero con la diferencia de que ahora no se puede cambiar de cara. Se comparan las dos colocaciones posibles y se pregunta: «¿Qué movimiento hay que dar a la figura para pasar de una colocación a la otra?» El giro de media vuelta, o 180 grados, alrededor de un punto (punto de intersección de las diagonales en el paralelogramo) se llama *simetría respecto de este punto como centro.* «¿Qué otras figuras hay en el juego que sean simétricas respecto de un centro, y dónde está colocado dicho centro?» «Indicar y dibujar letras simétricas respecto de un centro.»

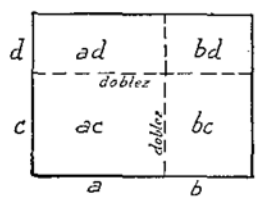
Dinamismo en el encerado sobre simetrías respecto a centros, análogo al dinamismo anterior. Situación de puntos simétricos. Se presentan ciertamente dificultades para concebir ahora y realizar los movimientos simétricos respecto de un centro, por la poderosa influencia de la simetría anterior. Pero esta misma dificultad tiene la contrapartida, ventajosa desde el punto de vista didáctico, de estructurar de un modo eficaz y profundo (puesto que en esta toma de conciencia participan simultáneamente los sistemas visual y motor) la diferencia entre las dos clases de simetría. Me resultó particularmente digno de notar la facilidad con la que descubrieron el paralelismo de las rectas simétricas.

NOTA.—Al comentar con alumnos universitarios, presentes en tal experiencia didáctica, la facilidad con que son intuídas las propiedades de las simetrías por los niños, en contraste con las dificultades que parecen hallar alumnos mayores educados al modo clásico, les propuse la explicación psicológica siguiente, que parece natural: Originariamente toda simetría es una estructura sintética global de la que adquirimos consciencia antes que de la simetría entre elementos. El método clásico de empezar definiendo la simetría entre puntos para ascender de ella a la simetría entre figuras, es contrario a la génesis auténtica de la intuición de simetría, y constituye un ejemplo más de lo discutible que es el aforismo pedagógico de que la mente procede de lo simple a lo complejo.

«Lo simple», en este caso el punto, es, por el contrario, una abstracción, a la que se llega a través de lo complejo, la figura. Así se explica el proceder de algunos niños que para hallar el punto simétrico de uno dado respecto de un eje forman un triángulo con vértice en el punto y base en el eje y construyen luego el triángulo simétrico; en una palabra, sumergen el punto en una figura para hallar el punto correspondiente de la figura simétrica. Lo didáctico no es, pues, empezar definiendo la simetría entre puntos, sino cultivar directamente la simetría en figuras y entre figuras, como hemos hecho, organizando estructuralmente sus propiedades en la mente del niño, y haciendo tomar consciencia de ellas por un análisis estimulante de la situación.

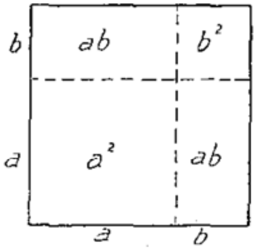
§ 15. SITUACIONES DIDACTICAS OBTENIDAS POR PLEGADO

Como acabamos de ver, el plegado de una hoja de papel es una operación que permite materializar la simetría de un plano respecto a un eje, constituyendo un eficaz recurso para la verificación de sus propiedades. Esta simetría puede, asimismo, realizarse directamente mediante la lámina de vidrio vertical, con borde rectilíneo, como espejo transparente, descrita en el capítulo anterior. Vimos allí cuán interesantes construcciones podían realizarse haciendo uso oportuno de las construcciones de simetría. No insistiremos aquí nuevamente sobre esa geometría fundada en las operaciones de simetría.

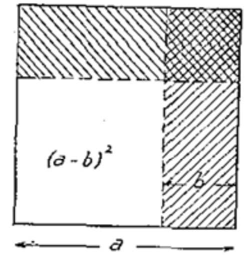


I

Pero el plegado del papel puede ser utilizado también como ilustración concreta de varias leyes del Algebra, de la Geometría, de la Trigonometría, etc. Presentamos algunos ejemplos obtenidos plegando hojas cuadradas y rectangulares.



II

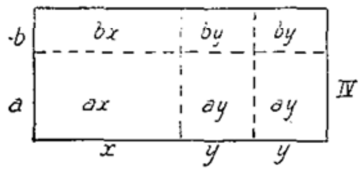


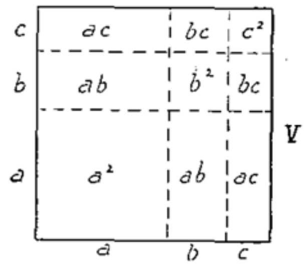
III

I) $(a + b)(c + d) = a\,c + b\,c + a\,d + b\,d$

II) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$

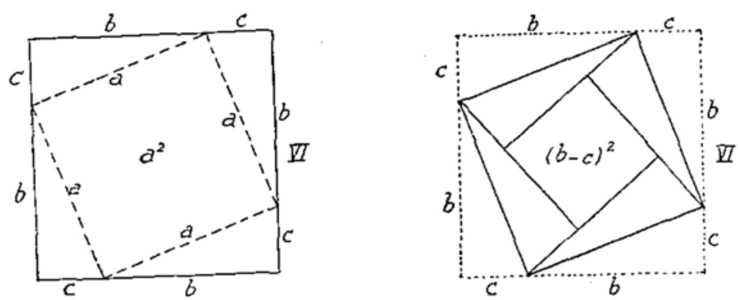
III) $(a - b)^2 + 2\,a\,b - b^2 = a^2$



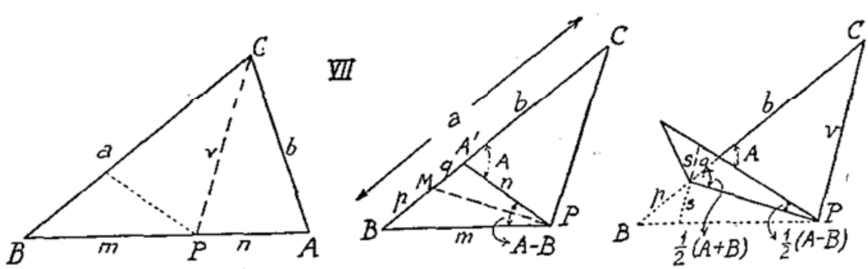


IV) $(a + b)\,(x + 2\,y) = a\,x + b\,x + 2\,a\,y + 2\,b\,y$

V) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,b\,c$



El modelo VI nos ofrece una ilustración del teorema de Pitágoras, en la forma $(b + c)^2 - 2\,b\,c = a^2$ y también de la relación $(b + c)^2 - 4\,b\,c = (b - c)^2$.



El plegado del papel triangular (modelo VII) sugiere varias cuestiones:

1.ª Cálculo de los ángulos de los triángulos obtenidos por plegado.

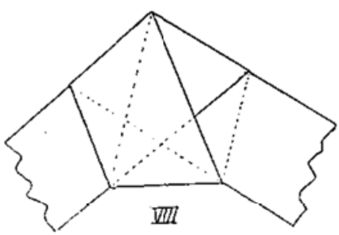
2.ª Comparación de las áreas de los triángulos CPA y CPB ($m : n$ antes; $a : b$, después del plegado). De donde, $m : n = a : b$ (Teor. de la bisectriz).

3.ª Comprobar que la división CA'MB es armónica ($m : n = p : q = a : b$).

4.ª Demostración tel teorema de las tangentes

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)} = \frac{v}{s} = \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{a+b}{p+q} = \frac{a+b}{a-b}$$

El modelo VIII, pentágono regular obtenido por plegado, permite observar por transparencia los triángulos semejantes isósceles formados por las diagonales y los lados (ángulos de 36°, 72°, 108°). Esta semejanza permite deducir que el lado es la sección áurea de la diagonal.



VIII

El hecho de que este *nudo* dé un pentágono regular se desprende de las simetrías del plegado. Los ángulos contiguos a cada lado deben ser iguales, por ser alternos internos entre los bordes paralelos de la banda al desdoblar. Pero también dos dobleces consecutivos son simétricos (con eje normal a la banda) por verificar ambos una misma condición (el borde inferior, después de cada doblez, tiene que pasar por el punto del otro doblez en el borde superior). De estas simetrías resulta la igualdad de los cinco ángulos, y, por consiguiente, también de los cinco lados (secciones igualmente inclinadas de la misma banda).

§ 16. HACES DE ELIPSES E HIPERBOLAS HOMOFOCALES

Estaba presentando en forma amena, a los niños de primer curso, el concepto de mediatriz como lugar geométrico de puntos equidistantes de dos fijos, haciendo sostener a dos niños, A y B, los extremos de un largo cordel en el que había señalado con un nudo el punto medio, mientras un tercero, a ojos cerrados, describía dicha mediatriz manteniendo tensas las dos mitades, de las que iba quitando simultáneamente la misma cantidad de hilo, según indican las figuras adjuntas.

«De esta manera, les decía, hasta un ciego puede trazar rectas perpendiculares en su jardín. ¿Qué camino sigue el alumno a ciegas? ¿Por qué?...»

La actividad se desenvolvía simultánea al interrogatorio analítico, conducente a la conclusión de la naturaleza y propiedad del lugar.

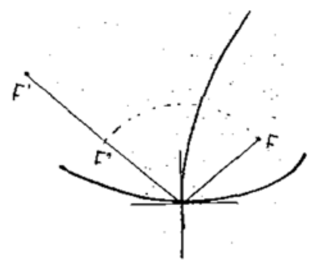
Pero, hallándose presentes, en el patio donde operábamos, alumnos de cuarto curso (que ya tenían noción de la elipse y de la hipérbola) pensé de pronto que también podía hacerles participar en el dinamismo planteado variando la situación inicial. Deshice el nudo medio, y al hacerles repetir la experiencia partiendo de un punto visiblemente no equidistante de los extremos A y B, se vió asimismo que ya no era recto el lugar. «¿Qué curva estamos describiendo ahora?» No se conservaba ya la equidistancia; pero algo se conservaba todavía. «¿Qué era?» No les fué difícil darse cuenta de que al ir quitando lo mismo de los dos ramales, permanecía invariante la diferencia de longitud entre ellos y, por tanto, que la curva descrita era la hipérbola.

Surgió así un nuevo modo de trazar hipérbolas en el jardín y en el encerado, parangonable al método clásico del jardinero para la elipse,

puesto que no exige más que el manejo exclusivo del hilo o cuerda, trazado que no he visto, por cierto, en ninguno de los libros de geometría que conozco.

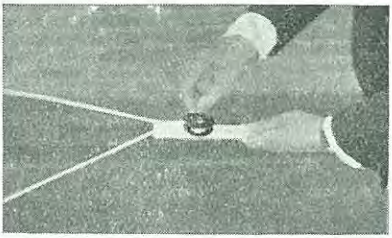
Pero no terminó aquí el análisis del movimiento obtenido. La comparación de los dos movimientos respectivamente generadores de la elipse y de la hipérbola nos sugirió las propiedades de las tangentes y su ortogonalidad.

He aquí cómo conduje el descubrimiento intuitivo de dichas propiedades. Al partir de la posición de equidistancia, la hipérbola se transforma en recta bisectriz de los dos ramales (radios vectores). El movimiento del punto al engendrar la elipse partiendo de la misma posición es de dirección perpendicular en este punto a la anterior dirección. Pero, «¿y en otra posición cualquiera en la que los radios vectores sean distintos?» Hago sujetar el punto F'' del ramal más largo situado a una distancia del punto generador igual al ramal más corto y pregunto: «Operando a ciegas, ¿notaríamos *en seguida* el cambio del segundo punto fijo (foco) sobre el radio vector?» El término *en seguida* lleva implícita la noción de infinitésimo y, aunque parezca escandaloso para una mentalidad rigurosa, es suficiente para sugerir que no se nota el cambio de dirección en el instante inicial. También puede emplearse si se quiere la locución, menos aconsejable, «en el primer instante», que carece de sentido matemático, pero que tiene sentido intuitivo suficiente para ellos. Si la contestación se resiste, se hace la experiencia cambiando el radio en una circunferencia trazada asimismo a cordel. Es curioso consignar aquí el hecho de que, repetida la experiencia y la pregunta con alumnos auténticamente ciegos, la interpretaron y contestaron correctamente de modo inmediato.

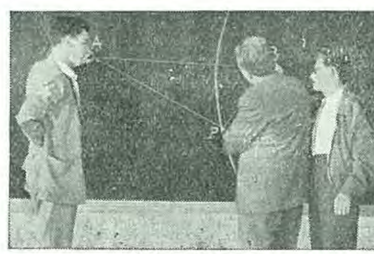


Abreviando: Si las direcciones iniciales de los arcos de la elipse y de la hipérbola trazados no varían al desplazar un foco a lo largo del radio vector, basta imaginar igualados en todo momento ambos radios vectores para concluir que las tangentes siguen siendo las bisectrices de los ángulos formados por tales radios y sus prolongaciones, y que, por consiguiente, cualquiera que sea la posición de partida, la elipse y la hipérbola, trazadas con ambos modos de generación, son ortogonales entre sí. Naturalmente que no pretendemos reemplazar con estas consideraciones intuitivas la demostración rigurosa de la propiedad, cuya necesidad puede surgir como consecuencia del descubrimiento. Cambiando la longitud del cordel, así como del punto de partida, podemos obtener de este modo los dos haces de elipses e hipérbolas homofocales ortogonales.

Estos trazados nos sugirieron más tarde la realización de un aparatito muy sencillo que permite la variación de los parámetros a voluntad del operador que lo manipula. El cordel se cierra sobre sí mismo y se arrolla a una bobina después de pasar por los orificios A y B practicados en dos plaquitas de manera que son las que sostienen los alumnos, de modo que dichos orificios marcan los focos de los dos haces de cónicas. Si los



alumnos presionan con el dedo los orificios, inmovilizan la circulación del cordel y el operador puede trazar la hipérbola arrollando y desarrollando el hilo en la bobina. Por el contrario, manteniendo sujeta la bobina para impedir su giro y dejando libres los orificios de las plaquitas el hilo se deslizará por ellos al moverse el operador, el cual, manteniendo



siempre tenso el hilo, describirá la elipse ortogonal a la anterior en el mismo punto de partida. De esta suerte el operador, con la simple orden de presionar o dejar libres los orificios, puede describir a voluntad las cónicas ortogonales de ambos haces hasta el límite que permite la longitud del cordel.

§ 17. POSICIONES DE RECTAS Y DE PLANOS

En el capítulo V hemos insistido en la conveniencia de fomentar la intuición directa de las propiedades del espacio euclídeo antes de proceder a su organización deductiva, muy especialmente en lo que se refiere a la geometría del espacio. Describimos a continuación un modo de conducir la actividad eurística de una clase con alumnos de segundo curso de Bachillerato para iniciarles en las propiedades de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos en el espacio [1].

Materializamos las rectas mediante agujas de tricotar y los planos mediante carpetas de cartón, corrientes en las papelerías, y también mediante algunos trozos sueltos de cartón plano de contorno irregular. Hemos elegido material usual barato y manipulable para hacer intervenir el gesto y el movimiento en las adquisiciones de conciencia de las propiedades espaciales. Reparto, pues, carpetas, cartones y agujas entre los niños, y comienzan las preguntas y la acción.

INCIDENCIA

1. «¿Quién ha visto un plano completo? Los cartones y las carpetas que os he dado, ¿representan planos completos o trozos de plano?» (No hay que forzar las respuestas, sino dejar que entre los mismos niños las comenten y las vayan rectificando y ajustando al resultado de los comentarios.) «La superficie de la mesa, la carpeta y el trozo de cartón que hay sobre ella ¿son planos distintos o trozos distintos de un mismo plano? Colocando dos mesas una al lado de otra, ¿sus superficies son planos dis-

[1] En líneas generales esta experiencia coincide con la descrita en el librito sobre *Didáctica Matemática eurística* (lección 24), repetidamente citado; pero después de introducir algunas variaciones, especialmente la de representar los planos no sólo por carpetas, sino también mediante trozos irregulares de cartón plano, con objeto de neutralizar, cuando es preciso, algunas sugestiones inconvenientes de los bordes rectilíneos.

tintos o trozos distintos de un mismo plano? ¿Y si las separáis? ¿Varía el plano al correr la mesa? ¿Podéis prolongarme este trozo de plano (presentando en el aire una carpeta horizontal) con vuestras carpetas y cartones? ¿Están todas en un mismo plano? ¿Podéis separarlas sin que dejen de estarlo? Más separadas aún, ¿dónde termina el plano?»

2. Análogo juego con las agujas, empezando por la pregunta: «Cada aguja ¿representa una recta o un segmento?», y concluyendo: «¿Dónde termina la recta?»

3. «¿Quién ha visto un punto? ¿Cuántos puntos hay en una recta? ¿Y en un plano? Señaladme un punto en las agujas que os he dado, y en las carpetas y cartones. Con las puntas de las agujas señaladme tres puntos que no estén en línea recta. Ahora señalad dos puntos que no estén en línea recta. (Tras un momento de perplejidad afirman que no puede hacerse.) Entonces, ¿dos puntos están siempre en línea recta? ¿Y cuántas rectas pasan por estos dos puntos?»

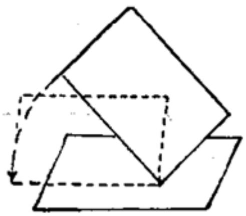
4. «Señaladme cuatro puntos que no estén en un mismo plano. Señaladme tres puntos que no estén en línea recta y que tampoco estén en un mismo plano. ¿No es posible? Entonces, ¿cuántos planos pasan por estos tres puntos? ¿Y si los tres puntos están en línea recta?»

5. «Colocadme una recta y un punto fuera de ella, de tal modo que no estén en un mismo plano.» Los mismos niños manifiestan la imposibilidad. «¿Cuántos planos pasan por una recta dada? ¿Y por una recta y un punto fuera de ella?»

6. «Colocadme una recta y un plano de manera que tengan un solo punto común.» Los niños suelen apoyar la aguja en la carpeta. Entonces separo la aguja, deslizándola sobre sí misma, y pregunto: «¿Y ahora siguen teniendo un punto común? ¿Termina la recta en algún punto? ¿Tiene la recta puntos del otro lado del plano? Colocadme una recta y un plano de modo que no tengan ningún punto común. Diremos que son *paralelas*. ¿Tiene ahora la recta puntos a distinto lado del plano? ¿Podéis colocarme una recta de modo que tenga *dos* puntos, y sólo estos dos puntos comunes con el plano? ¿Qué le pasa, pues, a una recta que tiene dos puntos en un plano?»

7. «Colocadme dos planos de modo que no tengan ningún punto común. Diremos que son *paralelos*. Colocadme dos planos de modo que tengan un punto común *y nada más que este punto*. ¿Es posible? ¿Dónde termina cada plano? El plano de la carpeta apoyada por un punto en otro

(ver figura), ¿tiene puntos del otro lado de éste? ¿Tiene otros puntos comunes con éste? ¿Dónde están?» (En caso necesario se puede abreviar la perplejidad girando la carpeta en su propio plano alrededor del vértice de contacto hasta que se apoye por todo un borde.) «¿Está la carpeta en el mismo plano de antes? ¿Qué tiene de común con el otro plano? ¿Cómo enunciaremos este descubrimiento?» (Puede añadirse aquí, si se desea, la noción de semiplano, como antes pudo añadirse la de semirrecta.)



8. «Colocad dos rectas que se corten.» Los niños suelen colocar las agujas secantes o incidentes en un extremo común. Entonces las separo, manteniéndolas coplanarias sin que dejen de converger ostensiblemente, y pregunto: «Y ahora, ¿siguen cortándose? ¿Están ambas rectas en un mismo plano? ¿Podéis colocar estas dos rectas de modo que sean paralelas? ¿Están en un mismo plano? ¿Podéis colocar las dos rectas de modo que no se corten ni sean paralelas? ¿Están entonces en un mismo plano? Se les da el nombre de *rectas cruzadas*. Señaladme rectas cruzadas en esta habitación. ¿Qué podéis decir de dos rectas que no están en un mismo plano? ¿Pueden ser paralelas? ¿Pueden cortarse? Colocad vuestras rectas de modo que se crucen con la mía. Colocad vuestras rectas de modo que se corten con la mía.»

9. «Colocadme tres rectas de modo que cada una de ellas corte a las otras dos.» Los niños suelen colocarlas formando triángulo, es decir, en un plano. Entonces les repito la cuestión añadiendo la condición de que no estén las tres rectas en un mismo plano. (La observación de los titubeos suele ser muy instructiva.) Algún niño suele acertar colocando las tres agujas concurrentes en un vértice, formando triedro.

PARALELISMO

10. «Colocadme una carpeta y un cartón de modo que sus planos sean paralelos. Colocadme vuestra carpeta paralela a mi cartón. Vuestro cartón paralelo a mi cartón. Vuestra carpeta paralela a mi carpeta.» Los niños suelen colocar no sólo paralelos los planos, sino también los bordes, de modo que al girar en su plano mi carpeta, hacen intención de girar también la suya. Entonces tapo la carpeta con un trozo de cartón de borde

irregular. Ya no mueven las carpetas [2]. «Por un punto, ¿cuántos planos podéis trazar que sean paralelos al mío?»

11. «¿Podéis trazar un plano paralelo a estos dos que se cortan?» Negativa espontánea. «Colocados dos planos paralelos, ¿podéis trazar un plano que corte a uno de ellos sin cortar al otro?» Nueva negativa. Enunciado de la propiedad.

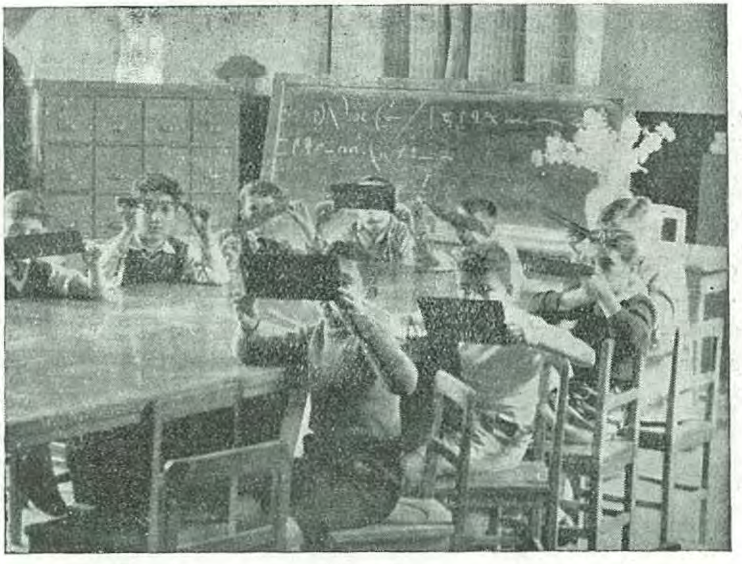
12. «Colocad vuestras rectas paralelas a mi plano.» Si hago uso de una carpeta, se manifiesta general tendencia a colocar las agujas paralelas

a los bordes de la carpeta, lo que implica el reconocimiento intuitivo de la propiedad de ser una recta, exterior a un plano, paralela a él con sólo serlo a una sola de sus rectas. Otras veces ha habido algún alumno que ha elegido la dirección de las horizontales del plano, especialmente si, para neutralizar la sugestión de los bordes, hago uso del cartón de borde irregular. En el primer caso, al girar mi plano (carpeta) suelen girar los alumnos sus rectas. «¿Es que mi plano ha variado al girar? ¿Cuántas paralelas pueden trazarse a un plano por un punto?» Reconocen la exis-

[2] En experiencias anteriores, al empezar pidiendo que colocaran tres carpetas en forma de que sus pianos fueran pararelos entre sí, empezaban la mayoría colocando las tres carpetas sobre el plano de la mesa con los bordes paralelos. La discriminación entre paralelismo y coincidencia, entre plano y porción de plano, y entre paralelismo de planos y de bordes, eran pasos que había que dar partiendo de la misma situación. Por ello nos ha parecido preferible en experiencias posteriores separar las dificultades con situaciones adecuadas.

tencia de infinidad de paralelas. «Indicar rectas y planos paralelos en la habitación.»

13. Les indico que coloquen dentro de cada carpeta una aguja a lo largo del doblez, de modo que cada carpeta pueda girar como una bandera alrededor de la aguja. «Colocad vuestra aguja cruzada con la mía y el plano que pasa por ella paralelo a mi aguja. ¿Cuántos planos pueden tra-



zarse por una recta paralelos a otra? Y si colocáis vuestra aguja paralela a la mía, ¿cuántos planos pasarán por ella paralelos a mi aguja? ¿Cuántos planos paralelos a una recta dada pueden trazarse por un punto exterior a ella?»

14. «¿Podéis trazar por una recta cualquiera un plano horizontal? ¿Qué tiene que ser la recta? ¿Podéis trazar por una recta cualquiera un plano paralelo a mi plano? ¿Qué tiene que ser vuestra recta con respecto a mi plano?»

PERPENDICULARIDAD

15. «Colocad vuestras rectas perpendiculares a mi plano. ¿Cuántas de ellas se pueden trazar por un punto? Distancia de este punto al plano. ¿Cómo se mediría?»

16. «Colocad vuestros planos perpendiculares a mi recta. ¿Cuántos de ellos se pueden trazar por un punto?»

17. «Colocad vuestro plano perpendicular al mío. ¿Cuántos podéis trazar por un punto?»

18. «Colocad vuestra recta perpendicular a mi recta. ¿Cuántas podéis trazar por un punto?» Desplazo mi recta paralelamente manteniendo ellos la perpendicular trazada, de modo que ambas se crucen, y pregunto: «¿Siguen siendo perpendiculares?» De momento parecen dividirse las opiniones, pero prevalece el criterio afirmativo. «¿Cómo sabremos, pues, si dos rectas cruzadas son perpendiculares?»

19. «¿Podéis trazar por una recta cualquiera algún plano vertical? ¿Cuántos? Y si la recta es ella misma vertical, ¿cuántos planos verticales pasarán por ella? ¿Podéis trazar por una recta cualquiera algún plano perpendicular a mi plano? ¿Cuántos? ¿Y si la recta dada es ella misma perpendicular a mi plano?»

20. «Dos rectas perpendiculares a un mismo plano ¿son siempre paralelas entre sí? ¿Y dos rectas perpendiculares a una misma recta? ¿Dos planos perpendiculares a un mismo plano son siempre paralelos entre sí? ¿Y dos planos perpendiculares a una misma recta? Dos rectas verticales, ¿son paralelas? ¿Y dos horizontales?»

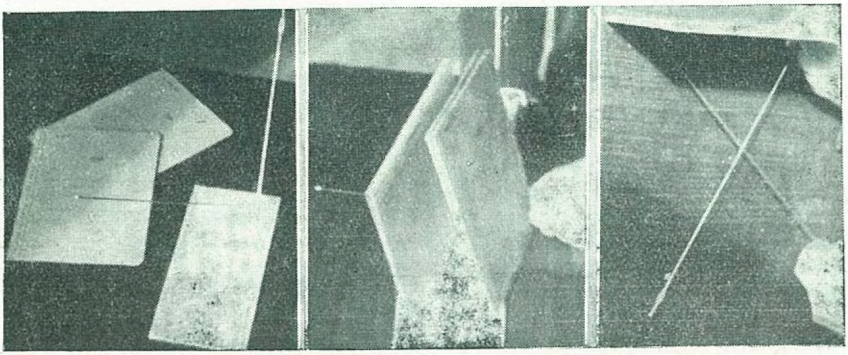
ÁNGULO Y DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS

21. Las situaciones y preguntas anteriores acaban de sugerir el desplazamiento paralelo de una de las rectas cruzadas hasta cortar a la otra, o, lo que es lo mismo, el trazado, por un punto de una de ellas, de una paralela a la otra. Esta operación, si es fácilmente asimilada por los alumnos, va a consentir la formulación de preguntas más generales y difíciles.

La primera: «¿Cómo averiguaremos el ángulo de estas dos rectas cruzadas?» Las materializo con dos agujas. Con objeto de poder yo mismo intervenir en las manipulaciones de los alumnos, dejo las agujas clavadas en una base de corcho o de madera.

22. La segunda: «¿Cómo averiguaríamos la distancia entre estas rectas?» Esta distancia puede materializarse mediante una goma tensa entre las dos agujas. Pero la imprecisión que el mismo rozamiento de la goma produce invita a precisar en debida forma la posición de la perpendicular común. Empiezo proponiendo el trazado por cada aguja de un plano

paralelo a la otra, lo que efectúan fácilmente con el auxilio de las carpetas. Al llegar a este punto, la manera más sencilla de sugerir lo que procede hacer es mover el conjunto hasta que las dos rectas (y por tanto



los planos paralelos por ellas trazados) se coloquen horizontales. Ven entonces que la distancia entre las rectas es la que existe entre los planos paralelos trazados, y que la proyección de cada recta sobre el plano paralelo corta a la otra en el pie de la perpendicular común.

§ 18. VOLUMEN DE PRISMAS Y DE PIRAMIDES

La presente lección constituye una muestra del uso didáctico de los geoespacios descritos en el capítulo anterior. Empiezo recordando a los niños (doce años) la obtención del volumen de un ortoedro o prisma recto rectangular. «Si os doy un metro, ¿cómo hallaréis el área del pavimento de esta sala? ¿Cómo hallaréis su volumen? ¿Qué nueva medida habéis necesitado? ¿Cómo podéis enunciar la regla para obtener dicho volumen?» Enuncian: «El producto de las tres dimensiones», o también: «Area de la base por la medida de la altura.» Se razona la equivalencia de ambas reglas. «Si os digo que esta pared tiene 50 m^2 y el ancho de la clase es de 7 metros, ¿cuál es el volumen? ¿Qué cara del prisma ha hecho ahora de base?»

VOLUMEN DE PRISMAS

1. Presento en un geoespacio un modelo de ortoedro, materializando (fig. 1) cuatro de sus aristas paralelas mediante varillas metálicas (agujas de tricotar), y las caras perpendiculares a ellas mediante cortornos rectangulares de gomas con una pareja de diferente color (amarillo y rojo cada pareja) en cada cara. Pregunto a los niños: «¿Qué cuerpo limitan las varillas y las gomas? ¿Cómo obtendríamos su volumen?» Moviendo el geoespacio acentúo la relatividad de la noción de base y altura, ya apuntada en el ejemplo anterior de partida.

2. Desdoblo ahora, según diedros iguales, las parejas de gomas, como indica la figura 2, de modo que se han formado dos primas. Uno de base rectangular, de gomas amarillas, y otro de base paralelográmica, de gomas rojas. «¿Cuál de los dos prismas tiene mayor volumen?» Afirman sin titubear que ambos volúmenes son iguales. «¿Por qué?» Ven que para pasar del amarillo al rojo se le agrega un prisma igual al que se le quita por el otro lado. Y lo mismo les ocurre a las dos bases, que siguen siendo

equivalentes, conservándose, asimismo, la altura. «¿Cómo podemos, pues, enunciar la regla para calcular el volumen del prisma cuya base es un paralelogramo?» Sigue valiendo la regla: Area de la base por altura.

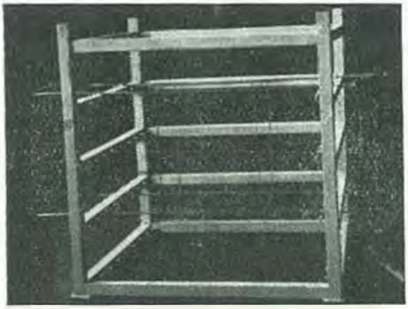


Fig. 1

Fig. 2

3. Restituyo las gomas rojas a su primitiva posición (ortoedro) y ahora deslizo, por igual, la pareja delantera de agujas, hasta obtener el segundo prisma. Afirman que el volumen no varía al deslizar el par de agujas por igual. La regla subsiste.

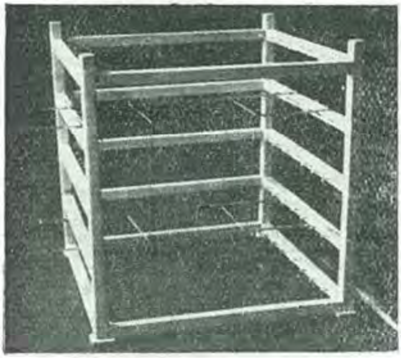


Fig. 3

4. Corro las varillas a su primitiva posición (ortoedro) y ahora deslizo, por igual, la dos varillas superiores en su plano y hacia adelante (unos clavos tope situados en las traviesas de apoyo de la caja del geoespacio facilitan la operación, ver fig. 3). Los niños siguen viendo que lo mismo

la cara anterior que la posterior han barrido volúmenes iguales y que, en definitiva, el volumen del prisma, que ahora es oblicuo, de base rectangular (considerando la base horizontal) sigue siendo el mismo, así como la altura, y, por consiguiente, permanece válida la regla.

5. Deslizo ahora, como antes, las dos varillas delanteras para obtener un prisma con doble oblicuidad de caras. Sigue permaneciendo invariante el volumen, el área de la base y la altura, y por tanto la regla. Cambio

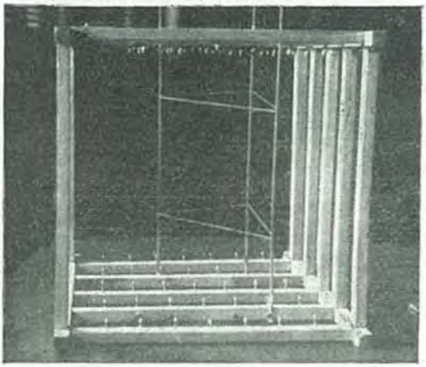


Fig. 4

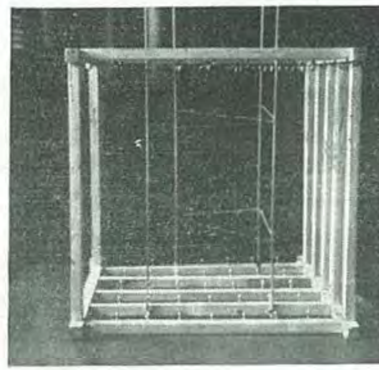


Fig. 5

de posiciones el geoespacio hasta colocar en posición horizontal distintas caras, con objeto de que me digan en cada posición cuál es la base y cuál la altura.

6. En una posición en que hacen de bases las caras materializadas con gomas suprimo una de las aristas metálicas. Queda un prisma triangular (ver fig. 4). «¿Cuál es su volumen?» Sin titubear dicen: «La mitad.» «Y el área de la base ¿qué es ahora respecto de la base anterior? ¿Cómo obtener, pues, el volumen de este prisma triangular? ¿Vale la misma regla?»

7. Vuelvo a añadir una varilla paralela a las anteriores separando de nuevo las gomas (mejor de un solo color, para que queden materializados dos prismas triangulares yuxtapuestos). Se obtiene de nuevo un prisma cuadrangular (ver fig. 5) (conviene que esta vez no sea ya paralelepípedo) y se pregunta cómo se obtendrá el volumen. Ven que éste es suma de dos triangulares, para los cuales vale la regla enunciada, y como las áreas de las bases se suman como los volúmenes sigue valiendo la regla. Finalmen-

te añado nuevas varillas, formando prismas pentagonales, etc. Los niños ven fácilmente que ello equivale a añadir nuevos prismas triangulares, conservándose la regla general:

El volumen de un prisma recto u oblicuo cualquiera se obtiene multiplicando el área de la base por la altura.

EQUIVALENCIA DE PIRÁMIDES

8. En este momento exhibo el modelo que reproduce la figura 6, expresamente construído para ilustrar el llamado principio de Cavalieri. Lo forman dos pilas, una de triángulos y otra de rectángulos, en igual número (51), recortados en tablex, de tal modo que las tablitas del mismo nivel en uno y otro montón tienen la misma área. Las dimensiones van

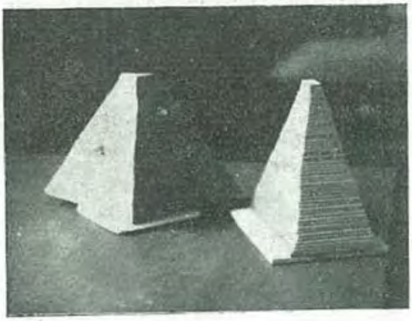


Fig. 6

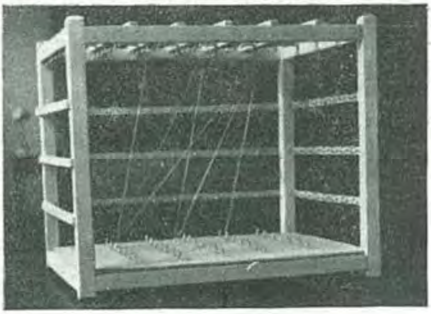


Fig. 7

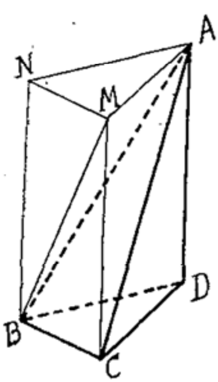
disminuyendo en progresión aritmética y por igual, de modo que los dos montones simulan dos pirámides de igual altura y bases equivalentes. Esto lo descubren los niños a lo largo de las preguntas que les formulo: «¿Qué figuras os recuerdan estas dos pilas? ¿Se parecen a algunos monumentos históricos conocidos? ¿Cuántos pisos tiene cada montón? Observar las dos plaquetas superiores, ¿qué figuras son? Comparad sus áreas, comparando los lados del rectángulo con los catetos del triángulo. ¿Qué resulta? ¿Y qué resulta de la comparación análoga de las plaquetas que siguen? ¿Y con las siguientes? ¿Qué podremos decir de las bases? ¿Y de las alturas? ¿Cuál de estos dos montones pesa más? ¿Cuál tiene mayor volumen?» Sin gran dificultad surge el enunciado, que se generaliza: *Dos pirámides con bases equivalentes y alturas iguales tienen igual volumen.*

VOLUMEN DE PIRÁMIDES

9. Entrego ahora un geoespacio y gomas coloradas a cada tres alumnos y les ordeno que construyan con gomas de un solo color (por ejemplo amarillo) una pirámide de base triangular, o tetraedro.

10. Inmediatamente les propongo que completen sobre cada pirámide, con gomas de otro color (por ejemplo rojo), *un prisma triangular con la misma base y una arista lateral común con la pirámide* (muy interesante la acción desarrollada y los titubeos y tanteos que implica, especialmente, la construcción de la base superior). La equidistribución de ganchos en los planos inferior y superior de cada geoespacio facilita poder asegurar la igualdad y paralelismo de los lados de dichas bases. Por otra parte, este paralelismo se aprecia visualmente con facilidad (las gomas paralelas se pueden colocar en forma que coincidan los planos visuales) (ver fig. 7).

11. Tras el cumplimiento de la indicación anterior pregunto: «¿Qué cuerpo habéis añadido a la pirámide inicial (designada ABCD en la figura) para completar el prisma?» Si no aciertan a designarlo inclino el geoespacio en forma de que la cara lateral BCMN quede horizontal. No tardan en ver que el cuerpo ABCMN es una pirámide cuadrangular de vértice en A. «¿Sabríais dividirlo en dos pirámides triangulares? Indicadlo con una goma.» Trazan sin titubear una diagonal de la cara BCMN, por ejemplo, BM. «¿Dónde está el vértice común de estas dos pirámides triangulares? ¿Cuáles son sus bases? ¿Qué son estas bases entre sí? ¿Cuál de estas dos pirámides tiene volumen mayor?» Dicen sin dificultad que ambos volúmenes son iguales. Y no falta quien lo explica en relación con la propiedad antes establecida sobre equivalencia de pirámides.



12. Inclino ahora el modelo de modo que B pase a ser el nuevo vértice y MAC la nueva base del tetraedro BCMA, y digo que comparen los volúmenes de las dos pirámides de vértice B y bases MCA y BCA. Esta segunda pirámide es la amarilla primeramente construída. Dicen sin dificultad que también son iguales ambos volúmenes. Tenemos, pues, tres pirámides de igual volumen, que volvemos a señalar. (Ha servido de término común de comparación la pirámide ABMC que tiene aristas AM, BC, opuestas en ambas bases del prisma. Su equivalencia con la pirámide que

contiene la base superior resulta de la descomposición de la pirámide añadida. La equivalencia con la pirámide inicial resulta tomando las bases en el plano común de la cara lateral del prisma. Sirvan estas indicaciones al maestro para guiar la comparación en cada uno de los modelos construídos por los alumnos.) El prisma ha quedado descompuesto en tres pirámides de volúmenes iguales, una de ellas la pirámide inicial. «¿Cómo obtendremos, pues, el volumen de esta pirámide? [2]»

13. Indico ahora que formen pirámides, cuadrangulares, pentagonales..., y que las descompongan en pirámides triangulares por planos diagonales (trazando diagonales por un mismo vértice de la base). «¿Cómo obtendremos el volumen de cada pirámide parcial? ¿Cómo el volumen total?»

Se formula la regla general: «*El volumen de toda pirámide es igual a* $\frac{1}{3}$ *del área de la base por la altura.*»

§ 19. INICIACION A LA FUNCION LINEAL Y SU REPRESENTACION GRAFICA

Preocupa hoy internacionalmente el retraso en que van quedando los programas de Matemáticas en Enseñanza Media respecto de las necesidades técnicas y económicas en un futuro inmediato. Se plantea el problema de la posibilidad de poner a tono los programas y las enseñanzas con las necesidades actuales de las Universidades y Escuelas técnicas y el de hacer asequibles a edades más tempranas tópicos matemáticos que parecían hasta ahora reservados a niveles superiores. Buena parte de las experiencias didácticas descritas en este capítulo responden a esta misma preocupación y al deseo de hallar soluciones autónomas, realizadas y realizables en nuestros propios medios escolares [1].

Dentro de esta misma línea de investigación didáctica se halla un conjunto de experiencias que pasamos a resumir, realizadas en nuestro Seminario Didáctico del Instituto de San Isidro, con objeto de comprobar hasta donde es posible descender la iniciación al manejo de relaciones lineales y su representación gráfica cartesiana. Siempre, de manera activa y eurística, hemos ido adaptando sucesivamente la experiencia a alumnos de tercero, segundo y primer curso, finalizándola con alumnos de las Escuelas preparatorias cuya edad oscila entre nueve y diez años. Se trataba de lograr la expresión correcta de relaciones de carácter lineal y de interpretarlas, asimismo, en el plano cartesiano. Describimos a continuación la lección desarollada con el grupo más elemental aludido.

Empiezo atrayendo la atención de los niños con un relato imaginario acompañado de acción ante ellos: «Un antiguo caballero castellano tenía una hija llamado Ximena y un hijo llamado Yago (alusión a Santiago).

---

[1] Obsérvese que varios de los temas abordados no figuran en los programas corrientes de Bachillerato, y otros pertencen a cursos mucho más avanzados que el nivel de los sujetos ante quienes se han desarrollado las experiencias.

Cada uno de ellos poseía una hucha. Esta cuartilla representa la hucha de Ximena y esta otra la de Yago» (y señalo dos cuartillas sobre la mesa, visiblemente encabezadas con las letras X e Y).

«El padre prefería a Ximena, y por cada dos monedas que echaba en su hucha ponía una sola en la de Yago.» Acompaño la acción a la palabra, colocando dos fichas representativas sobre la cuartilla X y una sobre la cuartilla Y; luego otras dos a X y una a Y, y así repito dos o tres veces más, hasta formar dos pilas. «De esta forma procedió el caballero durante mucho tiempo. Al final no sabemos lo que habría en la hucha de Ximena ni en la de Yago; pero, ¿podéis decir qué *relación* había entre los tesoros de ambos?» Unos dicen: «Ximena tenía el doble de Yago.» Otros: «Yago tenía la mitad de Ximena.» «Si llamamos x a lo que tenía Ximena e y a lo tenía Yago, ¿cómo podéis escribir esta relación?» Actuando con los pequeños suelo escribir previamente en el encerado la frase gramatical, y debajo escriben ellos la igualdad que la traduce, con lo que acentúo el papel de verbo que desempeña el signo =

El tesoro de Yago *es* *la mitad del* *tesoro de Ximena*

$$y = \frac{1}{2} x.$$

«Otro modo de escribir: $x = \ldots$» Completan fácilmente la igualdad con el segundo miembro $2y$.

Continúa la narración: «Pareciéndole injusta tanta desigualdad de trato, un buen día el padre vació las huchas y, favoreciendo siempre a Xi-

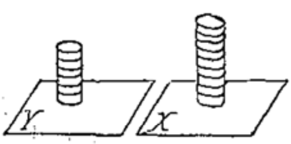


Fig. 1

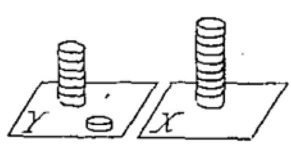


Fig. 2

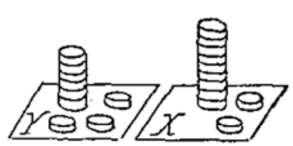


Fig. 3

mena, fué colocando tres monedas en la hucha de ésta por cada dos colocadas en la de Yago.» (Y acompañando de nuevo la palabra a la acción quito las fichas de antes y voy formando dos nuevas pilas según la nueva ley, ver fig. 1.) «¿Quién sabría escribirme ahora la relación que existe entre ambas pilas?» No tardan en escribir correctamente en los cuadernos $y = \frac{2}{3} x$.

«Pero un día llegó una visita y, con deseo de compensar a Yago, echó una moneda en su hucha (colocó una ficha sobre la cuartilla Y visiblemente separada de su pila (fig. 2). ¿Podríais escribirme ahora la relación que hay entre los dos tesoros?» La solución correcta $y = \frac{2}{3} x + 1$, o su equivalente $y = 1 + \frac{2}{3} x$ no tarda en surgir. Algunas deficientes, como $y = 1 + \frac{2}{3}$, son rectificadas por los mismos niños o ante su estricta interpretación. Conviene que las soluciones incorrectas sean discutidas por los propios alumnos.

Intervengo entonces insistiendo en que y representa siempre, en todo nuestro juego, el tesoro de Yago, y x el de Ximena. El tesoro de Yago no es ahora la pila sola, sino ésta más una moneda. «¿Qué tendríamos que hacer con este tesoro para que volviera a ser justamente los dos tercios del de Ximena?» Dicen: «Quitarle una moneda», con lo que se escribe en está otra forma la relación $y - 1 = \frac{2}{3} x$.

«Y si la visita hubiera añadido tres monedas a la hucha de Yago en lugar de una (lo realizo con fichas), ¿cuál sería entonces la relación? ¿Qué tendríamos que quitar del tesoro de Yago para que siguiera siendo los $\frac{2}{3}$ de x?» Escriben correctamente: $y - 3 = \frac{2}{3} x$.

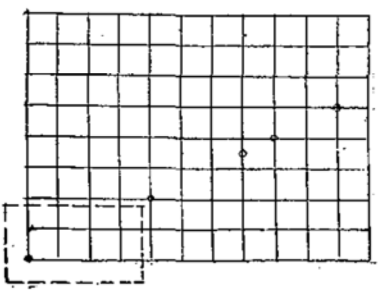
En este momento añado dos monedas a la hucha de Ximena (fig. 3) «¿Cómo podríamos escribir ahora la relación? ¿Cuántas monedas tendríamos que quitar del tesoro de Ximena y cuántas del de Yago para que siguieran estando en la relación $\frac{2}{3}$. Dicen: «Quitar tres a Yago y dos a Ximena», y escriben $y - 3 = \frac{2}{3} x - 2$. Pregunto le interpretación del segundo miembro. «¿Qué quiere significar?» Hallar los dos tercios de x y luego restar dos, o bien restar primero dos y hallar luego los dos tercios del resultado. Convienen en esto último, y les hago ver la necesidad de emplear paréntesis para evitar confusión. Se escribe correctamente

$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2).$$

Si se estima necesario puede repetirse el juego con nuevos planteamientos conducentes a relaciones de tipo análogo $y - 4 = \frac{3}{4}(x - 5)$; $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 3); \ldots$

Inicio ahora un nuevo juego, como si se tratara de un descanso en la actividad anterior, aunque de estructura matemática idéntica. Me contento con que esta identidad actúe en lo subconsciente sin forzar la toma de conciencia de ella, lo que no es raro que ocurra espontáneamente a lo largo del juego, con gran alegría de los pequeños. Me valgo para ello del juego llamado de los «Cinco en línea», cuyo material está constituído por un simple tablero cuadriculado con doble rayado horizontal y vertical, acompàñado de peones de distintos colores.

Si son pocos los alumnos, de forma que puedan sentarse alrededor de una mesa, me basta con este juego. Si la clase es más numerosa me valgo de un tablero mayor de cuadrículas bien visibles, cuyos puntos de cruce del rayado (de coordenadas enteras) se hallan perforados para que puedan ajustarse en los orificios pequeños pivotes colocados en la base de los peones. De esta suerte los peones se sostienen aun colocando el tablero en posición vertical para actuar a la vista de todos.



Empiezo situando dos peones (en ocasiones los uno con una goma), uno en el origen de coordenadas y otro en el punto (4,2), y luego de invitar a los niños a que se fijen bien en su colocación, oculto con una cuartilla o carpeta el primer peón y casi todo el rectángulo que determinan las coordenadas del segundo, dejando éste bien visible, y les ordeno que me sitúen peones que se hallen en línea recta con los dos ya colocados. La ocultación del primer peón les impide, naturalmente, proceder a ojo, y las primeras soluciones son de puro tanteo. Descubro lo cubierto; comprueban el error; les invito a que observen de nuevo la colocación relativa de los dos peones. Vuelvo a cubrir y a repetir el juego. Y así continúo hasta que algún niño, con alegría de iluminado, tiene la feliz idea de *contar* los cuadros que van de uno a otro peón y de repetir los intervalos en ambas direcciones. Es precisamente este chispazo, que intuye la posibilidad de resolver un problema geométrico mediante recursos aritméticos, el que es clave y base de toda la Geometría analítica y el que he tratado de provocar eurísticamente con el dinamismo descrito.

Comprobada la correcta alineación de sus peones, el descubridor de la idea se explica. Es frecuente la expresión «corro cuatro cuadros a la derecha y subo dos». No hay inconveniente en mantener esta espontánea terminología de «correr» y «subir» o en introducir ya las denominaciones de *abscisa* (lo que se corre a la derecha a partir del origen) y de *ordenada* (lo que se sube a partir del origen). Designadas una y otra por x e y, respectivamente, siguen varias preguntas: «Si corro ocho a la derecha, ¿cuánto he de subir para que el peón esté en la misma recta? Si x vale diez, ¿cuánto ha de valer y? Si x vale siete ¿cuánto ha de valer y? Escribid la relación.» Lo hacen sin dificultad.

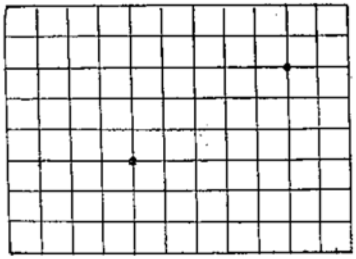
Varío ahora la situación inicial del segundo peón colocándole en el punto (2,3), y se repite el juego de colocación de peones alineados tapando el origen, y luego de expresión de la relación entre las x e y de los peones colocados. No suele ofrecer dificultad que escriban ahora $y = \dfrac{2}{3}x$, y no ha faltado niño que ha recordado con regocijo: «Es lo mismo que con Yago y Ximena.»

Resuelto el caso anterior (y sin quitar los peones alineados añadidos por los niños), varío la situación de los peones iniciales subiendo ambos un cuadro, es decir, colocándolos en los puntos (0,1) y (4,3). «¿Qué tendréis que hacer con los otros peones»? Inmediato: «Subirlos también un cuadro.» «¿Cómo escribiríais ahora la relación entre las abcisas y las ordenadas?» Tras algunos titubeos escriben correctamente $y = \dfrac{2}{3}x + 1$.

«¿De qué otro modo podemos escribirlo? ¿Qué tendríamos que quitar ahora de todas las y para que fueran los $\frac{2}{3}$ de las x. (Si no aciertan, acompaño nuevamente la acción a la palabra cubriendo con un papel grande la primera hilera de cuadros horizontales, de modo que el borde superior del papel marque el nuevo eje x.) Ven así que al quitar una unidad a todas las y queda la misma relación de antes, con lo que se escribe $y - 1 = \frac{2}{3} x$. Subo a continuación dos, tres, cuadros los dos peones iniciales y escriben correctamente $y - 2 = \frac{2}{3} x$, $y - 3 = \frac{2}{3} x$.

A partir de esta última posición traslado ahora los peones iniciales de un cuadro *a la derecha*. «¿Qué habrá que hacer ahora con la x para escribir la nueva relación?» Me disponía a simular análogamente el desplazamiento del eje de una unidad hacia la derecha, cubriendo la banda necesaria con un papel, es decir, restando visiblemente a todas las x una unidad, cuando ya habían escrito algunos niños correctamente $y - 3 = \frac{2}{3}(x - 1)$. Desplazo luego los peones dos lugares a la derecha y aciertan también sin dificultad.

A partir de este momento la adaptación de la ecuación de la recta a nuevos pares de puntos iniciales (aun variando la pendiente) se realiza sin tropiezos. Los doce niños con los cuales realicé la experiencia llegaron a escribir correctamente la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos de la figura:



$$y - 4 = \frac{3}{5}(x - 3)$$

Esta y otras experiencias ponen de manifiesto que los niños son capaces de asimilar mucho más de lo que nuestros prejuicios sobre sus posibilidades intelectuales nos han inducido a creer defectuosos métodos de enseñanza. Todo es cuestión de graduar las dificultades y de encontrar vías psicológicas concretas de acceso adecuadas a cada abstracción. En la experiencia descrita la dificultad más grave a vencer era llevar al alumno, de un modo natural, de la función $y = a\,x + b$, concebida como conjunto de operaciones que hay que efectuar con la variable x para obtener la función y, a la relación equivalente $y - b = a\,x$. Esto, que tan sencillo resulta en Algebra, implica una noción de reversibilidad difícil de manifestarse en un plano consciente a estos niveles. De ahí los esfuerzos en hacer alcanzar esta toma de consciencia por vía concreta.

Parece innecesario añadir que nos hemos movido deliberadamente en el primer cuadrante cartesiano con rectas de pendiente positiva, por carecer los alumnos con los que operábamos de toda noción de número negativo. Pero la generalización a otros cuadrantes y a pendientes negativas no presenta dificultad mayor en cuanto tal noción es adquirida, lo que también puede alcanzarse antes de lo que los programas usuales preceptúan.

§ 20. INTRODUCCION EURISTICA DEL RIGOR Y PRECISION DE LENGUAJE

Las continuas llamadas a la intuición que hemos venido empleando a lo largo de las lecciones anteriores, buscando en la mentalidad infantil un terreno de apoyo para el punto de arranque necesario en cada caso, pueden haber dejado la falsa sensación de un descuido sistemático de los valores racionales de nuestra Ciencia. Acaso se pregunte alarmado algún profesor: «Y el rigor, ¿dónde queda?»

No hay que confundir el rigor en cada razonamiento, construído con sus premisas adecuadas (el cual no hemos descuidado, sino adaptado al nivel mental del alumno en cada caso), con una edificación racional reductiva de todo el conjunto. Ya hemos indicado en el capítulo quinto que los recursos lógicos reductivos sólo deben iniciarse cuando la intuición del niño no le permita el asalto directo a la verdad en términos de acción perceptiva. Sólo así aceptará el niño de buen grado su necesidad. Una limitación *a priori* de la validez de sus intuiciones nos parece francamente contraproducente y creemos preferible esperar a que sea el contraste de las mismas con las intuiciones de sus compañeros el que motive la necesidad de un sistema y de una explícita formulación de puntos de partida para entenderse mutuamente. La necesidad del rigor lógico tiene así su aparición natural coincidente con la necesidad de una creciente vida de relación con los demás, y por ello ha dicho el profesor Gattegno, con frase un tanto esquemática pero feliz, que el rigor matemático es un fenómeno de comunicación social.

Esta comunicación exige no sólo la conducción correcta del pensamiento, sino también precisión de lenguaje. ¿Cómo promover espontáneamente el esfuerzo necesario para lograr una y otra, en forma que interese activamente a los alumnos?

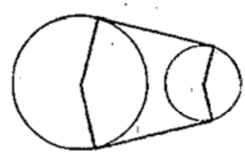
Exponemos a continuación, a modo de muestra, algunos de los recursos que hemos empleado en este sentido.

EJERCICIOS DE INICIACIÓN A LA PRECISIÓN DE LENGUAJE MATEMÁTICO

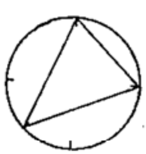
Si en los primeros años de Bachillerato es preferible contentarse con que los niños *sepan actuar* antes de forzar una espontánea precisión en el *saber decir,* en los posteriores, y especialmente en los últimos años, debe cultivarse fundamentalmente la precisión del lenguaje, siempre procurando que ésta se logre a través de una crítica depuradora y autocorrectiva, y no como imposición cómoda de un memorismo vacío de contenido conceptual.

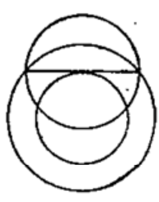
He aquí un juego de iniciación del que he obtenido gran eficacia en este sentido, por el interés que despertó en la clase toda:

Situado ante el encerado un alumno A, muestro al resto de la clase una figura, como, por ejemplo, la adjunta, dibujada en lámina o encerado aparte, sin que la vea A. Propongo a otro alumno B que dé a A la descripción necesaria, y lo más concisa posible, para que pueda A reproducir dicha figura en el encerado. Todos deben juzgar si la descripción está bien dada por B y bien interpretada por A. En caso de error de B o de A se hacen intervenir otros alumnos hasta lograr una descripción y una interpretación acertadas. Los ganadores tienen luego derecho a proponer una figura de su invención.



Otras modalidades del juego sobre la misma idea:





Dibujar dos o tres figuras en el encerado y proponer la redacción de un telegrama imaginario dirigido á los compañeros del mismo curso en otro Insttiuto, describiéndolas para que puedan dibujarlas en su encerádo. En caso de existencia de dos secciones del mismo curso en el propio Instituto pueden cruzarse telegramas de uno a otro.

El mismo juego puede lograrse, sin intervención del encerado, dividiendo la clase en dos mitades: bancos de la derecha y bancos de la izquierda. Los compañeros de cada banco o hilera de la derecha forman un equipo que idea una figura y la describe en nota telegráfica, que pasa al equipo similar de la izquierda, para que la reproduzca sin ver, mientras este equipo hace lo recíproco. Cada equipo practica así el doble juego de descripción e interpretación, y yo actúo a la postre de árbitro, señalando los desaciertos y puntuando los aciertos en uno y otro sentido. Vence la mitad de la clase que alcanza puntuación mayor. Los errores de uno y otro tipo son frecuentísimos. Pocos equipos puntúan al principio. Pero el juego despliega un interés enorme y una inventiva extraordinaria en idear figuras para hacer caer al equipo contrario, cayendo, en general, antes el propio equipo en la descripción insuficiente de lo que él mismo complicó. En los comentarios arbitrales, la mejor manera de promover la autocorrección de descripciones erróneas es su interpretación literal mediante contraejemplos. Así es como se procede de hecho en las discusiones entre científicos.

UN EJERCICIO LÓGICO DE IMPLICACIÓN

La lectura de una anécdota aparecida en la sección de amenidades de un periódico me sugirió un ejercicio que propuse a unos cincuenta alumnos de sexto curso. La anécdota constituye una ironía sobre los aparatos detectores de mentiras, y dice textualmente:

> «Un individuo se hallaba recluído en un manicomio dando señales en todo de hallarse en pleno uso de sus facultades mentales, excepto en lo que concernía a afirmar que él era Napoleón. Llegando a temer que se tratara de un simulador que por algo quisiera permanecer recluído, pensaron en convencerle aplicándole un aparato detector de mentiras. El perturbado se asustó mucho y para terminar pronto, en cuanto le aplicaron el detector, exclamó: «Reconozco que he estado mintiendo y que no soy Napoleón.» Pero el aparato registró que entonces era cuando mentía.»

Leo la anécdota entre los alumnos y formulo a continuación las dos cuestiones, preguntando si es posible contestarlas categóricamente:

1.ª ¿Se trataba, en efecto, de un perturbado?

2.ª ¿Funcionaba el aparato bien?

Clasifiqué las respuestas obtenidas según el siguiente cuadro:

		INDIVIDUO	
		Sano	Perturbado
Aparato	*bien*	9	25
	mal	8	5

lo que supone 33 respuestas lógicamente correctas y 14 lógicamente malas. (No contabilizo respuestas artificiosas, como la que supuso que el individuo se llamaba, en efecto, Napoleón de nombre, etc.) Les expliqué la finalidad didáctica de este ejercicio:

La primera pregunta no puede contestarse categóricamente, sino a modo de conjetura. La redacción de la anécdota parece dar a entender que se trata de un auténtico perturbado, pero éste es un criterio de hecho que escapa a la lógica y puede categorizarse como verdad conjeturable. Considero por ello como igualmente válidas desde un punto de vista lógico estricto ambas posibilidades.

Pero, una vez contestada la primera pregunta, la respuesta a la segunda queda ya condicionada lógicamente. El ejercicio estriba precisamente en explorar el reconocimiento de la implicación lógica de ambas respuestas. Si el individuo estaba sano, el aparato funcionaba mal, puesto que acusaba mentira cuando decía verdad. Si el individuo estaba perturbado, creyendo en efecto que era Napoleón, mentía al afirmar lo contrario (mentía respecto de *su verdad*) y el aparato funcionaba bien. Un aparato no puede, naturalmente, registrar verdades ni mentiras absolutas, sino relativas respecto a la creencia del sujeto explorado, de otro modo nos podría resolver todas las dudas científicas.

Los criterios de verdad en Matemáticas son de naturaleza análoga; están supeditados a las premisas establecidas como axiomas, y sólo pueden darse por ciertas o falsas en relación con tales premisas (Geometrías no euclídeas, imposibilidad de la cuadratura del círculo, etc.).

APENDICES

I. SOBRE LA FORMACION DEL PROFESORADO DE MATEMATICAS DE GRADO MEDIO [1]

LOS TRES VERBOS DE LA DIDÁCTICA Y LOS CORRESPONDIENTES ATRIBUTOS EN EL MAESTRO

Voy a empezar recordando lo dicho en otra ocasión.

La Didáctica está guiada por tres interrogantes inseparables del aprendizaje del niño y que determinan su proceso:

¿Qué es lo que el niño *debe* aprender?

¿Qué es lo que el niño *puede* aprender?

¿Cómo lograr que el niño *quiera* aprender?

Las necesidades sociales de cada momento histórico, junto a la constante del destino eterno, marcarán lo que el niño debe aprender.

La evolución psicológica de su inteligencia nos dirá lo que el niño puede aprender en cada etapa de su desarrollo.

Pero tan importante como todo ello es que el niño *quiera*. Sólo así su aprendizaje será auténtico, por ser natural y no forzado. Hay que atraer su afectividad al objeto del conocimiento. Despertar en él la voluntad del esfuerzo antes que imponérselo como un sacrificio.

La consecución de estos objetivos exige en el maestro los correspondientes atributos:

1.° *Cultura*, en nuestro caso matemática y científica, para saber las exigencias de su época en orden a la materia que enseña.

---

[1] Este artículo ha sido publicado en el «Boletín Pedagógico de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral», año IV, núm. 21. Contiene casi íntegra la conferencia dada por el autor sobre el mismo tema en la Escuela del Magisterio de Valladolid, el 14-XII-1957, con motivo de las sesiones de clausura del Cursillo sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática, organizado en aquella Escuela.

2.° *Conocimiento del niño y espíritu observador* para darse cuenta en cada caso de las posibilidades del alumno y de sus reacciones.

3.° *Arte* para atraerlo, para captar su interés.

Centraré, pues, en la adquisición de estos atributos el problema de la formación del profesorado.

Se me objetará, acaso, que mientras la cultura puede adquirirse y la observación ejercitarse, los artistas nacen, pero no se hacen; y es cierto, entendiendo la palabra artista en su más elevado sentido. Los artistas personales, los creadores, los dotados de inspiración que les permite renovarse a cada instante, los que marcan época, lo mismo en Bellas Artes que en Pedagogía, son artistas natos, cuya obra se desenvuelve al margen de concepciones académicas y aun en pugna con ellas. Pero desgraciadamente no abundan los dotados por Dios de intuición creadora. Los demás tienen que nutrirse de un arte menos espontáneo, arte si queréis transmitido, contagiado, arte menor que pudiera llamarse artesanía o técnica didáctica, pero que será siempre más eficiente que la inexperiencia y la desorientación.

LA CULTURA CIENTÍFICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Aunque la Matemática es una, la cultura matemática debe tener sus cualidades específicas, según la finalidad a que se destine, y así podemos distinguir entre:

1.° La cultura matemática del investigador, que es la que parece cuidar específicamente la Universidad: Cultura en elevación (creación abstracta) y también, algunas veces, en profundidad (análisis de fundamentos).

2.° La cultura matemática del técnico, directamente conectada con el mundo físico sobre el que se proyecta en un sentido de aplicación. Cultura hoy extensísima y variada por la multiplicidad de los sectores técnicos a los que debe dirigirse, y la cantidad de *aplicaciones* que se van descubriendo y que originan un constante movimiento del pretendido umbral de separación entre Matemática pura y aplicada.

3.° La cultura matemática del profesor, cultura epistemológica e histórica (conocimiento de las grandes corrientes de génesis y evolución del pensamiento matemático); cultura que el maestro debe considerar en el momento en que actúa y no en un sentido estático, sino dinámico, de proyección al futuro, ya que prepara a las generaciones que le siguen. Cultura que debe nutrirse con la confluencia de las dos anteriores, de la abstracta y de la aplicada, percibiendo así en su propia formación la simultaneidad de los dos fines, educativo y utilitario, que constituyen su misión.

EL PROBLEMA DE LOS FINES

La alusión al problema de los fines me incita a intercalar dos palabras insistiendo en su importancia, palabras que pueden parecer obvias y que no lo son, por la frecuencia con que desenfocamos nuestras actividades, olvidándonos del problema fundamental de su finalidad.

Toda obra humana debe nutrirse de un aliento (podría llamarse filosófico) de finalidad, así como de unas realidades concretas de partida, realidades que, en nuestro caso, son el niño y el ambiente. Por muy bien que conozcamos estas realidades, nuestra enseñanza carecerá de rumbo si nos falta una conciencia clara de sus fines. ¿Tenemos presente siempre los profesores de Matemáticas que preparamos a nuestros alumnos para su vida? ¿Que la inmensa mayoría de dichos alumnos no aprenden Matemáticas para investigar sobre ellas ni para transmitirlas, sino para aplicarlas a sus problemas futuros? ¡Qué pocas veces nos detenemos en analizar la trascendencia que puede tener para el futuro de nuestros alumnos la actividad que ante ellos desplegamos o la que de ellos exigimos en nuestro cotidiano hacer! Seguimos transmitiendo en reata lo que nos ha sido transmitido sin la menor inquietud proyectada al exterior de los eslabones de la cadena en la que por rutina nos hemos situado, sin preguntarnos su fin ni su finalidad.

Necesitamos la guía fija de los fines de nuestra obra para percibir los baches de nuestra enseñanza, tanto en lo que se refiere a programas como a métodos y modos de enseñar; ellos nos orientarán en lo utilitario y en lo educativo, dando a nuestra enseñanza un sentido auténtico de servicio al niño y a la sociedad. Por esta razón estimo que no es la sola formación abstracta la que ha de permitir al Licenciado en Exactas obtener una visión clara de su misión futura en la Enseñanza Media. Es necesario que perciba a lo largo de su formación un panorama de aplicaciones lo suficientemente amplio, que se ejercite en el doble juego de abstracciones y concreciones que tales aplicaciones exigen, que se empape de la función esquematizadora de la matemática en el estudio de los fenómenos del mundo físico y social, para que a su vez sepa en el día de mañana orientar su enseñanza ejercitando a sus alumnos en procesos análogos de génesis y aplicación de esquemas matemáticos, en el grado en que su enseñanza habrá de desenvolverse. En la formación del profesor, como tal, quizá más que el cuadro de aplicaciones en sí, interesa el hecho de que el profesor ejercite el sentido de aplicación en el doble aspecto indicado y que tantas veces he comentado en anteriores escritos.

Este sentido de aplicación ha sido tenido muy en cuenta en los Cursillos de Perfeccionamiento destinados a Profesores Licenciados en Exactas organizados por la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, no sólo mediante el cuadro de conferencias (Economía, Contabilidad, Estadística) tendentes a facilitar la conexión del Profesorado de Matemáticas de los Centros de Enseñanza Media y Profesional, con el medio social en que están enclavados, sino también organizando Cursillos breves de temas matemáticos aplicados a Industria, Topografía, etcétera, cuya esencial misión era el cultivo del doble sentido de abstracción y concreción aludido.

LA CULTURA HISTÓRICA, EPISTEMOLÓGICA Y HUMANA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

También es necesario, como antes he dicho, una cultura matemática histórica que fije los hitos principales del progreso matemático y su paralelismo con el progreso técnico general humano. Muchas veces, el planteamiento retrospectivo de una situación matemática, es de gran eficacia formativa, porque permite revivir la génesis histórica del conocimiento que se desea inculcar. Para no citar más que un ejemplo, puedo referirme a la iniciación en el problema de la determinación analítica de tangentes a una parábola. Si se resuelve primero a la manera del siglo XVII, es decir, interpretando la abscisa del punto de contacto como raíz doble de la ecuación que da las de los puntos comunes a la parábola y a una secante, y se pasa luego a su resolución inmediata utilizando el concepto de derivada, la comparación de ambos caminos permite al alumno apreciar la simplificación y el avance que supuso la introducción de los métodos infinitesimales.

Más esencial aún en el profesor de Matemáticas es la cultura epistemológica, el conocimiento de los fundamentos de la ciencia que enseña y de sus métodos específicos de investigación, es decir, la metodología propiamente dicha de la Matemática. El análisis concienzudo de los procesos propios de adquisición de conocimientos, y de los métodos de trabajo en esta *actividad* denominada Matemática, es lo primero que nos permitirá entrever algo de lo que puede pasar en la mente de los alumnos ante los problemas y situaciones a que les sometemos; y de este modo podremos acaso comprender mejor sus fallos y dificultades. No nos impacientaríamos tan pronto ante los reiterados errores cometidos por nuestros alumnos en la aplicación de las leyes formales del cálculo algebraico si volviéramos la vista hacia nuestros propios errores e incertidumbres en el manejo de las técnicas que nos son nuevas (álgebra de Boole, cálculo tensorial, cálculo operacional, por ejemplo). La concepción metodológica de la Matemática, juntamente con la de sus aplicaciones, creará en el profesor una visión de la misma como *actividad,* concepción infinitamente más interesante para la enseñanza que la concepción estática usual que resulta de considerar la Matemática como el contenido de un conjunto de textos que el esfuerzo de matemáticos anteriores nos ha legado. Porque, repito nuevamente, *nuestra misión como enseñantes no es la transmisión exclusiva de este legado, sino la educación de aquella actividad* en la generación que nos sigue, haciéndola apta para ampliarlo y aplicarlo.

Finalmente, no hay que olvidar la necesidad conjunta, en el profesor de Matemáticas como en todo otro profesor de Grado Medio, de una amplia cultura humana. El profesor de Matemáticas, especialmente, debe prevenirse contra los estragos deshumanizantes de una especialización excesiva. Dado el carácter abstracto de nuestra ciencia, necesitamos, nosotros quizá con más exigencia que los restantes profesores, un calor de comprensión de la inmensa variedad de matices y apetencias espirituales de nuestros alumnos, para que éstos no vean en su profesor de Matemáticas (como desgraciadamente ocurre) un ser visionario, insensible a todo lo que no sea la inferencia lógica y la consecuencia necesaria. Yo aconsejaría muy insistentemente a todos los profesores de Matemáticas el cultivo de la sensibilidad artística, literaria, plástica, musical..., con la lectura de textos escogidos, la concurrencia a exposiciones de arte, la asistencia a conciertos, etc. Esta cultura le permitirá darse cuenta de la inmensa variedad de formas de actividad creadora del espíritu humano y apreciar en muchos de sus alumnos el germen de esta actividad, tan rica en combinaciones y selecciones felices como pueda serlo la nuestra, y reveladoras de una madurez y de una inteligencia que parecía de medida casi nula con nuestro aparato de medida, exclusivamente sensible a la evidencia lógica. El calor humano y la sensibilidad estética adquiridos en contacto con el arte vivo permitirán, además, proyectar estos factores estéticos de sensibilidad en su propia ciencia y en su tarea docente.

LA FORMACIÓN PSICOLÓGICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Nadie discute ya la necesidad que tiene el profesor de Enseñanza Media del conocimiento de la materia prima sobre la que opera: el niño, así como de la transformación que esta materia experimenta a lo largo de sus estudios, es decir, la evolución psicológica del escolar en su fase de la niñez a la adolescencia. Precisamente nosotros, los profesores de Enseñanza Media, cruzamos en la vida del niño en el período más delicado de su evolución.

Quiero anticipar que no soy partidario de lo que pudiéramos llamar una inflación de tales estudios de Psicología en la formación del profesorado secundario, y menos aún de una psicología filosófica, nominalista y dogmática, fruto (a veces exuberante y bello) de introversiones de pensadores y creadores de escuelas filosóficas. Pienso más bien en una psicología de conductas, y más concretamente aún de la conducta del escolar en el ambiente de la escuela, familia y amistades. La psicología que necesita conocer el profesor es, pues, una psicología aplicada, de carácter más experimental que escolástico.

Nos interesan, por ejemplo, los problemas de la fatiga escolar, de su medida, tan vinculados al problema del rendimiento. Necesitamos tener una idea de las principales características de la evolución de la inteligencia del niño, y nosotros, concretamente, de la evolución de su pensar matemático, del proceso natural de génesis de su mundo numérico, de su mundo espacial y temporal. Nos interesa asimismo conocer la evolución de sus intereses para proyectar sobre ellos nuestra obra didáctica. No podemos permanecer ignorantes ni ajenos a los problemas de su vida afectiva, tan rica de matices en el período de la adolescencia. ¡Cuántos complejos de inferioridad podemos crear nosotros, los graves profesores de

Matemáticas, sin tener idea del daño que estamos haciendo, con el látigo hiriente de la ironía, con el palmetazo del absurdo! El niño tiene también *su verdad,* verdad que no es la inexorable matemática, y la verdad del maestro ha de situarse piadosamente entre las dos, para acercarlas en vez de alejarlas con ironías o proscripciones definitivas.

Necesitamos también saber cómo se detectan hoy en psicología experimental las aptitudes, porque nuestra misión de guías no sólo nos confía el alumbramiento de vocaciones, sino su orientación adecuada y certera. ¡Cuánto bien podemos hacer a nuestros alumnos, y cuántos desengaños podemos evitarles con un fundado consejo dado a tiempo!

No creo, pues, que sea desorbitado pretender que el futuro profesor de Enseñanza Media adquiera ideas claras de todos estos problemas y del modo de resolverlos en la práctica efectiva de la enseñanza, cursando para ello un estudio regular y metódico de la psicología experimental que los enfoca. Considero fundamental iniciar al profesor medio en la técnica de los *tests,* instrumento de medida y exploración de la Psicología Experimental, y no sólo en su calidad de enseñante, sino también en su aspecto, desgraciadamente inseparable, de examinador.

Uno de los más graves problemas de la enseñanza lo constituye el régimen de pruebas, por la ineludible antinomia que crea entre preparación y formación. No se trata de un problema español, sino universal.

El conocimiento básico de la técnica de exploración y medición de la inteligencia es necesario para ir reformando el sistema de pruebas en el sentido de detectar cada vez mejor la madurez con preferencia a la información.

Los profesores de Matemáticas podemos prestar, además, un señalado servicio, en este terreno, a las otras disciplinas, porque la traducción de las baterías de *tests* en módulos de medida es una técnica matemática basada en la estadística; y tan interesante como su aplicación a la calificación y orientación profesional de los alumnos es su proyección instrumental al campo de la propia experiencia pedagógica, es decir, como instrumento matemático para planear correctamente una prueba comparativa de eficacia de métodos y para medir el grado de confianza que puede atribuirse a las hipótesis que intentemos sentar sobre los resultados obtenidos. Esta técnica estadística, en verdad no demasiado fácil, habrá también de adquirirse integrada en el plan general de estudios de nuestra carrera, procurando que abunden en ella los ejemplos de aplicación a la enseñanza, al menos para los que estudian nuestra Licenciatura con tal intención profesional.

En resumen, ningún profesor de Matemáticas debiera ignorar: cómo evoluciona la inteligencia de sus alumnos, con objeto de ajustar a ella los diversos planes de abstracción matemática; cómo obran los procesos de fijación de conocimientos, y cómo los defectos en estos procesos pueden originar los errores matemáticos sobre los cuales nos mostramos tan inexorables y que, sin duda, son debidos a una defectuosa técnica enseñante, y cómo se manejan los *tests* llamados de inteligencia, en muchos de los cuales existe, por cierto, riquísimo contenido matemático. Seguro estoy de que si profundizáramos en esta técnica todos los profesores de Matemáticas, podríamos aportar una eficaz contribución a la mejora de los trabajos de los psicólogos experimentales.

LA FORMACIÓN DIDÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Entremos ahora en el tercer punto, el más delicado: el de la formación didáctica. Dijimos que, en el fondo, se trata de la adquisición de un arte, y que el artista, si no nace ya creador, sólo puede ir haciéndose a fuerza de contagio. ¿Solución? Pues esa precisamente: el contagio. Ver actuar a profesores acreditados y actuar en seguida ante ellos atendiendo sus observaciones y *aprendiendo a observar las reacciones de los alumnos*. Una vez que se aprende a leer en sus reacciones y a sacar consecuencias objetivas de ellas, la clase es el mejor maestro del maestro en formación. Instintivamente, el profesor que sabe observar a sus alumnos, va adaptando a ellos su didáctica, y la va concibiendo como algo flexible y moldeable, en perpetua evolución y adaptación a las circunstancias, asimismo variables y evolutivas de la clase.

Es esencial inculcar bien este principio de variedad y adaptación de la didáctica para no intentar resolver el problema didáctico con soluciones rígidas, y necesitamos tener esto presente, en especial los profesores de Matemáticas, por lo acostumbrados que estamos por nuestra educación a buscar soluciones de carácter unívoco.

El aprendizaje de la enseñanza frente a una clase en acción desde el primer día no excluye un estudio simultáneo de principios sobre los cuales la didáctica se asienta. Lo que ocurre es que los principios no son tan elocuentes dictados dogmáticamente *a priori*, como cuando resultan de la experiencia ante una clase vivida. Si patrocino el método eurístico en la enseñanza de las matemáticas a los alumnos, lógico es que lo aconseje asimismo en la formación del profesor de Matemáticas como tal. Y así, en mi clase de Metodología y didáctica destinada a los alumnos de cuarto curso de la Facultad de Ciencias Exactas, matriculados en la sección dedicada a la enseñanza, procuro que los alumnos actúen desde el segundo día de clase como profesores de grupos experimentales de niños. A este efecto doy estas enseñanzas en el mismo Instituto de San Isidro, donde profeso, el cual ha tenido la gentileza no sólo de albergar esta Cátedra, sino también de organizar el horario de estudios de tal modo que me sea posible disponer, para dicha Cátedra, de grupos de niños de los primeros cursos en las horas en que dan normalmente sus cursos de Matemáticas. De este modo, el grupo experimental recibe la misma lección que en su clase ordinaria, pero dada por uno de los alumnos de la Facultad. Cada actuación es observada por los demás y comentada luego por todos y por mí mismo (en ausencia de los niños, claro es). De esta suerte procuro no ser yo encargado de la asignatura, el centro de la clase, sino los niños a los cuales deben observar mientras actúan, y de los cuales deben aprender más que de mí mismo. De lo observado y comentado surgen entonces los consejos y los principios didácticos que se estructuran en unas pocas verdades esenciales; verdades que es preciso vivir para conocerlas y para fijarlas, de modo que se proyecten permanentemente en toda la vida profesional futura del maestro en formación. Cuando ya todos los alumnos han actuado como profesores, actúo yo también ante los niños. A decir verdad, intervengo, asimismo, durante las clases experimentales, cada vez que lo considero indispensable para que la experiencia no redunde en notorio perjuicio de los niños; por ejemplo, para fijar un concepto mal hilvanado, para restituir una atención perdida hacia el objeto de la lección... De no ser así dejo simplemente actuar al profesor en formación, y admito la crítica de los futuros docentes, ya que no es mi propósito imponer esquemas de lecciones-modelo ni de estimular la imitación creando una rigidez de procedimientos estirilizadora. Procuro más bien alentar la personalidad de los profesores en ciernes, crear en ellos un espíritu, una conciencia profesional en el arte de enseñar y en el que, como he dicho, muchas soluciones son posibles y lícitas.

Para no hacer interminables estas nótas, omito la enumeración de los problemas didácticos generales que a lo largo de tales experiencias se suscitan: desde los de ambientación y disposición de la clase, influencia del número de alumnos sobre los modos de enseñar, uso de material didáctico, libros, modelos, filminas, películas, etc. Y no he de decir que procuro proyectar y supeditar el problema didáctico al problema pedagógico más general. Aunque la mayor parte de los problemas que se presentan al profesor en acción en su clase son de índole particularmente didáctica, no podemos, por ello, desconocer que la Didáctica es sólo una faceta de la Pedagogía, cuyos problemas generales nos afectan en todo momento. Concretamente en el caso de la Matemática son, por ejemplo, problemas de carácter pedagógico: la contribución que la educación matemática puede aportar a la formación del carácter del educando, al cultivo de la verdad y amor al trabajo desinteresado; y problemas más generales aún el de la gradación de estímulos y la preferencia de los estímulos directos (interés sobre la materia objeto del conocimiento) sobre los indirectos o secundarios (premios, castigos, etc.), a la vista de los pros y los contras del uso y del abuso de estos últimos, etc., etc.

POSFORMACIÓN

Después del estudio de los tres puntos fundamentales en la formación del profesorado matemático: cultura científica, conocimiento del niño y arte didáctico, en correspondencia con los tres problemas del aprendizaje del alumno planteados al principio, podría dar por terminado este artículo si de hecho considerara terminada la formación del maestro o profesor al recibir su título y habilitación correspondiente. Pero venturosamente no es así. En nuestra profesión, como en todas, no se acaba nunca de aprender lo bastante; sigue el profesor formándose mientras vive y da clases. Como antes dije, cuando se tiene un sentido autocrítico despierto, y cuando se sabe leer en el libro abierto de una clase, nunca se termina el proceso de acumulación de experiencias y mejora y adaptación consecuente de procedimientos.

Desdichado del que se cree en posesión de un modo de hacer perfecto que no sea susceptible de mejora. Su inamovilidad de conducta y su carencia de inquietudes no sólo son signos de soberbia, sino de muerte. En muchas ocasiones esa actitud se arropa con repliegues de escepticismo y de resentimiento contra el cuerpo social que tan poco suele estimar nuestra misión. ¿Pero qué maestro auténtico piensa en esta subestimación ni en el abuso consiguiente de los Estados e Instituciones que explotan los entusiasmos vocacionales, para dejar de sentirse vibrantes y renovados a cada nuevo contacto con la clase?

Nuestra formación, repito, dura toda la vida. Cada día aprendemos algo nuevo y maravilloso de nuestros alumnos, y entonces surge espontáneo el deseo de comunicar todo este venero de experiencias vividas a nuestros compañeros, para que ellos a su vez nos transmitan algo de las suyas, para cotejar resultados, vivencias y observaciones, etc. De aquí la necesidad ulterior de una intensa vida de relación entre el cuerpo enseñante, base indispensable de su posformación.

Por otra parte, el profesor aislado, en ambiente alejado de los grandes centros de cultura, pierde contacto con el mundo científico en gestación, deja de percibir sus latidos, como no se alimente de tanto en tanto su comunicación con él por medio de envío de revistas, organización de cursillos de ampliación de conocimientos, intercambios, reuniones. Esta formación poscátedra es complemento necesario de la anterior, y yo diría que casi tan importante como ella. El Centro de Orientación Didáctica, creado por la Dirección General de Enseñanza Media, consciente de esta necesidad, empezó precisamente sus actividades promoviendo reuniones varias de catedráticos de cada disciplina, para suscitar el estudio conjunto de temas didácticos planteados por la reforma de planes. De estas reuniones han surgido puntos de vista interesantes y conclusiones que han podido orientar considerablemente a la Dirección General. El intercambio de experiencias permitirá, además, proyectar una beneficiosa y cordial acción del profesorado oficial de Enseñanza Media sobre el profesorado privado que necesite de orientación, mediante la organización de cursillos breves, como los que ya se han desarrollado.

La Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, cuida asimismo con ahinco de la organización de cursillos para su profesorado, tanto más cuanto que, como es sabido, este profesorado se nombra inicialmente por concurso y permanece en situación de interinidad durante siete años antes de acceder al concurso-oposición que le afirmará en sus puestos vitaliciamente. Sobre la organización de estos cursillos, solamente me referiré aquí al vínculo de unidad que se establece entre el profesorado todo de cada disciplina a través de las asesorías correspondientes. Por lo que a mi caso se refiere, al ser encargado de esta asesoría hace dos años, consideré fin primordial de la misma mantener ante todo levantado el espíritu del profesorado, alimentando en él un sentimiento colectivo de fe en la tarea común. Pensé que en el aislamiento intelectual en que se hallan la mayor parte de nuestros profesores sería para ellos motivo de considerable aliento sentirse constantemente asistidos y acompañados en una tarea que es de todos y a la que cada uno debe aportar el grano de arena de su experiencia variada en todos los ámbitos de trabajo de España, y estimé que mi función como asesor no habría de servir tanto para dar orientaciones uniformes como para mancomunar y aglutinar esfuerzos variados, recogiendo la multiplicidad de experiencias adquiridas por todos, y en las que todos tenemos algo que decir y mucho que aprender.

Inspirado en este sentir, se inició mi correspondencia con todos los profesores de Matemáticas, inicialmente en forma de circulares abordando temas y preguntas que a todos podían interesar, promoviendo experiencias, ensayos de elaboración de material nuevo, estimulando críticas y comentarios y contestando personalmente a las preguntas que tales inquietudes originaban, formulando a la vez nuevas circulares cuando tales consultas y respuestas podían tener un interés general.

Magnífica ha sido la respuesta del profesorado de Matemáticas de los Institutos Laborales, tanto en lo que se refiere a los deseos manifestados, a los trabajos monográficos publicados sobre economías comarcales, a los artículos de colaboración enviados por ellos, a las experiencias didácticas y lecciones-modelo, a los proyectos y magníficas realizaciones de material didáctico que tan elocuentemente llamaron la atención en la Exposición Internacional de Material Didáctico celebrada en Madrid recientemente.

Esta actividad demuestra la vitalidad con que se manifiesta la vocación de enseñante cuando encuentran ecos y resonancias en que tomar nuevo impulso. Y he querido citarla aquí no tan sólo como ejemplo de lo que puede hacerse en el ámbito de la posformación aludida, sino también como elogio merecido a un cuerpo que con tanta voluntad y eficacia ha respondido a una simple llamada.

II. LA VOCACION MATEMATICA [1]

Problema vocacional, problema de educadores

No cabe duda, señores, Germain es un excelente psicólogo. Sabe dominar toda resistencia con cariñosa insistencia. Adivinó, además, que me atraería el tema y que terminaría aportando de buen grado mi tributo al trascendente problema que motiva este ciclo.

Correspóndeme hacerlo más como educador que como matemático. Sin falsa modestia os digo que, en el dominio de la estricta creación matemática, debiera ceder esta cátedra a varios de mis colegas de la Academia y de la Universidad. En cambio no la cedo a nadie en preocupación por el problema educativo, sin despreciar por ello la investigación. Un investigador puede, acaso, despreocuparse de los procesos de enseñanza. Un profesor, en cambio, tiene que haber creado para saber estimular la creación entre sus alumnos, ya que enseñar no es transmitir, sino guiar procesos de aprendizaje.

Los que nos dedicamos a la enseñanza de la Matemática no hemos de concebirla como un legado a transmitir, sino como una actividad a cultivar para incremento de aquel legado. De aquí que el problema que habéis planteado sea también entrañablemente nuestro, de educadores. Y así comparezco; con intención de pensar con vosotros, más que para reclamar vuestra atención sobre mis propias reflexiones.

¡Dichoso quien puede meditar de veras en el torbellino en que vivimos! A mí no me es fácil hacerlo. Un alumnado universitario necesitado de orientaciones didácticas, una enseñanza laboral en plena organización, una

---

[1] Conferencia dada por el autor el 18 de mayo de 1959 en el Instituto Nacional de Psicología Aplicada y Psicotecnia, perteneciente al Curso sobre Vocación, organizado por el Instituto durante el año 1959. La publicamos gentilmente autorizados por este Instituto y por la «Revista de Psicología».

enseñanza técnica en tránsito de audaz reforma y un Bachillerato en estado de moderna evolución, constituyen una encrucijada en la que no cabe reposo para la meditación voluntaria; ni siquiera para la involuntaria sedimentación de ideas en un subconsciente agitado por ecos de clarinazos apremiantes, por tic-tacs medidores de un trabajo cronometrado, por imágenes temblorosas de folios esperando una puntuación y un fallo, y tras de cada folio una vida, tal vez una vocación rota...

Apetece escapar de tal angustia aunque sea unos instantes, recogerse en remansos de paz como éste, donde me imagino ante todo invitado a cerrar los ojos y a evocar...

RECUERDOS PERSONALES

Sí; recuerdo perfectamente. Estoy viendo el Claustro de la Universidad de Barcelona por el que tenían acceso diversas aulas de la Escuela de Ingenieros, en la que acababa de ingresar. Huyendo del ajetreo de la planta baja, repasaba mis lecciones en la tranquila galería del piso superior. Era otro mundo. En aquel silencio acogedor, unos rótulos severos: «Cosmografía y Física del Globo», «Astronomía esférica y Geodesia»... me inducían a pensar en la belleza de un estudio desinteresado, sin más finalidad que la alegría del conocimiento en sí mismo, ¡sin prisas!, con todo el plazo necesario para la penetración reposada y profunda en la verdad...; penetración que me resultaba vedada en un plan de estudios que, en pocos años, pretendía poner a mi alcance toda la técnica industrial.

Y he aquí cómo, más ambicioso acaso que el plan, o simplemente deseoso de escapadas liberadores, me decidí a simultanear los estudios de ingeniería con los de la Facultad de Ciencias Exactas. Poco tardaron estos últimos en pasar a un primer plano, desviándome de la trayectoria industrial primera, en la que, por cierto, tenía asegurado un porvenir derivado de circunstancias que no son del caso. Tal vez lo sea citar, con emoción que disculparéis, la generosa comprensión de mi padre, que, más atento a mi felicidad que a la suya, en ningún momento intentó torcer mis tendencias vocacionales...

No quiero significar con estos recuerdos que un patio y una galería fueran en mi caso los determinantes de una vocación matemática, pero sí que un factor ambiental, aparecido en momento oportuno en consonancia con apetencias insatisfechas, pudo determinar la toma de conciencia de una vocación latente, en contraste con otra vocación, para la que tampoco carecía de aptitudes y para la que parecía socialmente predestinado. Acaso no me hubiera apartado de ésta de haber hallado a tiempo, al cultivarla, aquellas satisfacciones puramente espirituales que echaba de menos. Supe verlas más tarde cuando, catedrático ya de San Isidro, decidí terminar la carrera de ingeniero en busca de panoramas que permitieran completar mi formación científica. Necesitaba un sentido de aplicación para proyectarlo al campo de la enseñanza en la que era ya responsable, y esto me proporcionó también no pocos goces.

Pero era ya tarde para volver sobre mis pasos; la matemática me había prendido sucesivamente por tres amarres: el de la meditación pura, el de la investigación aplicada y el más fuerte aún de la docencia. Y en este triple aspecto de mi vocación lograda he sido, y sigo siendo, plenamente feliz, pese a la dispersión que antes lamentaba y que no está en mi mano remediar. Cuando se concibe la vida como servicio, el tiempo ya no es caudal propio, sino ajeno. Por eso estoy aquí.

Mas no he venido para relatar tan sólo el expediente más o menos ingenuo de mi vocación y de su logro. Mi doble faceta científica y profesional os hace suponer, lógicamente, que me habrán interesado las introspecciones de matemáticos ilustres, que habré tratado personalmente diversos cultivadores de la misma Ciencia y que, a lo largo de mi vida de profesor, habré asistido al alumbramento de vocaciones diversas, entre las cuales prestaría singular atención a la misma que decidió mi vida, y que de tales lecturas, tratos y experiencias podré acaso aportar alguna contribución al problema de la orientación vocacional de la juventud, en lo que al cultivo de la Matemática se refiere.

Trataré de complaceros, si bien os confieso la dificultad en que me veo para extraer, de la diversidad de impresiones y vivencias recogidas, un cuadro de ideas que sirva para enfocar satisfactoriamente el problema.

LA CURIOSIDAD Y LA APTITUD, DETERMINANTES INTRÍNSECOS DE LA VOCACIÓN MATEMÁTICA

No recuerdo quién fue el primero en enunciar esta verdad que está en el ánimo de todos. La Ciencia está formada por aproximaciones sucesivas.

Permitidme, pues, que comience por estructurar, en primera aproximación, lo que pienso sobre la vocación matemática. Voy a hacerlo en torno a la siguiente opinión: Nuestra vocación se ceba con la curiosidad y se alimenta de la aptitud. Razonémosla.

La curiosidad (en su elevado nivel, se entiende) se manifiesta como una avidez de información, de penetración que dispara el deseo de satisfacerse y la acción consiguiente para lograrlo. La aptitud para tal acción determinará la magnitud del esfuerzo necesario. Si éste es asequible, la curiosidad alimentada buscará nuevos motivos de satisfacción y la vocación encontrará su cauce caminando con paso firme hacia su plenitud. Pero si el esfuerzo resulta insuperable por aptitud defectuosa, es probable que la curiosidad se desaliente y que la vocación se extinga. Por el contrario, si la aptitud existe sin que un atisbo de interés la ponga en movimiento, la vocación estará tal vez latente, pero permanecerá perennemente oculta sin manifestarse.

Curiosidad y aptitud, interés y talento específicos son, pues, conjuntamente necesarios para que prenda la llama de la vocación y para que no se apague. Pero hay variedad de cebos y de alimentos, de llamas y de combustibles, como existen varios tipos de curiosidad y de aptitud matemáticas. ¿Cómo caracterizarlos? Entramos con ello de lleno en el terreno de lo que pudiera llamarse una psicología matemática, en gran parte desconocida, incluso de nosotros mismos, los educadores. De aquí nuestro general fracaso en el alumbramiento de vocaciones matemáticas. Demasiados prejuicios nos vendan los ojos, de tal modo que los mismos alumnos nos sorprenden cuando aprendemos a ver sus reacciones con criterio objetivo.

Los problemas específicos de una tal psicología matemática no pertenecen solamente al mundo intelectivo (el más inmediato a la exploración), sino también a los mundos afectivo y volitivo, de resortes más ocultos. No se trata tanto de averiguar la psicogénesis de los conceptos matemáticos (tema central de algunos psicólogos, por ejemplo Piaget) como de determinar cuáles son los procesos mentales del matemático en acción y sobre todo de conocer los agentes afectivos disparadores de esta actividad; de estudiar, en suma, los factores de curiosidad y de aptitud que acabo de presentar como determinantes *intrínsecos* de la vocación matemática.

LOS FACTORES GENÉRICOS DE LA APTITUD

Del mismo modo que no existe una definición exhaustiva de la Matemática, tampoco parece posible categorizar exhaustivamente la aptitud matemática. En el campo de la invención, Hadamard ha intentado establecer una tipología matemática de la que luego hablaremos, la cual se imbrica, naturalmente, con las tipologías de orden más general que pueden establecerse para todo dominio de conocimientos.

Yo veo como primera actividad necesaria para todo cultivador de conocimientos, una actividad *asimiladora* que requiere especial facilidad y agilidad de captación del pensamiento ajeno; una receptividad informativa, una adaptación rápida a los lenguajes, a las sintaxis expresivas de las más diversas mentalidades, receptividad que tiene modalidades diferentes según los individuos (auditivos, visuales).

La aptitud asimiladora debe complementarse con otra *memorizadora* en la que ya entra en funciones la facultad de asociación, que tan importante papel desempeña luego en la creación matemática, aunque aquí se manifieste solamente en función sujetadora más que relacional.

Se comprende la importancia de la memoria en la dinámica matemática relacional. Cuanto más surtido esté de ideas el almacén mental, más posibilidades tendremos para relacionarlas y para seleccionar luego las relaciones fecundas. Porque es sabido que la invención se atribuye precisamente a estas dos facultades: la de *relacionar* y la de *seleccionar.* (Observa ya San Agustín que «intelligere» significa «elegir entre»). Poincaré, autoanalizando los procesos internos de su invención matemática, situó gran parte de tal actividad inventiva en un yo subconsciente «subliminal» (conciencia marginal según otros), el cual, estimulado y puesto en marcha por la voluntad consciente de penetración, combina y selecciona incesantemente, aun en las horas de reposo y sueño, entregando al consciente los frutos de su trabajo en los momentos más inesperados, con frecuencia en los primeros instantes de lucidez consecutivos a un sueño prolongado. Queda luego el trabajo consciente, la tarea de verificar los frutos tan generosamente ofrecidos, de elaborarlos sistemáticamente y aun de elegir en eliminatorias sucesivas las combinaciones más fecundas.

Comparando los procesos descritos por tales matemáticos con los que manifiestan poetas como Valéry, con los que experimenta también el compositor músico en sus respectivas actividades creadoras, nos damos cuenta de que tanto en el Arte, como en la Ciencia, las llamadas *inspiraciones* son productos de la misma actividad sub o supra-consciente excitada por la búsqueda de la belleza o de la verdad, y de que tanto agota en esta porfía el hallazgo de combinaciones como su selección posterior.

No todos están conformes en el emplazamiento de tales actividades (Valéry, por ejemplo, no cree en el subconsciente), pero, radiquen donde radiquen, quedan enunciados los cuatro factores genéricos de la aptitud: la facultad de información, la de memorización, la de combinación y la de selección. Con las dos primeras suele contentarse el erudito; las dos últimas son necesarias al creador. Unos y otros suelen llamarse investigadores, pero en matemáticas reservamos tal adjetivo a los verdaderos creadores.

LA VOCACIÓN DESCUBRIDORA Y LA SISTEMATIZADORA

Pero se puede investigar o crear lo mismo en las ramas que en las raíces del árbol de la ciencia matemática. En la red de implicaciones que la teje podemos seguir el orden natural de lo implicante a lo implicado, descubriendo o creando consecuencias, actuando de ariete a la conquista de lo desconocido. Pero también podemos seguir el orden descendente, investigando las causas primeras, tendiendo los enlaces que constituyen sistemas, buscando el tronco y las raíces comunes de ramas aparentemente dispares. También en este sentido se manifiesta una poderosa actividad matemática y, por ende, una aptitud de modalidad algo diferente de la anterior.

A tales aptitudes corresponden estímulos específicos: la curiosidad del «qué» del «cómo», acucia la vocación *descubridora*; la curiosidad del «por qué» despierta la vocación *sistematizadora,* y es notable que una y otra puedan manifestarse ya desde la niñez. En una clase experimental que realicé ante los congresistas y público asistente a la XI Reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de la Matemática, con un grupo de niños de diez y once años del Liceo Francés de Madrid (y en la que traté de explorar la génesis de los conceptos de múltiplo y divisor, en sus distintos grados de generalidad), deseoso de analizar al máximo el juego de reacciones de los pequeños, terminé la experiencia planteándoles una situación relacionada con el tema: la adivinación de una cifra tachada en el resultado de restar de un número cualquiera la suma de sus cifras. El secreto de mi infalibilidad al adivinarles las cifras tachadas, dándome la suma de las restantes, despertó inmediatamente en todos la acuciante *curiosidad del cómo,* y el truco no tardó en ser descubierto con la alegría consiguiente. Pero ahí viene lo más hermoso de la experiencia: a mi indicación de que podían retirarse los satisfechos, los que no desearan saber más, no faltó niño que planteó tímidamente: «Je voudrais savoir pourquoi». Este interés de categoría superior: la *curiosidad del por qué,* surgido espontáneamente en aquel cerebro de diez años, prendió inmediatamente en los demás, y ya nadie quiso marcharse, lo que me permitió llevar el final de la experiencia relativa a la divisibilidad por nueve, por los cauces de razonamiento que deseaba.

Resumiendo, podemos distinguir, en primera aproximación, estas dos grandes categorías de vocación matemática: la vocación descubridora y la sistematizadora. Ambas aptitudes suelen actuar conjuntamente, ya que no hay descubrimiento sin sistema ni sistema sin juego de implicaciones reversibles; pero en el ir y venir, a lo largo del encaje deductivo matemático, es frecuente que los matemáticos manifiesten su preferencia hacia un sentido sobre el otro, lo que imprime un sello específico a su obra. En el mundo antiguo son claro ejemplo de la vocación descubridora un Arquímedes y de la sistematizadora un Euclides. En el mundo moderno la diferenciación es más difícil por ser el tejido más complejo, pero acaso pudiera presentarse como ejemplo de los primeros a un Poincaré y de los segundos a un Hilbert.

La vocación descubridora, el interés por el problema concreto, por la rama y el fruto, suele preceder a la vocación sistematizadora, al interés por el tronco, por la raíz, por lo abstracto común. En primer lugar, porque las analogías sólo se descubren cuando existen multitud de campos cultivados comparables, y en segundo lugar, por un factor psicológico que hiere más pronto el interés del individuo. Me refiero al desafío que para la inteligencia humana constituye todo problema matemático sea procedente del campo puro o del campo físico aplicado. No aludo tanto a la vanidad excitada en sentido de competición con otros cerebros, a la manera de las históricas luchas entre Cardano y Tartaglia en defensa de la primacía de sus soluciones a la ecuación de tercer grado; me refiero más bien al acicate que para el amor propio estimulado suelen promover los sabrosos interrogantes de las teorías matemáticas cuando se hallan en pleno desarrollo. Este factor que pudiera llamarse deportivo y que cabalga entre lo intrínseco y lo extrínseco de la vocación, ha nutrido una parte considerable de la investigación matemática, y la ha nutrido lícitamente en cuanto, repito, no ha constituído vanidad, sino honorable porfía del investigador, surgida en el íntimo diálogo entre su voluntad y su inteligencia.

La vocación sistematizadora, la curiosidad hacia la verdad profunda, hacia el origen y tronco común de teorías diversas, es estímulo de más alta categoría ética, y también estética, puesto que la acompaña una apetencia de orden, de armonía y belleza. La palabra curiosidad parece, pues, demasiado pobre y acaso peyorativa para designar tan elevado interés. Sólo los cerebros excepcionales, de dilatadas perspectivas, son capaces de crear las grandes síntesis en nuestra ciencia matemática, sólo ellos pueden llegar a las elevadas cumbres desde las cuales se otea la convergencia de los caminos.

Y aun añadiría que en tales cerebros la aptitud sistematizadora se completa con otra que responde no sólo a la curiosidad del «por qué», sino del «por qué no de otro modo». Supervisión distintiva de caminos y laberintos y cuya apetencia late en el fondo de toda vocación matemática completa. A ella se debe sin duda la insatisfacción que sentimos con frecuencia, después de haber seguido pasa a paso los porqués de una demostración sintética que nos deja fríos, y la preferencia por aquellas otras demostraciones de carácter más analítico, menos breves, pero más sinceras, en el sentido de que manifiestan la necesidad del camino seguido o de sus ventajas respecto de otros. Sólo entonces experimentamos la satisfacción de una posesión plena de la verdad, ya que es satisfacción lógica y psicológica a un tiempo, que nos hace en cierto modo partícipes de la aventura genética de la verdad poseída.

TENDENCIAS HACIA LO PURO Y HACIA LO APLICADO

Parece natural la tentación de asociar la vocación de conquista, la curiosidad del «qué» y del «cómo» a los matemáticos con tendencia a las aplicaciones, y la vocación sistematizadora, la curiosidad del «por qué» a los matemáticos puros; pero en rigor se trata de categorías diferentes que no admiten tan simplista correlación.

El matemático puro necesita cultivar esencialmente el descubrimiento de cadenas de enlace entre premisas abstractas y sus consecuencias últimas, o inversamente entre presuntas proposiciones y sus posibles causas primeras: su juego de implicaciones suele operar sobre abstracciones ya elaboradas. El matemático aplicado (llamémosle así impropiamente para abreviar) necesita elaborarlas él mismo al esquematizar los problemas físicos que somete al análisis matemático. Su función constante es la de tender puentes entre el mundo concreto y el mundo abstracto y esta función le sensibiliza extraordinariamente para la detección de analogías e isomorfismos, sobre los que el matemático puro edificará más tarde sus elevadas síntesis. Yo no considero que sea tarea reservada al físico la creación de esquemas matemáticos adecuados a su mundo; su dictamen es necesario para apreciar la adaptabilidad de tales abstracciones; pero la elaboración propiamente tal de éstas es tarea esencialmente matemática. La matemática no es, acaso en el fondo, más que eso: la ciencia de los esquemas, y su origen va involucrado a tal función. Véase, pues, cuán dilatado debe ser el horizonte de conocimientos y de sistemas abstractos de que ha de disponer un buen matemático aplicado para atisbar las estructuras esenciales en los fenómenos naturales o sociales que atraen su atención. En este sentido, el matemático vertido hacia las aplicaciones, debe participar tanto de la vocación descubridora como de la sistematizadora; por donde se aprecia cuán ingenua resultaría la pretendida correlación antes enunciada.

LOS PROBLEMAS DEL MUNDO FÍSICO Y SOCIAL COMO INCENTIVOS DE LA VOCACIÓN MATEMÁTICA

Con lo que acabo de decir se comprende además cómo el mundo físico y social despiertan la acuciante necesidad de creación de nuevos esquemas matemáticos. Insisto, una vez más, en el criterio que he mantenido en otras ocasiones de que es precisamente en el mundo físico donde se halla el origen (inmediato o remoto) de la creación matemática.

No es tesis grata a los matemáticos puros, lo sé. Celosos de la pureza e independencia de sus más queridas elaboraciones, repudian toda cuna concreta que estiman bastarda. Pero no es otra nuestra heráldica. Los primeros conceptos aritméticos, las primeras relaciones geométricas alumbraron en la mente humana ante la necesidad de contar los rebaños, de medir los terrenos para conservarlos. El Algebra nació más tarde con objeto de sistematizar y automatizar la resolución de problemas aritméticos y en especial las complicadas cuestiones de herencia, a las que eran tan dados los testadores árabes. El Cálculo Diferencial halló su origen en problemas concretos sobre velocidades y aceleraciones; el Integral, en la medición de áreas y volúmenes, y todo el Análisis Infinitesimal, que tomó cuerpo a partir de tales problemas, ha ido prosperando por las necesidades de la Mecánica y de la Física.

Lo que ocurre es que, una vez elaborados los conceptos matemáticos como abstracciones transitorias que el físico necesita para el estudio cuantitativo de sus problemas, la mente matemática los combina y relaciona, proliferando con ellos conceptos nuevos, origen a su vez de nuevas abstracciones que se estratifican en planos sucesivos de elevación jerárquica.

Los conceptos matemáticos que en un principio lo fueron «per accidens», terminan siéndolo «per se», ciudadanos con personalidad propia en nuestra mente, con los cuales nos complacemos en crear estructuras legislativas, teorías abstractas tan alejadas ya de todo mundanal ruido que olvidamos desdeñosamente su auténtico y humilde origen.

Si lo recordáramos, acaso no presumiríamos tanto de anticiparnos al mundo físico, cuando hallamos maravillados en él nuevas aplicaciones e interpretaciones de lo que libremente hemos creado partiendo de aquellas primeras abstracciones que en él tomaron su origen. Es cierto, por ejemplo, que Einstein halló el lenguaje matemático adecuado a su teoría de la relatividad generalizada en el cálculo diferencial absoluto de Ricci y Levi-Civita, fruto de las más puras elaboraciones efectuadas sobre los espacios métricos creados medio siglo antes por Riemann. Pero no lo es menos que, unos y otros, tomaron pie de la teoría intrínseca de superficies ideada por Gauss en los albores del siglo XIX, como consecuencia, sin duda, de las árduos problemas que sobre el geoide terrestre había planteado la medición de arcos de meridiano consecutiva al establecimiento del sistema métrico.

En la aparente antinomia entre lo puro y lo aplicado no corresponde hablar de posturas equidistantes, reconociendo distancias que el tiempo se encargará luego de anular. Preferible es mantener un acercamiento y una mutua comprensión de afanes. Injusta es, ciertamente, la escéptica pregunta: «¿Y esto que está usted investigando para qué sirve?», con la que se menosprecia el legítimo amor a la verdad desinteresada; pero ridículo resulta asimismo la respuesta que en reacción suele darse: «Es que me gusta investigarlo precisamente porque no sirve para nada.»

Bien está defender la libertad de elección de temas y legitimar ésta en la satisfacción de goces puramente intelectuales; pero proclamar indignos de elección ciertos temas por el solo hecho de prestar utilidad a otros cerebros tan legítimamente buscadores de la verdad en su mundo, como lo es el matemático en el suyo, resulta inadmisible y pedante. En todo orden de creación existe belleza.

Además, de nada sirve proclamar como garantía de pureza de un producto el total desprecio hacia las aplicaciones del autoclave intelectual en que se ha cocido. El producto queda y la posteridad se encarga, como he dicho, de encontrarle con frecuencia utilidad y aplicación, pese a la voluntad contraria de su creador. Son muchos los ocultos factores culturales y sociales que interfieren la pretendida independencia y libertad del investigador y de los cuales ni él mismo se da cuenta al elegir su ruta. El incesante tráfico de ideas que constituye la Historia de la Ciencia permite predecir que la matemática pura de hoy será matemática aplicada de mañana. La mayor parte de las creaciones abstractas de los tiempos de Newton y Leibniz, y aun de los posteriores de Euler, no es hoy solamente matemática aplicada, sino incluso matemática utilitaria, la instrumental del técnico en su labor diaria, y por ello, debidamente modernizada, se está enseñando en los programas mínimos de nuestros cursos formativos en las escuelas de ingeniería.

Ejemplos más modernos los hallamos en la trayectoria conceptual que va de los trabajos de Gauss a los de Einstein, antes citada, así como en el álgebra que Boole creó a mediados del pasado siglo para esquematizar las leyes de nuestro pensamiento deductivo y que hoy se aplica a los circuitos con interruptores, conmutadores, relés y válvulas electrónicas. Cultivemos, pues, una recíproca estimación entre puros y aplicados y reconozcamos que todo el progreso científico se debe precisamente a la colosal simbiosis entre la Matemática y las Ciencias de aplicación, resultante del mutuo estímulo y del constante diálogo.

LA PERSEVERANCIA, REFUERZO DE LA APTITUD

En primera aproximación hemos señalado la curiosidad y la aptitud como factores intrínsecos, respectivamente afectivo e intelectivo, de la vocación matemática. Pero en una segunda aproximación corresponde añadir un factor volitivo, de carácter, muy importante: la perseverancia.

En el equilibrio entre el deseo promovido por la curiosidad y la capacidad de satisfacción del mismo alimentada por la aptitud, juega, como hemos dicho, el factor desaliento que aparece en cuanto el esfuerzo necesario para satisfacer las curiosidades iniciales, resulta una y otra vez de difícil superación.

Ahora bien, la aptitud se beneficia con el ejercicio, y si entre las facultades de carácter del individuo cuenta la de saber perseverar, es muy posible que tal perseverancia termine conduciendo la aptitud hasta el nivel suficiente para vencer las dificultades primeras, y entonces la vocación se afianza gracias a tal virtud.

Por eso el papel de la perseverancia es esencial en la vocación matemática, quizá más que en ninguna otra. En efecto, la matemática, al edificarse por estratos, exige que cada uno de ellos tenga la solidez necesaria, no sólo para sostenerse a sí mismo, sino para servir de base a los de encima. Cualquier fisura producida en una de estas capas superpuestas, por relajamiento transitorio en el esfuerzo durante su sedimentación, hará peligrar el edificio entero. De aquí la desgraciada frecuencia con que los muchachos fallan en matemáticas sin carecer de aptitud intelectual para ella. Resulta difícil que a lo largo de todo el proceso educativo la formación matemática no haya sufrido algún bache, motivado, bien sea por una enseñanza deficiente, bien sea por una minoración pasajera de la salud, de la voluntad o de otras facultades del individuo. Sólo la perseverancia en el esfuerzo puede remediar entonces el fallo, reconstruyendo con tenacidad lo parcialmente debilitado.

Esto explicaría la escasez de vocaciones matemáticas en países de elevados niveles de curiosidad y talento, pero de tónica temperamental poco perseverante. No remedia el mal la aparición en ellos de singularidades excepcionales, ya que no pueden desarrollar cumplidamente su misión por falta de una extensa tradición en qué apoyarse. Cada pueblo tiene una cultura vinculada a su tradición y es trabajo de titanes influir en esta cultura creando tradiciones nuevas.

LA INTUICIÓN MATEMÁTICA.—INTUITIVOS, LÓGICOS Y SIMBÓLICOS

Del mismo modo que hemos hecho entrar en escena la perseverancia como factor volitivo que refuerza la aptitud estimulada por la curiosidad inicial, parece necesario tomar también en cuenta la intuición como facultad intelectiva que abrevia y simplifica las operaciones relacional y selectiva, integrantes de la invención.

De la intuición matemática se han dado casi tantas definiciones como tratadistas la han considerado. Si etiniológicamente «intelligere» puede interpretarse como «elegir entre», «intuere» puede leerse como «ver dentro»; de modo que la intuición será la adivinación introspectiva del resultado de procesos en el mundo físico o en el mundo intelectual antes de su verificación material o de su comprobación lógica. Por eso se ha asignado a la intuición el papel de guía de la invención o creación matemática, mientras se reserva a la lógica el papel verificador o afianzador.

Pero también la intuición actúa en los mismos procesos lógicos. Me refiero a la maravillosa intuición de la línea conceptual geodésica o camino más corto entre premisas y consecuencias remotas. Lo corriente es que sólo se aprecie la posibilidad de acortar el camino de acceso cuando ya se ha llegado a la meta, pero no antes; exactamente lo mismo que ocurre con los rodeos que suele dar el excursionista al escalar una altura. Sólo cuando se tiene la referida intuición geodésica, es cuando se adivina, por instinto, las vías más rápidas y cómodas de acceso, antes de verlas desde la propia altura conquistada. Cuando esta clase de intuición adorna al matemático, sus demostraciones tienen de primer intento aquella elegancia y aquella belleza que con razón asocian algunos a la economía de pensamiento.

La aparición de la intuición en los mismos procesos lógicos me hace ser un tanto escéptico acerca de la clasificación de los matemáticos en los dos grandes grupos lógico e intuitivo de la que nos habla Hadamard [2]. Este gran matemático francés intenta categorizar uno y otro grupo según la profundidad de las capas del subconsciente que actúan en los procesos respectivos de invención. Según él, estas capas serían muy profundas en

---

[2] J. HADAMARD, *Psicología de la invención en el campo matemático.* (Espasa-Calpe.)

los matemáticos intuitivos y poco profundas en los lógicos, en el sentido de que cuanto más próximas se hallen de lo consciente los procesos de invención, más fácil resulta darles una estructuración lógica. Pero reconoce acto seguido que si, aun actuando la invención en capas muy profundas, las ideas surgen con claridad en el consciente por su propio poder de penetración, el matemático parece entonces lógico, siendo en rigor intuitivo.

Considero, pues, en resumen, difícil categorizar a los matemáticos en uno u otro sentido; porque, además, sólo podemos hacerlo a través de sus obras y en ellas no es frecuente que manifiesten los procesos genéticos en virtud de los cuales han sido creadas. La síntesis, ya lo he dicho en otras ocasiones, suele ser hipócrita, y no tanto por deliberado afán de ocultación de recursos inventivos, como por imperativos de un estilo que tradicionalmente en matemáticas se exige sobrio y conciso. Así he llegado a sospechar que el propio Hilbert, campeón del formalismo lógico, es en el fondo también un gran intuitivo. Sin embargo, ciñéndonos estrictamente a la apariencia de su obra, habríamos de categorizarle como a Weierstrass, entre los lógicos, mientras habría que clasificar a Riemann y Klein entre los intuitivos.

Yo me inclinaría más bien a diferenciar categorías de intuición, de tal modo que la intuición imaginativa, espacial, sin duda relacionada con la facultad que en psicología suele llamarse eidetismo, pasaría a ser característica de los comúnmente llamados intuitivos, mientras la intuición racional, que he llamado antes geodésica, pasaría a ser la intuición característica de los lógicos.

Pero queda sin considerar otra categoría: la de los formalistas o algebristas, es decir, de los que intuyen y razonan mejor con símbolos que con imágenes propiamente tales; los que perciben y distinguen con claridad las estructuras legislativas que gobiernan tales símbolos y sus transformaciones y saben jugar ágilmente con ellas.

El papel del simbolismo ha sido fundamental en matemáticas. Un inadecuado simbolismo puede frenar la evolución (como ocurrió en el mundo latino con la Aritmética y la numeración romana), mientras un simbolismo acertado se traduce pronto en economía de pensamiento, derivada de la automatización del mismo a través de las leyes formales que lo expresan adecuada y abreviadamente. En la captación y dominio de tales automatismos se manifiesta la intuición simbólica, intuición poco frecuente, que se desarrolla a través de largo ejercicio, por lo que resulta improcedente acelerar la mecanización formalista en el período escolar. A tales anticipaciones se deben la mayor parte de los errores que en todo el mundo cometen los alumnos de los primeros cursos de Algebra.

FACTORES EXTRÍNSECOS EN LA VOCACIÓN MATEMÁTICA. LA DERIVACIÓN PSEUDO-DEPORTIVA

Deliberadamente he dejado para ser considerados brevemente en tercera aproximación los factores que podríamos llamar *extrínsecos* de la vocación matemática y que, por ser sensiblemente los mismos que intervienen en otras vocaciones, constituyen tema general de estudio más propio de psicólogos. Me refiero, claro es, a la diversidad de influencias que pueden afirmar o alterar la decisión del adolescente en el momento en que su vocación empieza a manifestarse: voluntad de los padres; presión del ambiente, de la sociedad; afán de lucro, de gloria, de lucha y competencia; vanidad, amor propio, estimación social; apetencia de recogimiento, de entrega y sacrificio; ejemplo de maestros, etc.

Inútil sería pretender agotar aquí los motivos que favorecen o entorpecen la auténtica vocación. Esta viene predeterminada por los factores intrínsecos que los especialistas hemos sido invitados a analizar en cada una de nuestras actividades. Sin embargo, la importancia, a veces decisiva, que tiene lo externo para afirmar o para torcer una vocación, obliga a tener también en cuenta, aun cuando sea someramente, aquellos factores extrínsecos que más directamente parecen afectar a la vocación específica de que se trata.

En el caso de la matemática, por ejemplo, es muy a considerar la tendencia deportiva, aludida con anterioridad, y que, si resulta lícita en tanto es placer interno del investigador en lucha tras la verdad oculta, resulta de muy inferior categoría en cuanto se manifiesta en simple afán de competición y vanagloria. Y, sin embargo, forzoso es reconocer que la Matemática debe también, en buena parte, su desarrollo a tales afanes, por deleznables que parezcan. Acaso no lo sean tanto cuando hasta las mismas Academias fijan metas y promueven premios y honores a quienes primero las alcanzan. Recuérdese el gran premio ofrecido por la Academia de Berlín al primer demostrador del teorema de Fermat, perteneciente a la teoría de números, uno de los capítulos de la matemática más alejado de las aplicaciones. Y en plano más reciente y elemental no faltan países, como Rusia, que consideran como pieza clave de su sistema educativo el establecimiento de olimpíadas matemáticas (que así las llaman) entre su juventud.

Sin embargo, aun cuando se me tilde de idealista en exceso, es instintiva en mi función de educador la repugnancia a organizar cucañas científicas entre mis alumnos. Me colma de alegría, eso sí, verles embelesados por el interés intrínseco de las situaciones problemáticas creadas ante ellos con objeto de atraer fuertemente su atención; y si no lo logro, me conceptúo fracasado y busco otros caminos. Todo el artificio de premios y castigos con el que suele estimularse a los escolares, cuando no se tiene inventiva para lograrlo de otro modo, me parece recurso de inferior categoría, que exacerba el individualismo sin desarrollar la personalidad. Esta se desenvuelve mejor en clima de íntimo reconocimiento que en clamor de exterior ostentación.

Por otra parte, la ciencia actual necesita más equipos que destacadas individualidades, y es maravilla comprobar cómo los grupos educados en el trabajo en común saben organizarse jerárquicamente, procurando por sí mismos la mayor eficacia en su función.

En este aspecto consuela poder presentar en la historia de la matemática, en contraste con el histerismo de los altercados públicos medievales, como los de Tartaglia y Cardano antes recordados, cordiales intercambios epistolares de ideas y de dificultades, como la correspondencia entre Cantor y Dedekind, y más recientemente aún, la enorme y ejemplar labor de equipo de todo un grupo de matemáticos franceses contemporáneos que bajo el seudónimo (un tanto humorístico) de Nicolás Bourbaki están rehaciendo la fundamentación de toda la matemática actual.

LA SUBESTIMACIÓN DEL MEDIO

De los factores extrínsecos favorecedores de la vocación matemática pasamos ahora a los de signo negativo, como es el temor a la indigencia. Temor plenamente justificado en una sociedad que en nada estima los esfuerzos cuyos resultados no percibe palpablemente; esfuerzos en cabeza de los cuales figuran los afanes matemáticos en particular y los científicos puros en general. Inútil resulta argumentar que son siembra de cosecha lejana. Tan lejana se pone, que la sociedad no acierta a verla y desconfía.

En los tiempos en los que el arte y la ciencia vivían de la munificencia de reyes y príncipes bastaba el convencimiento de tales protectores, convencimiento casi siempre implícito en la naturaleza misma de protector, fundada en innata afinidad hacia lo protegido. Pero al democratizarse ciencia y arte, se hace preciso llevar tal convencimiento a las masas. De aquí la necesidad de acrecer su nivel medio cultural. Sólo así podrá propagarse entre ellas el interés hacia la ciencia pura. Sólo así podremos afirmar sobre más amplias bases humanas la mayor elevación de las cúspides. Sólo así podremos finalmente apoyar en una auténtica estimación popular la justa consideración y estima de la administración que interpreta su sentir.

No pretendemos con ello insinuar que la atracción hacia la ciencia pura y en particular hacia la matemática deba promoverse con el espejuelo de las más brillantes situaciones. Dudosas vocaciones serían las que así se alimentaran. Lo que sí exigimos es que la subestimación social no sea tan grande que llegue a torcer vocaciones auténticas como está ocurriendo. Y si la sociedad persiste en su ceguera, en su imprevisión y en su injusticia, reaccione siquiera en puro amor hacia quienes son al fin sus grandes niños, convertidos en niños grandes. Me explicaré.

El niño abre sus sentidos a la vida ávido de enterarse. Pronto pregunta el porqué de las cosas y no ceja en su pregunta persistente y obsesiva. El mundo está lleno de maravillosos interrogantes para su curiosidad inquisidora. Ya adolescente, en cuanto adquiere conciencia de su personalidad incipiente y pugna por manifestarla, le asaltan otros interrogantes no tan mavarillosos como angustiosos. Los por qués del adolescente implican más rebeldía que curiosidad. Apertura de cauces propios antes de ser encauzado.

Vencedora o vencida suele ceder algún día la tensión, y los por qués desaparecen con la adaptación del individuo al medio. Desaparecen, excepto para los que permanecen inadaptados o para los eternamente insatisfechos. Me refiero, naturalmente, a los artistas cuya vida entera será búsqueda de cauces nuevos, viviendo en tal sentido siempre en tensión de adolescencia, y a los sabios cuya curiosidad siempre sedienta y despierta les hará vivir en clima frecuente de niñez.

Esto sólo debiera hacerles acreedores a la máxima estima y comprensión. De ella necesitan niños y adolescentes de cualquier edad y condición. Pero no suele ser así. La masa disfraza su desprecio, cuando no su indignación, contra toda singularidad antigregaria, con falsa admiración que traduce en honores simbólicos, pero no en una verdadera y auténtica compensación de sacrificios. La vocación de artista, como la de sabio, debe contar de antemano con la incomprensión del medio y debe anticiparse a aceptarla como algo inevitablemente humano; único modo de hacerse perdonar de la vulgaridad la humillación a que involuntariamente la somete todo acusado relieve. Pero no debe dejar por ello de defenderlo y de reclamar, si es preciso, sus prerrogativas en la estricta medida necesaria. Consideremos ahora finalmente:

LAS FUNCIONES DEL EDUCADOR MATEMÁTICO EN ORDEN A LA VOCACIÓN

Veo tres de ellas diferenciadas y fundamentales: el alumbramiento, la detección y el cultivo.

El alumbramiento de la vocación, se resuelve en la invención y despliegue de situaciones capaces de encender la llama del interés del muchacho hacia los distintos panoramas que la matemática ofrece.

La detección se obtendrá, no sólo midiendo la aptitud, sino observando también cualitativamente las reacciones emocionales que aquellas situaciones provocan. Si tales reacciones son rebeldes a la cuantificación, tampoco es cómoda la factorización y medida de la aptitud matemática, problema que estimo por resolver y al que me referiré en último lugar.

El cultivo se organizará disponiendo la enseñanza en tal forma que, graduadas las dificultades, se renueven constantemente los motivos de interés y curiosidad, encauzando los esfuerzos para satisfacerla; pero no en un sentido facilitón y reblandecedor, sino tónico y estimulante.

LA ENSEÑANZA EURÍSTICA COMO ALUMBRADORA Y CULTIVADORA DE LA VOCACIÓN MATEMÁTICA

Los procesos de alumbramiento y cultivo de la vocación son, en definitiva, los mismos que caracterizan la enseñanza activa y eurística, que vengo desde hace tiempo preconizando.

No basta que la sociedad, deseosa de hacer del educando un hombre útil, determine lo que el niño debe aprender; hace falta metodizar el aprendizaje de modo que el niño pueda aprenderlo, y finalmente es preciso también que el niño quiera, es decir, que se sienta atraído plenamente hacia el objeto del conocimiento; pues solamente en este clima de espontaneidad lograremos obtener de él aquel esfuerzo voluntario y puro generador de todas sus posibilidades.

Como he dicho en otras ocasiones [3]: No pretendamos educar matemáticamente a la juventud limitándonos a transmitirle, ordenadamente, los conocimientos que nos han sido dados. Procuremos que sea el alumno mismo quien los elabore.

Por elevada que sea la autoridad de su maestro, difícilmente toma el alumno interés por asimilar síntesis en cuya gestación no ha participado. Lo que se aprecia y asimila de verdad no es tanto lo que se recibe como lo que se conquista. Y si la actividad es una necesidad vital del niño, en el caso del aprendizaje de la matemática es además una necesidad epistemológica.

El maestro no debe, pues, asumir el papel de centro transmisor de conocimientos, sino de guía del aprendizaje de sus alumnos; aprendizaje estimulado por situaciones interesantes y sugeridoras de las ideas que se desea inculcar.

LA DETECCIÓN DE LA APTITUD MATEMÁTICA. ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS Y ESTRUCTURAS MENTALES. LOS PROBLEMAS

Según los métodos de medida corrientes en la psicología experimental, la detección objetiva de la aptitud matemática es problema que estimo, como he dicho, aún no resuelto, al menos en la incompleta información bibliográfica de que dispongo. De ellas saco la impresión de una tendencia a desarrollarse en pruebas análogas a los problemas usuales, muchos de los cuales acusan más información y destreza adquirida que disposición innata propiamente tal. Aunque parezca paradógico he visto más sustancia intrínsecamente matemática en muchas baterías de «tests» de in-

---

[3] *Matemática, Historia, Enseñanza y Vida.* Conferencia dada en el Aula Magna de la Universidad de Valladolid el 12 de diciembre de 1957, y publicada en la «Revista de Educación», núm. 72.

teligencia general (como por ejemplo los de Raven) que en los declarados como de específica inteligencia matemática; y es que, el campo abarcado por la actividad matemática, es tan amplio que se hace muy difícil delimitar y precisar todos los factores que en ella intervienen. En este aspecto, el análisis factorial, que con tanto dominio cultiva nuestro querido Yela, aportará sin duda una decisiva contribución en la discriminación y medida de las distintas facultades que integran el genio matemático. Varias posibles de ellas (análisis, síntesis conceptual y expresiva, aptitud inductiva, generalizadora, relacional, intuición espacial de la forma, de la magnitud, de la posición, implicación lógica, sentido de lo esencial, etc.) traté de explorar por separado y en su conjunto en pruebas objetivas que hace ya tiempo preparé para el Instituto de Selección Escolar, cuando el análisis factorial aún no había penetrado en España. Absorbido siempre más por la tarea propiamente didáctica que por la seleccionadora, perdí la pista de aquel ensayo, que hoy haría falta reanudar con todo el abrumador aparato de cálculo que el análisis factorial comporta, y para el que carezco de tiempo; pero ello no obsta para que reconozca el interés que tendría reconsiderarlo.

Y acaso, más aún que tal factorización del genio o aptitud matemática en funciones, tendría interés actual la exploración experimental (si es posible) de las estructuras mentales de categoría matemática que, según matemáticos y psicólogos modernos (Piaget, Gattegno [4]), forman parte de nuestro soma, predeterminando en cierto modo la dinámica relacional que constituye la creación matemática. Para Gattegno [5], la matemática no crea conceptos, sino sólo relaciones, y la naturaleza de ellas va implicada por nuestras estructuras mentales (tanto somáticas como adquiridas). Según estos nuevos puntos de vista, la línea conceptual genética en la que hemos apoyado nuestros argumentos (preexistencia de un mundo real, idealización y esquematización del mismo, elaboración de estructuras abstractas, nueva proyección de ellas sobre lo real), quedaría fundamentalmente modificada al admitir como preexistentes estructuras mentales de contextura matemática a través de las cuales podríamos únicamente tener

---

[4] Véase PIAGET, «Les structures mathématiques et les structures opératories de l'intelligence», cap. I de la obra *L'enseignement des mathématiques.* (Delachaux-Niestlé-Neuchatel, 1955.)

[5] C. GATTEGNO, «Structures mathématiques et structures mentales». Bulletin de l'Ass. de Prof. de Math. París, marzo 1958.

acceso al mundo real. Los valores matemáticos que hallamos en él serían entonces simple proyección de nuestras propias estructuras mentales. El hombre no descubriría, crearía la ciencia, cuyos valores objetivos sólo podrían resultar de la comunidad de estructuras en el grupo humano. Los problemas metafísicos de lo objetivo y lo real pasarían a ser problemas psicológicos. No encontraríamos en la Ciencia más que las huellas de nuestro propio paso. Me limito a consignar la postura; sólo añadiré que el problema de la discriminación de la aptitud matemática se plantearía entonces en términos de medida de riqueza de tales estructuras mentales innatas.

Mientras no se hagan unas u otras investigaciones no nos queda otro recurso para prospectar la aptitud matemática que la tradicional, fundada en observar las reacciones intelectuales del alumnado durante los procesos de aprendizaje, en anotar las respuestas significativas en los diálogos que a lo largo del mismo se producen y en analizar las soluciones a los problemas que se les proponen como ejercicio o como comprobación del rendimiento escolar.

Pero todos sabemos lo que ocurre. Si el profesor pretende medir a sus alumnos con el aparato de los problemas, no es menos cierto que los alumnos miden la eficacia de la prueba, y que tanto ésta como aquéllos resultan, a su vez, medidores de la objetividad del examinador y de la eficacia del profesor y de sus métodos de enseñanza. Para discriminar esta reversibilidad de causas se ha puesto a prueba recientemente el difícil instrumento del análisis de varianzas. Pero entretanto, en esta misma reversibilidad radica una de las más graves consecuencias de la tecnificación de pruebas, que es la tecnificación paralela de la *preparación* para las mismas.

El tema que con esto se abre nos llevaría demasiado lejos y el tiempo normal de atención sin fatiga, se agota. Me limito, pues, a señalar lo que con mayor detalle he subrayado en ocasión reciente [6]: Que siendo tan vasta la actividad matemática, los tipos de problemas al uso en la tradición docente no hacen sino aflorar una pequeña parte de la misma, dejando inexplorados un sin fin de matices que pueden tener rica presencia en las posibilidades de nuestros alumnos y de las cuales ni nos enteramos. Así nos vemos sorprendidos tantas veces con contestaciones inesperadas.

---

[6] P. PUIG ADAM, «Un punto de vista cibernético sobre el programa de los problemas», Revista de Enseñanza Media. Enero-febrero 1959.

Y lo que decimos en el orden intelectual, al fin y al cabo asequible a la medida ¡qué no diremos en el orden emocional de la vocación, siempre tan misterioso! Preguntad, como yo he hecho a varios cultivadores de vuestra misma actividad, cuál fué el origen de su vocación y a buen seguro que recibiréis tantas categorías de respuestas como preguntas. Cada individuo es un caso. Desde los que vieron en la Matemática el encanto de la posesión de conocimientos sin concesión de crédito, la seguridad basada en la autoverificación; su precisión; su fuerza humanística; su acercamiento a valores filosóficos de categoría trascendente... hasta los que, discurriendo en su terreno, de tránsito para otros caminos, volvieron a ella de rebote de obstáculos presentados en los mismos; desde el que encuentra en sus problemas los motivos de lucha que apetece, hasta el que busca en ella remansos de sosiego y de paz; desde el que quedó prendido en sus redes por arte del profesor que supo hacerle sentir su encanto, hasta el que (¡guarden el secreto!) atribuye el origen de su vocación a una reacción de tenacidad que le impulsó a penetrar en reductos que malos profesores habían hecho inasequibles y aborrecidos...

¡Cuántos caminos dispares confluyendo en una misma meta vocacional!

EL MISTERIO VOCACIONAL

Y con este comentario termino, rubricando mis observaciones con la línea sinuosa de una interrogación.

Recordaréis tal vez la anécdota del príncipe que eligió entre sus presuntas novias aquélla que no supo explicarle por qué le quería. Pues bien, ¿no ocurrirá con la vocación lo que con el amor de tal preferida? Sentido trófico de la inteligencia llama Rey Pastor a la vocación, comparándola con el hambre y el amor, que son los sentidos tróficos de conservación en el individuo y en la especie.

El que ama fuerte razona mal. Más intenso que el amor basado en «por qués» es el que no sabe explicarse, y más aún el que se impone «a pesar de», amor nacido en raíces tan profundas que el mismo individuo las desconoce.

Promovamos, bien está, encuestas, introspecciones y extrospecciones; preguntemos a niños y varones el por qué de sus dedicaciones preferentes; archivemos, clasifiquemos y analicemos las respuestas... Por desgracia o por ventura, siempre quedará vibrando en el mundo de la emoción vocacional el temblor de alguna incógnita, un margen poético de indeterminación, clave, acaso, estimulante de vuestra propia vocación de psicólogos; un rescoldo misterioso, de este maravilloso misterio que se encierra en el ingenuo y elocuente sonreír de un niño al levantarse de hombros y responder sencillamente «no sé».

III. EN LA ENCRUCIJADA.—CONSEJOS DE UN GUIA [1]

Por deseo expreso de nuestro querido director, para quien no sé tener una negativa, correspondíame deciros unas palabras en ocasión de la fiesta de Santo Tomás. Temí entonces que cualquier disertación filosófico-científica que pudiera pergeñar hiciera sonreír a mis compañeros y bostezar a mis alumnos, y pensé que acaso sería para éstos de mejor provecho y agrado una charla afectiva, a modo de consejo paternal, ante la próxima partida de los que hoy terminan el Bachillerato.

Quiso la Providencia que aquella solemnidad académica se empañara con el luto por un compañero querido, que en la gloria se halle, y la tristeza me impuso entonces silencio, con lo cual aquellas mis inéditas palabras de despedida vienen a cobrar hoy actualidad, y quiere nuevamente el director que se digan.

Voy, pues, a dirigirme principalmente a la inmediata promoción de bachilleres. A aquella muchachada que llenó mi clase de sexto curso el año pasado, y con la cual en más de una ocasión dialogué, al margen de las Matemáticas, en términos de afecto familiar y de acercamiento cordial; aquellos entre quienes creí escuchar en varias ocasiones algún eco de mis sentimientos y de mis palabras; aquellos que, muy a mi pesar, y por exigencias de horario, no he podido tener en este curso a mi cuidado (si bien han estado en excelentes manos) y para quienes será ésta la única y última lección que pueda darles ya. Pero dirigirme a ellos con preferencia no significa hacerlo con exclusividad; así, pues, atiendan también los demás alumnos presentes, pues que el planteo del problema afectará, más pronto o más tarde, a todos por igual.

---

[1] Despedida a los alumnos del Instituto de San Isidro que terminaron el Bachillerato en el curso 1944-45.

Estáis en un momento crucial de vuestra vida. Entre juegos y risas, con deleitosa inconsciencia, habéis cruzado el jardín de vuestra infancia y llegáis a un lugar donde la anchurosa vía se fracciona en múltiples senderos. A la entrada de cada uno de ellos estáis viendo ya luminosos letreros que os prometen bien sea la gloria, bien sea el dinero; en unos la sabiduría, en otros el poder, ya sea el goce estético, ya el amor de vuestros semejantes..., senderos cuyo horizonte se cierra pronto a vuestra imaginación en un angustioso interrogante que estimula vuestra inquietud y curiosidad. Acaso pensáis que al ir en pos de la gloria os será tal vez negado el bienestar material; que si alcanzáis el poder os será tal vez negado el afecto; que si llegáis a la cima de la Ciencia os puede ser prohibido el goce inefable del Arte. Sentís ambición, temor, dudas y deseos de marchar a la conquista; y, atraídos por una y otra sendas, acaso no sepáis qué camino seguir.

Pues bien; lo primero que quiero deciros es que no creáis que exista tanta divergencia en los caminos, si se siguen con un sentido de elevación y con un propósito constante de honradez.

No hablo sólo con un criterio sobrenatural de la vida, en el que, ya se sabe, la meta no es más que una, y a ella habrán de conducir a la postre los senderos todos, si son buenos; hablo también en un sentido estrictamente humano, de humana comprensión.

En las cuestiones que no conciernen a Dios o a la Patria, no os planteéis nunca los problemas de la vida en términos de irreducible antagonismo: riqueza o miseria, ingenuidad o malicia, ciencia o arte, especialización o enciclopedismo... Procurad dulcificar las tendencias extremas o exclusivistas que parecen implicar estas supuestas antinomias, pensando que son, por ejemplo, perfectamente compatibles: la previsión con la generosidad, el candor con la sabiduría, el culto a la verdad con el amor a la belleza, la profundidad y perfección de vuestro trabajo específico con la amplitud de vuestros horizontes espirituales, y que de la hábil y prudente proporción con que mezcléis estos ingredientes dependerá en gran parte el equilibrio y la perfección de vuestra vida entera.

Desmenucemos, si queréis, un poco más:

Ved aquí la primera antinomia que se presenta en la elección de camino. *¿Idealismo o utilitarismo?* ¿Debo consagrar mi vida al ideal, con desprecio de toda utilidad o debo perseguir sólo la utilidad con olvido del ideal? Fácilmente adivináis la respuesta: ni lo uno, ni lo otro; lo último, por zafio; lo primero, por erróneo.

Cierto es que, en el reparto social de valores, no suelen ser ricos los más sabios ni sabios los más ricos, y es natural que así ocurra con cierta nivelación compensadora. Pero ello no significa que la indigencia haya de acompañar inexorablemente al sabio, y la estupidez al poderoso. No negaré que fueron muchos los sabios y los artistas que murieron en la miseria; pero no creo que esta miseria haya sido condición necesaria a su sabiduría o a su genio artístico, antes al contrario, un poco más de atención a los problemas materiales, aun con pasajeras mortificaciones de amor propio, hubiese acaso prolongado su existencia, haciendo más copioso todavía su magnífico legado a la Humanidad. ¡Sabe Dios cuántos frutos de ingenio y de belleza se han perdido por este desprecio de lo material, tan característico en los iluminados!

Voy a leeros, como entretenimiento e ilustración, algunos fragmentos de la carta que escribió el astrónomo Kepler a su protector, Rodolfo II, poco después de precisar, tras laboriosos cálculos y observaciones, la trayectoria del planeta Marte, y ved en ella con cuánta claridad, y al mismo tiempo con cuánta donosura, reclamaba el dinero necesario para proseguir sus investigaciones astronómicas, que, como sabéis, le condujeron al descubrimiento de las leyes que rigen el movimiento de los planetas.

Dice así la carta:

«Yo traigo a Vuestra Majestad un noble prisionero, fruto de una guerra difícil y laboriosa emprendida bajo vuestros auspicios... En vano los astrónomos prepararon todo para la lucha; en vano pusieron en juego todos sus recursos y en el campo todas sus tropas. Marte, burlándose de sus tentativas, destruyó sus máquinas, desbarató sus planes y anuló sus esperanzas, encerrándose tranquilamente en el impenetrable secreto de su imperio y ocultando sus estudiados movimientos a la inspección del enemigo...

»Durante las incertidumbres de la lucha hemos tenido desastres y calamidades que han asolado nuestro campo. La pérdida de un jefe ilustre, la sedición de las tropas, las enfermedades contagiosas, todo contribuía a aumentar nuestra angustia. Las alegrías como las tristezas domésticas robaban a las negociaciones un tiempo que me hacía falta. Los soldados, faltos de todo, desertaban en masa; los nuevos reclutas no estaban hechos a las maniobras, y, para colmo de desdichas, faltaban los víveres. (Como veis, Kepler alude aquí hábilmente a las dificultades materiales de todo orden con las que tenía que desenvolverse.)

»Por fin—añade—, el enemigo se aviene a la paz y, por medio de su madre, la Naturaleza, me envía la confesión de su derrota; se constituye prisionero bajo palabra, y la Aritmética y la Geometría le escoltan sin resistencia hasta nuestro campo. Desde entonces ha dado pruebas de lealtad, y sólo pide una gracia de Vuestra Majestad. Toda su familia reside en el cielo: Júpiter es su padre; Saturno, su abuelo; Mercurio, su hermano, y Venus, su amiga y hermana. Acostumbrado a esta augusta sociedad, los echa de menos, se impacienta por encontrarlos y desearía verlos en su compañía, disfrutando, como él hace hoy, de vuestra hospitalidad. Para esto es preciso continuar con tesón la guerra, la cual ya no ofrece peligros, puesto que Marte está en nuestro poder. Pero yo suplico a Vuestra Majestad que piense que el dinero es el nervio de la guerra y se sirva dar órdenes a su tesorero para que envíe a vuestro general las sumas necesarias para reclutar y poner en pie de guerra nuevas tropas.»

Es gracioso, en verdad, el contraste entre los hábiles eufemismos empleados para describir el poético cautiverio de Marte bajo sus cálculos y la descarnada rudeza en reclamar el dinero necesario, así como suena, «el dinero», sin retóricas ni metáforas, para proseguir sus trabajos.

No nos engañemos. Caballero del ideal era Don Quijote, y Cervantes, al crearlo, puso a su lado a su escudero Sancho, hecho de barro, para enderezar de tanto en tanto sus genialidades y curarle sus descalabraduras. He aquí la fórmula dual de que estamos hechos. ¡Quijotes y Sanchos! Espíritu y materia somos, y necesitamos de ésta para sostener aquél. Pero entendedlo bien: *sólo en la medida necesaria para este sostén;* rebasada esta medida, se salta insensiblemente de la miseria física a la miseria espiritual. Que si no puede volar con la libertad que deseara el espíritu acuciado por necesidades materiales y rodeado de un cuadro de indigencia, más prisionero todavía se halla el alma adormecida por el opio de las comodidades materiales u oprimida por las torturas de una avaricia sin los perfumes de la generosidad; y aún más pobre que el más miserable harapiento es aquel que carece de la tabla de salvación de un ideal en las grandes tempestades de la vida.

Y veamos ahora otra de la antinomias que se presentan hoy día al hombre culto: *¿Especialización o universalismo?* ¿Debo orientar mi cultura en un sentido de profundidad o de extensión?

El progreso actual impone a tal punto la división del trabajo, que no es fácil hallar retribución digna si no se especifica el esfuerzo en algo, ahondando lo más posible en el cultivo de dicha especialidad. Es como una exigencia de la colectividad en aras de su progreso material; pero es también una esclavitud odiosa para el individuo, ya que le oprime y le cierra horizontes («Les spécialistes nous sommes dans un trou», me decía, en su último viaje a España, el famoso matemático francés Fréchet), y funesta a la postre también para la colectividad, que queda disgregada en grupos que no se entienden, pues tienen distintos afectos, manejan distintos conceptos y hasta hablan distinto lenguaje; y al no entenderse no pueden amarse, aumentando la desconfianza y la desunión en el género humano.

Observad la tendencia que tienen los hombres a despreciar aquello que ignoran; tendencia que suele ser tanto más acentuada cuanto más cerrado tienen el horizonte en la cárcel de su especialidad.

¿Quién no ha escuchado alguna vez a un gran artista hablando horrores de las Matemáticas, mientras acaso un matemático, insensible y distraído, colgaba su bufanda de una escultura?; oíd al magnate de los negocios manifestando su regocijada indiferencia por la teoría de la relatividad, y, a su vez, al sabio escupiendo su olímpico desdén sobre las finanzas; al general calificando la música como el más inocente de los ruidos, y, a su vez, acaso, al músico ironizando sobre la marcialidad del general, y al técnico burlándose del filósofo enredador de las cosas de sentido común, mientras éste desprecia altivamente el motor de explosión, y al filólogo riéndose del cazador de insectos, y a éste burlándose del «musa musae»..., y así tantos y tantos ejemplos.

Y ¿por qué se ríen los unos de los otros? Pues, sencillamente, por ignorancia recíproca de los intereses y de los afectos en que se desenvuelven las vidas respectivas. Parece como si con este desdén cada cual se consolara y justificara inconscientemente de su lamentable incomprensión. Tan lejos están unos de otros, que hasta son incapaces de imaginar la posibilidad de una vida espiritual fuera del estrecho mundo de sus ambiciones. Razonan como aquellos peces que no podían comprender la existencia de seres vivos fuera del agua. Y esta triste incomprensión es consecuencia cabal de la atomización del trabajo a que antes aludía, y constituye uno de los dolorosos tributos que los hombres civilizados pagan en aras de su propia civilización.

Procurad, pues, redimiros de la esclavitud que os imponga vuestro trabajo especializado, atendiendo, en toda la medida que os permitan las horas que os deje libres, el desenvolvimiento integral de vuestro espíritu. Ved las exposiciones, asistid a los conciertos, no os perdáis manifestación alguna en que vuestro espíritu pueda recibir las caricias de una savia nueva. No os burléis nunca del esfuerzo del vecino porque los frutos cultivados en su huerto no sean los mismos frutos del vuestro. Acercaos con respetuosa curiosidad a todos los afanes dignos, y con sólo un poco de buena voluntad veréis qué bellos y nuevos panoramas se abren a vuestro espíritu, y notaréis también cuánta gratitud brotará del incomprendido si ve por un momento resonar en vosotros sus propias inquietudes. La Ciencia y el Arte actuales están poblados de solitarios; almas en pena que se cruzan sin atraerse y se alejan sin emoción.

¡Pueblo equilibrado y venturoso el de Grecia, cuyos hombres supieron comprender y amar, cultivando a un tiempo la fuerza, la sabiduría, la belleza y la virtud! ¡Tiempos venturosos los del Renacimiento, en los cuales florecieron tantos sabios artistas, filósofos humanistas, almas abiertas a toda inquietud espiritual!

Bien es verdad que el desarrollo embrionario de la Ciencia y del Arte de aquellas épocas permitió, en vidas muy intensas, el cultivo de todas las ramas del saber y del hacer, hasta significarse y descollar en todas ellas, como en el caso de un Leonardo, por ejemplo; pero ya que hoy no es esto posible, ya que la frondosidad de lo creado impide sobresalir en todos los terrenos, sea al menos permitido y deseable su humilde exploración, aun cuando sea en un plano infantil y robinsoniano. Resumiendo: *tended a ser un poco aprendices en todo, para vuestro bien, y, al menos, maestros en algo, para bien de los demás.*

Pero ante esta sencillísima fórmula que os brindo oigo levantarse el clamor de los escépticos. Para ser un poco aprendices en todo hace falta tiempo; para ser verdaderos maestros en algo hace falta genio; para quien carezca de tiempo y genio, la fórmula es inaplicable; como si dijéramos, es una ecuación de raíces imaginarias.

Pues bien; invoco aquí mi autoridad de catedrático de Matemáticas y la refuerzo con la de mi querido colega en cátedra, señor Masip, para afirmar, en los términos más categóricos, que las raíces de esta ecuación podrán ser mayores o menores, pero que son siempre reales y positivas. Vamos a demostrarlo.

El tiempo, hijos míos, es un tesoro que Dios reparte a todos por igual. Es el único bien común por antonomasia. El día tiene 86.400 segundos, lo mismo para el sabio que para el artesano, para el europeo que para el neozelandés, y la misma duración tuvieron los días de Arquímedes que tienen hoy los de Einstein. El rendimiento que de este tiempo se obtenga depende del arte en administrarlo.

Son numerosísimos los ejemplos que citan los libros sobre las grandes cosas que se han hecho aprovechando tiempos perdidos. Smiles cita, entre otros muchos ejemplos, el caso de un doctor que tradujo a Lucrecio yendo en su carruaje de un enfermo a otro. ¡Pobres enfermos!, pensaréis; pero no fue así. El doctor llegó a ser igualmente célebre como médico y como latinista.

Pero, ¿para qué ir a buscar ejemplos al extranjero? Conozco personalmente a dos colaboradores que en el invierno del año 1926 planearon conjuntamente el plan y numerosos detalles de una obrita de Geometría intuitiva (cuyo fin era nada menos que el de reformar los métodos de la enseñanza de esta Ciencia en España) mientras volvían juntos por la noche a sus casas en el tranvía desde Santa Bárbara a Argüelles. No tenían otro momento del día en que poder estar juntos. Uno de ellos, por cierto, escribió a poco un tratadito de Cosmografía aprovechando una travesía de España a América, y el otro, que empezó a rato perdido tonteando sobre un piano, hace ya muchos años, tiene hoy el atrevimiento de hacer cantar coros a ocho voces y de enfrascarse en partituras orquestales, con las cuales dice que aprende y se divierte extraordinariamente.

Es inconcebible todo lo que puede llegar a realizarse sumando ratos perdidos. Pero quizá me digáis: ¿qué tiempo queda entonces para el descanso? Sobre este particular me atengo a una definición que he dado varias veces, y que tal vez os sorprenda: Descansar es trabajar en otra cosa.

Para ilustrar esta aparente paradoja, ved a aquel joven contable de un Banco regresando de la Sierra en la noche de un día festivo. Después de haber barajado miles de guarismos durante la semana entera, apoltronado en polvoriento rincón, vuelve hoy sudoroso, jadeante, tostada la cara, con su imponente cargamento a la espalda, mochila, manta, esquíes...; con los zapatos destrozados, viene de recorrer leguas y más leguas subiendo pendientes, escalando crestas, deslizándose por peligrosas vertientes, vadeando ríos, cruzando valles..., hasta volver rendido a su casa; en una palabra: viene de pasar un fin de semana de completo descanso. En el portal de la calle encuéntrase con su vecino el cartero, el que a diario recorre largo itinerario urbano en penosa peregrinación, remontando miles de peldaños, vaciando entre el vecindario su cartera repleta de misteriosa carga de ilusiones y desengaños. Vuelve hoy a su retiro, libre de material peso; pero la rubicundez de sus orejas delata pronto de dónde viene: acaba de participar en una reñida competición ajedrecística; seis horas con la atención fija sobre el tablero, los pies fríos y la cabeza ardiendo. Otro que ha descansado también plenamente y a su gusto.

Preguntad a cada cual la opinión que le merece el descanso del vecino. Para el escalador de pisos resultará absurdo el asueto del excursionista; para el escalador de sumas resultará inconcebible el ocio ajedrecístico. El primero reposa físicamente poniendo en tensión su cerebro; el segundo adormece su intelecto poniendo en acción sus músculos. Para uno y otro, el descanso es sencillamente eso: una nueva actividad compensadora, distinta de la habitual.

Meditad sobre cualquier suerte de descanso que podáis apetecer, y veréis asimismo cómo en todo caso existe tensión y fatiga. Ved los nervios contraídos del jugador habitual; el calvario del crítico teatral, obligado a asistir a todos los estrenos; la fatiga del músico en los ensayos, y así mil ejemplos más, y os daréis cuenta de cómo lo que para el resto de los mortales constituye motivo de agradable esparcimiento, se convierte para ellos en una fatiga como cualquier otra con la persistencia y la reiteración.

Y no me habléis de reposo absoluto, de no hacer *absolutamente nada,* porque son frases que tal vez carecen de sentido. Mientras tenéis los ojos abiertos a la luz, colores y formas atraen e incitan vuestra atención; si cerráis los párpados, quedan aún atentos los oídos a todos los rumores y músicas lejanas, y si lográis aislaros en el silencio y en la oscuridad más completas, entonces vienen a atormentaros vuestros pensamientos, que no os dejan punto de reposo: lo que no dijisteis y debierais haber dicho, aquel cálculo que salió fallido, aquella melodía obsesionante, los recuerdos de seres desaparecidos, el angustioso interrogante del mañana... ¡Qué terribles y fatigosas las horas insomnes en la oscuridad y el silencio de la noche!... Y si, al fin, lográis dormiros, es todavía el subconsciente y el neurovegetativo el que trabaja, manteniendo alerta el ritmo de vuestra vida.

Desengañaos: el reposo absoluto no llega más que con la muerte. La vida es ritmo y es trabajo, y ¡bendito sea Dios, que así lo dispuso para estímulo de nuestro sacrificio y para merecimiento de nuestra ventura! Si, pues, el reposo es un espejismo y, queramos o no, todos los minutos de nuestra vida son de esfuerzo, todo es cuestión de saber administrar y encauzar debidamente este tiempo y este esfuerzo en aras de nuestra elevación espiritual; y convengamos en que la falta de tiempo podrá ser acaso la justificación de un día, pero nunca de una vida entera.

Veamos ahora qué fundamento tiene la pretendida invocación a la falta de aptitudes, el famoso mito del genio, comodín de haraganes. El talento ya no es un bien comunista. La Providencia tiene sus elegidos, conforme; pero ello no significa que autorice a los demás a cruzarse de brazos, en cómoda actitud de impotencia. La diferencia de talento establece tan sólo una diferencia de ritmo, de velocidad; pero tened por seguro que a donde llega un hombre puede llegar otro hombre, más pronto o más tarde. Todo es cuestión de tiempo y perseverancia. Yo fío siempre más en los alumnos dotados de mediocre talento, pero de firme voluntad, que en los inteligentes y apáticos. Éstos llegan antes, pero se cansan pronto y, al fin, son rebasados por la tenacidad de las tortugas intelectuales. En la constelación de nombres que brillan en el firmamento científico son muchos más los trabajadores perseverantes que los talentos de primera fila; claro es que cuando se dan ambas cosas resultan estrellas de primerísima magnitud; pero por cada una de ellas hay miles de pequeños soles que, a pesar de su pequeñez, llegaron a brillar con luz propia.

Pensad que son pocos, muy pocos, los grandes inventos deparados al genio por la casualidad; los más son fruto de la constancia y del trabajo, de la paciencia y de la tenacidad. Me impresionó, por ejemplo, profundamente, la lectura de los infinitos ensayos realizados por Edison hasta dar con el filamento que necesitaba para su lámpara de incandescencia. El autogiro de nuestro compatriota La Cierva fue labor perseverante de más de veinte años de trabajo, y aun sorprendió la muerte a su inventor en plena actividad para perfeccionarlo. Pero, ¿a qué citar ejemplos individuales? Sin temor a equivocarme puedo afirmar que todos, absolutamente todos, los nombres que por su celebridad os son familiares, en las distintas disciplinas que estudiáis, fueron los de los grandes tozudos de la Ciencia, de la Filosofía, de la Literatura, del Arte...

Y, sin necesidad de remontarnos a los grandes héroes, la vida cotidiana nos brinda infinitos ejemplos de heroísmo, no por ocultos menos meritorios. Hace ya muchos años, preguntaba un día a un obrero—de discreto talento, sin ser excepcional—cómo, sin maestros que le guiaran, había llegado a asimilar las obras universitarias de Rey Pastor, hasta presentar notabilísimas soluciones a problemas nada fáciles de la «Revista Matemática Hispano Americana», y me contestó, entre humilde e indeciso, como quien no supiera qué decir, con una respuestas lapidaria, una sola palabra que valía por todo un poema: «*¡Porfiando!*»

¡Cuántas veces he pensado con verdadero escalofrío en todo lo que encerraba esta palabra: «¡Porfiando!» Horas y más horas robadas al sueño, en persecución de una nueva verdad, de un nuevo horizonte, y acaso también, ¿por qué no?, de una mejor condición de vida para sus hijos.

Vosotros, que aún tenéis el privilegio de que alguien vele vuestro sueño y prepare vuestro sustento, mientras podéis dedicar íntegramente vuestro esfuerzo a la propia instrucción y formación, pensad y tomad ejemplo de aquel que, *porfiando*, se formó a sí mismo y redimió a los suyos de la miseria.

No agotéis nunca vuestros afanes ni vuestras esperanzas. No os acobarden los reveses. Renovad día por día vuestras ansias, que os serán bálsamo perenne de juventud. Un aforismo indio dice que la vida se alimenta de esperanzas cuando aún carecemos de recuerdos y que se nutre de recuerdos cuando ya no nos quedan esperanzas. Aforismo que tiene toda la nostalgia de una civilización que pasó. De corazón os deseo que el tesoro de recuerdos que vayáis acumulando en la vida (y en el cual ocuparán lugar preferente, estoy seguro, los años transcurridos en estas aulas) no vacíe vuestra alma de anhelos y de inquietudes con qué alimentar esperanzas nuevas.

Y volvemos al punto de partida, cuando os dije que todos los caminos que delante tenéis terminan por enlazarse si los seguís en recto sentido. Nos ha colocado Dios en una ladera, de tal modo que en cualquier actividad o camino podemos seguir un sentido ascendente o descendente. Si vais cuesta abajo, veréis qué pronto se multiplican los caminos y atajos que os conducen a las penumbras del valle o a las tinieblas del barranco. Id cuesta arriba y veréis cómo cada vez más se enlazan y confunden los senderos hacia un mismo fin, acaso inaccesible, la cima del monte, la perfección del alma; pero no os desaliente la engañosa perspectiva del terreno si, escalado un repecho, otro nuevo se ofrece a la vista, renovando el ansia de subir. Son las nuevas esperanzas que Dios pone en vuestro camino como nuevo aliento y motivo de vida, como una nueva promesa de aurora, y a medida que ascendáis aspiraréis un aire más puro, y a la luz diáfana del cielo podréis contemplar cada vez mejor la bella armonía de la obra del Creador.

IV. NUEVO MENSAJE DE DESPEDIDA *

Hace dos años, en fiesta dedicada a los alumnos que terminaban el Bachillerato, se me encomendó la plática de despedida. Me pareció que el mejor modo de cumplir mi misión era decirles adiós con palabras que les sirvieran de consejo y orientación en la encrucijada de dilemas que inquietan el alma del adolescente al comenzar su lucha por la vida. Y no os choque que os hable ya de lucha, porque cabalmente entráis en ella en el momento mismo en que salís de esta casa; desde el instante en que termináis una enseñanza de tipo formativo para comenzar otra de tipo profesional. Hasta ahora acudisteis diariamente a estas aulas en comunión que os hermanaba; savia desinteresada recibisteis por el tronco común que habrá de alimentar las ramas todas de vuestra especialidad futura. Lo que vais ahora a buscar a otras aulas es ya pertrecho de combate y de competencia. Y bien sabe Dios que al pronunciar estas palabras, de corazón le pido que nunca perdáis la noble estimación al compañero, y que jamás os amargue la sensación de ver proyectada en la imagen del amigo la sombra del competidor.

Pues bien, en aquellas palabras de despedida, repito, traté de hacer ver a cuantos alumnos me escuchaban, la perfecta compatibilidad que puede existir en tendencias aparentemente opuestas, cuando preside en todas ellas bondad de corazón y buen sentido. La esencia de aquel mensaje se refleja en uno de los párrafos iniciales que voy a repetir:

«No os planteéis nunca —decía— los problemas de la vida en términos de irreductible antagonismo: riqueza o miseria, ingenuidad o malicia, ciencia o arte, especialización o enciclopedismo... Procurad dulcificar las tendencias extremas que parecen implicar estas supuestas anti-

---

* A los alumnos del Instituto de San Isidro que terminaron el Bachillerato en el curso 1946-47.

nomias, pensando que son, por ejemplo, perfectamente compatibles la previsión con la generosidad, el candor con la sabiduría, el culto a la verdad con el amor a la belleza, la profundidad y perfección de vuestro trabajo específico con la amplitud de vuestros horizontes espirituales; y que de la hábil y prudente proporción con que mezcléis estos ingredientes dependerá en gran parte el equilibrio y la perfección de vuestra vida entera.»

Por temor a hacerme pesado no insistiré hoy en repeticiones sobre aquellos temas. El mismo temor me indujo entonces a silenciar la solución para una de las antinomias enunciadas y que quedó sin respuesta. A ella voy a dedicar la charla de hoy. Es la siguiente: ¿Ingenuidad o malicia? Al salir a los caminos del mundo, ¿qué actitud es aconsejable, la de recelo o la de confianza? Vais a cruzaros con otros muchos caminantes. Algunos serán dignos de vuestra amistad, otros tratarán acaso de expoliaros. Por ahí llega el primero. Nada sabéis de él. Acaso os preguntéis perplejos: ¿Cómo debo mirarle? ¿Como amigo? ¿Como enemigo?

Sobre este particular empezaré refiriendo un cuento judío (al menos como tal me lo contaron), cuento típicamente revelador de una postura. Un padre, llegada que fue la mayor edad de su hijo, le preparó su hatillo de ropa; le añadió unas monedas y provisiones; y después de larga oración, abundante en consejos y advertencias, entre las que descollaba sobre todas la de no fiarse jamás de nadie, le ordenó partir. Aún no había traspuesto el portal cuando le llamó de nuevo. Desconfiando de la eficacia y persistencia de sus consejos, quería sellar su lección teórica con un refrendo práctico contundente. Le mandó subir a la mesa y, colocándose ostensiblemente a su orilla con los brazos abiertos, ordenóle volverse de espaldas y dejarse caer. Obedeció el hijo confiadamente; y en lugar de caer en los brazos del padre, dio con su cabeza en las losas estrepitosamente. Este, que había bajado los brazos exprofeso para dar paso al hijo en su caída, se apresuró a comprobar la eficacia del experimento, y mientras acariciaba el abultado chichón, le dijo: Ahora sí, ahora ya puedes ir por esos mundos sin que la lección se te olvide: ¡Para que no te fíes ni de tu padre!

Vuestras risas abrevian mi comentario. Pero no es tanto cuestión de risa como de llanto. Son muchas las almas deformadas por la misma postura. Del coro de todas ellas surgió el dicho popular: «Piensa mal y acertarás». Por esto quiero tomar pie de la anterior chirigota para tratar en serio la cuestión, buscándole a un tiempo solución práctica y cristiana.

No parecen necesarios grandes esfuerzos para probar lo inmoral y lo amargo de una preconcebida y sistemática desconfianza. Además, no creo en ningún modo que sea precisa para conseguir éxito en la vida. Por otra parte, el solo hecho de imaginarnos estar constantemente rodeados de enemigos nos haría esta vida sencillamente insoportable. ¡Cuántas psicosis maníacopersecutorias se han incubado en tales espejismos, originados sabe Dios por qué remotas lesiones espirituales! La brutalidad del padre del cuento no radica tanto en la herida física con la que pretendió vacunar al hijo, como en la herida moral, en la ponzoña de hostilidad a los semejantes que, con la pretendida vacuna, inoculaba.

Con mis cuarenta y siete años a cuestas, transcurridos a través de los panoramas más azarosos de la vida española, yo quiero aferrarme todavía a la postura opuesta. En contraposición al «piensa mal y no errarás» del dicho, creo prudente y sabio replicar todavía «piensa bien y es más probable que aciertes».

Pensad bien. Dad amplio crédito de nobleza, que mientras así penséis, seguiréis, al menos, siendo jóvenes de espíritu. La tesitura escéptica de los desengañados adolescentes siglo XX, superpipiolos que se conceptúan de vuelta de todas las experiencias, es tan impropia de su edad como ridícula.

Sé, por desgracia, que la norma que os aconsejo tiene sus fallos; pero también sé que proporciona grandes satisfacciones. Y aunque no las proporcionara, aunque sólo fuera con el afán de mantener viva una juventud espiritual, valdría la pena de preferir la ingenuidad a la malicia. Permitidme, a este respecto, una lejana evocación.

Un día, hace unos doce años, llamó a mi puerta un niño pidiendo la limosna de un libro. Tal como lo oís, de un libro. Lo insólito del caso me movió a hacerle algunas preguntas. Aparentaba unos nueve años. Sabía leer. Asistía a una escuela pública, pero carecía de libros; su familia no podía proporcionárselos. Había visto el ir y venir de mis hijos al colegio y pensaba que acaso les sobrara alguno. Y así fué como una de esas manidas Enciclopedias escolares hizo la felicidad del niño aquel, y también la mía, momentánea, al presenciar su alegría. Como una exhala ción se fue escaleras abajo, en cuanto entró en posesión de su tesoro, sin darme tiempo a preguntarle siquiera cómo se llamaba ni dónde vivía.

Un impulso me llevó tras él; criatura tan decidida y ávida de saber merecía atención y protección mayores. Pero, sin querer, cruzó por mi memoria el recuerdo de un largo episodio de protección que había tenido, justamente en aquellos días, lamentable epílogo de estafa; y un impulso cobarde me contuvo. ¿Es que no tenía yo escarmiento? ¿Me disponía, acaso alegremente, a comenzar otra historia similar?... El dardo de la duda paralizó la sana intención primera y nada más volví a saber de aquel niño. Sólo supe inmediatamente la profunda amargura que tal cobardía me costó. No me avergüenza confesaros que lloré a solas. Acababa de sentir por ver primera que algo en mí había envejecido espantosamente. Sin culpa por mi parte, la vida había volcado sobre mi alma los primeros años de vejez prematura. Pocas veces se habrán derramado lágrimas tan sinceras.

Pero no nos pongamos tristes. No era tal mi propósito. Quise solamente, con esa evocación, haceros ver que mi consejo de fe y confianza no se basa en un papanatismo ignaro ni mucho menos en falta de experiencia adversa. Se basa, fundamentalmente, en una necesidad vital, sobre todo a vuestra edad: la necesidad de amar al prójimo y, por tanto, de creer en él.

Ahora bien; esa postura inicial de confianza que os aconsejo, no debe vendaros los ojos a posibles hipocresías. Por el contrario, es preciso mantenerlos abiertos para atisbar con claridad todo intento de traición y para saber atajarla a tiempo. Tras la postura inicial de crédito y cordiali dad, la atención vigilante y verificadora.

Amad al hombre, pero desconfiad de la masa. El hombre aislado no es, en general, tan malo como nos lo pintan. Se envilece al contacto con los demás hombres, aunque sean buenos. Los unos malean a los otros por un proceso incomprensible y fatal de estupidez multitudinaria. Constituye un hecho curioso que la moral colectiva sea, con gran frecuencia, muy inferior a la moral individual. Buscad mil personas honradas, sencillas, confiadas; reunidlas en colectividad y veréis qué pronto empiezan a desconfiar unos de otros y cómo esta mutua desconfianza les lleva a las mayores aberraciones. Los prudentes, se vuelven osados; los discretos, se tornan groseros; los inteligentes, se convierten en listos, que no es precisamente lo mismo. La colectividad suele llamar listos a todos aquellos que saben *situarse,* que, en definitiva, significa saber aprovechar para su medro personal los defectos de sus semejantes. Poco se aplicarán, por tanto, en intentar corregir esos defectos, ya que sobre ellos asientan el sutil mecanismo de sus marrullerías. El oportunismo es su teoría y su credo.

Yo llamaría, en cambio, inteligentes (quizá en contra de la opinión de algún psicólogo) a todos aquellos que ven claramente los fines por encima de las contingencias y cuyo camino hacia la meta no se perturba por circunstancias ocasionales y de tránsito, por muy tentadoras que sean. Ahora bien; los fines se perciben con claridad en la soledad de nuestra conciencia cuando dialogamos a solas con Dios, pero esta claridad queda pronto turbada al contacto de la relación social, y entonces, para tranquilizar nuestra indecisa conciencia, acudimos a los consabidos tópicos: «Otros lo han hecho»... «Otros lo harán»...

En verdad que empezamos a estar ya cansados de tanto hombre listo, de tanto hombre práctico. Vedlos medrar, crecer y escupir desprecio. Son los que creen haber resuelto el problema del enriquecimiento rápido, los que en definitiva han conseguido tan sólo el envilecimiento del dinero, procurando la pobreza de todos y, por tanto, también, a la larga, la de ellos mismos. Los descubridores de la cuadratura del círculo económico, los que no cejaron hasta ver convertidos los círculos de oro en rectángulos de papel.

Pero no temáis que siga deslizándome por el resbaladizo terreno de la economía política. Volvamos, pues, a centrar la cuestión.

Decíamos que las colectividades actúan en un sentido de acelerar la pérdida de la moral y de la dignidad humana. Hombres que en la soledad de su conciencia se avergonzarían de ciertas actitudes, se jactan, en cambio, de ellas, en presencia de los demás. Hasta el humor, la bendita gracia, se achabacana. Basta imaginar al moderno gracioso súbitamente aislado de su corro de jaleadores y contemplando sus propias dislocaciones en la soledad de un inmenso desierto, y percibiréis al punto todo el dramatismo de su inmensa ridiculez. Es precisamente el contacto y presencia de los demás lo que valoriza, por triste paradoja, toda nuestra estulticia.

Estamos presenciando en la actualidad un fenómeno universal de relajamiento y de envilecimiento colectivo de esta naturaleza; triste secuela de la trágica conmoción producida por la guerra. Por eso os son más necesarias que nunca palabras de aliento y de fe que os preserven todo lo posible del mal. ¡Pero qué pobres e insignificantes mis palabras en comparación con los peligros que os acechan!

La creación o la revalorización de una moral colectiva es una de las grandes necesidades del momento en todos los países. Me diréis que bastaría seguir las normas de la moral cristiana para tener resuelto el problema, ya que nuestra moral no hace distingos entre la bondad individual y la colectiva. Ninguna duda cabe sobre el particular. Pero ¿cuántos hombres creen con fe suficiente para hallar en ella los resortes necesarios con qué hacer frente a la relajación de las masas? ¿Cuántas conciencias existen hoy realmente despiertas? ¿Saben, en verdad, los hombres listos, a que antes nos referíamos, todo el mal que hacen? ¿No sería conveniente, junto a la práctica de la moral religiosa, el conocimiento profundo y la técnica del bien colectivo para venir en su ayuda? No sé si se juzgará atrevido este juicio, pero entiendo que poco se consigue fiándolo todo al aldabón de nuestra conciencia, si ésta permanece sumida en un letargo a prueba de aldabonazos. El conocimiento cabal del mal inferido al prójimo ha de despertar previamente las conciencias para que sobre ellas puedan actuar con fuerza y eficacia los impulsos de la fe. En este aspecto, entiendo que la sociología puede aportar ayuda poderosa a la Religión, y repito insistentemente el concepto de ayuda para que no se confunda con el de suplantación. Los racionalistas que un día pretendieron sustituir los móviles del mundo sobrenatural por el frío silogismo de la razón, se estrellaron en la esterilidad de un fracaso porque los juicios, por hábilmente que se manejen, nunca engendrarán voluntades. Como dice Poincaré, con premisas en tiempo indicativo no podremos nunca sacar consecuencias en imperativo.

Finalmente fracasarán también quienes crean que un Estado puede, por los simples medios coactivos de la ley y de la administración, promover en los gobernados normas de sana conducta. Cuando la moral social está en quiebra, los propios organismos estatales se resienten de ella. y lo que habría de ser instrumento de justicia se convierte en encubrimiento de inmoralidad. Atended, si no, a la siguiente sabrosa parábola, original de un texto egipcio:

«Erase una vez un sultán que capturó un león y resolvió guardarlo para su placer. Designó a un funcionario encargado de cuidar del animal, para cuyo sustento se había dispuesto, por orden del emperador, la entrega diaria de seis libras de carne. Inmediatamente el cuidador pensó que no se perjudicaría a nadie si alimentaba a su mudo protegido con cuatro libras de carne, guardándose las dos restantes. Así lo hizo, hasta que poco a poco disminuyó la tersura y fuerza del león, de tal manera que llamó la atención del sultán. «Aquí ocurre algo extraño», dijo éste. «Designaré un funcionario superior para tener la seguridad de que el primero cumple fielmente su deber.» Apenas realizado este propósito, el guardián se dirigió a su superior y prontamente le convenció de que la carne estaría mucho mejor empleada quedándose ellos con el beneficio de dos libras, en lugar de alimentar con ellas al león. Convinieron, pues, en guardar el secreto y repartirse la ganancia. Pero la golosina del robo no tardó en estimular el apetito del nuevo funcionario. Aconsejóse con su subordinado, y les fue fácil llegar a la conclusión de que se podría reducir perfectamente la ración del león a tres libras diarias. Hambriento y consumido, el pobre animal languideció en su prisión, alarmándose el sultán más que antes. «Designaré a un tercer funcionario, dijo, para que vigile a los otros dos...»

Abreviando, ya os podéis imaginar la continuación y la consecuencia... ¿Por qué no habría de poder seguir viviendo el animal con dos libras en lugar de tres? «De esta suerte —termina la fábula—, el león siguió padeciendo, casi muerto de hambre, despojado y saqueado por los guardianes que habían sido designados para su cuidado, y que cuantos más eran en número, más padecimientos le ocasionaban» [1].

Ved, pues, cómo sin el aliento de un potente estímulo interior, ni la razón, ni el Estado, son suficientes por sí solos para promover una sana conducta.

* * *

No quisiera despedirme sin hacer todavía alusión a algunas toxinas espirituales de las que yo deseo veros libres, por cuanto engendran estados

[1] De la interesante antología de textos antiguos de E. SYLVESTRE, «Sobre la índole del hombre».

febriles capaces de perturbar el equilibrio individual y la paz colectiva, drogas que casi siempre se os servirán bajo las más bellas etiquetas. He aquí dos de tales etiquetas: Libertad, igualdad. Hermosas palabras, conceptos sublimes, dignísimas aspiraciones por las que la humanidad ha derramado tanta sangre y tantas lágrimas; ¡cuántas iniquidades se han cometido, sin embargo, en su nombre! Antes de dejaros arrastrar por ellas, comprobad bien lo que se trata de serviros bajo su envoltura; comprobad, sobre todo, si vuestro propio impulso es, en efecto, un sano amor a la igualdad y a la libertad o es tóxico de la envidia o insana tendencia al libertinaje.

Ante Dios todos somos iguales. Todos podemos alcanzar la misma felicidad eterna en la observancia de sus leyes. En lo temporal parece como si las cosas variaran. Dios ha distribuído las facultades desigualmente, mejor dicho, de distinta manera; y si algunas nos parecen privilegiadas, por la preferencia que les concedemos respecto de otras, lo corriente es que existan compensaciones entre ellas; que la mejor inteligencia no lleve aparejada la mejor salud, ni la mayor fuerza física, ni las virtudes de tenacidad y constancia. ¿Por qué no tratamos, pues, de conformarnos con el lote que nos haya caído en suerte?

El secreto de la felicidad temporal acaso no estribe más que en esto simplemente: en la conformidad. Es algo que ha de venir de dentro a fuera, y no al revés. Ya conocéis, sin duda, el cuento de aquel infeliz monarca cargado de poder y de riquezas que, sumido en la mayor amargura, quiso aplicarse el remedio que un mago le aconsejara: vestir la camisa de un hombre feliz. Movilizó toda su Corte, por supuesto tan desdichada como el soberano. No quedó súbdito que no fuera interrogado. Nadie era feliz. Hasta que apareció el más desamparado del reino, un harapiento sin hogar, el cual manifestó, con general sorpresa, ser completamente feliz. En la paz de su conciencia, era el único hombre feliz del reino. ¡el único!, pero... no tenía camisa.

La felicidad no se alcanza con camisa alguna, es decir, con ninguna envoltura exterior; repito que es, ante todo, algo que ha de fluir de dentro. Es inútil que intentéis buscarla acumulando riquezas. Tampoco se consigue, como creen los idólatras de la cultura, atesorando conocimientos. Si un necio con dinero es sólo digno de lástima, más compasión todavía inspira un intelectual con tendencia a creerse desheredado, pues, cuanto más culto, más sensible será a su pretendida desdicha, más disconforme se hallará con su suerte y, por tanto, más desgraciado.

Conformidad no implica, naturalmente, conformismo. Se puede vivir en paz sin negar las esencias mismas de la vida. La resignación con la voluntad suprema es perfectamente compatible con el noble afán de superación. Pero, en lugar de clamar contra las desigualdades, ¿no sería mejor eliminar del lenguaje social la palabra desigualdad?

Somos, entre todos, células de un complicado organismo, cuya vida exige la ordenación y el engranaje de múltiples tareas. Todos los tejidos son importantes para la vida. Si el cerebro conduce la conducta del estómago, no deja de ser por la cuenta que le tiene. Si ingrata es la tarea de amasar peptonas, no es menos envidiable la de estar alerta sin reposo a los innumerables mensajes de los órganos y de los sentidos, y la de dar órdenes inmediatas para regular la vida común. ¿Cuáles son aquí las células privilegiadas?

Pues lo mismo ocurre en el organismo social. Envidia el que obedece al que manda, sin pensar que casi siempre es más fácil obedecer que mandar. Envidia el que acciona al que piensa, olvidando que el pensamiento es también acción y de mayor fatiga. Con el ansia de mejorar nuestra suerte, que siempre creemos inmerecida, vamos corriendo tras un bienestar que no alcanzamos nunca porque su secreto está, ante todo, muy dentro de nosotros, de suerte que no le vemos, y también porque se halla en gran parte en el bienestar de los demás, del que torpemente nos creemos desligados.

Tan enemigo es, pues, de la igualdad el que odia por creerse mal dotado, como el que desprecia por estimarse selecto. De la necedad de unos y otros nació un odio de clases que es, en definitiva, lo más antisocial del movimiento social preconizado por ciertas escuelas.

Contribuye, además, a fomentar esos odios una singular cojera espiritual del hombre. Registramos y anotamos solamente los hechos que contrarían nuestra voluntad, y solemos relegar al olvido aquellos otros que nos complacen, por la sencilla razón de que juzgamos la satisfacción de nuestros deseos como la cosa más natural del mundo. Pero este modo de razonar y proceder lleva como resultante la acumulación exclusiva de rencores, es decir, de valores negativos en las funciones de relación con los demás hombres, sin la contrapartida consoladora del atesoramiento de gratitudes. Y así veréis a muchos hombres sumidos en el desconsuelo de una pretendida preterición. ¡ Todos sus semejantes se han portado mal con ellos ! Cuando un ser, al término de su vida, estima no haber cosechado más que ingratitudes de los demás, hay motivos para preguntarse si no será su propio terreno el que es yermo para la flor del agradecimiento. Sed, pues, agradecidos, lo cual no significa devolver dádiva por favor; pagad con algo que satisfará mucho mejor vuestra alma y la de vuestros semejantes: pagad con el reconocimiento íntimo y el recuerdo constante de los bienes recibidos. Veréis cómo con ello mejora vuestra felicidad interior y adquiere colores más bellos el mundo que os rodea.

Finalmente, amad la libertad, amadla mucho. Al extremo de que este amor os libre de las peores esclavitudes, que son las que se engendran en el interior de nuestra propia alma. La esclavitud del odio, la esclavitud de los sentidos, la esclavitud de la envidia, la esclavitud de la vanidad. Ved cuánto necio anda por esos mundos prisionero en las rejas del falso mito de talento, en las que él mismo se ha encerrado. Amad vuestra libertad infinitamente, pero amad también infinitamente la libertad de los demás. En otros términos, reclamad vuestros derechos con la misma fuerza con que respetéis los derechos de vuestros semejantes, derechos que se traducen en deberes para vosotros.

La libertad bien entendida no es más que eso : equilibrio entre derechos y deberes. La libertad entendida en términos absolutos es una colosál utopía. No hay gesto libre nuestro que no coarte en algo la libertad de los demás. El solo hecho de ocupar un lugar en el espacio restringe en la pequeña parte correspondiente el volumen de movimientos de los demás. Haced ahora extensiva la grosera, pero tangible, imagen del volumen material, a los espacios impersonales, y veréis qué pronto se derrumba el concepto más o menos absoluto que podáis tener de la libertad.

Son las cinco de la mañana, estoy en mi casa, nadie turba mi paz, me siento, al fin, más libre que nunca. ¿ Creéis que es el momento oportuno para sentarme al piano y entretener mi insomnio con una brillante polonesa? ¿ Por qué no? Porque a mis derechos de hombre libre, y entre ellos está como de los más sagrados el derecho a la emoción estética, antepongo el derecho no menos sagrado de mis vecinos al descanso. La convivencia exige, en lógica perfecta y en todo momento, el debido reajuste del concepto de libertad; pero el hombre rebasa con frecuencia el equilibrio que debe existir entre sus derechos y sus deberes, en el sentido de tender a abolir éstos y de reclamar aquéllos. Quiere ir siempre más allá de los justos límites que impone a su propia libertad la libertad de los demás, y así pudo afirmar un filósofo que el hombre aspira no tanto a su libertad como a sojuzgar la ajena. Libraos de esta aberración y pensad que la simple coexistencia de dos hombres en presencia entraña ya el respeto de derechos y deberes mutuos. En resumen: la libertad absoluta no sería posible más que para un hombre aislado, solo en el espacio. ¿Es, acaso, ésa la meta de su felicidad?

Después de analizar por separado los dos conceptos de igualdad y libertad, juntémoslos ahora en el plano común de nuestras humanas aspiraciones. Pronto nos daremos cuenta de que las fuerzas con que nos atraen son opuestas; y en esta oposición radica precisamente la clave del antiquísimo conflicto entre individuo y sociedad.

La libertad es aspiración individual; la igualdad es tendencia colectiva. En nombre de la primera nos desligamos de nuestros semejantes; en nombre de la segunda se nos sujeta a ellos. Libertad es aire, es expansión, es fantasía, vuelo de golondrina. Igualdad es inercia, es masa, es sujeción pendular, pesada lenteja social que busca el nivel más bajo de equilibrio estable...

Pero el péndulo seguirá moviéndose indefinidamente, y ese movimiento será signo de vida, y el hombre oscilará sin fin entre los dos amores, traicionándolos por turno y contradiciéndose a sí mismo en su hermoso dilema, que es a un tiempo fuente de sus caras ilusiones y de sus amargas desdichas.

* * *

Fuerza es que termine. En nombre de mis compañeros de Claustro, y después de haber preparado entre todos vuestro modesto hatillo cultural, os decimos paternalmente *adiós*; pero, a diferencia del judío del cuento, nuestros brazos permanecerán siempre abiertos para recibiros si alguna vez el temor o el dolor de una caída os impulsa a venir a ellos, a volver por estas aulas para renovar la pureza de vuestros sentimientos y el entusiasmo de vuestra fe juvenil, que quiera Dios conservaros de por vida.

RELACION DE PUBLICACIONES Y TRABAJOS CIENTIFICOS Y DIDACTICOS DE D. PEDRO PUIG ADAM HASTA LA FECHA DE PUBLICACION DE ESTE LIBRO

OBRAS

«Curso de Geometría Métrica». Tomo I. Fundamentos.—Tomo II. Complementos.

«Curso teórico-práctico de Cálculo integral, aplicado a la Física y Técnica».

«Curso teórico-práctico de Ecuaciones diferenciales, aplicado a la Física y Técnica».

«La Matemática en la Transmisión de la Energía eléctrica». (Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales.)

«Elementos de Aritmética intuitiva» (en colaboración con don Julio Rey Pastor).

«Elementos de Geometría intuitiva» (en colaboración con don Julio Rey Pastor).

«Lecciones de Aritmética y Geometría».

«Elementos de Aritmética racional» (en colaboración con don Julio Rey Pastor).

«Elementos de Geometría racional», 2 tomos (en colaboración con don Julio Rey Pastor).

«Algebra y Trigonometría» (en colaboración con don Julio Rey Pastor).

«Complementos de Aritmética y Algebra» (en colaboración con don Julio Rey Pastor).

Colección completa de obras de texto para los seis cursos de Bachillerato del plan 1934 (en colaboración con don Julio Rey Pastor).

Colección completa de obras de texto para los seis cursos de Bachillerato del plan 1938 (los cinco primeros en colaboración con don Julio Rey Pastor).

Colección completa de obras de texto para los seis cursos de Bachillerato del plan 1954 (los cinco primeros en colaboración con don Julio Rey Pastor).

Colección completa de obras de texto para los seis cursos de Bachillerato del plan 1957 (los cinco primeros en colaboración con don Julio Rey Pastor).

Colección completa de obras de texto para los cinco cursos del Bachillerato Laboral Elemental (en colaboración con don Julio Rey Pastor).

«Metodología» de la Matemática elemental» (en colaboración con don Julio Rey Pastor).

«Didáctica Matemática Eurística». Publicación de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral. Madrid, 1956.

«El Material Didáctico Matemático actual». Publicación de la Revista *Enseñanza Media*.

«La Matemática y su Enseñanza actual». Publicación de la Revista *Enseñanza Media*.

«Ampliación de Matemáticas», para el Curso Preuniversitario.

TRABAJOS DE MATEMATICA PURA Y APLICADA

«Sobre algunas propiedades de las redes armónicas» (*Rev. Mat. Hisp. Am.*, 1922).

«Resolución de algunos problemas elementales en Mecánica relativista restringida» (tesis doctoral publicada en la *Revista de la Real Academia de Ciencias* y en las publicaciones del Laboratorio y Seminario Matemático, 1923).

«Construcciones métricas en proyección estereográfica» (*R. M. H. A.*, 1925).

«Algunos problemas de mínimo en la catenaria» (*Anales de la Asociación de Ingenieros del I. C. A. I.*, 1925).

«Sobre las catenarias de tensión mínima» (Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Coimbra, 1925).

«Sobre la representación cartesiana de las funciones homogéneas de dos variables» (*R. M. H. A.*, 1928).

«Oscilogramas de inducción y de torsión en materiales ferromagnéticos» (*Anales de la Asociación de Ingenieros del I. C. A. I.*, 1930).

«Sobre la estabilidad del movimiento de las palas del autogiro» (*Revista de Aeronáutica*, 1934).

«Nota sobre la determinación de órbitas de estrellas dobles» (*Revista del Centro de Estudios Científicos de San Sebastián*, 1934).

«Contribución al estudio matemático de la absorción de la energía cósmica por la atmósfera» (*R. M. H. A.*, 1935).

«Demostración simplificada de la fórmula de Moivre-Stirling y acotación gráfica del error» (*R. M. H. A.*, 1939).

«Curvas teóricas de distribución por edades de una colectividad profesional» (Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Zaragoza, 1941).

«Ensayo de una teoría matemática de escalafones cerrados y sus aplicaciones a problemas de Hacienda y Previsión» (*R. M. H. A.*, 1941).

«De los axiomas de ordenación al teorema de Jordan para recintos poligonales» (*R. M. H. A.*, 1945).

«Sobre la individualización de los sentidos en las curvas planas cerradas de Jordan» (*R. M. H. A.*, 1945).

«Revisión crítica de la teoría de la equivalencia de polígonos» (*R. M. H. A.*, 1947).

«Un teorema general sobre integrales de funciones compuestas y sus aplicaciones geométricas y físicas» (*R. M. H. A.*, 1949).

«La transformación de Laplace en el tratamiento matemático de fenómenos físicos» (*R. M. H. A.*, 1951).

«Las fracciones continuas de cocientes incompletos diferenciales y sus aplicaciones» (*R. M. H. A.*, 1951).

«Les systèmes lineaires retroactifs en chaîne et les fractions continues» (Coloquio de París sobre «Les Machines a Calculer et la pensée humaine», 1951).

«Transformées de Laplace des fonctions empiriquement données» (Coloquio de París).

«Matemática y Cibernética». Discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 1952.

«Algunas generalizaciones del algoritmo de las fracciones continuas de elementos diferenciales» (*R. M. H. A.*, 4.ª serie, tomo XII, núm. 3, 1952).

«Sur les limites de certaines fonctions de partition» (*R. M. H. A.*, tomo XIII, número 1, 2, 1953).

«Sobre algunas propiedades de las fracciones continuas de elementos diferenciales» (Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Oviedo, 1953. Publicado en la Revista *Las Ciencias*, año XX, núm. 2).

«Reducidas ascendentes y reducidas descendentes en el algoritmo de las fracciones continuas de elementos diferenciales» (*Revista de la Ral Academia de Ciencias*, 1954).

«Métodos gráfico y algebraico para el proyecto de circuitos electrónicos de cálculo» (*Revista de Ciencia Aplicada*, julio-agosto, 1952).

«Sobre algunas propiedades de las funciones convexas» (*Gaceta Matemática*, 1.ª serie, números 5 y 6).

«Un ingenio eléctrico para la resolución de problemas de lógica formal» (*Revista de la Real Academia de Ciencias*, enero de 1959).

«Un "jouet" électrique pour l'enseignement de la logique des enoncés» (Rev. *L'Enseignement des Sciences*, núm. 2, septiembre-octubre 1959. Traducción del artículo anteriormente reseñado, con adición de complementos).

«Sobre la ecuación funcional de Cauchy» (Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Madrid, 1958. Publicado en la Revista *Las Ciencias*, año XXIV, núm. 3).

«Recensiones múltiples de artículos sobre Análisis y sus aplicaciones a circuitos eléctricos». Publicadas en el *Zentralblatt für Mathematik* entre 1950 y 1957.

TRABAJOS DE CARACTER PEDAGOGICO Y DIDACTICO

«Series divergentes cuyo término general tiende a cero» (*R. M. H. A.*, 1924).

«Sobre el problema inverso del cálculo aproximado» (*R. M. H. A.*, 1926).

«Dos palabras acerca de la pedagogía matemática en la Segunda Enseñanza» (*Rev. de Seg. Ens.*, 1926).

«Klein, el Instituto y la Universidad» (leído en sesión de homenaje al profesor Klein y publicado en la *Rev. de Seg. Ens.*, 1927).

«Interpretación gráfica del error en el método de análisis directo» (*R. M. H. A.*, año 1928).

«Notas sobre pedagogía matemática» (*R. M. H. A.*, 1929).

«Los conceptos de derivada e integral en la Segunda Enseñanza» (Rev. *El Instituto*, número 1).

«Construcción de una regla de cálculo didáctica» (Rev. *El Instituto*).

«Demostración intuitiva de la regla de la raíz cuadrada» (*Mat. Elem.*, enero 1932).

Tres conferencias sobre didáctica matemática a los maestros cursillistas de 1933.

«La Matemática en la primera exposición de trabajos prácticos de los Institutos de Enseñanza Media» (reseña publicada en *Mat. Elem.*, año 1943).

Ponencia sobre formación y selección del profesorado de Enseñanza Media (Primera Semana de Enseñanza Media Oficial, 1942).

Cursillos de Aritmética para obreros en la Escuela Especial de Ingenieros Industriales (1943 a 1945).

«Orientación, selección y deformación» (*Rev. de Psicología General y Aplicada*, 1947).

«El valor formativo de las Matemáticas en la Enseñanza Media» (conferencia leída en la sesión inaugural de la XIX Semana de la F. A. E. y publicada en *Atenas*, Revista de Información y Orientación Pedagógica, marzo 1951).

«La evolución de la Didáctica Matemática en nuestra generación» (Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Discurso inaugural de la Sección de Exactas del Congreso de Oviedo, 1953. Publ. en la Rev. *Las Ciencias*, año XX, número 1).

«Sobre la enseñanza de la Geometría en la Escuela Primaria» (Publ. en la Rev. *Bordón*, de la Soc. Esp. de Pedag., año 1953, núm. 35).

«Decálogo de la Didáctica Matemática Media» (*Gaceta Matemática*, 1.ª serie, tomo VII, núm. 5-6).

«La Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza Matemática» (*Rev. de Educación Nacional*, diciembre 1955).

Crítica del libro «L'Enseignement des Mathématiques», de la C. I. E. M. E. M., publicada en *Revista de Educación Nacional*, diciembre 1955.

«Tendencias actuales en la Enseñanza de la Matemática». Cuatro conferencias radiadas por Radio Nacional de España entre el 25 y el 28 de enero de 1956, y publicadas en *Revista de Educación Nacional*, núms. 41 a 43, año 1956).

«Tres muestras de clases eurísticas en los primeros cursos de Matemáticas del Bachillerato» (Boletín Pedagógico de la Institución de formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, núm. 5, año I, 1956).

«Una lezione attiva sull'iniziazione alle simmetrie nel piano» (Rev. *Archimede*, fascículo 4-5, 1956, Roma).

Aportación de material pedagógico y de reseñas de experiencias didácticas varias en la XIX Conferencia Internacional de Instrucción Pública habida en Ginebra, julio de 1956, sobre el tema «L'Enseignement des Mathématiques».

Participación activa en la redacción de las Recomendaciones internacionales emanadas de la referida Conferencia, como miembro electo de su Comité de Redacción.

«Structures algébriques dans une mosaïque jouet» (Rev. de la Societé belge de Professeurs de Mathématiques *Mathematica & Paedagogia*, núm. 10, 1956-57).

«Modèles prêts et modèles faits» (Capítulo XI del libro «Le Matériel pour l'Enseignement des Mathématiques», publicado por la Comisión Int. para el Est. y Mej. de la Ens. Mat., Delachaux-Niestlé, París-Neuchatel, 1957).

«Progressions arithmétiques d'ordre supérieur» (Apéndice del mismo libro).

«Un juego de adivinación de carácter matemático» (Publ. en *Gaceta Matemática*, 1.ª serie, tomo VIII, núm. 6-7, 1957).

«Un nuevo material para la Enseñanza eurística de la Geometría del Espacio» (Revista *Enseñanza Media*, núm. 3, enero 1957).

Cursillo sobre Didáctica Matemática para profesores de enseñanza primaria y de enseñanza media, con exposición de material. Santander, agosto 1956.

Cursillo sobre Didáctica Matemática para Profesores de Enseñanza Laboral. Madrid, junio-julio 1956.

Organización y dirección de tres Reuniones de Estudio de Catedráticos de Matemáticas de Enseñanza Media sobre temas de la Pedagogía de la especialidad. Madrid, marzo-octubre y diciembre 1956).

«Estructuras matemáticas en un juego solitario» (*Gaceta Matemática,* 1.ª serie, tomo IX, núm. 1).

«Dos lecciones de Didáctica Matemática eurística» (Rev. *Arquímedes,* 1957).

Exposición de material didáctico matemático para cuarenta lecciones de carácter eurístico, con explicación de las experiencias didácticas correspondientes. Aportación a la Reunión Internacional celebrada en Madrid, en abril de 1957, por la Comisión Intern. para el Est. y Mej. de la Ens. Mat. (Elogiosamente comentada en las revistas *Mathematics Teaching,* de Londres; *Mathematica Paedagogia,* de Bruselas; *Bulletin de l'Association de Prof. de Math.,* de París, y en *Archimede,* de Roma.)

«Sobre la Enseñanza Eurística de la Matemática» (conferencia dada ante la Federación de Amigos de la Enseñanza, y publ. en la Rev. *Atenas,* enero-febrero 1958).

Cursillo sobre Didáctica Matemática organizado por el Centro de Orientación Didáctica de la Dirección General de Enseñanza Media, para los profesores de enseñanza no oficial. Madrid, febrero 1958.

Conferencia ante el Profesorado de Matemáticas de las Escuelas de Formación Profesional Industrial sobre «El material de enseñanza matemática que la vida nos ofrece». Madrid, mayo 1958.

«La matemática en el juguete». Conferencias dadas ante la Agrupación de Universitarias españolas (Madrid) y en la Escuela del Magisterio de Valladolid (1957).

«Sobre la formación del Profesorado de Matemáticas de grado medio». Conferencia dada en la Escuela del Magisterio de Valladolid (diciembre 1957). Publ. en el *Boletín Pedagógico de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral,* abril 1958.

«Les Mathématiques et le concret» (Rev. *Math. & Paed.,* núm. 12, Bruselas; reproducido en el *Bulletin de l'Ass. de Prof. de Math.,* núm. 187, París; traducción posterior al polaco en *Mathematyka,* núm. 1 (51), Varsovia, 1958).

«La Matemática y lo concreto» (Rev. *Arquímedes,* año III, 5-6. Reproducción íntegra del discurso inaugural de la XI Reunión de la Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la Enseñanza Matemática).

«Modelos matemáticos extraídos de la vida» (Rev. *Arquímedes,* año III, 5-6).

«El material para la Enseñanza de la Matemática» (Crítica del libro de igual título publicado por la C. I. E. M. E. M. Rev. *Enseñanza Media,* núms. 24-26, 1958).

«L'aire des polygones au géoplan» (Rev. *Mathematica & Paedagogia,* núm. 15, 1958).

«La enseñanza de la Aritmética en la Escuela Primaria» (Rev. *Vida Escolar,* 1959).

«La Didáctica Matemática a lo largo de los ciclos medios» (*Revista de Educación Nacional,* núms. 95 y 97, Madrid, 1959).

«Un punto de vista cibernético sobre el problema de los problemas» (Rev. *Enseñanza Media,* núms. 33-36, enero-febrero 1959).

«Sobre los films Didácticos Matemáticos» (*Boletín de la Inst. de Form. del Prof. de Ens. Laboral,* núm. 23, 1959).

Cursillo de Didáctica para Profesores de Enseñanza Laboral. Junio 1959.

TRABAJOS VARIOS, CONFERENCIAS Y ENSAYOS

Artículos científicos varios de la Enciclopedia Espasa: «Geometría no euclídea», «Gravedad», «Gravitación», «Polaridad», «Polos» (Movimiento de los), «Real» (Número), etc.

«Don José María Plans y Freyre» (nota necrológica en colaboración con don Fernando Peña, publicada en *R. M. H. A.*, 1934).

Discurso necrológico en memoria del mismo (publicado en la Revista *Las Ciencias*, año II, núm. 2).

«La Matemática como Ciencia aplicada» (conferencia dada en el Instituto de Ingenieros Civiles, 1934).

Colaboraciones varias en la *R. M. H. A.* desde 1924 a 36. Propuesta y resolución de problemas, críticas de libros, etc.

«La Matemática y la Belleza» (conferencia leída en el Instituto Francés de Madrid y publicada en la Rev. *Mat. Elem.*, 1941).

Dos mensajes de despedida a los bachilleres del Instituto de San Isidro (años 1945 y 1947).

«Apología de la inutilidad» (discurso leído en la Escuela Especial de Ingenieros Industriales de Madrid en la sesión de entrega de títulos a la Promoción de Ingenieros de 1946).

«En memoria de don Esteban Terradas» (*Dyna*, junio de 1950).

Prólogos de las obras: «Problemas de Matemática especial», de don Antonio Moreno Torres; «Tratado de Matemáticas superiores para Ingenieros y Físicos», de Bernhard Baule (trad. española de Ed. Labor), y «Matemática Superior», de Rothe (trad. Ed. Labor).

«Sobre Cibernética. Génesis y problemas» (*Revista de Psicología General y Aplicada*, año 1952).

«Automática antigua, automática moderna y Cibernética» (Rev. *Origen*, núm. 6, 1953).

«Torres Quevedo, el Cálculo mecánico y la Automática» (discurso leído en la sesión necrológica dedicada a Torres Quevedo el 11 de febrero de 1953 en la Real Academia de Ciencias y publicado en la Revista de dicha Academia, núm. 1, 1953).

«El ingeniero español don Leonardo Torres Quevedo» (*Boletín informativo del Instituto de Ingenieros Civiles de España*, año I, núm. 2).

«Sobre la formación Matemática del Ingeniero» (Rev. *Acero y Energía*, año IX, número 54, Barcelona).

«Información, Entropia y Caos» (discurso inaugural del curso 1954-55 de la Real Academia de Ciencias).

«Una vida excepcional: Esteban Terradas» (*Boletín de información del Instituto de Ingenieros Civiles de España*, octubre 1954).

«Sobre la moderna teoría de la información» (publicado en la Rev. *Arbor*, marzo 1955).

«La Matemática y el Hombre» (prólogo del tomo de Matemáticas de la Enciclopedia Labor, 1958).

«Matemática, Historia, Enseñanza y Vida» (conferencia dada el 13 de diciembre de 1957 en el Aula Magna de la Universidad de Valladolid. Publicada en la *Revista de Educación Nacional*, núm. 72, enero 1958).

«Don Julio Rey Pastor. En el aniversario de una jubilación» (*Gaceta Matemática*, año 1959).

PUBLICACIONES DE LA REVISTA "ENSEÑANZA MEDIA"

CUADERNOS DIDACTICOS

1. FISICA (ELECTRICIDAD). Experiencias de Cátedra y cuestiones de exámenes.
2. FISICA (MECANICA Y FLUIDOS).
3. FISICA (CALOR, ACUSTICA Y OPTICA).
4. CIENCIAS NATURALES.
5. CIENCIAS NATURALES (Prácticas de Bioquímica, Ecología Animal y Vegetal, Micrografía y Microscopia, Botánica y Zoología.
6. CIENCIAS NATURALES (Prácticas de Anatomía, Fisiología e Higiene Humanas, Geología General Dinámica e Histórica, Mineralogía, Cristalografía y Petrografía. — Temas para el Examen práctico de los Ejercios de Grado).
7. GEOGRAFIA.
8. MATEMATICAS.
9. LENGUA FRANCESA.
10. LENGUA Y LITERATURA ESPAÑOLAS.
11. LATIN.
12. GRIEGO.
13. BIBLIOTECAS DE CENTROS DE ENSEÑANZA MEDIA.
14. EXAMENES DE GRADO.
15. PLAN DE BACHILLERATO 1957: DECRETO DE 31 DE MAYO Y CUESTIONARIOS GENERALES.
16. PLAN DE BACHILLERATO 1957: PROGRAMAS DE PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO, CUARTO, QUINTO Y SEXTO CURSOS (Con orientaciones metodológicas).
17. PREUNIVERSITARIO: Decreto de Ordenación. Cuestionarios Oficiales.
18. PREUNIVERSITARIO (Problemas de Matemáticas del curso 1958-59).
19. SAN JUAN CRISOSTOMO: «Defensa de Eutropio» y «De la vanagloria y educación de los hijos».

GUIAS DIDACTICAS

1. GUIA DIDACTICA DE LA LENGUA Y LITERATURA ESPAÑOLAS PARA EL BACHILLERATO.
2. EL METODO DE LA INVESTIGACION DIRIGIDA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN EL BACHILLERATO, por Manuel Sales Boli.
3. LA EDUCACION Y LA ENSEÑANZA EN EL MUNDO.
4. EL MATERIAL DIDACTICO MATEMATICO ACTUAL, por Pedro Puig Adam.
5. LA ENSEÑANZA DE LOS IDIOMAS MODERNOS, por Fr. Closset.
6. LA MATEMATICA Y SU ENSEÑANZA ACTUAL, por Pedro Puig Adam.
7. EXPERIENCIAS DE RADIOELECTRICIDAD: EMISOR DIDACTICO.

TEMAS DE EXAMENES DE GRADO

Comentario de textos. — Religión. — Letras. — Ciencias. — Matemáticas. — Latín. — Griego. Lenguas modernas.—Física y Química (Grado Superior).