MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE ORDENACION ACADEMICA

ORIENTACIONES DIDACTICAS PARA EL DESARROLLO DEL PROGRAMA DE MATEMATICAS II DEL CURSO DE ORIENTACION UNIVERSITARIA

JUNIO 1988

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE ORDENACION ACADEMICA

ORIENTACIONES DIDACTICAS PARA EL DESARROLLO DEL PROGRAMA DE MATEMATICAS II DEL CURSO DE ORIENTACION UNIVERSITARIA

JUNIO 1988

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA
DIRECCION GENERAL DE RENOVACION PEDAGOGICA
SUBDIRECCION GENERAL DE FORMACION DEL PROFESORADO
N.I.P.O.176-87-153-2
I.S.B.N. 84-369-1454-6
Depósito Legal M-22038-1988
Imprime: Marin Alvarez Hnos.

Indice

Introducción

El Ministerio de Educación y Ciencia ha modificado las opciones del Curso de Orientación Universitaria mediante la Orden de 3 de septiembre de 1987 (B. O. E. del día 14), y ha incorporado las enseñanzas de las Matemáticas II. El programa y orientaciones pedagógicas para estas enseñanzas se establece por Resolución de 20 de enero de 1988 (B. O. E. del día 29) de las Direcciones Generales de Enseñanza Superior y Renovación Pedagógica.

Por tratarse de unas enseñanzas para alumnos que desean estudiar carreras universitarias de Ciencias Sociales y Humanístico-Lingüísticas, en las que necesitan unos conocimientos iniciales de Matemáticas aplicadas, se ha realizado este documento con información complementaria que se estima puede ser útil para aquellos profesores que impartan dicha materia a partir del curso 1988-89.

Legislación

21337 (B. O. E.) 14-9-88 **ORDEN de 3 de septiembre de 1987 por la que se modifican las Ordenes de 22 de marzo de 1975 y de 11 de septiembre de 1976, en los apartados relativos al Curso de Orientación Universitaria.**

El Curso de Orientación Universitaria constituye la vía de acceso normal de los alumnos a los estudios superiores y tiene, por ello, como objetivos específicos la profundización de su formación en las ciencias básicas y su orientación para una más adecuada elección de carreras y profesiones.

Este carácter orientador ha venido exigiendo continuas modificaciones en la estructura y contenidos del plan de estudios desde su primera regulación, hecha en la Orden de 13 de julio de 1971 («Boletín Oficial del Estado» del día 20), estando actualmente en vigor el plan aprobado por la Orden de 22 de marzo de 1975 («Boletín Oficial del Estado» del día 18 de abril), modificada, a su vez, por la de 11 de septiembre de 1976 («Boletín Oficial del Estado» del día 22) y por la de 13 de julio de 1978 («Boletín Oficial del Estado» del día 31).

La Ley 30/1974, de 24 de julio («Boletín Oficial del Estado» del día 16), estableció las pruebas de aptitud para el acceso a las Facultades, Escuelas Técnicas Superiores, Colegios Universitarios y Escuelas Universitarias, determinando que las mismas deberían versar sobre las materias comunes y optativas del plan de estudios del Curso de Orientación Universitaria.

La experiencia de los años que el actual plan de estudios lleva implantado ha demostrado que las dos únicas opciones existentes constituyen un marco demasiado estrecho, incapaz de ofrecer a los alumnos un abanico de posibilidades de elección de materias ajustado a los variados tipos de estudios que ofrece la Universidad, con escasa progresión en relación a las opciones tomadas ya en el tercer curso de Bachillerato. Resulta, por ello, conveniente modificar las actuales opciones, de manera que, sin alterar sustancialmente el conjunto de materias que integran el plan de estudios, pueda establecerse un mejor acoplamiento de las pruebas de acceso a la Universidad con los estudios ulteriores que cada alumno desee seguir.

Por todo ello, en virtud de las atribuciones conferidas en el artículo 34 de la Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiación de la Reforma Educativa y en el Decreto 1485/1971, de 1 de julio,

Este Ministerio, previo informe del Consejo Escolar del Estado, ha dispuesto:

Primero.—Quedan sin efecto, a partir del curso 1988-89, los apartados 12 y 13 de la Orden de 22 de marzo de 1975 y el apartado 5.° de la Orden de 11 de septiembre de 1976.

Segundo.—Dichos apartados serán sustituidos por los siguientes:

Uno. El contenido del curso comprenderá un núcleo de materias comunes y cuatro opciones. Incluirá, asimismo, seminarios y actividades con la finalidad de contribuir a la formación y orientación académica y profesional de los alumnos.

A las enseñanzas de las materias comunes y optativas se destinará el siguiente horario:

1. MATERIAS COMUNES

«Lengua española»: Tres horas semanales.
«Lengua extranjera»: Tres horas semanales.
«Filosofía» (Historia de la Filosofía): Cuatro horas semanales.

2. MATERIAS OPTATIVAS

Opción A (Científico-tecnológica)

a) Materias obligatorias:

«Matemáticas I»: Cuatro horas semanales.
«Física»: Cuatro horas semanales.

b) Materias optativas:

«Química»: Cuatro horas semanales.
«Biología»: Cuatro horas semanales.
«Geología»: Cuatro horas semanales.
«Dibujo Técnico»: Cuatro horas semanales.

Opción B (Biosanitaria)

a) Materias comunes:

«Química»: Cuatro horas semanales.
«Biología»: Cuatro horas semanales.

b) Materias optativas:

«Matemáticas I»: Cuatro horas semanales.
«Física»: Cuatro horas semanales.
«Geología»: Cuatro horas semanales.
«Dibujo Técnico»: Cuatro horas semanales.

Opción C (Ciencias Sociales)

a) Materias obligatorias:

«Matemáticas II»: Cuatro horas semanales.
«Historia del Mundo Contemporáneo»: Cuatro horas semanales.

b) Materias optativas:

«Literatura»: Cuatro horas semanales.
«Latín»: Cuatro horas semanales.
«Griego»: Cuatro horas semanales.
«Historia del Arte»: Cuatro horas semanales.

Opción D (Humanística-Lingüística)

a) Materias obligatorias:

«Literatura»: Cuatro horas semanales.
«Historia del Mundo Contemporáneo»: Cuatro horas semanales.

b) Materias optativas:

«Latín»: Cuatro horas semanales.
«Griego»: Cuatro horas semanales.
«Historia del Arte»: Cuatro horas semanales.
«Matemáticas II»: Cuatro horas semanales.

3. MATERIA VOLUNTARIA

Segundo idioma extranjero: tres horas semanales.

Tendrán, asimismo, carácter voluntario para los alumnos, las actividades deportivas a las que, en su caso, se destinarán, al menos, dos horas semanales.

Los horarios señalados comprenden tanto las enseñanzas teóricas como las actividades correspondientes.

Dos. Los Centros que impartan el Curso de Orientación Universitaria quedan obligados a ofrecer enseñanzas de todas las materias optativas que se relacionan en el punto 1 de este apartado.

Cada alumno elegirá una de las cuatro opciones. Cada opción estará constituida por dos materias obligatorias, que habrán de cursar necesariamente todos los alumnos que hayan efectuado dicha opción, y cuatro optativas entre las que deberán elegir dos.

Tercero.—Las Matemáticas II, correspondientes a las opciones C y D, tendrán unos contenidos y orientaciones específicos, adecuados a la naturaleza de dicha opción, y se establecerán por las Direcciones Generales de Renovación Pedagógica y de Enseñanza Superior antes del comienzo del curso 1988-89. Las Matemáticas I, correspondientes a las opciones A y B, tendrán los mismos contenidos y orientaciones específicas que los actualmente vigentes en el plan de estudios de COU.

Cuarto.—Las Comunidades Autónomas que, en su caso, hayan sido autorizadas a incluir en el plan de estudios de este curso enseñanzas de la Lengua y Literatura propia, podrán incorporarlas aplicando los mismos criterios utilizados anteriormente.

Quinto.—Salvo los dos apartados dejados sin efecto en el apartado 1.°, mantiene toda su vigencia la Orden de 22 de marzo de 1975 antes referida, así como las disposiciones que la complementan o desarrollan.

Sexto.—Quedan autorizadas las Direcciones Generales de Renovación Pedagógica y de Enseñanza Superior para desarrollar la presente Orden.

Madrid, 3 de septiembre de 1987.

MARAVALL HERRERO

Ilmos. Sres. Directores Generales de Renovación Pedagógica y de Enseñanza Superior.

2267 **RESOLUCION de 20 de enero de 1988, de las Direcciones Generales de Enseñanza Superior y de Renovación Pedagógica, por la que se aprueba el programa y orientaciones pedagógicas de las «Matemáticas II» del Curso de Orientación Universitaria.**

(B. O. E.) 29-1-88

La Orden de 3 de septiembre de 1987 («Boletín Oficial del Estado» del día 14) ha modificado la estructura del plan de estudios del Curso de Orientación Universitaria que había sido fijada por la Ordenes de 22 de marzo de 1975 y de 11 de septiembre de 1976, distribuyendo en cuatro opciones las materias de las dos anteriormente existentes e incorporando a las opciones C y D las enseñanzas de «Matemáticas II», cuyo programa deberá responder a la naturaleza específica de estas opciones.

Dicha Orden, en la disposición tercera, encomienda a las Direcciones Generales de Enseñanza Superior y de Renovación Pedagógica el establecimiento de los contenidos y orientaciones pedagógicas de esta materia antes del comienzo del curso 1988 - 1989.

A tal fin, y en virtud de las atribuciones que tienen conferidas, las Direcciones Generales de Enseñanza Superior y de Renovación Pedagógica han resuelto:

Primero.—Aprobar el programa y orientaciones pedagógicas de las enseñanzas de «Matemáticas II» del Curso de Orientación Universitaria, que figuran en el anexo de esta Orden.

Segundo.—Dicho programa, que tendrá vigencia a partir del año académico 1988-89, deberá impartirse en las opciones C y D del plan de estudios del Curso de Orientación Universitaria configurado en el punto uno de la disposición segunda de la citada Orden de 3 de septiembre de 1987.

Lo que se comunica a VV. II.

Madrid, 20 de enero de 1988.—El Director General de Enseñanza Superior, Francisco de Asís de Blas Aritio; el Director General de Renovación Pedagógica, Alvaro Marchesi Ullastres.

Ilmos. Sres. Subdirectores Generales de Centros y Profesorado y de Ordenación Académica

ANEXO

Opciones C y D

«MATEMATICAS II»

1. *Introducción*

La finalidad de este programa es proporcionar a los alumnos, de una manera eminentemente práctica, algunas herramientas sencillas del bagaje matemático que constituyen una ayuda muy eficaz para el trabajo en Ciencias Humanas y Sociales.

Se insistirá en el sentido y aplicaciones de los enunciados y no en la demostración y desarrollo matemático de los mismos.

Parece conveniente utilizar la Historia de las Matemáticas como fuente de problemas y situaciones motivadoras, así como, en algunos casos, para presentar al alumno una visión dinámica de los conceptos y del lenguaje matemático.

En aquellos casos en que sean necesarios cálculos muy laboriosos para dar un significado no trivial al ejercicio, se recomienda utilizar calculadoras de bolsillo o programas de ordenador.

El Profesor deberá tener presente que este programa está dirigido a alumnos que no necesariamente han cursado las Matemáticas del tercer curso de Bachillerato. El nivel de referencia será, por lo tanto, el de los dos primeros cursos, donde la asignatura es obligatoria.

2. *Contenidos y orientaciones pedagógicas*

2.1 Elementos de álgebra lineal.

Sistemas lineales:

Planteamiento de problemas lineales.
Método de Gauss.
Interpretación de las soluciones.
Significado geométrico de los sistemas lineales.

Cálculo matricial:

Matrices.
Determinantes.

Programación lineal:

Iniciación a la programación lineal.
Planteamiento de problemas sencillos de programación lineal. Resolución por métodos gráficos.

Se debe aprovechar el conocimiento que tienen los alumnos de las técnicas de resolución de sistemas sencillos, para aplicarlas a casos más complejos, previa reflexión sobre cuál es la más conveniente para el problema concreto.

Esto puede ser el punto de partida para el manejo del método de Gauss como procedimiento general de resolución de sistemas lineales. En la práctica, dichos sistemas serán de cuatro incógnitas como máximo.

Debe insistirse en problemas de planteamiento sacados de diversos ámbitos y, en particular, de las áreas de mayor interés para los alumnos, procurando que los distintos tipos de sistemas que pueden plantearse (determinados, indeterminados e incompatibles), adquieran todo su significado al ser interpretados en un contexto.

El planteamiento o interpretación de sistemas sencillos en términos geométricos (posiciones de rectas y planos en el espacio) no debe dar lugar a un estudio especial de la Geometría Analítica. Si es necesario, el enunciado de los problemas de este tipo puede incluir una breve explicación de los términos novedosos.

El alumno debe familiarizarse con la lectura y descripción de matrices utilizando el vocabulario adecuado: fila, elemento, diagonal, matriz triangular. Puede confeccionar matrices asociadas a diferentes contextos: matriz de un grafo, matriz como tabla de doble entrada, de un polígono, etc.

Las técnicas operatorias entre matrices pueden justificarse sobre la base del significado que adquieren en los contextos anteriores. Un ejemplo especialmente relevante es el de las matrices asociadas a transformaciones geométricas planas, que operan a través del producto.

El estudio de los determinantes ha de reducirse a los de segundo y tercer orden, encaminado al cálculo de la inversa de una matriz cuadrada.

El Profesor debe valorar los conocimientos de sus alumnos en aquellos conceptos previos necesarios al estudio de la programación lineal, como el planteamiento y la resolución gráfica de inecuaciones con una o dos incógnitas, y proceder, si es necesario, a un repaso de los mismos.

La justificación de dónde se encuentran las soluciones de un problema de programación lineal puede lograrse con ejemplos concretos y apoyándose en el significado geométrico de la función «objetivo».

Tiempo estimado: Ocho semanas.

2. 2 Análisis descriptivo de funciones y gráficas.

Funciones y gráficas:

Significado práctico de las funciones como descripción de fenómenos. Ejemplo de las funciones más sencillas y su representación.
Interpretación de gráficas.
Idea intuitiva de continuidad.

La derivada:

Derivadas. Significados de la derivada.
Manejo práctico de las reglas de derivación en casos sencillos.
Aplicaciones al estudio de la variación de una función y a su representación gráfica.
Problemas de máximos y mínimos.

Interpolación:

Idea y significado de la interpolación polinómica.
Interpolación lineal y cuadrática.

La integral:

La integral. Integrales inmediatas.
La integral definida. Significado geométrico: área bajo una curva. Aplicaciones al cálculo de áreas.

Para describir una gráfica se deben manejar con corrección términos como crecimiento, mínimo, discontinuidad, asíntota, concavidad. No es imprescindible formalizar el concepto de límite ni utilizar una notación rigurosa para definir el vocabulario básico.

Para representar una función el alumno utilizará todos los recursos a su alcance: cálculo de puntos, relación con otras funciones conocidas, uso de la calculadora para determinar la tendencia, reflexión sobre la fórmula de la función, etc. Cuando sea necesario para el propósito del problema, puede acudirse a la función derivada y determinar con exactitud los extremos de la gráfica.

El alumno debe asociar ciertas formas de gráficas con la fórmula correspondiente. En particular es interesante identificar comportamientos lineales, exponenciales y periódicos.

Se procurará representar sobre un mismo sistema coordenado una familia de funciones, con el fin de que el alumno valore la incidencia que tienen en la forma de la gráfica los parámetros que intervienen en la expresión matemática de la misma.

Aunque los alumnos han estudiado en el segundo curso del Bachillerato el concepto y cálculo de derivadas, parece conveniente revisar la noción de derivada de una función en un punto a partir de la tasa de variación media y usando la calculadora. Para ello no es imprescindible la formalización del concepto de límite ni el cálculo sistemático de límites. El manejo práctico de derivadas puede llegar hasta la regla de la cadena en casos sencillos.

La técnica más elemental de interpolación, la mera sustitución de valores en la fórmula general del polinomio, establece un puente entre esta parte del programa y la de álgebra. En cada caso concreto, y en problemas que respondan a datos de la vida real, se podrá enjuiciar el valor práctico de la interpolación y extrapolación que proporciona la función hallada.

Excede el propósito de este curso demostrar la relación entre función primitiva e integral definida. Basta con que el alumno maneje la regla de Barrow para el cálculo de áreas.

Tiempo estimado: Nueve semanas.

2. 3 Elementos de probabilidad y estadística.

Estadística:

Terminología: Población, muestra, individuo, variable...
El porqué de las muestras. Cómo debe ser una muestra.
Manejo de tablas. Significado.
Gráficas estadísticas.
Parámetros estadísticos. Significado y cálculo: Media y desviación típica, varianza. Mediana, cuartiles y centiles.

Distribuciones bidimensionales:

Correlación. Significado. Cálculo del coeficiente de correlación e interpretación.
Regresión lineal.

Probabilidad:

Azar y probabilidad. Leyes de la probabilidad. Asignación de probabilidades: probabilidad «a priori» y «a posteriori».
Experiencias compuestas. Probabilidad condicionada.
Cálculo de probabilidades sencillas.

Distribuciones de probabilidades discretas:

¿Qué es una distribución de probabilidad?
Parámetros μ y σ en una distribución de probabilidad.
Algunos ejemplos sencillos de probabilidad discreta.
Somera descripción de la distribución binomial. Aplicaciones.
Fórmulas para la obtención de μ y σ.

Distribuciones de probabilidad continuas:

Peculiaridades de las distribuciones de variable continua.
Ley de distribución normal. Descripción. Cálculo de probabilidades de distribuciones normales con el uso de tablas.
La binomial como aproximación a la normal.
Test de normalidad.

La finalidad de esta parte del curso es proporcionar a los alumnos algunas nociones de estadística aplicada a las Ciencias Sociales y Humanas.

Se debe pretender que el aparato conceptual indispensable para este objetivo se presente en todo momento firmemente apoyado en la intuición y apoyado en aplicaciones prácticas.

La aproximación a las tareas rutinarias de los cálculos estadísticos mediante el uso adecuado de la calculadora y el ordenador, facilitará las aplicaciones reales de la estadística.

A partir del estudio de nubes de puntos se puede llegar al concepto de relación estadística y su diferencia con la relación funcional. No es necesario formalizar el concepto ni el cálculo de recta de regresión.

El cálculo de frecuencias relativas y las observaciones referentes a su estabilidad deben ser el cauce para la noción de probabilidad.

Es importante hacer resaltar la diferencia entre la probabilidad que se asigna, y que dependerá de los elementos de juicio que se posean «a priori», y la probabilidad «a posteriori» obtenida experimentalmente.

La asignación de probabilidades debe realizarse mediante la experimentación o aplicando la regla de Laplace. El Profesor valorará la necesidad de repasar las técnicas de recuento, la combinatoria en particular, estudiadas en el primer curso.

Tiempo estimado: Nueve semanas.

Orientaciones didácticas

Elementos de Algebra lineal

Sistemas lineales *(Tiempo estimado: tres semanas* [1]*)*

El objetivo de este apartado es, por una parte, consolidar la capacidad de los estudiantes para traducir un problema desde un enunciado verbal o gráfico al lenguaje algebraico, y por otra, que adquieran un algoritmo cómodo para la solución de sistemas de ecuaciones: el método de Gauss.

Cabe insistir en la importancia de retomar los problemas «de enunciado», ya que suponen un buen ejercicio para desarrollar capacidades generales y capacidades matemáticas del alumno: lectura comprensiva, análisis de una situación, elección de las variables significativas, codificar en lenguaje matemático, dar sentido a las operaciones elementales y al concepto de ecuación. Si, además, el texto del problema es relevante para alguna otra materia de los actuales o futuros estudios de los alumnos, se reforzará en ellos la idea de que las Matemáticas son un instrumento útil para acercarse a otros conocimientos. En estos casos, la solución del problema puede interpretarse en su contexto específico, con lo que se completa el proceso realidad-matematización-realidad.

Una fuente interesante de enunciados de problemas lineales los proporciona la Economía: desde simples problemas de mezclas y aleaciones, hasta otros que requieren algún concepto sencillo previo, como los relativos a las leyes de oferta y demanda. Un problema de este tipo con solución indeterminada significaría la falta de suficientes datos como para tomar una decisión mejor que otras. La ausencia de solución matemática puede ser debida a la imposibilidad real del problema, a que está mal planteado o que los datos son incorrectos. Incluso pueden analizarse las soluciones únicas, pues si son números que no convienen a las magnitudes que representan (p. ej. números negativos o fraccionarios en algunos casos), son soluciones matemáticas del sistema, pero no del problema real.

Otro recurso muy interesante es la utilización de la Historia de las Matemáticas, tanto para situar en el tiempo la génesis de los conocimientos algebraicos como para surtirse de problemas célebres con enunciado utilitario e incluso poético. El simple análisis etimológico de «Algebra Lineal» (del árabe «Al-geber Valmukabala»), que sintetiza las reglas elementales para manejar una ecuación, es un buen pretexto para conocer algunos aspectos de la matemática árabe, asequibles a los alumnos, y que no son ajenos a nuestra propia cultura, estrechamente vinculada durante una época a la musulmana.

Puede hacerse una interpretación geométrica de sistemas sencillos con dos o tres incógnitas, sin necesidad de estudiar exhaustivamente la Geometría Analítica. Basta con que el alumno indentifique, y haya adquirido razonadamente, la forma de las ecuaciones implícitas del plano. Los alumnos conocen la ecuación de la recta en el plano y están familiarizados con problemas de intersección de rectas. Utilizando coordenadas en el espacio, pueden obtener con facilidad las ecuaciones de planos sencillos:

OXY, OXZ, OYZ y sus paralelos

escribiendo sin más las condiciones que han de cumplir las coordenadas de sus puntos. También pueden interpretar en el espacio el significado de ecuaciones del tipo

$$y = ax, \quad y = bz, \quad \text{etc.}$$

[1] Ver lo indicado en Programación lineal.

El paso siguiente podría ser analizar algún caso más complejo, como $x + y + z = k$, estudiar los cortes de esta figura con los planos coordenados y otros conocidos, buscar puntos, etc. Complicando paulatinamente los coeficientes de las incógnitas se puede llegar al objetivo deseado: la asociación de la ecuación

$$\mathbf{ax + by + cz = k}$$

a la de un plano en el espacio. A partir de aquí, y con un apoyo firme en la intuición visual tridimensional ejemplificada con los elementos que se tengan a mano (las paredes y aristas del aula, las posiciones de la puerta girando sobre sus goznes, varillas que representen rectas y cartulinas que representen planos), pueden interpretarse las soluciones de sistemas de tres incógnitas y, a lo sumo, tres ecuaciones, como un punto del espacio, una recta, un plano o el vacío, deduciendo así la posición relativa de los planos de partida.

Parece conveniente destacar, de entre los métodos estándar de resolución de sistemas, el de Gauss, y ello por dos motivos: requiere pocos conocimientos matemáticos previos, y es el idóneo para diseñar un programa de ordenador que lo desarrolle. En efecto, para triangulizar un sistema sólo son necesarias las operaciones que el alumno ya conoce desde 1.° de BUP, y la única novedad consiste en automatizarlas para llegar rápidamente a la configuración deseada. Puede introducirse ya la notación matricial como forma abreviada de escribir y manipular el sistema. Cuando se disponga de ordenadores en el centro, los alumnos o el profesor pueden confeccionar programas de aplicación del método de Gauss.

No obstante, no se deben abandonar los métodos tradicionales de solución para casos sencillos, pues resultan más rápidos que el de Gauss, y a veces suponen para el alumno un trabajo interesante de reflexión acerca de cuál es el más adecuado al caso.

Un aspecto a consolidar en este curso, y del que ya se ha hecho mención más arriba, es la interpretación del tipo de soluciones del sistema, especialmente en el caso de indeterminación o de incompatibilidad, pues en cursos anteriores se reduce a la interpretación geométrica de la coincidencia de rectas o al paralelismo.

A efectos prácticos bastará trabajar con sistemas 3 x 3 como máximo, aunque como ejercicio o usando ordenadores pueda aumentarse eventualmente el número de ecuaciones o de incógnitas.

Cálculo matricial *(Tiempo estimado: una semana y media)*

Se pretende que el alumno se familiarice con la notación matricial y con las operaciones más sencillas entre matrices, que conozca alguna aplicación de estas técnicas a temas de interés en otros campos, y se inicie en el cálculo de determinantes como herramienta que necesitará probablemente en sus estudios futuros.

La notación matricial y el vocabulario básico asociado (fila, columna, diagonal, matriz triangular, etc.) pueden aparecer durante el estudio del método de Gauss. Se pueden asociar matrices a distintas situaciones y con diferentes significados:

- Matriz de un polígono

$$\begin{pmatrix} a_1\ a_2\ a_3 \dots\ a_n \\ b_1\ b_2\ b_3 \dots\ b_n \end{pmatrix}$$

  donde las parejas (a_i, b_i) son las coordenadas de los vértices del mismo, y han de unirse en el orden indicado por las columnas.

- Un vector (v_1, v_2) como caso especial de matriz.

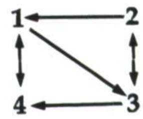
- Tablas de doble entrada como matrices que resumen una información. Por ejemplo, la situación en un momento dado del stock en tres almacenes de un comerciante que trabaja con cuatro tipos de mercancías:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

  c_{ij} es el número de unidades de la mercancía j que está en el almacén i.

- Matriz asociada a un grafo, que a su vez puede representar una red de tráfico (las flechas señalan los sentidos de circulación permitidos), un sociograma (en el cual las flechas representarían determinadas relaciones binarias de amistad, influencia, etc., entre los miembros de un grupo), y otras.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$a_{ij} = 1$ si en el grafo $i \longrightarrow j$ (se puede circular desde i a j)

$a_{ij} = 0$ si en el grafo no hay flecha (no se puede ir de i a j)

Manejar bastantes ejemplos de estos tipos, y otros familiarizan al alumno con la notación de doble subíndice y su significado, y, en general, con la terminología propia de las matrices, así como de su significado en problemas de aplicación matemática.

Puede seguirse en esta línea para introducir y justificar (en el caso del producto, p. ej., tan arbitrario) las operaciones básicas entre matrices: suma, producto por escalar y producto entre matrices, ya que adquieren significado en los contextos citados antes, y permiten extraer más información de los problemas.

Un caso obvio es la suma de vectores, cuyo significado ya conoce el alumno. Otro puede ser la suma de matrices:

(a_{ij}): ganancias obtenidas un día determinado por la venta de la mercancía i en el almacén j

(b_{ij}): idem otro día distinto

cuyo resultado se interpreta fácilmente en términos del problema. En el caso en que la ganancia fuera la misma a lo largo de toda la semana, aparece el producto por escalar:

$t(a_{ij})$

Si la matriz representa un polígono, el producto por escalar da como resultado otro semejante con el anterior.

El producto de matrices puede justificarse, una vez dada la regla para efectuarlo, utilizando el significado que tiene en términos de las transformaciones geométricas elementales (giro, simetría) actuando sobre polígonos. También pueden hacerse aplicaciones interesantes con matrices de precios y de ventas:

(p_{1i}): precios por unidad de los productos i

(v_{ij}): unidades vendidas del producto i en el almacén j

donde la matriz producto (g_{1j}) representa los ingresos totales obtenidos en cada uno de los almacenes.

En el caso de una matriz que representa una relación binaria, el producto por ella misma se interpreta fácilmente en términos del mismo problema. En el ejemplo propuesto más arriba, los elementos b_{ij} de la matriz cuadrado de la inicial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

miden el número de caminos que hay para ir de i a j haciendo «una escala».

Para el desarrollo de todo lo anterior, conviene que el profesor sólo introduzca los elementos mínimos imprescindibles, y sea el propio alumno el que llegue a las conclusiones pertinentes en cada caso.

Con este bagaje elemental de cálculo y de significados posibles de una matriz, los alumnos pueden abordar problemas interesantes dentro de los campos que interesan para sus futuros estudios: Sociología, Economía, Psicología, Demografía.

Como ampliación para aquellos estudiantes especialmente motivados, cabe recordar que puede aplicarse el cálculo matricial a la descripción de procesos aleatorios; es el caso de la matriz de transición asociada a una cadena de Markov.

Determinantes *(Tiempo estimado: una semana [2])*

En este curso se pretende únicamente que los alumnos adquieran la técnica de cálculo de determinantes de segundo y tercer orden, ya que la aplicarán, en estudios posteriores, a situaciones diversas que salen fuera del alcance del nivel que estamos considerando.

No es necesario, por tanto, hablar de la matriz inversa ni de la regla de Cramer, aunque se recomienda que se utilice alguna de ellas en el desarrollo metodológico del tema, para justificar y anticipar la importancia del concepto de determinante.

Por ejemplo, puede pedirse a los alumnos que resuelvan el sistema literal

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

por cualquiera de los métodos que conocen, para llegar a la expresión de sus soluciones en función de determinantes de segundo orden; y proporcionarles las correspondientes a sistemas 3 x 3 para que comprueben su validez en algún caso concreto.

Lo mismo puede hacerse con la matriz inversa; los alumnos entienden la expresión matricial de un sistema de ecuaciones, pues conocen el producto de matrices. La ecuación matricial

$$AX = B$$

recuerda a su análoga en el campo numérico

$$ax = b$$

Reflexionando sobre cómo se soluciona esta última, que necesita de la existencia de a^{-1}, puede introducirse el concepto de matriz inversa y, dando a los estudiantes su expresión, pedir que la obtengan y comprueben en casos concretos.

Si la marcha del curso lo permite, puede ampliarse el cálculo de determinantes al caso de cuarto orden.

Programación lineal *(Tiempo estimado: dos semanas y media)*

Esta parte del programa está muy relacionada con el planteamiento, resolución e interpretación de sistemas de ecuaciones lineales, por lo que puede trabajarse inmediatamente después, y redistribuirse el tiempo asignado en conjunto (cinco semanas y media) a juicio del profesor, con el fin de alcanzar mejor los objetivos comunes a ambas. Por ejemplo, es aquí donde toman todo su sentido los enunciados de problemas ligados a la Economía y otras Ciencias Humanas y Sociales, pues en la vida real, las condiciones que deben cumplir una serie de variables vienen impuestas por restricciones del tipo «que cueste como mucho...», «se necesita un mínimo de calorías de...», «no puede ocupar un

[2] Puede redistribuirse con el de Matrices.

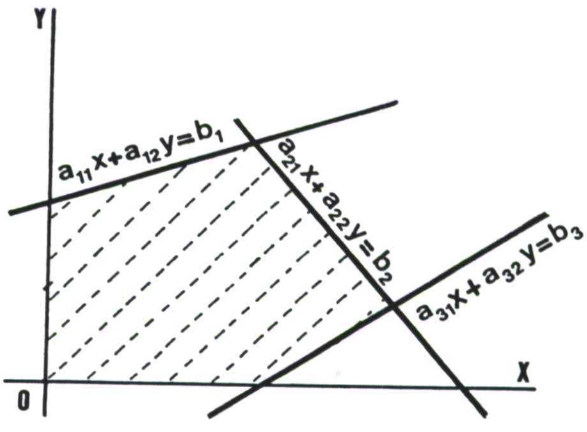
espacio mayor que...», y matemáticamente se traducen en inecuaciones y no en ecuaciones. Dentro de estas condiciones, interesan aquellos valores de las variables que hacen máxima (o mínima), determinada magnitud: «para obtener la mayor ganancia posible», «que la tarea se haga en el menor tiempo». Cuando la expresión matemática de las condiciones (restricciones del problema) y de la función a optimizar (función objetivo) son polinomios de primer grado, estamos ante un problema de Programación lineal.

Se utilizará exclusivamente el método gráfico, con lo que se restringe a dos el número de variables a considerar. Esta restricción no es obstáculo para que el alumno perciba la utilidad de la teoría, a la vez que permite realizar un interesante trabajo de síntesis de conocimientos adquiridos en cursos anteriores:

- Lectura comprensiva de un enunciado, y distinguir lo que son condiciones de la función a optimizar.
- Transformar un problema oral en un sistema de inecuaciones más una función de dos variables. Generalmente, como las variables tienen un significado de ganancia, duración, longitud, etc., las soluciones han de ser positivas:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ a_{11}x + a_{12}y \leq b_1 & (\text{ó } \geq) \\ a_{21}x + a_{22}y \leq b_2 & (\text{ó } \geq) \\ a_{31}x + a_{32}y \leq b_3 & (\text{ó } \geq) \\ \ldots \\ F = Ax + By \end{cases}$$

- Elegir, de entre las parejas (x, y) que son solución del sistema de inecuaciones, aquellas que dan a la expresión F el mayor (o menor) valor posible.
- Para ello, se acude a la representación gráfica en el plano del sistema de inecuaciones, que generalmente ya conocen los alumnos para casos sencillos desde 1.° de BUP, determinándose así el conjunto de soluciones o «región factible». Es útil hacer el gráfico en papel cuadriculado o milimetrado, y elegir adecuadamente las escalas de ambos ejes:

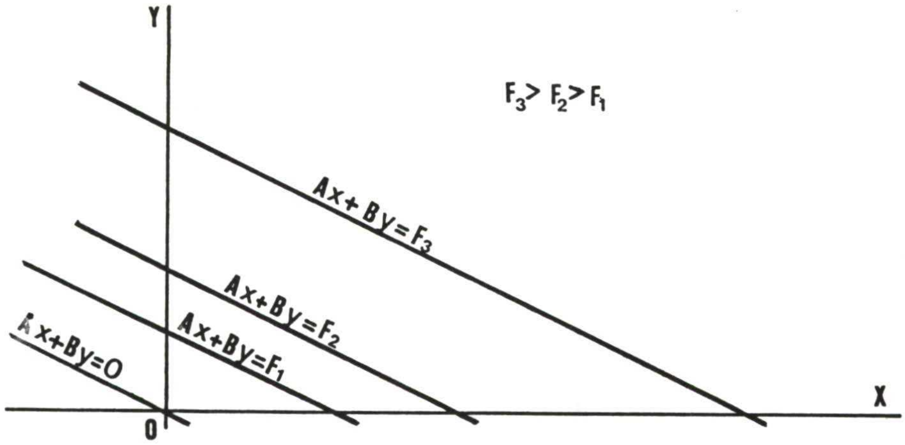


- A partir de aquí, conviene desarrollar una fase de tanteo, en la que los alumnos trabajen varios problemas concretos, y en cada uno de ellos sustituyan valores en la función objetivo, para conjeturar ellos mismos dónde van a encontrarse, en general, las soluciones del problema. Se les planteará situaciones en las que la solución sea única, haya más de una, o no exista.
- Cuando la marcha del curso lo permita, puede completarse la justificación de por qué las soluciones se encuentran en vértices o lados de la región factible, acudiendo al significado de la función objetivo

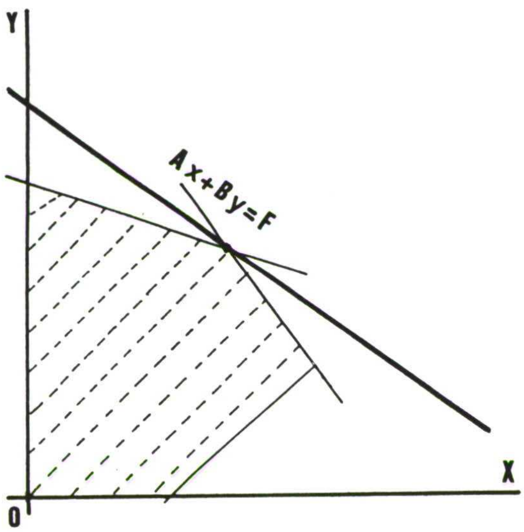
$$F = Ax + By$$

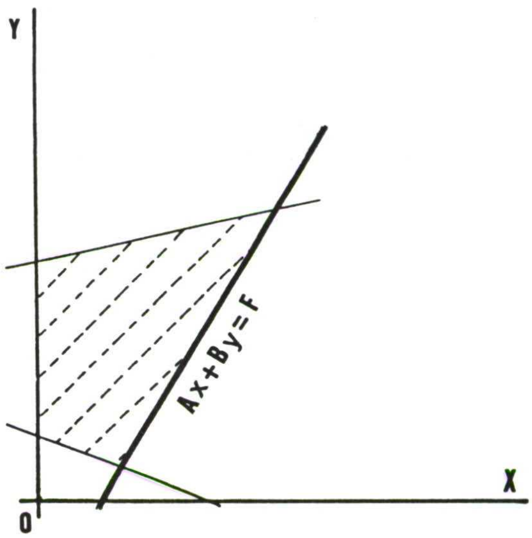
como familia de rectas paralelas. Para ello será necesario que el alumno revise el concepto intuitivo de pendiente de una recta y el significado gráfico de los parámetros que intervienen en su ecuación, vistos en cursos anteriores.

- En esta familia de rectas, un mayor valor de F se corresponde con un mayor alejamiento del origen de coordenadas.



- Por tanto, de entre las que tienen puntos comunes con la región factible, aquella que tiene F mayor le toca en un vértice o en todo un lado, según los casos:



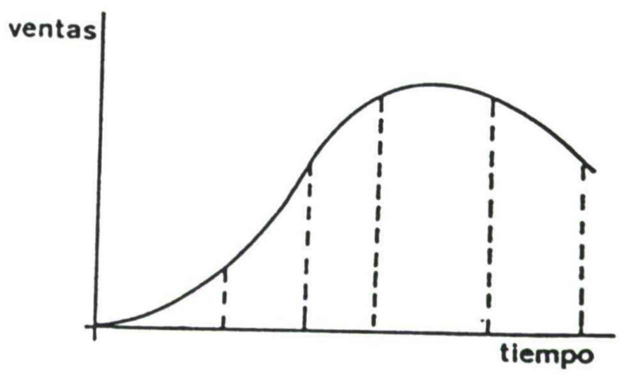


Análisis descriptivo de funciones y gráficas

Funciones gráficas y derivadas *(Tiempo estimado: seis semanas)*

De los tres temas en los que se divide este curso, es quizá el de Funciones y Gráficas el único que, al menos sobre el papel, ha sido estudiado con amplitud en cursos anteriores. Sin embargo el hecho de estar dirigido a un grupo de alumnos heterogéneo (pues unos han estudiado matemáticas en 3.° y otros no) y los objetivos propios de este curso que prestan mayor atención a la comprensión de conceptos básicos, a su relación con la realidad y a la adquisición de recursos matemáticos para afrontar los problemas de las Ciencias Sociales y Humanas, parecen aconsejar un enfoque distinto. Debe predominar la reflexión acerca del concepto de función, el estudio de gráficas de funciones tomadas de la realidad, las actividades que traten de proporcionar variados contextos al concepto de derivada y una orientación práctica a los problemas de cálculo con derivadas e integrales.

El papel de las funciones como representaciones y descripciones de fenómenos físicos, sociales, humanos, biológicos, etc..., se pondrá de manifiesto en la medida en que se utilicen ejemplos variados de estos fenómenos, se estudie su gráfica y se interprete el fenómeno a través de ella. Así por ejemplo esta curva

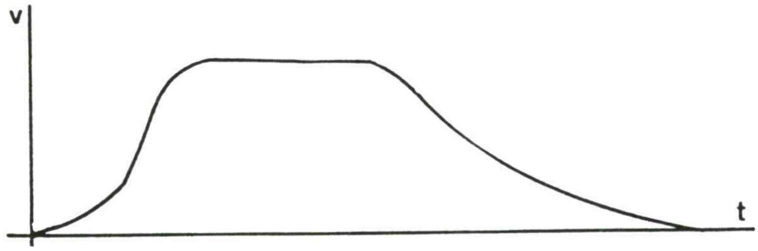


representa el ciclo vital de un producto. Se puede interpretar este ciclo analizando las distintas partes de la curva: introducción del producto en el mercado, etapa de crecimiento rápido, crecimiento más lento, etapa de saturación y por último caída en la venta.

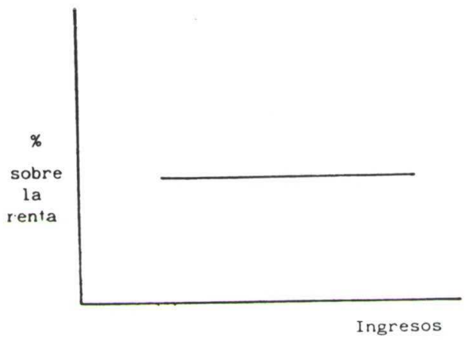
Expresiones sencillas que describen a veces sólo de forma cualitativa situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana pueden servir como refuerzo del concepto de función y de su carácter de representación gráfica de sucesos. De estas situaciones pueden abstraerse las variables en juego y encontrar una relación mediante una función que las represente. Ejemplo:

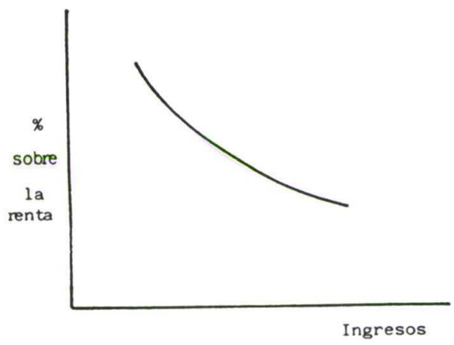
Un corredor de «jogging» empieza su carrera muy suavemente, aumenta gradualmente su velocidad y pronto consigue su ritmo habitual. Cuando va a finalizar su ejercicio disminuye muy lentamente su velocidad hasta pararse.

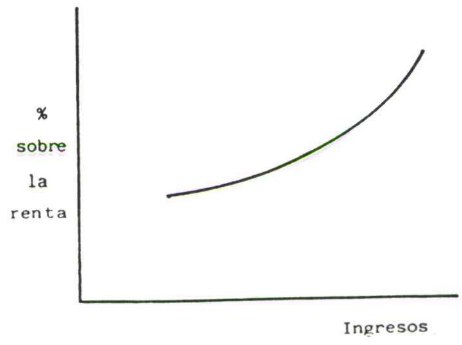
De esta situación se obtienen las variables tiempo-velocidad y se pueden representar con una gráfica del tipo:



Para encontrar el mayor número de relaciones entre las funciones y el fenómeno que representan, se pueden realizar actividades que partan de la función o del fenómeno considerado. Por ejemplo, a partir de la gráfica de una función se puede proponer inventar situaciones que se expliquen mediante dicha gráfica de una manera cualitativa o cuantitativa. También se pueden interpretar fenómenos y situaciones a partir de la gráfica de la función mediante preguntas que lo sugieran. O bien, dadas varias situaciones y varias gráficas, asociar cada situación con su gráfica correspondiente. Por ejemplo, las gráficas representan la relación entre los ingresos y el tipo de interés a pagar en el impuesto sobre la renta. Se pueden asociar estas tres gráficas con los tres tipos de impuestos siguientes: proporcional (el mismo porcentaje para cada renta), regresivo (disminuye el porcentaje con los ingresos) y progresivo (aumenta el porcentaje con los ingresos).







Para el estudio de estas funciones pueden introducirse de modo intuitivo sobre la gráfica, o como un medio más para su representación, los conceptos de crecimiento, extremos, continuidad, asíntotas e intervalos de definición que ayudarán a la interpretación de la gráfica. Las representaciones gráficas de funciones por trozos facilitan el estudio de la continuidad sobre la propia figura.

Para relacionar estos conceptos con su expresión gráfica, se pueden realizar ejercicios en los que se pida encontrar una curva que se ajuste a determinadas condiciones. Por ejemplo, encontrar una curva que:

- Sea positiva y continua en todo R.
- Presente un máximo relativo en un punto del eje de ordenadas.
- No tenga otros extremos relativos.
- El eje de abscisas sea una asíntota de la curva a la izquierda y a la derecha.
- Sea simétrica respecto del eje de ordenadas.
- No tenga puntos de inflexión.

Y recíprocamente, a partir de una gráfica dada, describir sus características, es decir: conjunto de definición, intervalos de crecimiento, extremos, asíntotas, etc...

El estudio que se haga de funciones como descripción de fenómenos puede dar lugar de modo natural al de algunos tipos sencillos de funciones matemáticas: lineales, polinómicas, exponenciales, logarítmicas, logísticas y determinadas funciones periódicas. Ejemplos:

1. La función «ingresos de una empresa» que relaciona los ingresos totales (I) y la cantidad de producto fabricado (q)

   $I = p \cdot q$ (p es el precio por unidad)

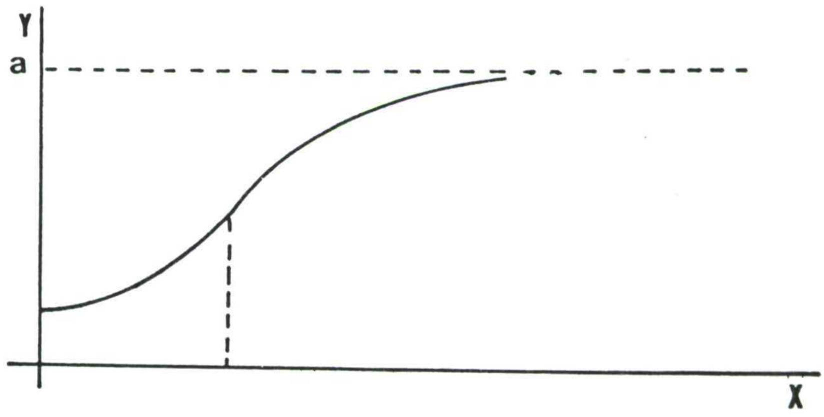
   es una función lineal.

2. El centro de gravedad de un delfín al saltar desde el agua y volver a zambullirse describe una curva en forma de parábola.

3. La función de la demanda en marketing que relaciona las ventas de una empresa (Y) en función del coste del esfuerzo comercial (X), puede tener distintos comportamientos:

• Crecimiento potencial	$Y = aX^b$	$a > 0$	$0 < b < 1$
• Crecimiento exponencial	$Y = a(1-e^{-bX})$	$a > 0$	$0 < b < 1$
• Crecimiento logarítmico	$Y = a\log(X+1)$		$a > 0$
• Crecimiento logístico	$Y = \dfrac{a}{1 + Ke^{-bX}}$		$a > 0, K > 1, b > 0$

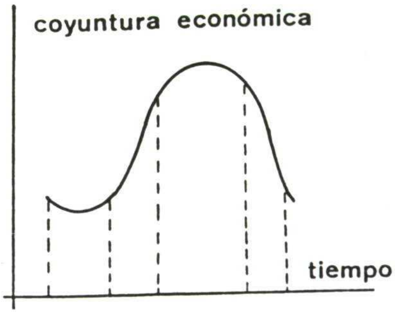
   El crecimiento logístico también se puede encontrar en fenómenos de crecimiento de poblaciones en los que determinados factores de limitación de espacio hacen que el número total de individuos existente en cada momento influya en el crecimiento de toda la población, desacelerando este crecimiento a medida que se alcanzan niveles de saturación.



4. En países capitalistas la evolución económica se desarrolla de forma periódica mediante lo que se ha denominado el ciclo económico:

Este ciclo económico tiene cuatro partes:

- Depresión.
- Recuperación.
- Auge.
- Recesión.



Este comportamiento se corresponde con el de una función matemática de tipo periódico en la que destacamos dentro de cada ciclo un mínimo relativo, un intervalo en el que la función es creciente, un máximo relativo y un intervalo de decrecimiento de la función.

Sería conveniente que los alumnos establecieran cierta asociación entre cada tipo de función y la forma de su gráfica realizando además distintas gráficas, para un mismo tipo de funciones, variando los parámetros que en ella intervienen.

La revisión del concepto de derivada de una función en un punto a partir de la tasa de variación media, estudiada para distintos fenómenos proporciona al alumno concreciones de situaciones variadas de dicho concepto. No debería constituir un obstáculo el no haber definido formalmente el concepto de límite de una función en un punto, pues es posible calcular límites, en particular el de la función tasa de variación media, dando valores con la ayuda de la calculadora.

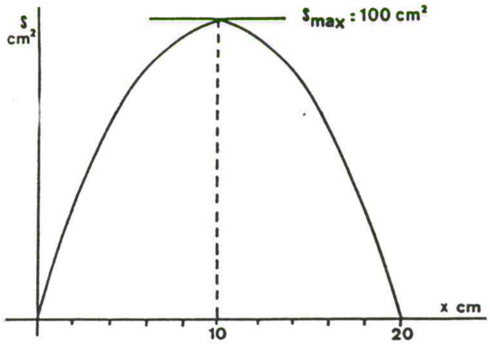
La demostración de las reglas de derivación de funciones exige un aparato matemático no acorde con los objetivos de este curso, por lo que parece suficiente que los alumnos conozcan directamente las técnicas de derivación y las apliquen a casos sencillos.

La interpretación geométrica de la derivada permite conocer cuándo una función derivable presenta un extremo relativo o es creciente o decreciente en un punto.

Como aplicación de la derivada se pueden proponer algunos problemas de máximos y mínimos cuya resolución inicial puede enfocarse geométricamente, es decir, a partir de la gráfica de la función a maximizar o minimizar, restringida a su dominio de definición, interpretando en el contexto del problema los posibles resultados. Ejemplo:

Tomamos una cuerda y anudamos sus extremos entre sí. La longitud de la cuerda es de 40 cm. Introduciendo los dedos pulgar e índice de ambas manos formamos rectángulos con dicha cuerda. Deseamos saber qué dimensiones tendrá el rectángulo de área máxima.

La función a maximizar tiene por ecuación $S = x(20-x)$, siendo S el área de un rectángulo y x la medida de uno de los lados. Esta función viene representada gráficamente por la siguiente parábola:



Observamos que el conjunto de definición de la función es el intervalo cerrado [0, 20] y que su valor máximo corresponde al punto de la gráfica en el que la recta tangente es horizontal.

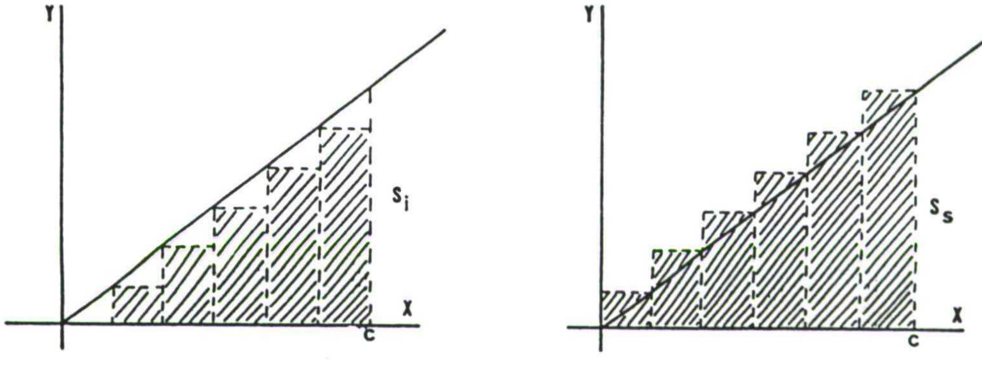
Interpolación *(Tiempo estimado: una semana y media)*

Muchas de las relaciones funcionales que los alumnos han de manejar corresponden a funciones experimentales de las que conocemos una tabla de valores o son funciones tabuladas (funciones trigonométricas, funciones exponenciales, áreas bajo la curva normal en estadística, etc...), por lo que parece conveniente que el alumno sepa encontrar valores intermedios entre dos dados, utilizando una interpolación lineal o bien entre tres dados, utilizando una interpolación cuadrática. También pueden realizarse ejercicios de extrapolación. No es aconsejable, sin embargo, dar fórmulas de interpolación que permitan obtener con carácter general un polinomio de cualquier grado.

Integrales *(Tiempo estimado: una semana y media)*

Una introducción histórica al problema del área permitirá introducir el concepto de integral definida aplicada a una función continua. Podemos iniciar este cálculo de área mediante métodos aproximados y utilizando la calculadora.

Comenzaríamos con una función lineal. Podríamos calcular el área limitada por la recta, el eje de abscisas y la ordenada en c (c > 0) dividiendo el segmento de longitud c en partes iguales y calculando la suma de las áreas de los rectángulos que quedan por debajo S_i y por encima S_s de la recta.



Una aproximación al área pedida (en este caso el error que se comete vale cero) sería la media aritmética de las áreas S_i y S_s.

Podríamos continuar con una función polinómica de segundo grado utilizando el mismo método y realizando el cálculo para varias particiones del intervalo en el que calculamos el área. El error que cometemos siempre es menor que la diferencia entre el área media y el área S_i o el área S_s y el área media.

Excede del propósito de este curso la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo Integral y de la regla de Barrow. Se puede, sin embargo, llegar al cálculo de áreas relativas a **funciones elementales,** utilizando los conceptos de primitiva de una función dada y de integral indefinida; las propiedades de linealidad de la integral y el enunciado de la regla de Barrow.

Elementos de probabilidad y estadística *(Tiempo estimado: nueve semanas)*

Con este apartado se pretende familiarizar al alumno de Ciencias Sociales y Humanas con los métodos de la estadística y las leyes del azar.

Los objetivos y la metodología deben amoldarse a las características de estos alumnos: madurez de preuniversitarios, escasez de recursos matemáticos y carencia de interés por formalizaciones abstractas y demostraciones.

Puede pretenderse que sean buenos usuarios de la estadística, conozcan sus posibilidades y limitaciones y sepan recurrir a los instrumentos que posibilitan su buen uso, tanto matemáticos (fórmulas, métodos, calculadoras, etc.) como fuentes de datos (anuarios, enciclopedias...). En definitiva, que sepan valerse autónoma e inteligentemente en situaciones en las que se requiera de la estadística.

En todo lo que sigue se van a sugerir planteamientos y métodos, adecuados al programa oficial, que conllevan una intensa actividad por parte del alumno, de modo que ponga en juego y desarrolle al máximo su intuición, y se aproxime a una estadística sencilla y palpable, pero no carente de profundidad: pocas fórmulas, ninguna desmostración y, sin embargo, conocimiento a fondo de aquello con lo que trate.

Estadística descriptiva

El alumno debe acabar conociendo los **conceptos** y la **terminología** estadística básica: individuo, población, muestra, variable —cualitativa, cuantitativa, discreta, continua—, frecuencia —absoluta, relativa—... Esto no quiere decir que deba empezarse por ahí: son conceptos y términos que van asimilándose con el uso.

Es fundamental que maneje y llegue a interpretar correctamente **tablas estadísticas** de todo tipo (no sólo las típicas tablas de frecuencias), intentando en esta tarea ir más allá de lo que se ve a primera vista.

Para un buen manejo de tablas debe conocerse a la perfección el significado y cálculo de proporciones, porcentajes y números índices. No debe darse por obvio que los alumnos de este nivel dominen estas destrezas, por lo que no estará de más que el profesor preste suficiente atención a ellas. El uso eficaz de la calculadora debe ayudar a que esta tarea se desarrolle de forma ágil y rápida.

La destreza en el manejo e interpretación de tablas estadísticas debe traer como consecuencia que el alumno aprenda, también, dónde y cómo puede buscar aquéllas que convienen para un cierto propósito (anuarios, enciclopedias...) y relacionar unas con otras.

Los **gráficos estadísticos** suelen ser muy claros y expresivos. Para su interpretación no es necesario ni conveniente dar prolijas explicaciones de las singularidades de cada tipo de gráfico. Basta mostrárselos a los alumnos y ayudarles en su estudio mediante buenas preguntas y, acaso, algunas aclaraciones breves y ocasionales.

El alumno, bien orientado, llegará no sólo a saber responder correctamente a las preguntas que se le hagan, sino también a hacérselas él mismo.

Las gráficas estadísticas que aparecen en los medios de comunicación son, con frecuencia, falaces, inducen a engaño o a falsas interpretaciones. Exagerar las escalas en los ejes; mantener proporcionalidad lineal en pictogramas que representan superficies o volúmenes, con lo que las proporciones, **visualmente,** se elevan al cuadrado o al cubo; representar como iguales intervalos de tiempo distintos, con lo que el crecimiento del fenómeno descrito se exagera en uno de los intervalos; en los diagramas de sectores —ciclogramas— no respetar las proporciones de los distintos sectores con lo que, aunque se acompañen de las cifras correctas, la impresión visual es falseada, etc. Conviene alertar a los alumnos en este sentido y enseñarles a descubrir las falacias.

Con demasiada frecuencia el estudio de los **parámetros estadísticos** se enfoca viendo las medidas de centralización (media, mediana, moda...) por una parte, y medidas de dispersión (desviación media, varianza, desviación típica, cuartiles, centiles...), por otra. Este esquema tiene el inconveniente de no asociar cada parámetro con el que naturalmente se le debe emparejar para interpretar con sentido la distribución de que se trate.

La media debe estudiarse e interpretarse junto con la desviación típica. Ambas forman una pareja con la que se puede saber mucho de la distribución. El alumno debe aprender, practicándolo, que, salvo en distribuciones estrafalarias, en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ cabe esperar que haya un cierto porcentaje de individuos que suele ser del 55% al 75% de la población; que en el intervalo $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ suele estar entre el 80% y 100% de la población; y que es poco frecuente que haya individuos fuera del intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

Es aconsejable que los alumnos conozcan y sepan utilizar las fórmulas para la obtención de la media y la desviación típica. Y además, sepan valerse de una calculadora con tratamiento estadístico para obtenerlas con rapidez. Estas destrezas deben ir acompañadas con el desarrollo de una intuición suficiente como para, antes de obtenerlas, tener una expectativa de lo que cabe esperar, a la vista de los datos que se poseen.

Otra forma de interpretar una distribución estadística es mediante la mediana y los centiles. Para su obtención e interpretación es recomendable el método gráfico, a partir de un polígono de frecuencias acumuladas.

Es necesario que el alumno conozca el alcance y las limitaciones, las ventajas y los inconvenientes de los parámetros que utiliza. Pero este estudio debe ser posterior a una abundante utilización de los mismos, pues el conocimiento profundo de cada uno de ellos hará que resulte significativa su comparación. En este sentido sugerimos las siguientes reflexiones:

— La mediana y los centiles resultan muy expresivos y fáciles de interpretar para los legos en la materia. Estar en el centil 80 significa que se tiene por debajo al 79% de la población y por encima al 20% restante. Y esto le resulta fácil de entender a un padre al que se le dice que su hijo esté en el centil 80. Sin embargo, estos parámetros tienen el gran inconveniente de que no son operativos, que no se pueden operar unos con otros. (Un alumno que ocupe el centil 40 en una evaluación y el centil 80 en la siguiente puede andar muy lejos del centil 60 en el cómputo global de ambas.)

— La media que, según decíamos, resulta muy expresiva junto con la desviación típica, puede ser engañosa en distribuciones con datos muy heterogéneos. (Es típico el ejemplo del sueldo medio de los trabajadores de una empresa, cuya media puede ser considerablemente más alta que el sueldo de la mayoría de los empleados si los jefes cobran sueldos altísimos.)

— La moda tiene sentido, sobre todo, en distribuciones de variables cualitativas, pues en ellas no existe ni la media ni la mediana.

Hay otras medidas de dispersión cuyo valor, a este nivel, puede ser exclusivamente metodológico:

— La desviación media, de muy fácil interpretación, puede ser un paso previo si se desea que se entienda la fórmula de la desviación típica. También la varianza aparece como paso previo. (La varianza, en estadística superior, tiene una importancia enorme en sí misma, pero no aquí.) A este nivel, sin embargo, creemos que como instrumento sólo debe utilizarse la desviación típica.

— Algo parecido cabría decir de los cuartiles respecto a los centiles: quizá, en una primera aproximación, resulta más fácil partir a la totalidad de individuos en cuatro partes que en cien. Sin embargo, el instrumento para expresar situaciones es el centil.

Distribuciones bidimensionales

El estudio de las distribuciones bidimensionales, la correlación entre las dos variables y la recta de regresión aporta un nuevo instrumento, muy importante, para el estudio de algunas tablas estadísticas, pues permite comparar pares de variables y detectar posibles influencias de una sobre otra. Y es especialmente interesante en las Ciencias Sociales y Humanas, donde rara vez se encuentran dependencias funcionales y frecuentísimamente dependencias estadísticas. (Por ejemplo, cociente intelectual —rendimiento académico; en los países, renta per cápita—, expectativa de vida al nacer...)

Las distribuciones bidimensionales pueden plantearse de una forma muy intuitiva mediante la representación de la nube de puntos: trazado, a ojo, de una recta que se ajuste a ella; y valoración de la mayor o menor relación entre las variables por el grado de acoplamiento de los puntos a la recta. Esta relación (correlación), que al principio puede medirse en términos cualitativos (muy grande, grande, mediana, baja, prácticamente nula), debe ir acompañada por el signo (si ambas variables tienden a crecer o a decrecer conjuntamente, correlación positiva; si al crecer una tiende a decrecer la otra, correlación negativa).

Los alumnos deben conocer la fórmula de la correlación, saber aplicarla e interpretar el resultado obtenido.

Un mismo valor del coeficiente de correlación puede ser alto o bajo según los casos. Por ejemplo, una correlación de 0,6 entre las «estaturas» y los «pesos» de los soldados de un regimiento es baja; una correlación de 0,6 entre la «nota en matemáticas» y «el número total de horas de estudio a la semana» de los alumnos de una clase, es notablemente alta. Las correlaciones son fáciles de interpretar cuando se comparan con otras de distribuciones similares. Por ejemplo, la correlación entre las «notas de matemáticas» y las «de física» de los alumnos de un curso, con la correlación entre las «notas de matemáticas» y la «de filosofía» de los mismos alumnos. O bien la correlación entre «estatura» y «peso» de los alumnos de un curso con la de los alumnos de otro curso. Se debe, pues, evitar dar normas rígidas del tipo: de 0 a 0,4 correlación baja; de 0,4 a 0,6, media; etc.

El estudio de correlaciones puede servir para descubrir, o ratificar, relaciones entre variables. Sin embargo, hay que tener mucho cuidado en deducir relaciones de causalidad entre variables fuertemente correladas (con correlación alta). Es típico el ejemplo del estadístico que, para ridiculizar esta tendencia, obtuvo una correlación altísima entre el «número de cigüeñas» y el «número de nacimientos» en los municipios de una cierta comarca. En estos casos suele haber una tercera variable cuya correlación con cada una de las variables estudiadas es muy alta (en el caso de las cigüeñas, a más habitantes más nacimientos; pero también más grande es el municipio, más hogares, más tejados donde anidar...).

La recta de regresión, que en un principio puede ser trazada a ojo intentando que se ajuste a la nube de puntos, si se quiere y hay tiempo para ello podría ser tratada, posteriormente, con más precisión:

— Descripción gráfica de en qué consiste el método de los mínimos cuadrados (sin fórmulas).

— Decir que, aplicando el método de los mínimos cuadrados, se llega a la conclusión de que la recta buscada pasa por el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ y tiene pendiente $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}}$. Por tanto, su ecuación es:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} (x - \overline{x})$$

— Dejar claro que la recta de regresión se puede obtener siempre, cualquiera que sea la correlación entre las dos variables. Pero que sólo es útil cuando $|r|$ es grande. En este caso se pueden hacer previsiones del tipo «cuando x vale... es probable que el valor de y sea próximo a...». Y que estas previsiones serán tanto más fiables cuanto mayor sea el valor de $|r|$ y cuanto más próximo sea x a $\overline{x}$.

— La pendiente de la recta de regresión tiene el mismo signo que r (esto es obvio tanto si miramos sus expresiones como si pensamos en lo que significa lo uno y lo otro). Sin embargo, puede ocurrir que $|r|$ sea muy grande (muy próximo a 1) y la pendiente de la recta sea pequeña, o viceversa.

No parece conveniente en este nivel hablar de las dos rectas de regresión, de $\overline{y}$ sobre $\overline{x}$ y de $\overline{x}$ sobre $\overline{y}$. Parece suficiente trabajar sólo con una de ellas, la primera, y llamarla, simplemente, recta de regresión. Tampoco deben tratarse otras regresiones —no lineales— salvo, acaso, como mención puramente anecdótica.

Probabilidad

Un tratamiento intuitivo del tema, preferiblemente plagado de experiencias prácticas y juegos realizados por el propio alumno, le proporcionará conceptos claros e intuiciones válidas, tan necesarios para un buen manejo del azar y sus leyes.

Las expresiones «a priori» y «a posteriori», que se utilizan en el programa a propósito de la asignación de probabilidades, no deben relacionarse con el teorema de Bayes, que queda fuera de las pretensiones del programa. Se refieren, respectivamente, al cálculo de probabilidades sin poseer datos experimentales («a priori»), teniendo en cuenta la supuesta regularidad del fenómeno aleatorio y aplicando la regla de Laplace (casos favorables/casos posibles); y la asignación de probabilidad después de haber experimentado abundantemente («a posteriori») dando como buena aproximación el valor obtenido para la frecuencia relativa.

Para el cálculo de probabilidades en pruebas compuestas, tanto independientes como dependientes, es muy útil el diagrama en árbol. Un buen conocimiento de la combinatoria puede ayudar, pero no es imprescindible.

Distribuciones de probabilidad de variables discretas

Las distribuciones de probabilidad de variables discretas surgen como una idealización de las distribuciones de frecuencias relativas, al pasar de las «frecuencias obtenidas» a las «frecuencias esperadas» (la probabilidad es, en cierto modo, la frecuencia relativa esperada). Si, previamente, el alumno ha obtenido experimentalmente distribuciones de frecuencias a partir de instrumentos aleatorios (dados, monedas, chinchetas, ruletas, etc.), ahora le resultará sencillo relacionar con ellas y elaborar las distribuciones de probabilidad correspondientes.

La representación gráfica adecuada a estas distribuciones es el diagrama de barras.

Los parámetros surgen, asimismo, como idealización de los correspondientes parámetros de las distribuciones estadísticas (de frecuencias):

	DISTRIBUCION DE FRECUENCIA	DIST. DE PROBABILIDAD
MEDIA	$\mu = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \Sigma \frac{f_i}{N} . x_i$	$\mu = \Sigma p_i x_i$
DESVIACION TIPICA	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\Sigma \frac{f_i}{N} (x_i - \mu)^2}$	$\sigma = \sqrt{\Sigma p_i (x_i - \mu)^2}$
DESVIACION TIPICA fórmula simplificada	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \mu^2} = \sqrt{\Sigma \frac{f_i}{N} x_i^2 - \mu^2}$	$\sigma = \sqrt{\Sigma p_i x_i^2 - \mu^2}$

La **distribución binomial** B(n, p) puede plantearse, en principio, como un caso particular de experiencia compuesta por n veces la misma prueba simple, para la cual la probabilidad de «éxito» es p y la de «no éxito» es $1 - p = q$. Para su estudio y comprensión es muy útil hacer referencia al aparato de Galton, por medio del cual se llega, de forma muy intuitiva, a la obtención de los coeficientes de $p^k q^{n-k}$ correspondientes a la probabilidad de que x tome el valor k (es decir, de obtener exactamente k éxitos en n intentos). Estos valores se pueden obtener a partir del triángulo de Tartaglia, cuyo mecanismo de formación tanto se parece a los posibles recorridos de las bolas en el aparato de Galton. Este procedimiento permite obtener dichos coeficientes sin recurrir a métodos combinatorios.

La fórmula para calcular los parámetros, $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$, deben ser conocidas y aplicadas por los alumnos sin necesidad de haber demostrado su validez. Es importante que sepan interpretar los resultados.

Distribuciones de probabilidad de variables continuas

También las distribuciones de probabilidad de variables continuas son una idealización de las correspondientes distribuciones de frecuencia. Sin embargo, el hecho de que, ahora, los intervalos en que inicialmente se presentan clasificados los individuos se puedan partir en subintervalos cada vez más pequeños, en cada uno de los cuales haya pocos o ningún individuo, hace que la asignación de la frecuencia a la altura de la franja del histograma sea claramente inconveniente. El alumno debe ver claro que en estas distribuciones de probabilidad lo que importa es el área bajo la curva y no la ordenada de ésta.

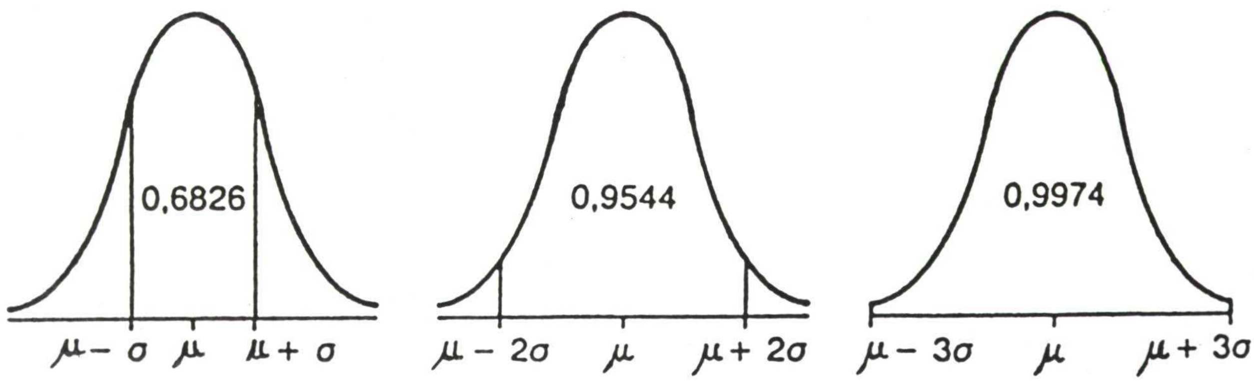
Las probabilidades se darán, pues, para intervalos de la variable.

El alumno sabrá que estas distribuciones también tienen parámetros, μ y σ, y su interpretación la asociará a la forma de la curva de probabilidad, basándose en las intuiciones que adquirió estudiando otras distribuciones.

Es recomendable que, dada una curva de probabilidad asociada a un cierto fenómeno concreto, el alumno calcule aproximadamente (o valore a ojo) probabilidades correspondientes a intervalos y los valores de μ y σ. Se simplifica notablemente la tarea y se aclaran las ideas si la curva se dibuja en papel cuadriculado y bajo ella aparecen 100 cuadritos. Las probabilidades pueden darse, en principio, en tantos por ciento.

La **distribución normal** es de enorme importancia en estadística. El alumno debe conocerla bien y manejarla con soltura.

Para ello, conviene que sepa que la normal es una distribución de probabilidad continua, simétrica, con el máximo en el punto de abscisa μ. Si, además, conoce los datos que se dan en las siguientes gráficas podrá profundizar en ella como se indica a continuación:



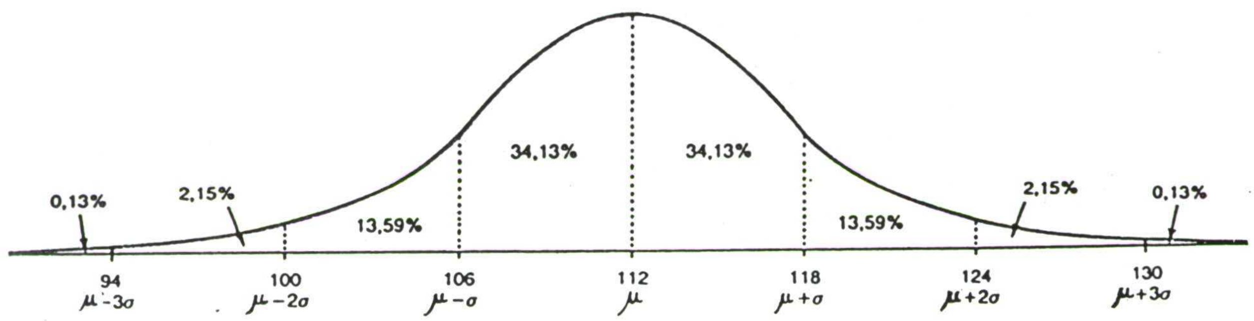
Esto significa que, por ejemplo, si el cociente intelectual (C. I.) de las personas de un cierto colectivo se distribuye según N(112,6), entonces:

— el 68,26% de ellos tiene un C. I. entre 106 y 118.

— el 95,44% de ellos tiene un C. I. entre 100 y 124.

— el 99,74% de ellos tiene un C. I. entre 94 y 130.

Afinando más, podemos decir que se distribuyen del siguiente modo:



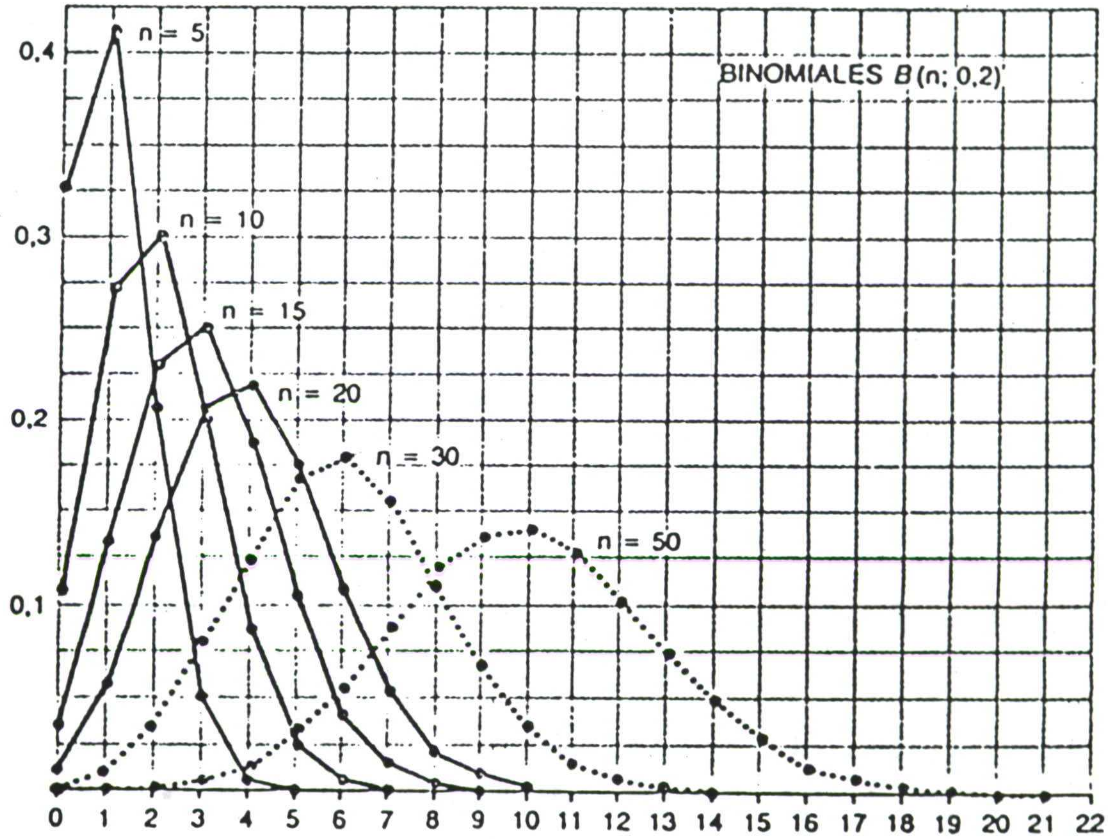
El proceso anterior sirve para familiarizar al alumno con la curva normal antes de comenzar a utilizar las tablas. Puede completarse con una actividad, en la que participen todos los alumnos, del siguiente tipo:

«Vamos a estudiar las estaturas de todos los soldados de un regimiento. Sabemos que se distribuyen según una curva normal. ¿Cuáles pueden ser su media y su desviación típica?» Supongamos que, tras una discusión, se llega al acuerdo de que $\mu = 165$ cm., $\sigma = 5$ cm. Esto significaría que sólo el 0,13% mediría más de $165 + 3 \times 5 = 180$ cm. Es decir, poco más del uno por mil de los soldados mediría más de 1,80, lo cual no es aceptable: hay que buscar otros parámetros... Cuando se haya llegado a otros parámetros que parezcan razonables, por ejemplo $\mu = 170$, $\sigma = 6$, podrá responder a preguntas del tipo: «¿qué porcentaje de soldados mide menos de 164 cm.?, ¿...entre 176 y 182?, ¿...más de 182?», cuidando que las referencias que se utilicen sean del tipo $\mu \pm k\,\sigma$, para k = 0, 1, 2, 3.

Obsérvese que de esta forma, además de familiarizarse profundamente con las distribuciones normales, el alumno estará **tipificando** sin ni siquiera darse cuenta de que lo hace. (Es decir, estará expresando la variable x en «número de desviaciones típicas que se separa de la media»: $\frac{x-\mu}{\sigma}$. Así, cuando lo deba hacer para valores cualesquiera de la variable lo interpretará como muy razonable.

Estas actividades, destinadas a interpretar la curva normal, se completarán con un manejo razonado y ágil de las tablas.

La posibilidad del paso de una binomial B(n, p) a una normal N(np, $\sqrt{npq}$) se puede hacer evidente con unas gráficas del siguiente tipo:



Para el cálculo de probabilidades de una variable x B (n,p) mediante el paso a otra x´ N(np, $\sqrt{npq}$) hay que tener en cuenta que x es discreta mientras que x´es continua. Por tanto, a valores puntuales de la binomial, x = k, corresponden en la normal intervalos del tipo x´ ∈ [k – 0,5, k + 0,5]. Es decir:

$P[x = k] = P[k - 0{,}5 < x < k + 0{,}5]$

$P[x > k] = P[x \in \{k+1, k+2, \ldots\}] = P[x' \geq k + 0{,}5]$

$P[x \geq k] = P[x \in \{k, k+1, \ldots\}] = P[x' \geq k - 0{,}5]$.

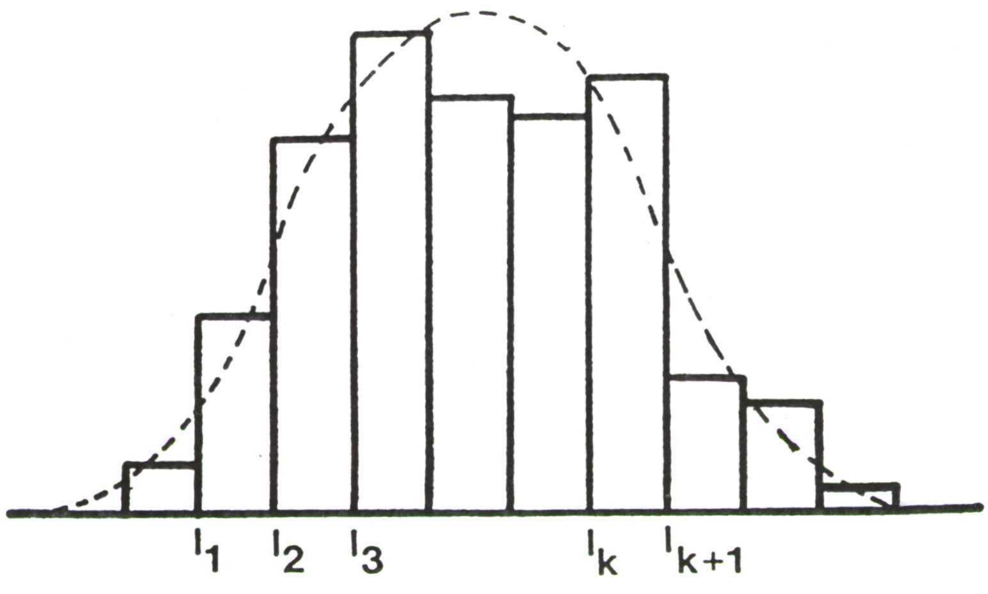
Etc.

Test de normalidad

Hay ocasiones en las que empíricamente se ha obtenido una serie de datos, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (muestra), cuya distribución se parece a la curva normal. Y nos preguntamos si la población de partida seguirá, realmente, una distribución normal, es decir, si en el caso de que en vez de haber obtenido sólo n valores hubiéramos tenido «todos» los de la población, su distribución sería **exactamente** normal.

Esta pregunta, que en muchos casos es de gran importancia, no tiene una respuesta absoluta —sí o no—, pero podremos aproximarnos a ella en términos de probabilidad («es **así** de probable que sea cierto»). Esto es lo que se consigue con los test de normalidad. Pasamos a exponer, escuetamente, uno de ellos llamado PRUEBA DE KOLMOGOROV.

La pregunta que nos hacemos es (repitámosla): «¿es razonable suponer que los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ han sido extraídos de una población normal?» Para responderla comparemos la distribución de estos valores con una curva normal cuyos parámetros, μ y σ, coincidan con los de la muestra.



La comparación se efectúa contrastando

— la proporción (%) de valores de la muestra anterior a l_k

— con el porcentaje de área bajo la curva normal que hay desde $-\infty$ a l_k

para todos los l_k, límites superiores de los intervalos en los que hemos clasificado los elementos de la muestra.

Para cada valor de k hay una diferencia:

$D_k = |$ porcentajes hasta l_k en la muestra $-$ porcentaje hasta l_k en la curva normal $|$

La mayor de las diferencias obtenidas, D_{max}, se compara con el número que se obtiene al efectuar el cociente $\frac{136}{\sqrt{n}}$, donde n es el tamaño de la muestra. Este número es el de la máxima diferencia admisible. Si

$$D_{max} < \frac{136}{\sqrt{n}}$$

entonces no rechazamos la hipótesis de que la muestra está extraída de una población normal.

NOTAS:

— La fórmula de la máxima diferencia admisible, $\frac{136}{\sqrt{n}}$, es válida sólo para muestras de 20 o más individuos.

— El rechazo de la hipótesis se haría con un margen de error del 5%, es decir, de cada 100 veces que rechazamos la hipótesis en estas circunstancias, nos exponemos a equivocarnos en 5 de ellas.

— La expresión $\frac{136}{\sqrt{n}}$ debe interpretarse como la máxima diferencia achacable al azar, si extraemos una muestra de n elementos de una población normal.

Bibliografía

ALCAIDE INCHAUSU, A.
Estadística aplicada a las Ciencias Sociales.
Editorial Pirámide - 1978.
Estadística descriptiva.

AMÓN HORTELANO, J.
Estadística para psicólogos.
Vol. I - Estadística descriptiva.
Vol. II - Probabilidad. Estadística inferencial.
Editorial Pirámide - 1978.
Vol. I - Ejercicios con soluciones; Vol. II - Introducción a la teoría de la probabilidad en los primeros capítulos, ejercicios con soluciones.

BATSCHELET, E.
Matemáticas Básicas.
Editorial Dossat -1978.
Matrices y determinantes.

BUSH, G., YOUNG, J.
Fundamentos de Matemáticas.
Editorial Mc Graw-Hill - 1980.
Algebra, matrices, determinantes y programación lineal.

CUADRAS, C. M., ECHEVARRÍA, B., MATEO, V., Y SÁNCHEZ, P.
Fundamentos de Estadística: aplicación de las ciencias humanas.
Editorial Promoción de Publicaciones Universitarias - 1984.
Rectorado de la Universidad Central de Barcelona.
Combinatoria, probabilidad e inferencia estadística.

GARCÍA BARBANCHO, A.
Estadística elemental moderna.
Editorial Ariel - 1986.
Los capítulos 1 a 9 cubren todo el contenido del programa de estadística. El resto incluye inferencia y series temporales. El nivel es elemental. Los ejercicios son con enunciados económicos.

GARCÍA FERRANDO, M.
Socioestadística. Introducción a la Estadística en Sociología.
Colección Alianza Universal. Textos n.° 96.
Alianza Editorial - 1985.
Cubre todas las posibles opciones de la Estadística en Sociología, con estilo «poco formalizado».

GLASS, G. W., Y STANLEY, J. C.
Métodos estadísticos aplicados a las Ciencias Sociales.
Editorial Prentice Hall - 1986.
Capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, estadística descriptiva.
Capítulos 10 y 11, nociones básicas de probabilidad y de la distribución normal.
Numerosos ejemplos en Psicología y Educación.

GDYSH, C., ARYA, J. A., Y LARDNER, R. W.
Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía.
Editorial Prentice Hall - 1987.
Matrices y determinantes.

GUILFORD, J. P., Y FRUCHTER, B.
Estadística aplicada a la Psicología y Educación.
Editorial Mc Graw-Hill - 1984.
Estadística descriptiva y nociones básicas de probabilidad y distribución normal. Numerosos ejercicios con respuestas.

HOEL, P. G.
Estadística elemental.
Editorial C. E. C. S. A. - 1984.
Capítulos: 1 y 2. Estadística descriptiva.
Capítulo: 3. Conceptos de probabilidad.
Capítulo: 4. Distribuciones.
Capítulo: 5. Binomial y normal.
Capítulo: 9. Correlación y regresión.

HOFFMAN, L. D.
Cálculo aplicado para la Administración, Economía y Ciencias Sociales.
Editorial Mc Graw-Hill - 1985.
Análisis descriptivo de funciones y gráficas.

MARTÍNEZ BLANCO, J.
Las funciones elementales.
Cuadernos 1, 2, 3, 5, 7 y 8.
Editorial Teide - 1983.
Funciones a nivel elemental.

NIETO DE ALBA, U.
Introducción a la estadística.
Tomo I - Estadística descriptiva.
Tomo II - Modelos Matemáticos.
Tomo III - Inferencia y decisión.
Editorial Aguilar - 1978, 1977 y 1974.
El tomo primero incluye muchos ejercicios con aplicaciones económicas. Del tomo segundo, los capítulos: 2, 6 y 7 tratan sobre probabilidad y distribuciones binomial y normal.

NIVEAU, M.
Historia de los hechos económicos contemporáneos.
Editorial Ariel - 1985.
Análisis descriptivo de funciones y gráficas.

RORRES, CH. - HOWARD, A.
Aplicaciones del álgebra lineal.
Editorial Limusa - 1979.
Matrices y determinantes.

SAMUELSON, P. A. - NORDHAUS, W.
Economía.
Editorial Mc Graw-Hill - 1985.
Análisis descriptivo de funciones y gráficas.

STEINHAUS, H.
Instantáneas matemáticas.
Biblioteca Científica Salvat n.° 62.
Editorial Salvat - 1987.
Análisis descriptivo de funciones y gráficas.

SUÁREZ SUÁREZ, A. S.
Curso de introducción a la economía de empresa.
Editorial Pirámide - 1987.
Análisis descriptivo de funciones y gráficas.

TURNER, J. C.
Matemática moderna aplicada.
Colección Alianza Universidad n.° 92.
Alianza Editorial - 1974.
Elementos de álgebra lineal, matrices, determinantes, programación lineal, probabilidades y estadística.

BIBLIOGRAFIA SOLO DISPONIBLE EN BIBLIOTECAS

VARIOS AUTORES.
Desigualdades.
Editorial Open University Press (Agotado).

VARIOS AUTORES.
Colección School Mathematic Project (en inglés).
Editorial Cambridge University Press - 1980.

SAMUELSON, P. A.
Curso de Economía Moderna.
Editorial Aguilar (Agotado).

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA