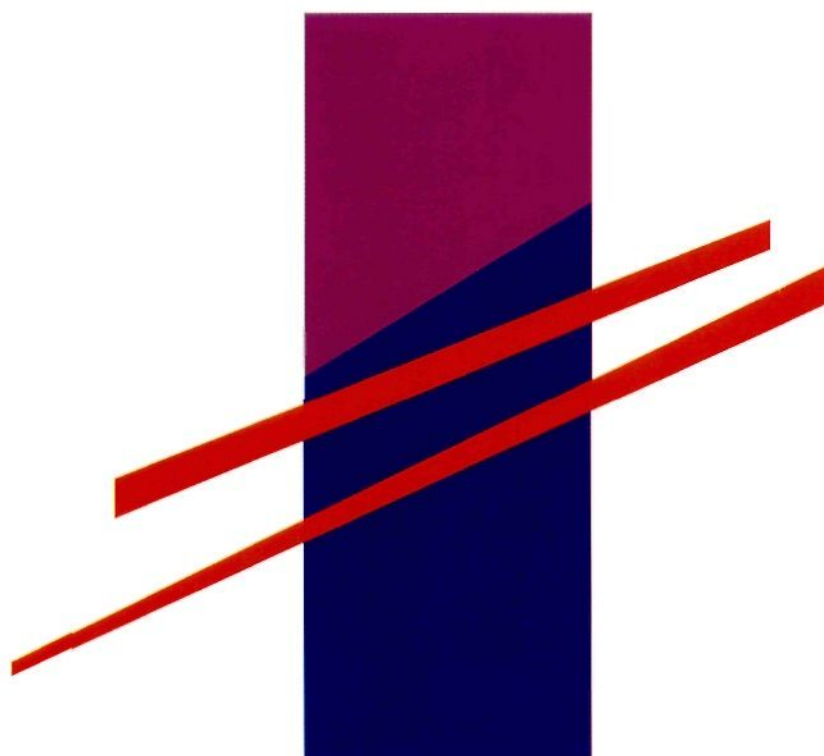


Materiales Didácticos

Matemáticas aplicadas
a las Ciencias Sociales I

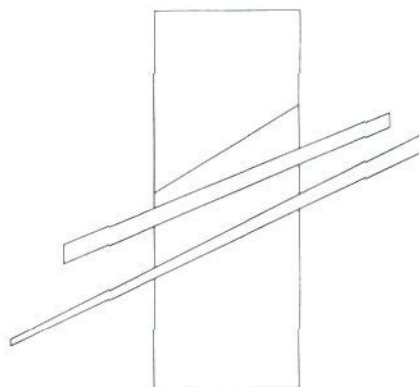


BACHILLERATO



Ministerio de Educación y Ciencia

Materiales Didácticos



Humanidades y Ciencias Sociales

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

Adela Salvador Alcaide
Francisco Javier Brihuega Nieto
Antonio Pérez Sanz



Ministerio de Educación y Ciencia

Coordinación de la edición:
CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR
DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES



Ministerio de Educación y Ciencia
Secretaría de Estado de Educación

Edita: Centro de Publicaciones. Secretaría General Técnica
N. I. P. O.: 176-95-124-4
I. S. B. N.: 84-369-2680-3
Depósito legal: M. 25.045-1995
Imprime: Imprenta Fareso, S. A.
Paseo de la Dirección, 5 - 28039 Madrid

Prólogo

La finalidad de estos materiales didácticos para el Bachillerato es orientar a los profesores que, a partir de octubre de 1992, impartirán las nuevas enseñanzas del Bachillerato en los centros que se anticipan a implantarlas. Son materiales para facilitarles el desarrollo curricular de las correspondientes materias, principalmente en las de primer curso, aunque algunas de ellas tienen su continuidad también en el segundo curso. Con estos materiales el Ministerio de Educación y Ciencia quiere facilitar a los profesores la aplicación y desarrollo del nuevo currículo en su práctica docente, proporcionándoles sugerencias de programación y unidades didácticas que les ayuden en su trabajo; unas sugerencias, desde luego, no prescriptivas, ni tampoco cerradas, sino abiertas y con posibilidades varias de ser aprovechadas y desarrolladas. El desafío que para los centros educativos y los profesores supone anticipar en el curso 1992/93 la implantación de las nuevas enseñanzas, constituyéndose con ello en pioneros de lo que será más adelante la implantación generalizada, merece no sólo un cumplido reconocimiento, sino también un apoyo por parte del Ministerio, que a través de estos materiales didácticos pretende ayudar a los profesores a afrontar ese desafío.

Se trata, por otro lado, de materiales elaborados por los correspondientes autores, cuyo esfuerzo es preciso valorar de modo muy positivo. Responden, todos ellos, a un mismo esquema general propuesto por el Ministerio en el encargo a los autores, y han sido elaborados en estrecha conexión con el Servicio de Innovación, de la Subdirección General de Programas Experimentales. Por consiguiente, aunque la autoría pertenece de pleno derecho a las personas que los han preparado, el Ministerio considera que son útiles ejemplos de programación y de unidades didácticas para la correspondiente asignatura, y que su utilización por profesores, en la medida en que se ajusten al marco de los proyectos curriculares que los centros establezcan y se adecuen a las características de sus alumnos, sirva para perfeccionarlos y para elaborar en un futuro próximo otros materiales semejantes.

La presentación misma, en forma de documentos de trabajo y no de libro propiamente dicho, pone de manifiesto que se trata de materiales con cierto carácter experimental: destinados a ser contrastados en la práctica, depurados y completados. Es intención del Ministerio realizar ese trabajo de contrastación y depuración a lo largo del próximo curso, y hacerlo precisamente a partir de las sugerencias y contrapropuestas que vengan de los centros que se anticipan a la reforma. Es propósito suyo también, desde luego, preparar los correspondientes materiales para la implantación, en octubre de 1993, del segundo curso de Bachillerato.

Estos materiales se publican en un momento en el que el Decreto de Enseñanzas Mínimas del Bachillerato y la correspondiente Orden Ministerial que regulará el currículo para el ámbito territorial de competencia del Ministerio de Educación y Ciencia se encuentran en su trámite final de aprobación, pero todavía no aprobados. Esto quiere decir que los objetivos, contenidos y criterios de evaluación de las asignaturas son conocidos solamente en su borrador final, pero no aún en su texto definitivo y oficial. Es previsible, por tanto, que no haya cambios importantes sobre el actual texto de los borradores, pero sí podrían darse modificaciones menores sobre ellos. Esta situación ha hecho particularmente difícil el trabajo de los autores, quienes en un plazo de tiempo extremadamente breve, y ajustando sus propuestas de desarrollo curricular a los sucesivos borradores del referido Decreto y Orden, han trabajado contra el reloj. Igualmente, la imprenta ha debido trabajar con plazos muy cortos. Por esta razón, los materiales correspondientes a algunas asignaturas llegan a los centros antes de las vacaciones estivales, mientras otros llegarán inmediatamente después, en septiembre, pero, en todo caso, antes de comenzar el curso.

Aún operando sobre borradores finales, pero no sobre redacción definitiva de normas legales a punto de aprobación, ha parecido oportuno destacar en la presente publicación los textos previstos del Real Decreto de Enseñanzas Mínimas de Bachillerato o de la correspondiente Orden de currículo para el ámbito del Ministerio. Los textos entresacados de los borradores de estas normas oficiales están resaltados en el texto con letra distinta. A semejanza del planteamiento curricular de etapas anteriores, también en el Bachillerato el currículo del Ministerio mantendrá los mismos objetivos y criterios de evaluación que el Decreto de Enseñanzas Mínimas, mientras, en cambio, ampliará en algo el apartado de los contenidos. Por consiguiente, en los apartados de objetivos y criterios de evaluación, los párrafos resaltados en tipografía diferente están entresacados de un borrador de texto oficial que previsiblemente será tanto el del Real Decreto, cuanto el de la Orden de currículo. En el apartado de contenidos, los textos resaltados a veces recogen el borrador de Real Decreto y otras veces el de la Orden ministerial. Los elementos así resaltados, en todo caso, han de ser atendidos por el profesorado con la prudencia oportuna, a la espera de la redacción definitiva de esas normas legales de muy próxima aparición.

Índice

	<i>Páginas</i>
I. INTRODUCCIÓN	7
II. OBJETIVOS.....	11
III. CONTENIDOS	13
IV. ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y PARA LA EVALUACIÓN	17
Fundamentación teórica.....	17
Diferencias con respecto a la etapa anterior.....	18
Contenidos específicos.....	19
Actividades adecuadas.....	20
Coeducación: acción compensatoria	20
Papel del profesor y del alumno	21
Orientaciones para la evaluación	22
V. PROGRAMACIÓN.....	27
Justificación	27
Resolución de problemas	28
Aritmética y álgebra.....	34
Funciones.....	38
Estadística y probabilidad	45
VI. BIBLIOGRAFÍA Y RECURSOS.....	55

Introducción

Las matemáticas, a lo largo de la historia, han ido ampliando y diversificando su objeto y su perspectiva, abarcando en la actualidad la práctica totalidad de las actividades del ser humano. Hoy en día, son consideradas como una herramienta sumamente eficaz aplicable a los más diversos fenómenos y aspectos de la realidad, jugando un papel decisivo en la construcción, interpretación y utilización de modelos aplicables a las ciencias sociales y humanas.

Las matemáticas se han convertido en un potente y apreciado instrumento de intercomunicación entre los conocimientos y de construcción de objetos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad, en todos los ámbitos de la actividad humana. Incluso, mediante la creatividad, la crítica y el poder de imaginar, permiten el desarrollo de modelos que contribuyen a describir, comprender y explicar mejor la complejidad del mundo.

Las matemáticas constituyen un conjunto muy amplio de conocimientos que evoluciona continuamente en interdependencia con los de otras esferas del saber y con la necesidad de resolver determinados problemas prácticos. Por tanto, es importante que el currículo refleje el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el individuo.

En la actualidad la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas deben servir para desarrollar capacidades cognitivas, que, por un lado, contribuyan al desarrollo de la persona y, por otro, tengan una incidencia relevante en la comprensión e interpretación del mundo físico y de las ciencias humanas y sociales, permitiendo resolver problemas en diferentes campos, poniendo de relieve aspectos y relaciones de la realidad no directamente observables y permitiendo anticipar y predecir hechos, situaciones o resultados antes de que se produzcan o se observen empíricamente. Por tanto, las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales han de contemplar no sólo el aspecto funcional, sino, también, y de forma indisoluble, el formativo.

En la sociedad actual es imprescindible incorporar el lenguaje, manejar conceptos y técnicas matemáticas, en ámbitos tan diversos como: consumo, econo-

mía, actividades de empresas, industria, comercio, medios de comunicación, transportes, sociología, psicología, medicina... y en otras muchas situaciones de la vida social.

Las matemáticas han de ser presentadas a alumnos y alumnas como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que continuarán evolucionando. Como se apunta en el libro *Bachillerato. Estructura y Contenidos* (pág. 191), la adquisición de conocimientos matemáticos no puede reducirse a la posesión de los resultados finales de esta ciencia, sino al dominio de su "forma de hacer", ese "saber hacer matemáticas".

Los contenidos conceptuales están presentes en la actividad matemática, pero no son los únicos elementos que actúan en el desarrollo de ésta. Además ha de haber una organización general que incluya estructuras conceptuales, estrategias generales, procesos, apreciaciones, habilidades y destrezas, y que determine el lugar de los conceptos y técnicas en el desarrollo global del aprendizaje; y, todo ello, no como meras orientaciones metodológicas, sino como partes inseparables de la actividad matemática.

De acuerdo con esto, en los contenidos del currículo hay que otorgar un lugar importante a los procedimientos o modos de saber hacer, como los que se refieren a:

- Habilidades en la comprensión y en el uso de diferentes lenguajes matemáticos.
- Las técnicas, rutinas y algoritmos particulares que tengan un propósito concreto.
- Las estrategias generales o heurísticas necesarias en la resolución de problemas como análisis de tareas, la búsqueda de regularidades y pautas, las expectativas de resultados, la comprobación y refutación de hipótesis.
- Decisiones ejecutivas y de control utilizadas al hacer un plan y llevarlo a cabo para plantear y resolver un problema y tomar decisiones sobre los conceptos, algoritmos o estrategias que se van a utilizar.

La popularización y las aplicaciones cada vez más numerosas de tecnologías en continua evolución en la realidad social y productiva crea la necesidad de desarrollar en los alumnos una actitud abierta hacia su utilización, como herramientas imprescindibles en sus futuras actividades profesionales, e introduce nuevos instrumentos y recursos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Una utilización adecuada de ordenadores, calculadoras, transparencias, diapositivas, fotografías, vídeos y otros materiales en el aula debe introducir cambios metodológicos en una línea de investigación e innovación.

Las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Humanas y Sociales I han de responder a tres exigencias básicas: instrumental, funcional y formativa.

En su papel instrumental han de proporcionar una serie de técnicas y estrategias básicas que les sirvan a los alumnos tanto para su aplicación a otros ámbitos de estudio como para el desarrollo de futuras actividades profesionales.

En su dimensión funcional han de proporcionar a los alumnos instrumentos matemáticos versátiles y adaptables a diferentes situaciones y a necesidades diversas y en continua evolución. Los alumnos han de adquirir el conocimiento

de las herramientas matemáticas estrictamente necesarias y la destreza en su elección, manejo y aplicación.

En relación con esta funcionalidad e instrumentalidad, como vehículo de expresión de las realidades de que tratan otras ramas del saber, es conveniente que los alumnos de la Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, adquieran un buen dominio de determinadas expresiones y destrezas matemáticas.

En su dimensión formativa, las matemáticas han de contribuir al establecimiento y la consolidación de destrezas cognitivas de carácter general, ya que son particularmente propicias para el desarrollo de actitudes relacionadas con los hábitos de trabajo, la curiosidad y el interés por investigar y resolver problemas, con la creatividad en la formulación de conjeturas, con la flexibilidad para cambiar el propio punto de vista, con la autonomía intelectual para enfrentarse a situaciones desconocidas y con la confianza en la propia capacidad de aprender y resolver problemas.

El desarrollo de todas estas actitudes no sólo tiene una dimensión formativa sino también funcional e instrumental al poder aplicarse a gran variedad de situaciones.

En particular, forman al alumno en la resolución de problemas genuinos, es decir, de aquellos en que la dificultad está en encuadrarlos y en establecer una estrategia de resolución adecuada¹, generando en él actitudes y hábitos de investigación, proporcionándole técnicas útiles para enfrentarse a situaciones nuevas. Pero el aprendizaje de las Matemáticas no debe limitarse a un adiestramiento en la resolución de problemas, por importante que éste sea, debiendo completarse con la formación en aspectos como la búsqueda de la belleza y la armonía, una visión amplia y científica de la realidad, el desarrollo de la creatividad y de otras capacidades personales y sociales.

¹ Bachillerato. Estructura y contenidos. M. E. C. Pág. 249.

Objetivos

El desarrollo de esta materia ha de contribuir a que las alumnas y alumnos adquieran las siguientes capacidades:

- 1. Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos, en particular, en la interpretación de fenómenos y procesos de las ciencias sociales y humanas y en las actividades cotidianas.*
- 2. Utilizar y contrastar estrategias diversas para la resolución de problemas, de forma que les permitan enfrentarse a situaciones nuevas con autonomía, eficacia y creatividad.*
- 3. Elaborar juicios y formar criterios propios sobre fenómenos sociales y económicos, utilizando tratamientos matemáticos, y expresar críticamente opiniones, argumentando con precisión y rigor y aceptando la discrepancia y los puntos de vista diferentes.*
- 4. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas.*
- 5. Utilizar los conocimientos matemáticos adquiridos para interpretar críticamente los mensajes, datos e informaciones que aparecen en los medios de comunicación y otros ámbitos sobre cuestiones económicas y sociales de la actualidad.*
- 6. Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, adquirir cierto rigor en el pensamiento científico, encadenar coherentemente los argumentos y detectar incorrecciones lógicas.*
- 7. Expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticas.*
- 8. Establecer relaciones entre las matemáticas y el entorno social, cultural y económico, apreciando su lugar como parte de nuestra cultura.*

Contenidos

Selección de estrategias y planificación del trabajo en situaciones de resolución de problemas. Aplicación de recursos técnicos y herramientas matemáticas adecuadas.

El objetivo de estos contenidos es generar en el alumno hábitos y actitudes propios del modo de hacer matemático, entendido como un proceso dinámico, mediante la ocupación activa con problemas relacionados con los otros contenidos que se quieren impartir, entendiendo como problema una situación abierta, susceptible de enfoques variados, que permita al alumno formularse preguntas, seleccionar las estrategias heurísticas y tomar las decisiones ejecutivas.

En este sentido, el alumno ha de conocer y reflexionar críticamente, al mismo tiempo que realiza su puesta en práctica, sobre:

- Fases más usuales en la resolución de un problema (detección, comprensión y formulación, elaboración de conjeturas, selección de estrategias, diseño y realización de un plan de actuación, reflexión sobre el proceso e interpretación de las posibles soluciones y contextualización de resultados).
- Estrategias heurísticas (simplificación del problema, analogía con otros conocidos, búsqueda de regularidades y pautas, particularización, elección de la notación, razonamiento por contradicción, inversión del proceso, análisis de las posibilidades, introducción de elementos auxiliares, generalización, etc).
- Decisiones ejecutivas (selección de objetivos centrales y particulares, búsqueda de recursos conceptuales, técnicos y estratégicos, ejecución del plan y revisión del mismo).

Se trata, por tanto, con estos contenidos de dotar al alumno de las técnicas básicas de resolución de problemas, teniendo en cuenta que:

- Ayuda a equipar a la persona para su actividad integral, no solamente en lo que se refiere a sus capacidades matemáticas.

Resolución de problemas

- El aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso a largo plazo. Es preciso resolver muchos problemas.
- La enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea.
- Esa ayuda sólo puede ser eficaz si se ejerce sobre situaciones problemáticas, abiertas y concretas y no como pre-requisito teórico planteado de forma epistemológica.

Aritmética y álgebra

- *Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y de ecuaciones de segundo grado: resolución por métodos algebraicos y gráficos. Resolución de problemas de enunciado verbal utilizando técnicas algebraicas.*
- *Introducción a los números irracionales obtenidos mediante radicales. Números irracionales de especial interés: π , e y ϕ .*
- *Utilización de los números racionales e irracionales mediante estimaciones y aproximaciones, controlando los márgenes de error acordes con las situaciones estudiadas.*
- *Utilización de la notación científica para expresar cantidades muy pequeñas o muy grandes.*

Aquí los alumnos descubrirán la existencia de medidas y soluciones de ecuaciones que no pueden ser expresadas exactamente con números racionales. Asimismo deberán familiarizarse con el uso de la calculadora para la realización de ciertos cálculos numéricos.

Funciones

- *Funciones en forma de tablas y gráficas. Utilización de éstas para la interpretación de fenómenos sociales y de la naturaleza.*
- *Obtención de valores no conocidos de funciones en forma de tabla: la interpolación lineal.*
- *Identificación de la expresión analítica y de la gráfica de las familias de funciones (polinómicas, exponencial y logarítmica, periódicas y racionales del tipo $f(x) = k/x$) a partir del estudio de sus peculiaridades.*
- *Análisis del dominio, crecimiento y decrecimiento, valores extremos y tendencia de funciones y gráficas. Idea gráfica de continuidad.*

Se pretende una comprensión más funcional que analítica, más interpretativa que algorítmica del estudio de funciones, y no el dominio de técnicas analíticas complicadas ni de resultados de cálculo infinitesimal.

Estadística y probabilidad

- *Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervengan dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Estudio del grado de relación entre dos variables. Correlación y regresión lineal.*

- *Distribuciones de probabilidad binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos. Manejo de tablas.*
- *Aproximación a una distribución binomial mediante la normal. Ajuste de un conjunto de datos a una distribución binomial o normal.*

Partiendo del análisis de situaciones concretas, se introduce el estudio de las distribuciones bidimensionales (correlación y regresión) y su aplicación a distintos fenómenos estudiados por las ciencias sociales, completándose con el estudio de distribuciones de probabilidad (binomial y normal) como idealización de las distribuciones de frecuencias.

Orientaciones didácticas y para la evaluación

El protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje debe ser el alumno, no las matemáticas ni el profesor; el alumno debe ser el motor de su propio aprendizaje.

Por tanto, hay que huir de una concepción de las matemáticas como un cuerpo de conocimientos acabado y de una metodología de mera transmisión que condena al alumno a una posición pasiva. El aprendizaje efectivo se consigue a través de la acción. Por esto es aconsejable utilizar actividades de grupo que favorezcan la discusión, la confrontación y la reflexión sobre las experiencias matemáticas, y como fuente de experiencias matemáticas utilizar diferentes espacios de actividad de los alumnos y las alumnas, dentro y fuera de lo meramente académico.

La incorporación masiva de las nuevas tecnologías a esferas de actividad cada vez más variadas, aconsejan la incorporación de estas tecnologías en las actividades de enseñanza y aprendizaje no de una manera puntual, sino como una práctica habitual y sistemática y dentro de su propio entorno de aprendizaje.

La informática y los medios audiovisuales (ordenadores, calculadoras, transparencias, diapositivas, fotografías, vídeos y otros materiales) proporcionan nuevos instrumentos y recursos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, introduciendo los cambios metodológicos necesarios en una línea de investigación e innovación en el aula.

Nuestra programación está basada en las siguientes teorías generales imprescindibles para analizar los procesos de aprendizaje que se dan en el aula.

De la teoría de Piaget extraemos dos ideas fundamentales:

- El alumno es el motor de su propio aprendizaje.
- El aprendizaje efectivo se consigue a través de la acción.

Fundamentación
teórica

De la teoría de la asimilación de Ausubel aplicaremos las siguientes ideas fundamentales:

- La existencia de cuatro tipos de aprendizaje en el aula: el aprendizaje receptivo, el memorístico, el significativo y el aprendizaje por descubrimiento.
- El aprendizaje significativo tiene lugar cuando las ideas son relacionadas de manera no arbitraria con algún aspecto de la estructura de conocimientos del que aprende.
- El aprendizaje es memorístico si el alumno crea condiciones arbitrarias entre el nuevo material y las ideas existentes en su estructura cognoscitiva o lo memoriza sin conectar.
- No siempre el aprendizaje por descubrimiento es significativo, y de hecho hay aprendizaje receptivo que es significativo.

Para lograr un aprendizaje significativo es necesario, en principio, una significación potencial del material, permitiendo que pueda ser relacionado de forma no arbitraria; en segundo lugar, disponer de las ideas pertinentes en la estructura cognoscitiva del que aprende y por último, la voluntad o disposición para el aprendizaje significativo por parte del que aprende.

El aprendizaje significativo se facilita cuando en primer lugar se introducen ideas muy generales o conceptos poco diferenciados, o bien se aprovechan los que ya posee el alumno, y, posteriormente, mediante el aprendizaje por inclusión, se modifican y adquieren nuevos significados por diferenciación progresiva, introduciendo nuevos atributos que lo hagan más preciso.

Para el diseño de materiales de enseñanza es preciso tener en cuenta las siguientes condiciones:

- Deben estimular la enseñanza activa, reflexiva y analítica, reformulando el alumno con su propio vocabulario las nuevas ideas, sus experiencias y su estructura de ideas.
- Los contenidos deben seleccionarse y ordenarse en torno de las ideas más amplias e integradoras y organizarse de acuerdo con los principios de diferenciación progresiva y reconciliación integradora. Por tanto, deben buscarse las relaciones entre los diferentes conceptos.
- Emplear los organizadores apropiados, lo que exige un conocimiento previo de las ideas que ya posee la persona que aprende.

Diferencias con respecto a la etapa anterior

Según se recoge en el Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, a lo largo de esta etapa los alumnos han seguido un proceso de construcción del conocimiento matemático basado en la aproximación de forma intuitiva y práctica a contenidos matemáticos conceptuales y procedimentales fundamentales, accediendo al mismo tiempo a niveles intermedios de abstracción, simbolismo y formalización.

En el Bachillerato se introducen nuevos conceptos y se modifican las estructuras conceptuales, se profundiza en el tratamiento de procedimientos de la etapa

anterior, ajustándolos a la evolución intelectual y cognitiva del alumno, y se propicia el desarrollo de destrezas matemáticas más sofisticadas y ajustadas al mayor margen de autonomía del alumno, en el diseño de su itinerario formativo y en la aplicación de sus propias estrategias de aprendizaje.

En esta etapa se debe propiciar que el alumno, a partir del estudio de situaciones problemáticas abiertas del mundo social y de su entorno, sea capaz de formular conjeturas, plantear y contrastar hipótesis, construir modelos, realizar inferencias, para abordar estudios o actividades productivas posteriores.

Los contenidos en esta etapa han de servir para proporcionar al alumno los conocimientos y herramientas matemáticas imprescindibles para la continuación de estudios posteriores, pero, por otra parte, han de proporcionar al alumno los conocimientos necesarios para desenvolverse eficazmente en una sociedad en continua evolución tecnológica, que demanda y utiliza de manera creciente conceptos y procedimientos matemáticos en áreas de la actividad humana cada vez más diversas y variadas.

Por último, en esta etapa, las matemáticas han de contribuir a la adquisición de nuevas actitudes y al desarrollo de las adquiridas en la etapa anterior como la curiosidad ante situaciones nuevas, el interés por investigar a fondo una situación, la actitud crítica ante informaciones y apreciaciones intuitivas, la mentalidad abierta y receptiva a las ideas de los demás, confianza en las propias capacidades para abordar situaciones nuevas y madurez y reflexión ante la toma de decisiones.

Los conocimientos matemáticos no se reducen a la posesión de los resultados finales de esta ciencia; además de conceptos y técnicas ha de haber una organización general que incluya estructuras conceptuales propias de las matemáticas, estrategias generales, procesos, apreciaciones, habilidades y destrezas, y que determine el lugar de los conceptos y técnicas en el desarrollo global del aprendizaje.

Las estructuras conceptuales resultan básicas para hacer matemáticas de forma significativa. Las matemáticas sólo tendrán sentido para los alumnos si éstos llegan a asimilar sus conceptos y a entender sus significados e interpretaciones.

Las técnicas básicas de resolución de problemas proporcionarán al alumno instrumentos para enfrentarse, no sólo con situaciones matemáticas, sino con otras aplicables en los ámbitos más variados de la realidad social y productiva.

La estadística constituye una herramienta eficaz para abordar múltiples problemas prácticos ante los que hay que tomar decisiones basadas en el análisis de datos numéricos.

Además, para el conocimiento de la filosofía e historia de la ciencia, la evolución de las ideas y del pensamiento humano, es imprescindible un mínimo bagaje de cultura matemática y científica.

Contenidos específicos

Actividades adecuadas

Para lograr un aprendizaje efectivo hay que huir de una concepción de las matemáticas como un cuerpo de conocimientos acabado y de una metodología de mera transmisión que condena al alumno a una posición pasiva.

La resolución de problemas constituye uno de los ejes fundamentales del proceso de aprendizaje de las matemáticas y de la propia estructuración de los contenidos del currículo.

Siempre que sea posible, la aproximación a conceptos nuevos, en todos los contenidos, debe producirse desde una situación de aprendizaje de resolución de problemas amplios, que exigen interpretarlos, encuadrarlos, seleccionar estrategias de resolución, realizar planificaciones de trabajo, aplicar correctamente recursos técnicos y herramientas matemáticas adecuados y dar sentido a la solución obtenida.

Coeducación: acción compensatoria

La discriminación que experimenta la alumna fuera del aula de Matemáticas puede ser contrarrestada dentro de ésta. Se debe tener en cuenta que la situación de partida es desigual y desarrollar mecanismos equilibradores y evitar el refuerzo de los roles.

Por esto incluimos una serie de propuestas para eliminar el desequilibrio social y emprender una acción compensatoria.

1. *Aproximar las matemáticas a la vida real de las alumnas.*

Buscar ejemplos o modelos que resulten interesantes para ellas.

2. *Promover la cooperación en clase.*

Enseñar a trabajar en equipos mixtos, evitando marginaciones por razón de sexo.

3. *Eliminar las diferencias psicológicas.*

Se debe reducir la ansiedad, en clase de Matemáticas, de las alumnas y aumentar su autoconfianza. La ansiedad es un factor de inhibición del aprendizaje y no la propia matemática. Muchas chicas piensan que tener éxito en Matemáticas es opuesto a femineidad.

4. *Dar a conocer la contribución de la mujer en la historia de las matemáticas.*

Se ignora la contribución de la mujer al desarrollo de las matemáticas a lo largo de la historia. Según encuestas, las alumnas desconocen la existencia de mujeres que hayan contribuido al desarrollo de las matemáticas. Los alumnos y alumnas tienen el convencimiento de que no ha habido mujeres que hayan sido o sean buenas investigadoras en matemáticas. Es importante informar al profesorado de la contribución de las mujeres a su desarrollo, cuestión prácticamente desconocida por casi todos. Así éstos

podrán, al hacer una introducción histórica de cada tema, hablar de las mujeres matemáticas.

5. *La clase de Matemáticas debe ser un "lugar de pensamiento".*

El aprendizaje de las Matemáticas tiene lugar en un ambiente que influye en dicho aprendizaje. Convertir el aula en un lugar donde alumnos y alumnas tengan tiempo para reflexionar, abstraer y llevar a cabo un trabajo intelectual. Esto es conveniente para todos, pero beneficia al proyecto sin discriminación a la mujer, en el sentido de que la alumna tiene menos oportunidades en la vida cotidiana para dedicarse a pensar. Al ser más capaces de pensar y de abstraer aprenderán matemáticas. Es preciso hacer matemáticas en la clase de Matemáticas y proporcionar a nuestras alumnas y alumnos ocasiones de desarrollar su razón. Es tarea del profesor estimular la curiosidad intelectual, el deseo de saber y descubrir por sí mismos.

6. *Discutir el lugar que ocupa el entrenamiento matemático en la actividad profesional.*

Las matemáticas son útiles en muchas profesiones. Como el hombre para el desempeño de algunas profesiones, de las que la mujer ha estado tradicionalmente apartada, ha necesitado saber matemáticas, el chico puede estar, *a priori*, más motivado. La incorporación de las mujeres al desempeño de nuevos papeles en la sociedad impone la conveniencia de estimular la apreciación de las alumnas respecto a la necesidad y a la utilidad de la matemática para múltiples profesiones. Se debe hacer hincapié en el aula en lo fundamental que es el entrenamiento matemático para ser un miembro activo de la sociedad actual.

Como se marcaba al principio de estas orientaciones, el centro de gravedad en el proceso de enseñanza y aprendizaje debe ser el alumno, no las matemáticas ni el profesor, por esto que hay que replantearse cuál es el papel del alumno y del profesor en este proceso.

La enseñanza de las Matemáticas, en esta Modalidad del Bachillerato, debe producirse en un marco de investigación de situaciones problemáticas; en este contexto el papel del profesor cobra nueva relevancia. La planificación y organización de las actividades de los alumnos tiene una especial significación en su tarea docente, por encima de la mera transmisión de contenidos.

El profesor debe huir de la tentación de secuestrar la investigación al alumno, adelantando resultados, marcando de manera rígida las líneas de avance, actuando de juez inflexible de los resultados.

El profesor debe actuar como elemento dinamizador y encauzador de las ideas, descubrimientos y vías de avance de los alumnos y alumnas, actuando más como formulador de preguntas que como expendedor de respuestas. Es preciso estimular al alumno en su investigación con sugerencias concretas cuando éstas sean necesarias, sin olvidar que es el alumno el que debe encontrar sus propios resultados.

Papel del profesor y el alumno

Orientaciones para la evaluación

¿Para qué evaluar?

El principal objetivo de la evaluación es ayudar al profesor a comprender mejor lo que los alumnos saben, y, teniendo esto en cuenta, tomar decisiones docentes significativas. Es preciso, por tanto, plantear la manera en que se controla el avance en la consecución de los objetivos de los alumnos y los métodos que se emplean para ello.

La evaluación ha de servir de base para identificar la evolución de los alumnos, para orientar acerca de sus líneas de avance y al mismo tiempo, para introducir las modificaciones en la planificación del proceso.

El aprendizaje de las matemáticas es un proceso acumulativo que va incrementando y modificando las estructuras conceptuales de los alumnos. Lo que se pretende con la evaluación es conseguir una imagen válida y fiable de adquisición y variación de las estructuras conceptuales de los alumnos.

¿Cómo evaluar?

En una estrategia docente que busque una comprensión más profunda de las matemáticas, los instrumentos de evaluación deben reflejar, por un lado, el alcance del programa docente y la intención de que los alumnos resuelvan problemas, razonen y se comuniquen. Por otro lado, dichos instrumentos deben capacitar al profesor para entender la forma en que los alumnos perciben las ideas y los procesos matemáticos y su capacidad de funcionamiento en un contexto matemático. También deben contribuir a que el profesor pueda identificar aspectos concretos que resulten problemáticos con objeto de mejorar el proceso enseñanza y aprendizaje. No son suficientes, por lo tanto, los instrumentos de examen que sólo requieran la identificación de respuestas correctas sin relación entre sí.

Los mecanismos de evaluación han de ser diversos, ya que distintos tipos de contenidos necesitan distintos métodos de evaluación. Todos los métodos de evaluación deben hacer uso de múltiples técnicas que estén en consonancia con el currículo y tengan en cuenta el propósito final de la evaluación.

Cuando se valora un proceso y se evalúa a los alumnos debe acumularse la información que se recoja para darle sentido a lo que se ha observado o medido. La mera asignación de un número al examen escrito no puede dar una imagen completa de los conocimientos de los alumnos.

Para que la evaluación mantenga la coherencia adecuada, el conjunto de tareas del proceso de evaluación debe reflejar las metas, objetivos y amplitud de temas que se especifican en el currículo. Los mecanismos de evaluación han de ser coherentes con los métodos de docencia.

Uno de los instrumentos de evaluación, especialmente significativo, es la apreciación del profesor acerca del progreso de los alumnos, lo que convierte a la evaluación en un proceso cotidiano, continuo y dinámico.

Una evaluación de la actitud matemática de los alumnos requiere información acerca de sus ideas y acciones en una gran variedad de situaciones por medio de

la observación directa de los alumnos, mientras participan en discusiones de clase, tratan de resolver problemas, o trabajan en tareas diversas por separado o en grupo. Este tipo de observaciones debe reflejarse de manera clara y sistemática durante la clase o inmediatamente después, siendo interesante la elaboración de fichas que recojan algunos de los indicadores siguientes: iniciativa e interés por el trabajo, participación, capacidad de trabajo en equipo, hábitos de trabajo, destrezas, comunicación con los compañeros, etc.

También ofrece una valiosa información sobre su actitud matemática los trabajos escritos, las investigaciones y trabajos a largo plazo, tareas para realizar fuera del aula, las exposiciones orales...

Es importante desarrollar en el alumno la actitud crítica sobre su propio trabajo y el de sus compañeros. En este sentido, es conveniente incorporar al proceso de evaluación del aprendizaje la opinión del sujeto activo del mismo, mediante técnicas de autoevaluación.

Los objetivos de esta autoevaluación serían:

- Contrastar las opiniones del alumno y las del profesor a lo largo del proceso de evaluación.
- Implicar al alumno en todas las fases del desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Enjuiciar críticamente el trabajo propio, la planificación de las actividades y el material utilizado.

¿Qué evaluar?

No son sólo los alumnos el objeto de la evaluación, también el proceso debe ser evaluado.

En cuanto al grado de adquisición de los contenidos por parte de los alumnos, debemos tener en cuenta que no todos los contenidos desarrollados a lo largo de un programa son del mismo tipo.

Los métodos de evaluación deben centrarse en la capacidad de los alumnos para discriminar entre los atributos relevantes e irrelevantes de un concepto a la hora de seleccionar modelos válidos y no válidos, representar conceptos de diversas maneras y reconocer sus distintos significados, lo que excluye una mera memorización de definiciones y el simple reconocimiento de ejemplos comunes.

La adquisición de los conceptos matemáticos es un proceso dinámico en el tiempo, no estático y cerrado. Por lo tanto, los aspectos de las estructuras conceptuales que se deben evaluar han de ser seleccionados de acuerdo con la evolución intelectual del alumno. La evaluación de las estructuras conceptuales de los alumnos debe contemplar este aspecto.

La evaluación del conocimiento procedimental no debe limitarse a una valoración de la soltura con que los alumnos ejecuten procedimientos; además deben saber cuándo y cómo aplicarlos, por qué funcionan y cómo validar las respuestas que ofrecen, así como entender los conceptos sobre los que se apoyan y la lógica que los sustentan. El conocimiento procedimental está íntimamente entrelazado con el conocimiento conceptual.

El aprendizaje de las matemáticas también implica desarrollar actitudes como la tendencia a pensar y actuar de forma positiva, valorando las matemáticas como una herramienta potente para analizar y transformar la realidad. La evaluación del *conocimiento matemático incluye una valoración de estos indicadores y del reconocimiento* que haga el alumno del papel y el valor de las matemáticas. La evaluación de la actitud de los alumnos ofrece información sobre los cambios que es preciso introducir en el desarrollo de las actividades y en el entorno de trabajo.

¿Cuándo evaluar?

Hay que entender la evaluación como un proceso enmarcado dentro del propio proceso de enseñanza y aprendizaje, en la que caben distinguir tres fases:

- Una primera de carácter inicial que sirva para conocer el nivel de los alumnos y que haga posible la modificación de la planificación inicial.
- Una segunda fase de evaluación de la forma y grado de adquisición de contenidos por parte de los alumnos y del desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, de carácter regulador y orientador del propio proceso y que permita posibles modificaciones en el desarrollo de lo planificado.
- Una fase final que sirva de análisis de la consecución de objetivos por los alumnos, del proceso de enseñanza y aprendizaje y del de evaluación. Esta fase debe servir para posibles modificaciones de la planificación del año siguiente, además de servir de base para la evaluación inicial de estos alumnos en su próximo curso académico.

El proceso de evaluación tiene como marco de referencia fundamental los siguientes **criterios generales de evaluación**:

1. *Utilizar los números racionales e irracionales para presentar e intercambiar información y resolver problemas y situaciones extraídos de la realidad social y de la vida cotidiana.*

Se pretende evaluar la capacidad de los alumnos para manejar números de distintos tipos y expresados de formas diversas, en cualquier situación relacionada con el ámbito de esta Modalidad. Para ello será preciso a menudo utilizar medidas aproximadas, controlando y ajustando el margen de error exigible en cada situación, en un contexto de resolución de problemas concretos.

2. *Transcribir problemas reales a un lenguaje algebraico, utilizar las técnicas matemáticas apropiadas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación, ajustada al contexto, a las soluciones obtenidas.*

Se pretende con este criterio evaluar las destrezas necesarias para resolver problemas basados en situaciones próximas al entorno del alumno o a las ciencias sociales, cuyo tratamiento matemático exija la utilización de técnicas algebraicas básicas, contextualizando la solución. La consecución de lo que indica este criterio exige algo más que la resolución, de forma mecánica, de ejercicios que sólo necesiten la aplicación inmediata de una fórmula, un algoritmo o un procedimiento determinado.

3. Reconocer las familias de funciones más frecuentes en los fenómenos económicos y sociales, relacionando sus gráficas con fenómenos que se ajusten a ellas, interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas.

Se trata de evaluar la capacidad del alumno para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el enunciado (polinómicas, exponenciales y logarítmicas, periódicas, racionales del tipo $f(x)=k/x$), sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación a la que se refiere el enunciado ha de ser tanto cualitativa como cuantitativa; exige, también, apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas.

4. Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica y que propicien la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos.

Este criterio está relacionado con el manejo de datos numéricos y en general de relaciones no expresadas en forma algebraica. Se dirige a comprobar la capacidad de los alumnos para ajustar los datos extraídos de experimentos concretos a una función conocida y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas.

5. Interpretar y elaborar informes sobre situaciones reales, susceptibles de ser presentadas en forma de gráficas, que exijan tener en cuenta intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y tendencias de evolución.

Con este criterio se pretende comprobar si el alumno es capaz de extraer conclusiones estudiando directamente las propiedades locales de la gráfica, sin utilizar un aparato analítico complicado, es decir, sin necesidad del cálculo de derivadas y límites.

6. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional, es de carácter funcional o aleatorio y extraer conclusiones de tipo cualitativo a partir de su representación gráfica.

Se pretende comprobar con este criterio que mediante la información gráfica aportada por una nube de puntos el alumno es capaz de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables y extraer las conclusiones apropiadas. Para ello no es preciso, en este caso, aplicar fórmulas estadísticas para la obtención de la medida precisa de un parámetro.

7. Interpretar, utilizando el coeficiente de correlación y las rectas de regresión, situaciones reales definidas mediante una distribución bidimensional y la posible relación entre sus variables.

Se pretende, con este criterio, comprobar la capacidad de los alumnos y alumnas para asociar los parámetros relacionados con la correlación y la

regresión, con las situaciones y relaciones que miden, valorando la calidad de las relaciones a las que se refieren o la ausencia de relación. Deben ser capaces, por ejemplo, ante varias distribuciones bidimensionales y un conjunto de parámetros estadísticos, de identificar los parámetros que corresponden a cada distribución. En relación con este criterio, más importante que el mero cálculo de los coeficientes de correlación y de la recta de regresión, es saber interpretarlos en un contexto concreto.

8. *Utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal, calculando las probabilidades de uno o varios sucesos.*

Se pretende evaluar si, mediante el uso de las tablas de las distribuciones normal y binomial, y sin necesidad de cálculos combinatorios, los alumnos son capaces de determinar la probabilidad de un suceso, analizar una situación y decidir la opción más conveniente.

9. *Organizar y codificar informaciones, seleccionar estrategias, comparándolas y valorándolas, para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, y utilizar las herramientas matemáticas adquiridas.*

Se pretende que el alumno utilice la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas para resolver problemas y realizar investigaciones enfrentándose con situaciones nuevas.

Programación

Esquema general

1. Introducción: Relación de los contenidos con los objetivos generales.
2. Secuenciación: Unidades didácticas.
3. Objetivos de la unidad.
4. Contenidos: hechos, procedimientos, actitudes.
5. Actividades.

En esta programación hemos optado por tomar como línea fundamental de avance en la adquisición de los distintos conocimientos matemáticos la resolución de problemas.

En este sentido nos parece conveniente comenzar el curso con este núcleo de contenidos, sin que esto signifique que su desarrollo quede limitado al tiempo asignado a éstos al principio de curso, sino que va a constituir el hilo conductor en el desarrollo de los demás contenidos. Esto proporciona a los contenidos sobre "Resolución de problemas" un doble carácter: por un lado es un núcleo con contenidos propios y por otra parte tiene un carácter transversal a lo largo de todo el curso.

La "Resolución de problemas" comienza al principio del curso y no termina hasta el final del mismo.

La secuenciación de los contenidos en los otros núcleos, no pretende ser un modelo rígido y cerrado, y responde a un intento de conectar los nuevos conocimientos con los adquiridos en la etapa anterior de manera gradual, evitando al alumno saltos bruscos en la construcción de estructuras conceptuales.

Justificación

Otra posibilidad podría ser la introducción de los conceptos y procedimientos incluidos en los contenidos de Aritmética y Álgebra, Funciones, y Estadística y Probabilidad mediante centros de interés, que vertebrén la incorporación de nuevos conocimientos y técnicas y herramientas matemáticas: por ejemplo, el tratamiento matemático de los distintos tipos de información.

Esta programación respondería a unos criterios no lineales en el desarrollo de los contenidos, y a una secuenciación en espiral en la que los conceptos y herramientas de cualquier núcleo de contenidos se introducen en el momento en que *la investigación lo requiere para seguir avanzando*.

Existen también distintas posibilidades de secuenciaciones más lineales que podrían iniciarse con Estadística y Probabilidad, para el estudio de fenómenos sociales concretos, continuar con el estudio de Funciones, para determinar el carácter funcional en la dependencia de dos variables y enfocar la Aritmética y Álgebra como demanda que aparece en el estudio de los otros contenidos.

De cualquier manera, ninguna programación puede hacerse al margen de las consideraciones impuestas por las condiciones del entorno académico, social y geográfico de los alumnos y de las experiencias y posibilidades del propio profesor.

Resolución de problemas

1. Introducción

Los objetivos generales de este núcleo de contenidos son:

- Enseñar y aprender matemáticas mediante la ocupación activa con problemas alrededor de los conocimientos ya adquiridos en etapas anteriores y de otros contenidos que se impartirán en este curso, entendiendo como problema una situación abierta, susceptible de enfoques variados, que permita al alumno formularse preguntas, seleccionar las estrategias heurísticas y tomar las decisiones ejecutivas.
- Generar en el alumno hábitos y actitudes propias del modo de hacer matemático, mediante la propia actividad matemática.

Se trata, por tanto, con estos contenidos, de dotar al alumno de las técnicas básicas de resolución de problemas, teniendo en cuenta que:

- Ayuda a equipar a la persona para su actividad integral, no solamente en lo que se refiere en sus capacidades matemáticas.
- El aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso a largo plazo. Es preciso resolver muchos problemas.
- La enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea.
- Esa ayuda sólo puede ser eficaz si se ejerce sobre situaciones problemáticas abiertas y concretas y no como pre-requisito teórico planteado de forma epistemológica.

2. Secuenciación: Unidades didácticas

Por el propio contenido conceptual y de procedimiento —no se trata de hacer un estudio sistematizado de técnicas fuera de un contexto—, la secuenciación de estos contenidos no se puede ajustar a un patrón lineal, debiendo enfocarse en la práctica cotidiana mediante un tratamiento en espiral.

Este tratamiento en espiral debe comenzar con una fase inicial específica, con una toma de contacto con problemas abiertos, que sólo exijan para su resolución conocimientos ya adquiridos por el alumno en la Educación Secundaria Obligatoria, reflexionando y tomando conciencia de las técnicas y estrategias utilizadas y sistematizándolas.

La resolución de problemas va a estar presente en el desarrollo del resto de los contenidos de este curso, retomando, ampliando y consolidando las técnicas, estrategias y decisiones heurísticas.

Tiempo de la fase inicial: 5 semanas.

3. Objetivos

- Analizar con espíritu crítico situaciones susceptibles de un tratamiento matemático.
- Aplicar con criterio y autonomía los instrumentos matemáticos adecuados para el estudio de dichas situaciones.
- Planificar el desarrollo de tareas generales aplicando las diferentes fases de la resolución de problemas.
- Familiarizarse con las estrategias generales para enfrentarse con problemas reales.
- Desarrollar la confianza en sí mismos para enfrentarse a situaciones y problemas nuevos.
- Transferir las técnicas de resolución de problemas a otras áreas del conocimiento y a otros aspectos de su vida cotidiana.
- Reflexionar de forma sistemática sobre sus propios procesos de pensamiento para mejorarlos.
- Generar actitudes abiertas y ser receptivos ante opiniones y puntos de vista diferentes de los propios.
- Ejercitar la imaginación y la creatividad en el análisis de la realidad.
- Tomar decisiones ejecutivas, de forma razonada, en el momento oportuno.

4. Contenidos. Fase inicial

El alumno ha de conocer, y reflexionar críticamente, al mismo tiempo que realiza su puesta en práctica, sobre:

- *Fases más usuales en la resolución de un problema:*
 - Detección.

- Comprensión y formulación.
- Elaboración de conjeturas.
- Selección de estrategias.
- Diseño y realización de un plan de actuación.
- Reflexión sobre el proceso.
- Revisión y modificación del plan.
- Interpretación de las posibles soluciones y contextualización de los resultados.

— *Estrategias heurísticas:*

- Simplificación del problema.
- Fragmentación del problema en partes más simples.
- Analogía con otros conocidos.
- Búsqueda de regularidades y pautas.
- Modificación de las condiciones.
- Particularización.
- Elaboración de conjeturas.
- Elección de la notación.
- Razonamiento por contradicción.
- Inversión del proceso.
- Análisis de las posibilidades.
- Introducción de elementos auxiliares.
- Generalización.
- Otras.

— *Decisiones ejecutivas:*

- Selección de objetivos centrales y particulares.
- Búsqueda de recursos conceptuales, técnicos y estratégicos.
- Ejecución del plan.
- Revisión del mismo.

5. Actividades

En la fase inicial, es conveniente trabajar sobre varios problemas de distintos tipos, que no exijan conocimientos previos diferentes de los adquiridos en la etapa anterior.

Lo que se pretende en esta fase es que el alumno se haga consciente de forma significativa de las fases, estrategias y decisiones que se van poniendo en práctica al resolver los problemas propuestos.

Este aprendizaje se ha de basar en las ideas previas que el alumno ha adquirido y aplicado no sólo en su vida académica, sino también en su entorno cotidiano, en sus juegos, en sus decisiones domésticas...

Al mismo tiempo ha de quedar claro que la resolución de problemas va a constituir el hilo conductor del aprendizaje de las Matemáticas en este curso. Pero, además, estas técnicas van a constituir una herramienta que va a utilizar en múltiples actividades y situaciones de su vida.

Los problemas a resolver en esta fase inicial deben contemplar los siguientes aspectos:

- Ser lo más abiertos posibles (no deben ser meros ejercicios de aplicaciones de técnicas).
- Provenir de una situación amplia (el enunciado no debe aparecer de forma explícita desde el principio, debe ser el alumno quien acote el problema construyendo su propio enunciado).
- Propiciar el trabajo en equipo en tareas globales o parciales y complementarias (no necesariamente todos los alumnos van a realizar las mismas tareas).
- Los niveles de resolución han de ser amplios —tratamiento de la diversidad— (no todos los alumnos han de llegar a los mismos niveles de generalización, concreción, precisión, etc., pero todos han de ofrecer respuestas válidas).
- Han de culminar con una presentación pública de resultados haciendo posible las discusiones, debates y la integración de puntos de vista distintos.

A título de ejemplo orientativo se proponen los siguientes modelos.

a) Problema inicial:

Mejorar el aspecto de la clase.

Se plantea a la clase la realización de un friso en el aula.

Con este enfoque abierto nos surgen una serie de preguntas previas:

- *Detección:*
 - ¿Qué es un friso? ¿Cómo es el aula? ¿Cómo diseñarlo? ¿Cuánto puede costar?
- *Comprensión y formulación:*
 - Modelos de diferentes frisos: búsqueda por el profesor y los alumnos.
 - Medición del aula: instrumentos y técnicas de medida.
 - Las losetas. Motivo mínimo. Búsqueda en los ejemplos encontrados.
 - Materiales necesarios para la realización.

- *Elaboración de conjeturas:*
 - Generación de frisos: transformaciones geométricas empleadas en los ejemplos estudiados.
 - Dimensiones posibles del motivo mínimo para evitar fraccionamientos de losetas. Múltiplos y divisores.
 - Determinación de los requisitos del motivo mínimo.
 - Dificultades técnicas y administrativas.
 - Determinación de tiempos.

- *Selección de estrategias:*
 - Criterios para la elección de un motivo: estéticos, económicos, grado de dificultad.
 - División del trabajo: trabajo en equipos.
 - Simplificar el problema, buscar regularidades, estudio de diversas opciones, dividir el problema en partes, modificar las condiciones iniciales, etc.

- *Diseño y realización de un plan de actuación:*
 - Confección del plan de trabajo. *Planning*. Tareas de equipo e individuales.
 - Elaboración del motivo mínimo. Selección de los movimientos.
 - Elaboración de presupuestos.
 - Selección de materiales e instrumentos. Forma de realización.
 - Realización práctica del friso.

- *Reflexión sobre el proceso:*

Esta fase es una de las más importantes, ya que el alumno ha de valorar críticamente los avances y ser consciente de las técnicas empleadas para la resolución de problemas. No hay que olvidar que el objetivo fundamental de estos contenidos es proporcionar al alumno herramientas conceptuales y de procedimientos para la resolución de problemas; lo que se pretende, en este caso concreto, no es tanto la culminación práctica del trabajo, sino que el alumno descubra las ventajas de aplicar de forma meditada estas técnicas.

- *Revisión y modificación del plan:*

Esta fase ha de servir, no sólo para detectar posibles errores y deficiencias, sino para plantear una discusión sobre los aspectos de organización del plan, el trabajo y aportaciones de los distintos grupos y las mejoras que se podrían incorporar en futuros proyectos.

- *Generalización e interpretación de las posibles soluciones y contextualización de resultados:*

El problema no se agota con la elaboración práctica del friso. Pueden surgir interrogantes en varios sentidos:

- El papel de las distintas transformaciones en la elaboración de frisos.
- Clasificación de los frisos.
- Ampliación a mosaicos.
- Los frisos en las distintas culturas.
- Diseño de frisos y mosaicos por ordenador.

Otros problemas que cumplen los objetivos propuestos podrían ser:

- Planificación y realización de una excursión.
- Medidas de seguridad en el centro: evacuación de los alumnos, distribución ideal de las salidas de incendio, espacios mínimos aconsejables, etc.

b) Problema de contenido lúdico:

Existe una amplia bibliografía sobre juegos y entretenimientos de carácter matemático, que recogen problemas clásicos de la historia de las matemáticas y que exigen la puesta en práctica de las técnicas de resolución de problemas en un contexto más amigable. De hecho algunas ramas de las matemáticas deben su origen a problemas de este estilo; su tratamiento puede ser un importante elemento motivador al introducir estas ramas.

En esta línea, y como una muestra entre muchas, proponemos el siguiente:

Doce tambores batientes¹

“ ...

— *Hablando de tambores, había una tradición en el Regimiento: la competencia entre tambores. Hubo varios eventos, en verdad, los simples, los dobles...*

— *¿Los whiskies dobles?*

— *Podéis burlaros. Los dobles eran como una liga. Había doce tambores en total y se formaban en parejas. Las parejas no eran fijas, desde luego; la idea era hallar la mejor. El concurso duraba once días...*

— *Bien, hay mucha variedad en el tamborileo, hay que dar a la gente la oportunidad de demostrar lo que pueden hacer...*

— *No, no tocábamos todo el día. Había sólo una ronda diaria, celebrada antes de diana para no molestar a nadie. Cada ronda consistía en tres competiciones distintas entre dos parejas de tambores a la vez.*

Ana aplaudió irónicamente.

¹ Ian Stewart, 1990.

— *Cada día participaban los doce tambores. Y para que fuera justo, cada tambor tenía a cada uno de los demás tambores una vez como acompañante, y dos veces como oponente.*

— *La adivinanza es: ¿cómo lo hacían?"*

c) Análisis de una situación relacionada con las ciencias sociales:

Los medios de comunicación suministran gran cantidad de informaciones susceptibles de ser sometidas a un estudio crítico en profundidad. Este estudio debe enfocarse desde la óptica de resolución de problemas para aplicar las fases, las estrategias heurísticas y ejecutivas y conseguir extraer la máxima información posible para formarse un criterio propio sobre el tema estudiado.

Este tipo de estudios obliga al grupo a una búsqueda selectiva de información, al contraste del tratamiento de ésta por distintas fuentes y al análisis de opiniones distintas.

Aritmética y álgebra

1. Introducción

En este núcleo los alumnos descubrirán la existencia de medidas y de ecuaciones cuyas soluciones no pueden ser expresadas exactamente con números racionales. Se utilizarán los números irracionales mediante estimaciones y aproximaciones, controlando los márgenes de error acordes con las situaciones estudiadas y profundizando en el tratamiento numérico aprendido en la etapa anterior. Es interesante que el alumno comprenda la importancia que la aparición de los números irracionales, imposibles de ser medidos como partes de una unidad por pequeña que ésta sea, ha desempeñado como aportación al bagaje cultural, filosófico y científico en el mundo occidental.

Es importante prestar atención al estudio y utilización de la notación científica para expresar cantidades muy pequeñas o muy grandes, así como al uso de la calculadora para la realización de ciertos cálculos numéricos.

2. Secuenciación: Unidades didácticas.

Unidad 1:

Estudio de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y de ecuaciones de segundo grado.

Tiempo: 2 semanas.

Unidad 2:

Introducción a los números irracionales. Medidas y ecuaciones cuyas soluciones no pueden ser expresadas exactamente con números racionales. Estimaciones y aproximaciones. Márgenes de error. Notación científica.

Tiempo: 3 semanas.

Unidad 1:

Estudio de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y de ecuaciones de segundo grado.

3. Objetivos

En esta unidad se pretende que el alumno/a sea capaz de:

- Traducir a un lenguaje algebraico problemas expresados en lenguaje cotidiano.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales con métodos algebraicos.
- Representar gráficamente problemas de ecuaciones.
- Resolver por métodos gráficos sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolver con métodos algebraicos y gráficos ecuaciones de segundo grado.
- Enunciar e interpretar problemas a través de su representación gráfica.
- Descubrir la existencia de ecuaciones sin solución racional.
- Utilizar eficazmente la calculadora como herramienta habitual.

4. Contenidos

Hechos, conceptos y principios

- Notación algebraica.
- Concepto de ecuación.
- Soluciones de una ecuación y de un sistema de ecuaciones.
- Gráficas.
- Fórmula de la ecuación de segundo grado.
- Relación de los coeficientes de una ecuación de segundo grado con sus soluciones.

Procedimientos

- Utilización de métodos algebraicos para la resolución de sistemas lineales.
- Aplicación de fórmulas para la resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Utilización e interpretación del lenguaje gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y de ecuaciones de segundo grado.
- Cálculo mental de las soluciones de ecuaciones de segundo grado interpretando los coeficientes.

- Utilización de métodos iterativos para el cálculo de soluciones.
- Uso de la calculadora.

Actitudes

- Disposición a realizar abstracciones partiendo de situaciones concretas.
- Sentido crítico y cautela ante las aparentes soluciones intuitivas.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar los problemas de la vida cotidiana.
- Gusto por el uso de estrategias personales de cálculo mental.
- Valoración de la utilidad de la calculadora como herramienta de trabajo.
- Disposición a valorar e interpretar críticamente las soluciones obtenidas.

5. Actividades

Es importante remarcar que en la resolución de los problemas de ecuaciones se deben aplicar, en todo momento, los conocimientos adquiridos sobre las técnicas básicas de resolución de problemas, dando especial importancia a la última fase de vuelta a atrás, para validar las soluciones.

Las actividades de esta unidad se centran en tres frentes:

- Traducir a un lenguaje algebraico problemas de la vida real expresados verbalmente.
- Aplicar las técnicas algebraicas y gráficas y los algoritmos de resolución.
- Interpretación y validación de las soluciones obtenidas según el contexto real.

Unidad 2:

Introducción a los números irracionales. Medidas y ecuaciones cuyas soluciones no pueden ser expresadas exactamente con números racionales. Estimaciones y aproximaciones. Márgenes de error. Notación científica

3. Objetivos

- Descubrir la existencia de números que no son racionales.
- Utilizar estos números en situaciones de cálculo y medida, mediante estimaciones y aproximaciones.
- Decidir los márgenes de error adecuados a cada situación.
- Controlar las cotas de error en contextos concretos.
- Expresar números muy grandes o muy pequeños mediante el uso de la notación científica.
- Utilizar eficazmente la calculadora como herramienta habitual.

4. Contenidos

Hechos, conceptos y principios

- El número irracional ($\sqrt{2}$, π , ϕ).
- Estimaciones de medidas.
- Aproximación de números irracionales.
- Cotas de error.
- Notación científica.

Procedimientos

- Aplicación de los teoremas clásicos de la geometría para obtener medidas de longitudes irracionales.
- Utilización de números racionales para aproximar números irracionales.
- Determinación de cotas de error acordes a cada situación.
- Utilización de la calculadora científica para la realización de operaciones con números racionales e irracionales.
- Expresión e interpretación de números en notación científica.

Actitudes

- Apreciación de los números como instrumento útil para describir y estudiar la realidad.
- Gusto por la precisión en el desarrollo de las actividades cotidianas.
- Disposición a mejorar las soluciones obtenidas.
- Incorporación del lenguaje numérico, de la estimación y de la aproximación a la forma de proceder habitual.
- Reconocimiento y valoración crítica de la calculadora como instrumento útil.
- Confianza en las propias capacidades para realizar cálculos, estimaciones y aproximaciones.
- Apreciación de la belleza, armonía y regularidad de las propiedades de los números.

5. Actividades

Partiendo de los conocimientos de resolución de ecuaciones y sistemas adquiridos en la unidad anterior, se plantea la resolución de ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones no son racionales, pero sí reales, y de problemas geométricos elementales, como la diagonal de un cuadrado o la proporción áurea, y así se justifica la necesidad de ampliar el campo numérico.

Una actividad adecuada para este fin podía ser el estudio de la proporción áurea en la historia del arte. Se puede hacer una investigación histórica sobre la

presencia del número áureo en distintas manifestaciones artísticas en distintas etapas.

Sobre una de estas manifestaciones (estrella pitagórica, Partenón, patio de los Leones de La Alhambra, Notre Dame de París, el modelo humano renacentista de Leonardo da Vinci, el Museo de Le Corbousier, rectángulos áureos en la pintura cubista, etc.), se realiza una investigación en profundidad sobre las proporciones hasta llegar a la obtención del número áureo ϕ , y de sus propiedades, resaltando su carácter de número irracional que aparece como solución de una ecuación de segundo grado.

Sería muy interesante plantear que este número se puede aproximar como cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

De esta forma se introduce la existencia de los números irracionales y la necesidad de conocer algunos de ellos.

Ante la imposibilidad de trabajar con ellos en la vida real, en situaciones prácticas de medida, se introduce la necesidad de utilizar estimaciones y aproximaciones de estos números, analizando el margen de error más adecuado a cada situación y aplicando las técnicas para acotar dicho error.

En esta situación, es conveniente realizar un estudio práctico del funcionamiento de la calculadora —cómo redondea o trunca, el número de cifras significativas, cómo expresa números en notación científica y cómo opera con ellos, cómo se introducen números en esta notación—.

El estudio de números muy grandes o muy pequeños se ha de realizar en problemas reales en que estos números aparecen de forma habitual.

Funciones

1. *Introducción*

Con este núcleo se pretende conseguir un conocimiento ágil de las diversas familias de funciones, de su expresión analítica y de sus gráficas, desarrollando destrezas en la lectura y comprensión de éstas, tal y como aparecen en informes de investigación de diferentes ciencias sociales.

Asimismo se pretende conseguir un conocimiento acerca de las peculiaridades de las distintas funciones y algunas de las situaciones reales en las que usualmente se presentan.

En particular se profundizará en los siguientes aspectos:

- Selección de la escala con las unidades correspondientes.
- Manejo de las tablas numéricas.
- Conocimiento de las expresiones analíticas de algunas familias de funciones, relacionándolas con sus gráficas y asociándolas a algún fenómeno que se rija por ellas.
- Interpolación y extrapolación lineal para el tratamiento de funciones obtenidas experimentalmente.

- Interpretación de algunos aspectos (crecimiento y decrecimiento, optimización, máximos y mínimos, tendencias, etc.), orientada a la comprensión e interpretación de artículos, informes y estudios.

En resumen, en este núcleo se pretende una comprensión más funcional que analítica, más interpretativa que algorítmica del estudio de funciones, y no el dominio de técnicas analíticas complicadas ni de resultados de cálculo infinitesimal.

2. Secuenciación: Unidades didácticas

Unidad 1:

Funciones en forma de tablas y gráficas. Interpolación y extrapolación lineal. Interpretación de fenómenos funcionales.

Tiempo: 2 semanas.

Unidad 2:

Las familias habituales de funciones: polinómicas, exponencial y logarítmica, periódicas y racionales del tipo $f(x) = k/x$. Identificación de su expresión analítica y de su gráfica.

Tiempo: 4 semanas.

Unidad 3:

Interpretación de crecimiento y decrecimiento, optimización, máximos y mínimos y tendencias.

Tiempo: 2 semanas.

Unidad 1:

Funciones en forma de tablas y gráficas. Interpolación y extrapolación lineal. Interpretación de fenómenos funcionales.

3. Objetivos

- Representar gráficamente las funciones a partir de tablas de valores.
- Utilizar adecuadamente las unidades y las escalas en los ejes.
- Asociar funciones a fenómenos concretos.
- Interpretar de forma global fenómenos funcionales presentados en forma de tabla o de gráfica.
- *Interpolación y extrapolar valores en una tabla obtenida experimentalmente.*
- Utilizar con criterio la calculadora científica.

4. Contenidos

Hechos, conceptos y principios

- Carácter funcional de la relación entre dos variables.
- Tablas de valores de una función.
- Unidades, escalas y ejes.
- Gráfica de una función.
- Interpolación y extrapolación.
- Fenómenos funcionales.

Procedimientos

- Obtención de información numérica sobre fenómenos concretos.
- Elaboración de tablas de valores a partir de datos.
- Elección de unidades, escalas y ejes.
- Representación gráfica de tablas numéricas.
- Cálculo de valores intermedios en una tabla mediante métodos gráficos y analíticos.
- Extrapolación de valores de una tabla.
- Interpretación de fenómenos a través de sus gráficas.

Actitudes

- Valoración de la potencia de las matemáticas para la interpretación de fenómenos sociales.
- Valoración de las nuevas tecnologías para el tratamiento de información y representación gráfica de funciones.
- Actitud crítica ante las informaciones recibidas en forma de gráficas.
- Tendencia a formularse preguntas a partir de un fenómeno dado y a explotar al máximo esta situación.

5. Actividades

Esta unidad se enfoca como una continuación y profundización del tratamiento de la información realizado en la etapa anterior. El alumno ya debe estar familiarizado con el manejo de tablas y gráficas de funciones elementales.

Se le suministra al alumno una serie de informaciones en forma gráfica, extraídas de los medios de comunicación, de informes o de otras fuentes, que aborden fenómenos de actualidad, y se realiza un estudio crítico de dicha información, analizando el efecto de la elección de unidades y escalas en la interpretación del fenómeno que estudian; el alumno investigará cómo el cambio de unida-

des o de escalas puede afectar a dicha interpretación, confeccionando la gráfica que transmita la información de la manera más correcta.

En la siguiente fase el alumno deberá determinar el carácter funcional de una serie de datos numéricos en forma de tablas de doble entrada y hacer la representación gráfica de las tablas anteriores, así como determinar los criterios para que una curva en forma de gráfica sea una función.

El alumno deberá traducir a un lenguaje numérico, expresado en forma de tablas de valores, informaciones proporcionadas en lenguaje verbal u obtenidas experimentalmente.

Del mismo modo, el alumno deberá ser capaz de traducir a una forma gráfica informaciones dadas en lenguaje verbal o numérico, como, por ejemplo, precios de aparcamientos según el tiempo, precios de llamadas telefónicas, desplazamientos en distintos medios de comunicación, etc., realizando una primera interpretación global de la situación estudiada mediante la información que le suministre la gráfica realizada por él.

Asimismo, deberá familiarizarse con las técnicas de interpolación y extrapolación lineal tanto gráficas como analíticas para determinar valores no obtenidos experimentalmente.

Unidad 2:

Las familias habituales de funciones: polinómicas, exponencial y logarítmica, periódicas y racionales del tipo $f(x) = k/x$. Identificación de su expresión analítica y de su gráfica.

3. Objetivos

- Determinar el dominio de un fenómeno funcional y de una función.
- Interpretar el significado del recorrido de una función.
- Reconocer las familias habituales de funciones a partir de su gráfica y de su expresión analítica.
- Asociar tipos de funciones a distintos fenómenos naturales, sociales y económicos.
- Encontrar modelos que se ajusten a diversos tipos de funciones habituales.
- Utilizar con criterio una calculadora científica.

4. Contenidos

Hechos, conceptos y principios

- Dominio de una función.
- Recorrido de una función.

- Expresión algebraica de una función.
- Familias de funciones. Fórmula general.
- Propiedades características de cada familia de funciones.

Procedimientos

- Asignación del dominio de la función asociada a un fenómeno concreto.
- Representación gráfica de funciones utilizando sus propiedades características.
- Utilización de la calculadora para investigar las propiedades de una función.
- Utilización de programas informáticos para estudiar las familias de funciones.
- Utilización del ordenador para determinar las analogías y diferencias de las propiedades de las familias de funciones.
- Utilización de medios audiovisuales para facilitar la comprensión de las relaciones funcionales de fenómenos y de las propiedades de las funciones.
- Utilización de simulaciones de fenómenos funcionales.
- Asignación de una expresión algebraica a una gráfica y viceversa.

Actitudes

- Aprecio de los medios tecnológicos como instrumento útil para analizar la realidad.
- Creación y desarrollo de hábitos de investigación sistemática.
- Incorporación del lenguaje gráfico a la forma de tratar la información.
- Curiosidad para abordar matemáticamente situaciones y fenómenos sociales y de la economía.

5. Actividades

Se inicia la unidad proporcionando al alumno gráficas que representan fenómenos y situaciones, realizando la interpretación de dichos fenómenos a la luz de la información proporcionada por la gráfica (dominios, crecimiento, puntos de interés especial, continuidad, tendencias, etc.).

Se continúan las actividades con la representación gráfica de fenómenos expresados a través de fórmulas algebraicas, utilizando calculadoras o medios informáticos para el cálculo de valores y para dibujarlas.

Se revisan las familias de funciones estudiadas en la Educación Secundaria Obligatoria, identificando las propiedades de las funciones con las características de los fenómenos asociados a ellas.

A continuación se investigan nuevas familias de funciones, identificándolas con fenómenos concretos y analizando sus propiedades características. En esta fase de la actividad es conveniente la utilización de distintos medios que permitan la visualización de múltiples situaciones (vídeo, *software* informático, transparencias, etc.).

Es importante que el alumno descubra de forma significativa las similitudes, diferencias y relaciones entre estas familias de funciones, identificando las formas de las gráficas con las expresiones algebraicas de las funciones.

El estudio de las propiedades globales se puede iniciar en esta unidad, resaltando la importancia de la selección del dominio de la función ajustada al fenómeno que representa y al tipo de función; por ejemplo, la relación entre demanda y precio de un determinado producto, evolución de la población de una ciudad, reproducción de una pareja de conejos (sucesión de Fibonacci), etc., aunque el estudio en profundidad de estas propiedades se desarrolla en la unidad siguiente.

Unidad 3:

Interpretación de crecimiento y decrecimiento, optimización, máximos y mínimos y tendencias.

3. Objetivos

- Interpretar la evolución de un fenómeno mediante el estudio del crecimiento y decrecimiento de su función asociada.
- Distinguir si un fenómeno es periódico o no mediante su gráfica asociada.
- Determinar e interpretar los puntos de especial significación en una gráfica.
- Dominar el uso de la calculadora para analizar la tendencia de una función.
- Resolver problemas de optimización utilizando la gráfica de una función.

4. Contenidos

Hechos, conceptos y principios

- Variación de una función.
- Puntos significativos en una gráfica.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos.

Procedimientos

- Representación gráfica de funciones utilizando sus propiedades globales.
- Utilización de la calculadora para investigar los puntos significativos de una función.

- Utilización del ordenador para determinar las propiedades globales de una función.
- Utilización de medios audiovisuales para facilitar la comprensión de las relaciones funcionales de fenómenos y de las propiedades de las funciones.
- Determinación de máximos y mínimos mediante los intervalos de crecimiento.
- Utilización de la gráfica de una función para resolver problemas de optimización.

Actitudes

- Valoración de las matemáticas como instrumento para analizar, interpretar la realidad.
- Aprender la importancia del tratamiento gráfico de funciones para tomar decisiones fundadas ante problemas cotidianos.
- Capacidad para formularse problemas nuevos explorando al máximo una situación.
- Actitud crítica al investigar un fenómeno o situación.

5. Actividades

Introducimos esta unidad mediante el estudio de un caso del tipo: diseño de los planes de producción y venta de una empresa que fabrica electrodomésticos.

Esta empresa fabrica tres tipos de productos. De estos productos se conocen las funciones que determinan los costes de producción y de distribución, así como los márgenes de venta para que los productos sean competitivos, los datos de ventas de cada uno de los productos del año anterior y las condiciones de las cadenas de producción y los *stocks* de materiales, etc.

Con todos estos datos de carácter funcional se trata de que el alumno:

- Determine la expresión algebraica de las distintas funciones que intervienen.
- Confeccione las gráficas de estas funciones.
- Elabore nuevas funciones a partir de los datos, como la función de beneficios.
- Investigue e interprete los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada función.
- Analice la forma de optimizar los beneficios, adoptando la decisión más favorable.

La interpretación y el análisis de los intervalos de crecimiento y decrecimiento proporciona una importante información sobre la forma global de la función y las especiales propiedades de los fenómenos.

En cada una de las funciones analizaremos las tendencias mediante el uso de la calculadora. El estudio de las ramas infinitas debe abordarse de forma gráfica e

intuitiva. Es interesante realizar siempre una interpretación real de las funciones ajustadas a las situaciones estudiadas.

Es importante que el alumno realice representaciones gráficas aproximadas conociendo las propiedades globales de un fenómeno —además de las citadas anteriormente, es conveniente revisar otras como simetrías, periodicidad, recorrido— y algunos puntos especialmente interesantes como los puntos de intersección con los ejes.

1. Introducción

El tratamiento del azar es cada vez más importante en la toma de decisiones en diferentes ramas de la actividad humana. En este núcleo un objetivo fundamental es que el alumno sea capaz de analizar y valorar críticamente la información para formarse una opinión propia sobre los problemas actuales y tomar decisiones acerca de ellos.

Partiendo de los conceptos de estadística unidimensional trabajados en la Educación Secundaria Obligatoria, y a través del análisis de situaciones concretas, se introduce el estudio de las distribuciones bidimensionales (correlación y regresión) y su aplicación a distintos fenómenos estudiados por las ciencias sociales, completándose con el estudio de distribuciones de probabilidad (binomial y normal), como idealización de las distribuciones de frecuencias.

Las nociones de estadística y de las distribuciones de probabilidad dotarán al alumno de los instrumentos para el desarrollo de estudios posteriores y para abordar los problemas que la continua evolución científica y tecnológica plantea a la sociedad.

2. Secuenciación: Unidades didácticas

Unidad 1:

Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervengan dos variables. Nube de puntos.

Tiempo: 2 semanas.

Unidad 2:

Estudio del grado de relación de dos variables. Correlación y regresión.

Tiempo: 3 semanas.

Unidad 3:

Distribuciones de probabilidad binomial y normal.

Tiempo: 3 semanas.

Unidad 4:

Normalización de una distribución binomial y ajuste de un conjunto de datos a una distribución binomial o normal.

Tiempo: 2 semanas.

Unidad 1:

Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervengan dos variables. Nube de puntos.

3. Objetivos

- Representar e interpretar un conjunto de valores de dos variables mediante una nube de puntos.
- Identificar un conjunto de valores de dos variables dados en forma de tabla o de nube de puntos como una distribución bidimensional.
- Interpretar algunos aspectos concretos de un fenómeno representado mediante una nube de puntos.
- Comparar los aspectos globales de varias distribuciones mediante su nube de puntos.
- Asignar nubes de puntos dadas a diferentes tipos de fenómenos.

4. Contenidos

Hechos, conceptos y principios

- Relación funcional y relación aleatoria de dos variables.
- Tabla numérica de dos variables.
- Nube de puntos.
- Distribuciones bidimensionales. Dominios, recorridos y escalas.

Procedimientos.

- Interpretación de una serie de datos numéricos mediante una tabla numérica de dos variables y/o una nube de puntos.
- Obtención de datos numéricos sobre una situación, consultando diversas fuentes.
- Traducción del lenguaje numérico al gráfico, pasando de tablas de dos variables a nube de puntos y viceversa.

Actitudes:

- Valoración de la estadística como instrumento útil para describir y estudiar la realidad.

- Creación y desarrollo de hábitos de investigación sistemáticos.
- Actitud crítica ante las informaciones presentadas en forma de datos estadísticos.
- Tendencia a consultar varias fuentes de información ante una situación dada.

5. Actividades

Se comienza la actividad planteando a los alumnos una investigación sobre una situación de su entorno cotidiano, como por ejemplo:

1. ¿Se puede descubrir alguna relación entre el número de películas vistas en una semana con el número de novelas leídas en los últimos seis meses?
2. ¿Existe alguna relación entre la tasa de mortalidad infantil por cada mil niños nacidos y la renta per cápita en diferentes países?
3. ¿Tiene relación la altura de los propios alumnos de la clase y el porcentaje de aciertos en lanzamientos a diferentes distancias a canasta en baloncesto?
4. ¿Depende la nota de matemáticas de las horas semanales ante la televisión?

El alumno debe planificar la obtención de los datos, representarlos en forma de tablas y traducirlos a nubes de puntos.

Ante la comparación de las diversas nubes de puntos así obtenidas, el alumno debe hacer una primera interpretación intuitiva de la relación entre las variables, en cada caso, analizando si esa relación es funcional o no; si la relación es directa o inversa, si, con la información suministrada por la nube de puntos, se podría extrapolar algún resultado concreto.

Los alumnos deben asociar, identificar y relacionar, al margen de la investigación inicial, diferentes nubes de puntos con distintas situaciones.

Unidad 2:

Estudio del grado de relación de dos variables. Correlación y regresión.

3. Objetivos

- Interpretar la relación entre dos variables a partir del análisis de la nube de puntos, determinando de forma intuitiva si es positiva o negativa y si se aproxima a una recta.
- Determinar, en forma intuitiva, la relación entre las medias de cada una de las variables con la nube de puntos.
- Encontrar, de forma gráfica, una recta que se ajuste a la nube de puntos.
- Estimar el coeficiente de correlación a partir de una nube de puntos.

- Analizar el grado de relación entre las dos variables, conociendo el coeficiente de correlación.
- Calcular el coeficiente de correlación de distribuciones bidimensionales utilizando una calculadora con funciones estadísticas.

4. Contenidos

Hechos, conceptos y principios

- Relación entre las variables de una distribución bidimensional.
- Rectas de regresión.
- Coeficiente de correlación.

Procedimientos

- Utilización de métodos gráficos para determinar la relación entre las variables y su ajuste a una recta.
- Aplicación del coeficiente de correlación para estimar el grado de relación entre las variables.
- Utilización de la calculadora estadística para el cálculo del coeficiente de correlación y rectas de regresión de distribuciones sencillas.
- Relación, de forma intuitiva, de nubes de puntos y coeficientes de correlación.
- Estimación de coeficientes de correlación a partir de la nube de puntos.
- Selección de fenómenos sociales y establecimiento de hipótesis explicativa.
- Elaboración de informes sobre las investigaciones realizadas.

Actitudes

- Sentido crítico y cautela ante las aparentes soluciones intuitivas.
- Actitud crítica ante las relaciones aparentes entre distintos fenómenos sociales.
- Tendencia a consultar varias fuentes de información para analizar una situación.
- Valoración de la interdependencia de los fenómenos sociales.
- Valoración de los métodos gráficos como medio de estudio de realidades sociales.

5. Actividades

A partir del estudio de las nubes de puntos obtenidas en la unidad anterior, el profesor introduce el concepto de correlación y el coeficiente de correlación como medida del grado de relación lineal entre las variables. El alumno debe interpretar

el significado de los distintos valores y signos del coeficiente de correlación y descubrir el tipo de relación entre las variables ante dichas situaciones.

Entre varias nubes de puntos y/o situaciones y varios coeficientes de correlación el alumno debe asignarlos correctamente.

Los alumnos han de buscar mediante métodos gráficos rectas que se ajusten a las distribuciones bidimensionales estudiadas y relacionar las medias de las dos variables con la recta que más se ajuste. Mediante esta aproximación intuitiva el profesor introduce el concepto de recta de regresión. También es importante que el alumno realice extrapolaciones utilizando la recta de regresión, estimando los márgenes de error posible.

En el desarrollo de la actividad no se pretende que el alumno realice cálculos complejos para determinar el coeficiente de correlación ni los coeficientes de la recta de regresión de forma mecánica. El objetivo es que sea capaz de realizar estimaciones de estos coeficientes y, en todo caso, calcularlos para algunas distribuciones sencillas utilizando una calculadora con funciones estadísticas. La utilización de transparencias y de otros medios elementales para el ajuste de rectas es más que suficiente en la mayoría de los casos que se pretenden estudiar.

Para consolidar los conceptos introducidos se realizará una investigación, del tipo de las estudiadas en la unidad anterior, que refleje, de forma clara, la relación entre dos fenómenos sociales, que debe culminar con la realización de un informe completo con todas las conclusiones obtenidas.

Unidad 3:

Distribuciones de probabilidad binomial y normal.

3. Objetivos

- Conocer las características que definen una distribución de probabilidad.
- Interpretar el significado de la esperanza matemática y de la varianza.
- Distinguir cuándo una distribución de probabilidad es binomial o normal.
- Conocer el significado de sus parámetros.
- Asignar probabilidades de sucesos mediante distribuciones binomiales y normales.

4. Contenidos

Hechos, conceptos y principios:

- Distribuciones de probabilidad.
- Parámetros: esperanza matemática y varianza.
- Probabilidad como área bajo la curva de una función de densidad.
- Distribución binomial.
- Distribución normal.

Procedimientos:

- Interpretación de los parámetros (n, p, q) en una distribución binomial.
- Cálculo de probabilidades mediante una distribución binomial.
- Interpretación de los parámetros (μ, σ) en una distribución normal.
- Tipificación de una distribución normal.
- Utilización de las tablas de la binomial y de la normal para el cálculo de probabilidades.
- Cálculo de los parámetros de una distribución binomial o normal.
- Relación de la media y la varianza con los parámetros de una distribución binomial.

Actitudes

- Cautela y sentido crítico ante las aparentes soluciones intuitivas.
- Interés y curiosidad por los procesos de investigación realizados y los resultados de los mismos.
- Fundamentación rigurosa en la toma de decisiones con argumentos probabilísticos.

5. Actividades

Se introduce el concepto de distribución de probabilidad a partir de un juego de azar. Por ejemplo:

*“El juego de los dados, conocido por **el 7** o el juego de **mayores o menores**, consiste en apostar una cantidad determinada a una de estas tres opciones, al lanzar dos dados:*

- *la suma de los dados es mayor que 7;*
- *la suma es 7;*
- *la suma es menor que 7;*

Si se juega a mayores o a menores, y se acierta, se gana una cantidad igual a la apostada.

Si se juega a sacar 7 y se acierta, se gana el doble de lo apostado.”

Se plantea a los alumnos los siguientes interrogantes:

¿Jugarías?, ¿a qué opción apostarías?

El estudio de esta situación es un marco idóneo para la puesta en práctica de los conocimientos adquiridos sobre las técnicas de resolución de problemas y la aplicación de las estrategias heurísticas adecuadas.

Se aconseja al alumno la realización de una tabla y de una gráfica de resultados posibles y de sus probabilidades.

A partir de esta situación y de la similitud con las tablas de frecuencias estudiadas en la Educación Secundaria Obligatoria, se introduce el concepto de distribución de probabilidad y de sus parámetros, realizando un estudio de analogía y diferencia con los de una distribución de frecuencias, remarcando la importancia del concepto de esperanza matemática.

Después del cálculo de los parámetros se ha de tomar una decisión sobre las preguntas planteadas.

La investigación se puede profundizar alterando las condiciones iniciales del juego, preguntándose si el juego es justo y cuáles serían las condiciones para que lo fuese.

La distribución binomial se puede introducir mediante una investigación del tipo:

“Se sabe que la mayoría de los incendios forestales son provocados y se estima que las tres cuartas partes lo son.”

En Gredos, a lo largo del mes de julio pasado hubo varios incendios. Investigar la distribución de probabilidad del número de incendios provocados.”

A lo largo de la investigación los alumnos deberán descubrir las diferentes probabilidades al ir aumentando progresivamente el número de incendios, relacionando los resultados obtenidos con los números del triángulo de Tartaglia. Se identifica esta distribución como una distribución binomial y se estudian sus características específicas, investigando ejemplos similares e identificando fenómenos sociales como distribuciones binomiales.

Cuando el número de casos aumenta de manera considerable es recomendable la utilización de tablas.

La distribución normal, al ser una distribución continua, no puede ser obtenida experimentalmente por los alumnos, por lo que su estudio se llevará a cabo como extrapolación de la binomial.

Se le plantea al alumno una investigación de una distribución normal como la estatura de hombres y mujeres en su provincia, conociendo sus parámetros (media y desviación típica), e interpretando la situación a la luz de estos parámetros mediante el porcentaje de población en los intervalos ($\mu - k \sigma$, $\mu + k \sigma$).

Para el cálculo de probabilidades de estaturas en intervalos concretos, el alumno ha de dominar el manejo de las tablas de la normal y saber tipificar una normal.

Unidad 4:

Normalización de una distribución binomial y ajuste de un conjunto de datos a una distribución binomial o normal.

3. Objetivos

- Normalizar una distribución binomial.
- Ajustar una distribución binomial a una normal.

- Realizar inferencias a partir de un conjunto de datos estadísticos utilizando una distribución binomial o normal y validar los resultados.
- Aprender la importancia del tratamiento matemático del azar para tomar decisiones fundadas ante problemas cotidianos.

4. Contenidos

Hechos, conceptos y principios

- La distribución normal como límite de la binomial.
- Ajuste de un conjunto de datos a una distribución binomial o normal.
- Inferencia estadística.

Procedimientos

- Variación de una distribución binomial, al aumentar el número de casos, hacia una normal.
- Normalización de una distribución binomial calculando la media y la desviación típica.
- Análisis de la corrección de una normalización.
- Utilización de la distribución binomial para el estudio de un conjunto de datos estadísticos.
- Utilización de la distribución normal para el estudio de un conjunto amplio de datos estadísticos.
- Utilización de la binomial o la normal para inferir datos en una distribución de frecuencias.

Actitudes

- Valoración de la estadística como herramienta para la toma de decisiones justificadas.
- Valoración de la iniciativa personal y de la actitud inventiva y lúdica en el diseño de proyectos de investigación.
- Respeto por las personas y tolerancia con las peculiaridades individuales.
- Interés y curiosidad por los procesos de investigación realizados y los resultados obtenidos.
- Interés en la realización correcta de la recogida de datos, confección de gráficos y elaboración de informes.

5. Actividades

Se parte de una situación de la que se obtienen datos estadísticos y en la que es necesario tomar una decisión, como por ejemplo:

“Una empresa mediana se plantea la necesidad de montar un servicio de comedor para los trabajadores. Se ha hecho una encuesta sobre el número de trabajadores que utilizarían este servicio. La empresa, teniendo en cuenta los costes del proyecto y del servicio, el absentismo laboral y la intención de primar la puntualidad de sus empleados (estos se apuntan al comedor al iniciar la jornada), pretende garantizar este servicio para el noventa por ciento de los interesados.”

A partir de esta situación o de otras similares hay que construir una distribución de probabilidad, identificar e interpretar sus parámetros, calcular probabilidades utilizando la distribución binomial. En el caso de que el número de empleados sea muy grande tendrá que normalizar la distribución, tipificarla y aplicar las tablas de la normal para realizar estos cálculos.

En ambos casos, tendrá que inferir los resultados para tomar la decisión más conveniente.

Bibliografía y recursos

Bibliografía académica

- APARY, R., y otros (1984). *Pensar la Matemática*. Barcelona: Tusquets Editores.
- BOYER, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad.
- COXETER, H. S. M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. México: Limusa-Wiley.
- ENGEL, A. (1979). *La enseñanza de las probabilidades y de la estadística*. Valencia: Mestral.
- MASON, J., y BURTON L. (1988). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Labor-M. E. C.
- POLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento pausable*. Madrid: Tecnos.

Bibliografía didáctica

- AZCARATE, C., y DEJULOFEU, J. (1990). *Funciones y graficas*. Madrid: Síntesis.
- BELL, R., y CORNELIUS, M. (1990). *Juegos con tablero y fichas. Estimulos a la investigación matemática*. Barcelona: Labor.
- BELT, B. (1988). *Actividades matemáticas*. Barcelona: Labor.
- BROMEY, R. (1982). *How to solve it by computer*. Nueva York: Prentice Hall.
- CASTELNUOVO, E. (1975). *Didáctica de la Matemática Moderna*. Mexico: Trillas.
- CASTELNUOVO, E., GORI GIORGI, C., y VALENTI, D. (1986). *La Matematica nella Realtà*. Florencia: La Nuova Italia.
- COURANT, R., y ROBBINS, H. (1955). *¿Qué es la Matemática?* Madrid: Aguilar.
- COKCROFT, W. H. (editor). (1985). *Las Matemáticas si cuentan*. Madrid: M. E. C.

- DAVIS, P. J., y HERSH, R. (1988). *Experiencia matemática*. Madrid: Labor-M. E. C.
- DÍAZ GODINO, J.; BATANERO, M. C., y CAÑIZARES, M. J. (1988). *Azar y probabilidad*. Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.
- DIENES, Z. P. (1971). *Las seis etapas del aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Teide.
- DICKSON, L., y otros. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Labor-M. E. C.
- FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- GARDNER, M. (1985). *Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas*. Barcelona: Labor.
- GARDNER, M. (1987). *Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas*. Barcelona: Labor.
- GELFAND, y otros. (1981). *El método de las coordenadas*. Moscú: Mir.
- GRUPO AZARQUIEL (1991). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- GRUPO CERO (1987). *De doce a dieciséis, un proyecto de currículo de matemáticas*. Valencia: Mestral.
- GUZMAN, M. (1984). *Cuentos con cuentas*. Barcelona: Labor.
- HERNAN, F., y CARRILLO, E. (1988). *Recursos en el aula de Matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- I. C. M. I. (1987). *Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90*. (Kuwait, 1986). Valencia: Mestral.
- JOHNSON, B. (1984). *Descubre las Matemáticas con tu micro*. Madrid: Anaya Multimedia.
- KLEIN, F. (1808). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: Biblioteca Matemática J. Rey Pastor.
- MARTINEZ BLANCO, J. M. (1983). *Las funciones elementales*. Barcelona: Teide.
- PAPERT, S. (1981). *Desafío a la mente*. Buenos Aires: Galápagos.
- PEDOE, D. (1979). *La Geometría en el Arte*. Barcelona: G. Gili.
- PERELMAN, Y. (1969). *Álgebra recreativa*. Moscú: Mir.
- POLYA, G. (1962). *Mathematical Discovery*. Nueva York: John Wiley.
- POLYA, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

- PUIG ADAM, P. (1960). *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid.
- PUIG ADAM, P. (1967). *El material para la enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Aguilar.
- SALVADOR, A. (1991). *La informática en la acción educativa*. Madrid: Castalia.
- SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Bilbao: M. E. C. y Universidad del País Vasco.
- SHILOV, G. E. (1978). *¿Cómo construir las gráficas?*, Moscú: Mir.
- SKEMP, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Morata.
- STEINHAUS, H. (1986). *Instantáneas matemáticas*. Barcelona: Salvat.
- STEWART, I. (1990). *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática*. Barcelona: Gedisa.

Medios materiales

- Calculadora.
- Plantillas cuadrículadas, triangulares, de puntos...
- Transportador de ángulos.
- Reglas, compás, escuadras.
- Acetatos.
- Dados, ruletas, tableros de juegos.
- Dominós.
- Aparato de Galton.

Medios audiovisuales

En un marco de trabajo como la clase de matemáticas los medios audiovisuales son un instrumento de uso cotidiano, y no sólo en su concepción más habitual de estudio de imagen dinámica (vídeo), sino también en el análisis de imagen fija.

Desde este punto de vista el material a utilizar sería:

- Proyector de diapositivas.
- Retroproyector de transparencias.
- Máquina fotográfica.
- Magnetoscopio y monitor de televisión.
- Cámara de video.

La utilización de este material abarca todas las fases de cada actividad práctica, ya que se puede utilizar como introducción de un tema a investigar, como herramienta de trabajo en el desarrollo de la investigación, como soporte para la presentación de resultados e incluso como instrumento para la evaluación de los alumnos y de la actividad.

Videos didácticos

La estadística por dentro

Annemberg T. V.

Distribuidora: B. B. C. Enterprises

c/ Campoamor, 18, 2.º. 28004 Madrid.

I. M. 10 Investigaciones matemáticas

B. B. C. TV

Distribuidora: B. B. C. Enterprises

c/ Campoamor, 18, 2.º. 28004 Madrid.

El ojo matemático (1.ª y 2.ª parte)

Yorkshire T. V.

Distribuidora: Imagen 35 & Asociados

Ctra. de Algete, km 5,500. P. I. Los Nogales, Nave 68

28110 Algete. Madrid.

El Teorema de los Binomios.

Símbolos y Ecuaciones

Open University. B. B. C. T. V.

Distribuidora: Áncora Audiovisual, S. A.

Gran Vía de les Corts Catalanes, 645. 08010 Barcelona.

Escher: Simetría y Espacio

Espirales

La banda de Moëbius

Michele Emmer. Film 7. Roma.

Distribuidora: Mare Nostrum

c/ Augusto Figueroa, 39. 28004 Madrid.

La Enseñanza del azar

Eliseo Borrás. Marta Morata

CEP de Valencia. Generalitat Valenciana.

Material informático

El uso del ordenador ha de contemplarse desde dos aspectos diferenciados:

- Como herramienta de apoyo en el desarrollo de la actividad (programas de EAO, programas de estadística, base de datos, tratamiento de textos para guardar información..)

— Como instrumento para la presentación de resultados (programas de *diseño de gráficos*, *autoedición*, *tratamiento de textos*...)

En cualquier caso hay que evitar en este campo confundir el fin con los medios y evitar utilizar herramientas cuyo dominio exija un esfuerzo en tiempo y medios que no se vea compensado con el resultado final.





CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR



DIRECCIÓN GENERAL DE RENOVACIÓN PEDAGÓGICA
CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR