Del currículo a la práctica del aula

Secundaria Obligatoria

$$20x = \frac{1}{5}$$

Unidades Didácticas de Matemáticas

Ministerio de Educación y Cultura

Secundaria Obligatoria
Primer Ciclo

UNIDAD DIDÁCTICA: "NUESTRO ENTORNO" GEOMÉTRICO"

ELENA ARRANZ ESPESO
Mª JOSÉ BARBA VILLAMERIEL
PORFIRIO BARRIO PASCUAL
AURORA ALONSO ASENSIO
FRANCISCA MARTÍN VEGAS

Nuestro agradecimiento:

- A los profesores que forman o han formado parte del grupo de trabajo de matemáticas, "Nuestro Entorno Geométrico", por su magnífica colaboración":
- Al director y al coordinador del área de matemáticas del CPR I de Valladolid, por sus consejos y apoyo.
- A la directora del curso de ACD de matemáticas, Carmen Cubillo Morán por su confianza en nuestro trabajo.
- A Julio Bravo Martín por su desinteresada ayuda en la transcripción informática del texto y los dibujos.

Ministerio de Educación y Cultura
Secretaría General de Educación y Formación Profesional
Centro de Investigación y Documentación Educativa (C.I.D.E.)
Edita: Centro de Publicaciones. Secretaría General Técnica
N.I.P.O.: 176-96-221-0
I.S.B.N.: 84-369-2981-0
Depósito legal: M-45.527-1996
Imprime: Gráficas Naciones, S.L.
C/ Río Sil, 3 - Tel. 629 21 45
28110 ALGETE (Madrid)

Índice

UNIDAD DIDÁCTICA: "NUESTRO ENTORNO GEOMÉTRICO"

ACTIVIDADES

UNIDAD DIDÁCTICA: Procedimientos de Estimación

Introducción

La **Unidad Didáctica** que presentamos, nace en el marco del curso de Actualización Científico y Didáctica, programado por el Centro de Profesores I de Valladolid para el área de Matemáticas, durante el curso 90-91. Un equipo de cinco profesores del Ciclo Superior de E.G.B. empezamos su elaboración al calor de las nuevas ideas, y propuestas recibidas, durante el desarrollo del citado curso. Una vez terminada y después de experimentarla con muchísima ilusión en nuestras clases, nos dimos cuenta de que significaba para nosotros, una nueva forma de enseñar Matemáticas.

Al finalizar el curso, aunque algunos profesores no continuaron, se constituyó un grupo de trabajo" Nuestro Entorno Geométrico", con el objetivo de ampliar, mejorar y adaptar la U.D. a las orientaciones y contenidos de la Educación Secundaria Obligatoria y seguir con la experimentación en las aulas.

Nuestra Unidad Didáctica aborda determinados aspectos de la *Geometríá tridimensional,* que creemos apropiados para alumnos de 12 a 14 años. Desde este enfoque, apreciamos la importancia que los contenidos de la E.S.O. conceden al bloque de "organización y representación en el espacio", en contraste con los programas antiguos, que en poco mas de dos temas y siempre al final, tratan de dar respuesta a múltiples contenidos geométricos.

En la U.D. hemos querido aprovechar al máximo el carácter lúdico,intuitivo y funcional de la Geometría. Presentamos situaciones variadas, creativas, manipulables y cercanas a los chicos y chicas, con el fin de favorecer una disposición positiva al aprendizaje y fomentar la confianza en sus capacidades.

Damos gran importancia a la motivación diaria dentro del aula, queremos sobre todo despertar su interés, desterrar en lo posible los enunciados memorísticos y basarnos en hechos concretos con sentido en su entorno real. Las actividades diseñadas nos permiten ejercitar los algoritmos de las operaciones, utilizar instrumentos de medida, materiales y recursos diversos, y nos ayudan a crear un clima de curiosidad, trabajo y colaboración.

Las orientaciones sobre el desarrollo de esta unidad están basadas en la experimentación que realizamos en cinco Colegios Públicos de Valladolid.

El total de alumnos que participó en la primera experiencia fue de 116 y pertenecían a los niveles 7° y 8° de E.G.B. Las características de estos centros escolares son las siguientes:

> **Dos rurales,** uno de ellos completo y el otro con muy pocos alumnos del ciclo superior.

Tres urbanos, uno situado en un barrio periférico con ambiente socio-cultural bajo, otro en un barrio de nueva creación con familias de clase media y del tercero participaba en la experiencia, un grupo de alumnos de Educación Compensatoria.

Respecto al agrupamiento realizado, todos los profesores constatamos una buena disposición del alumnado hacia esta forma novedosa de trabajar. Sólo en uno de los centros se trabajaba habitualmente en grupo. Los alumnos se sintieron muy motivados, lo que generó entusiasmo y participación.

En cuanto el sistema de agrupamiento y funcionamiento de la unidad, es interesante conocer los resultados de las encuestas que se adjuntan, y que completaron los alumnos al finalizar la experiencia.

Este método de trabajo tiene otras diferencias con el tradicional que merece la pena comentar previamente:

- El nivel de ruido de la clase es mayor.
- El ritmo de trabajo no es el mismo en todos los grupos.
- Hay que anotar las dificultades que se observen, tanto en los alumnos/as, como en las actividades.
- Se deben utilizar las puestas en común para detectar las progresiones de todos los alumnos y alumnas y para establecer conclusiones.
- Hay que atender a la diversidad, cuando sea necesario, a través de tareas individualizadas.

Por último, en la Unidad Didáctica junto a las actividades de los alumnos están anotados los aspectos didácticos más relevantes:

- Objetivos didácticos que se pretenden.
- Número aproximado de actividades por sesión.
- Puntos a tratar en las puestas en común.
- Dificultades apreciadas.
- Errores más comunes.
- Preguntas claves.
- Observaciones.
- Información complementaria.

Pensamos sin embargo que este trabajo, como toda labor educativa, nunca estará cerrado y agradecemos que nos comuniquen cualquier sugerencia que aprecien al leer o poner en práctica esta unidad didáctica.

OBJETIVOS "U.D. NUESTRO ENTORNO GEOMÉTRICO"

GENERALES DE LA E.S.O.

1. Comprender y producir mensajes orales y escritos y utilizarlos para comunicarse con sus semejantes y para organizar sus propios pensamientos.

2. Relacionarse constructivamente con otras personas adoptando actitudes de flexibilidad, cooperación, participación, interés y respeto.

3. Elaborar y desarrollar estrategias personales de identificación y resolución de problemas en los principales campos del conocimiento mediante la utilización de unos hábitos de razonamiento objetivo, sistemático y riguroso y aplicarlas espontáneamente a situaciones de la vida cotidiana.

4. Apreciar, disfrutar y respetar al patrimonio natural y cultural de la comunidad en la que viven.

5. Formarse una imagen equilibrada y ajustada de sí mismos, de sus características, posibilidades y limitaciones.

GENERALES DE MATEMÁTICAS

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica. algebraica) con el fin de comunicar los pensamientos propios de una manera precisa y rigurosa.

2. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática (exploración sistemática de alternativas tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones, flexibilidad para cambiar de punto de vista, gusto por la precisión en el lenguaje, etc..) en situaciones cotidianas o de resolución de problemas.

3. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.

4. Elaborar estrategias personales para la resolución de problemas matemáticos sencillos y de problemas cotidianos, utilizando distintos recursos y analizando la coherencia de los resultados para mejorarlos si fuera necesario.

5. Utilizar los números en la forma que sea adecuada a cada situación y con la precisión necesaria, realizando los cálculos pertinentes con los algoritmos básicos, distintos instrumentos (calculadora, ordenador..), o mentalmente en función de su complejidad y de la naturaleza del problema.

6. Desarrollar estrategias de medida y cálculo de magnitudes realizando estimaciones y aproximaciones de estas medidas con el grado de exactitud conveniente, según lo requiera la naturaleza de la situación, del objeto o del aspecto medido.

7. Identificar cuerpos, figuras y configuraciones geométricas en el análisis de objetos y situaciones reales, formulando inferencias sobre la manera de manejarlos y de comportarse en las mismas a partir de la consideración de las propiedades y relaciones geométricas implicadas.

8. Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar sin inhibiciones las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con algún aspecto creativo, manipulativo, estético o utilitario de las propias matemáticas.

U.D. NUESTRO ENTORNO GEOMÉTRICO

CUERPOS GEOMÉTRICOS

- CONTENIDOS
  - CONCEPTOS
    - Identificación de formas geométricas.
    - Clasificación de figuras y cuerpos atendiendo a diversos criterios.
    - Elementos característicos de los poliedros.
    - Relaciones de descomposición entre figuras y cuerpos.
    - Regularidad en cuerpos geométricos.
    - Utilidad e importancia e algunas figuras y cuerpos, para propósitos concretos.
  - PROCEDIMIENTOS
    - UTILIZACIÓN DISTINTOS LENGUAJES
      - Utilización de la terminología y anotación adecuadas para describir el tamaño y las propiedades.
      - Descripción verbal y gráfica de problemas geométricos y del proceso seguido en su resolución,confrontándolos con otros posibles.
    - ALGORITMOS Y DESTREZAS
      - Construcción de modelos geométricos, esquemas, planos y maquetas de figuras planas y espaciales, utilizando los instrumentos, materiales y técnicas adecuadas en cada caso.
      - Representación plana de cuerpos geométricos sencillos, conservando una cierta sensación de perspectiva.
      - Utilización diestra de los instrumentos de dibujo.
    - ESTRATEGIAS GENERALES
      - Utilización de la composición, descomposición, movimiento y desarrollo de cuerpos geométricos para analizarlos u obtener otro.
      - Investigación del teorema de Euler.
      - Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en cuerpos geométricos.
      - Identificación de problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los se pretende conocer.
      - Reducción de problemas geométricos complejos a otros más sencillos, para facilitar su comprensión y resolución.
      - Utilización de métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de los cuerpos y relaciones entre ellos.
  - ACTITUDES
    - REFERENTE A LA APRECIACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS
      - Reconocer y valorar la utilidad de la geometría, para resolver problemas reales de su entorno físico.
      - Sensibilidad, interés y gusto por las cualidades estéticas de las configuraciones geométricas, reconociendo su presencia en la naturaleza, el arte y la técnica.
      - Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones.
    - REFERENTE A LA ORGANIZACIÓN Y HÁBITOS DE TRABAJO
      - Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas geométricos y en la mejora de las ya encontradas.
      - Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.
      - Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas geométricos, distintas de las propias.
      - Sensibilidad y gusto por la realización sitemática y presentación cuidadosa y ordenada de rabajos geométricos.

U.D. NUESTRO ENTORNO GEOMÉTRICO

- **MEDIDAS**
  - CONTENIDOS
    - CONCEPTOS
      - Ampliación del S.M.D.: Múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales para áreas y volúmenes.
      - Significado del cambio de unas unidades a otras.
      - La medida como información cuantitativa de tamaños.
      - Utilización de instrumentos de medida.
      - Margen de error en la estimación y aproximación de medidas.
      - Mediciones indirectas: uso de fórmulas y relaciones sencillas.
    - PROCEDIMIENTOS
      - UTILIZACIÓN DISTINTOS LENGUAJES
        - Utilización del vocabulario y anotación adecuadas para describir y cuantificar relaciones, con la medida.
        - Expresión de las medidas efectuadas en las unidades adecuadas.
      - ALGORITMOS Y DESTREZAS
        - Aplicación de los algoritmos básicos en el cálculo de las áreas y volúmenes.
        - Utilización diestra de los instrumentos de medida.
        - Estimación de medidas.
      - ESTRATEGIAS GENERALES
        - Obtención de medidas por distintos procedimientos, utilizando diversas estrategias.
        - Mediciones indirectas: Uso de fórmulas y relaciones sencillas.
        - Decisión sobre qué operaciones son adecuadas en la resolución de problemas numéricos.
        - Búsqueda de forma experimental del cálculo del volumen de cubo.
    - ACTITUDES
      - REFERENTE A LA APRECIACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS
        - Valoración de la utilidad de la medida para transmitir información precisa y relativa al entorno.
        - Disposición favorable a realizar estimación y cálculo de medidas de objetos y espacios.
        - Incorporación al lenguaje cotidiano de los términos de medida para describir objetos y espacios.
      - REFERENTE A LA ORGANIZACIÓN Y HÁBITOS DE TRABAJO
        - Actitud positiva hacia la precisión en la medida mediante la utilización de instrumentos y de diferente estrategias.
        - Hábito de expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.

Orientaciones didácticas

Metodología

Una vez seleccionados los objetivos y contenidos que queremos alcanzar nos enfrentamos a una interesante tarea, "cómo enseñarlos", para que el aprendizaje de los alumnos y alumnas sea el mejor posible.

Entendemos la Metodología educativa como un elemento fundamental en la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje. Opinamos que los tradicionales problemas de las Matemáticas, tienen mucho que ver con la metodología, además de con la selección de los objetivos y contenidos.

La metodología de la unidad está basada en los principios de ***"actividad y participación"***. Nos interesa sobre todo que el alumno o alumna "haga", sin olvidar que necesita llegar con ayuda, al análisis y la reflexión, para elaborar conclusiones apoyadas en su actividad, organizada en pequeños grupos de trabajo.

El proceso de aprendizaje se inicia ante una situación concreta, es decir, desde una experiencia manipulativa directa. Posteriormente, a través de un lenguaje simbólico de representación gráfica, numérica y verbal, se intenta alcanzar cierto grado de abstracción al generalizar los conceptos matemáticos asimilados a otras situaciones semejantes y expresarlos con signos y números. Queremos conseguir **"aprendizajes significativos"**, relacionando siempre lo que se aprende con lo que ya se sabe y tratando que sea siempre algo útil y motivante.

Siguiendo este criterio hemos diseñado las actividades de forma que:

- Tengan en cuenta sus conocimientos previos.
- Estén relacionadas con su vida real y sus propias experiencias.
- Estén expresadas de forma sencilla, adaptada a sus intereses y capacidades.
- Permitan la interacción profesor/a-alumno/a y alumno/a-alumno/a, durante su realización, considerando el error como un elemento más del proceso.
- Potencien las relaciones entre los miembros del grupo, estimulando comentarios, debates, toma de acuerdos, corrección de errores, etc.
- Tengan en cuenta la diversidad de alumnos y alumnas a los que van dirigidas.
- Necesiten materiales y recursos nuevos y variados que aporten motivación.

Respecto a la organización del trabajo, pensamos que el profesor o profesora debe preparar de antemano las actividades de los alumnos y alumnas y los materiales que se necesitarán en el transcurso de la sesión. Observará atentamente el desarrollo de la misma, animará, desbloqueará, planteará nuevos interrogantes, atenderá sus particularidades, etc. y anotará lo más destacado.

Los alumnos y alumnas trabajarán organizados en grupos de cuatro, porque de esta forma se favorece el aprendizaje cooperativo y no competitivo, permite la discusión y el debate, se llega a decisiones comunes e incita a la actividad a todos los miembros del grupo. Todos los alumnos dispondrán de un cuadernillo de trabajo para cada bloque, donde realizarán las tareas.

Cada dos o tres sesiones de trabajo en grupo, se preparará una puesta en común que tiene como objetivos:

- *Comunicar* las conclusiones y soluciones encontradas por los equipos.
- Resolver dudas.
- Analizar errores.
- Reflexionar sobre las diferentes soluciones.
- Aceptar todas las estrategias utilizadas.
- *Completar los trabajos.*

También se contemplan trabajos individuales:

Fichas de síntesis:
Tienen valor como *autoevaluación y* como esquema conceptual de cada bloque.

Fichas de recuerdo:
Preparadas para reforzar los *objetivos* considerados como *previos* a esta unidad.

T. de investigación:
Para *profundizar* en algunos de los contenidos propuestos.

Pruebas de evaluación:
Tratan de *medir el* grado de consecución de algunos contenidos .

Todo para favorecer una verdadera construcción del conocimiento matemático, la adquisición de procedimientos y desarrollo de actitudes que ayuden al alumno a resolver los problemas que se le planteen en la vida real.

No ponemos en duda que se pueden enseñar Matemáticas eficazmente y atendiendo a la diversidad, pero sobre todo sabemos que *supone un gran reto para cualquier equipo docente.*

- **Temporalización**

Aportamos una serie de orientaciones didácticas, referidas a la temporalización de la unidad. Pretendemos que sean unas directrices flexibles, quedando al criterio del docente utilizarlas o adaptarlas de acuerdo a su propia programación y a sus alumnos concretos.

La unidad didáctica consta de tres partes diferenciadas, además de la prueba de diagnóstico; la duración aproximada según la experimentación realizada es la siguiente:

- **Prueba de diagnóstico:** dos sesiones.
- **I: "Cuerpos geométricos":** diez sesiones.
- **II: "Superficie de los poliedros":** doce sesiones.
- **III: "Iniciación al volumen":** diez sesiones.

En esta temporalización está incluido, el trabajo en grupo, las puestas en común, la realización de las fichas de síntesis y las pruebas de evaluación en cada uno de los bloques. Las sesiones se consideran de cincuenta minutos.

La U.D. puede aplicarse completa (aunque supone demasiado tiempo con el mismo tema), o mejor repartida entre los dos cursos escolares que comprende el primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Nuestra sugerencia es abordar la *Parte I en el primer curso de la E.S.O. y* completar *las dos restantes el segundo año del ciclo.* Aunque admite más posibilidades de aplicación, creemos que el bloque *"Iniciación al Volumen'* nunca debe aplicarse en el primer año, si tenemos en cuenta el nivel de desarrollo de los alumnos.

Evaluación

- **La evaluación del aprendizaje de los alumnos y las alumnas**

La evaluación es parte integrante y fundamental del proceso de enseñanzaaprendizaje, se realiza en tres momentos significativos y ha de cumplir tres funciones:

Inicial = diagnóstica, procesual = formativa y final = sumativa.

Con ello obtendremos los datos necesarios para valorar el proceso educativo y, en consecuencia, ajustar la actuación cuando sea preciso.

- *Inicial/Diagnóstica.*

  Se realiza al empezar la Unidad Didáctica. Permite al profesor comprobar si los alumnos tienen adquiridos y activados los conocimientos previos necesarios para los aprendizajes que se proponen.

Con este fin, pasamos a los alumnos una prueba, que recoge los contenidos mas relevantes de Geometría, estudiados en la etapa anterior. Identificamos, analizamos y paliamos en lo posible los errores y carencias existentes. En una ficha de registro alumnos/objetivos, apuntamos los resultados individuales y generales del aula, para la orientación posterior del proceso de enseñanza.

- *Procesual/Formativa.*

Es la que tiene lugar a lo largo del proceso, durante el período de formación.

Se trata de obtener una doble información:

- Respecto a los alumnos, comprobando las etapas que han superado en su proceso de aprendizaje y las dificultades observadas, para asegurar su formación.
- Respecto a la Unidad Didáctica, comprobando si se aplica según el programa establecido, y adaptando las actividades, si es necesario, para conseguir los objetivos planteados.

En esta Unidad, para esta fase evaluadora, hemos empleado la *observación sistemática*, (sobre todo en los contenidos actitudinales), la realización de todas las actividades y las fichas de síntesis y recuerdo.

- *Final/Sumativa.*

  Tiene lugar al final de la Unidad Didáctica. Está muy interrelacionada con los otros momentos evaluativos, inicial y procesual. Toma los datos obtenidos durante el proceso y añade otros conseguidos de forma puntual: pruebas específicas de evaluación y tareas de investigación.

De cada alumno se registra el grado de consecución de los objetivos didácticos propuestos. Esta evaluación nos reporta la información final, sobre el resultado del proceso, dándonos *una visión global de los logros educativos alcanzados y* de la situación de cada alumno, para el inicio de un nuevo aprendizaje.

FICHA REGISTRO DE LA OBSERVACIÓN

U.D. "NUESTRO ENTORNO GEOMETRICO"

APARTADOS / ALUMNOS		A NIVEL PERSONAL					DINÁMICA DE GRUPO		PUESTAS EN COMÚN		
		Actitud e interés	Hábitos de trabajo	Realización de actividades	Presentación	Preparación de materiales	Aportaciones	Relaciones con compañeros	Participación	Terminología apropiada	Respeto y flexibilidad
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											

- **Instrumentos para la evaluación de los alumnos y las alumnas.**

- *Observación sistemática*

Es un procedimiento esencial de evaluación, ya que nos permite valorar algunos contenidos (procedimientos y actitudes), sin que el alumno se percate de que está siendo evaluado. En la Unidad Didáctica, la observación se realizó anotando en la ficha, que se adjunta, información sobre estos apartados concretos del trabajo de los alumnos, utilizando una escala de tres puntos: 1 (bajo), 2 (normal) y 3 (alto).

- *Autoevaluación*

Realizada a través de: **Fichas de síntesis.** Cada alumno autocorrige las actividades y esta valoración le orienta sobre su situación respecto a los contenidos conceptuales de cada bloque. El profesor recoge la información para conocer los porcentajes de error de cada apartado y reajustar la intervención.

- *Pruebas de evaluación específicas.*

Se realizan al final de cada bloque. Evalúan los objetivos didácticos programados y estiman el grado de consolidación de los contenidos alcanzados por cada alumno. Junto a cada prueba se incluyen los criterios seguidos para la evaluación y la ficha de registro de datos.

- *Trabajos de investigación.*

Propuestos para realizar de forma individual o en grupo y concebidos como profundización de algún contenido programado:

- Investigación del teorema de Euler.
- Las Pirámides de Egipto.
- El cubo hueco.

- **Evaluación del proceso de enseñanza.**

No sólo debemos evaluar el proceso de aprendizaje del alumnado, sino también el proceso seguido en su enseñanza. En este sentido es necesario validar:

- *La Unidad Didáctica*

Indicadores de referencia:

- *La selección de objetivos y contenidos* responde a las condiciones y necesidades reales de los alumnos.
- El planteamiento de las distintas situaciones despierta *interés y motivación.*
- El tipo y la gradación de *las actividades* es correcto.
- *El lenguaje,* los gráficos y los dibujos utilizados son expresivos y claros.
- *El tiempo* destinado a cada tarea es suficiente.
- *El ambiente* creado en el aula, durante el desarrollo de la Unidad, facilita el proceso de aprendizaje.
- *Los materiales* son realmente utilizados para lo que se proponía.
- *Las pruebas de evaluación* responden a los objetivos didácticos programados.

- *La actuación del profesor o profesora*

Indicadores de referencia:

- Su participación a lo largo del proceso.
- La atención a todos los alumnos y alumnas.
- La dedicación a la diversidad.
- La oportunidad de su intervención.

- **Instrumentos para la evaluación del proceso**

La tarea de valorar la actuación de uno mismo o de su propio trabajo es muy difícil. Es imprescindible el apoyo en datos externos. En esta Unidad Didáctica hemos empleado los siguientes:

- *Cuestionarios*

Contestados por los propios alumnos y alumnas, recogen su valoración de bastantes aspecto de la Unidad y sobre su aprendizaje. Son las *encuestas valorativa y de autoevaluación.*

- *Contraste de experiencias*

Todos los profesores que experimentamos total o parcialmente esta Unidad, analizamos y reflexionamos sobre todos los aspectos mencionados—Pusimos en común, las dificultades, los desajustes, los fallos. Revisamos la metodología, el papel de los grupos, del profesor, de los materiales. Reformamos la secuenciación de objetivos y contenidos, las actividades, las pruebas de evaluación etc.—.

Fruto de este contraste de experiencias es la Unidad Didáctica que damos a conocer y en la que se han producido sucesivas modificaciones:

- Simplificación de la prueba de diagnóstico.
- Ampliación del tiempo destinado a puestas en común.
- Organización de la Unidad en tres bloques.
- Diseño de fichas de recuerdo.
- Planteamiento de tareas de investigación.
- Ampliación de contenidos referidos a la superficie de los poliedros.
- Supresión de los objetivos y contenidos relativos a la superficie de los cuerpos redondos.
- Preparación de más actividades para el bloque de iniciación al volumen.

ENCUESTA VALORATIVA

Nº de alumnos .... Curso ....

Me gustaría conocer tu opinión sobre el sistema de trabajo empleado en el desarrollo de la Unidad Didáctica, en estos aspectos:

	M.BIEN	BIEN	REGULAR	MAL
Trabajo de los alumnos:				
Grupos de trabajo de 4 alumnos.				
El trabajo individual.				
Las puestas en común.				
Actividades realizadas:				
La cantidad en cada sesión.				
El estilo de las actividades.				
Los materiales utilizados.				
La actuación del profesor/a.				
Evaluación realizada:				
Prueba de diagnóstico (inicial)				
Fichas de Síntesis.				
Pruebas de evaluación				

ENCUESTA DE AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona sobre el trabajo que has realizado con la Unidad Didáctica "Nuestro Entorno Geométrico", y contesta a estas preguntas:

CUESTIONARIO	SI	EN PARTE	NO
¿Estas contento/a con la labor que has desarrollado en la Unidad?			
¿Estás satisfecho/a con lo que has aprendido de cada bloque?.			
¿Era la primera vez que estudiabas los contenidos que hemos trabajado?.			
¿Confías en saber aplicar a los problemas, lo aprendido en esta Unidad?.			
¿Crees que estás bien preparado para seguir ampliando tus conocimientos sobre Geometría?.			

Escribe tus propeustas para mejorar:

Los grupos: ....

El trabajo personal: ....

Otras: ....

Materiales y recursos didácticos

Si observamos los materiales didácticos existentes en la actualidad, de inmediato descubriremos que están pensados prioritariamente para facilitar el aprendizaje de contenidos de carácter conceptual. Así sucede con gran parte de los actuales libros de texto. El aprendizaje de nuestros alumnos comienza por la observación del mundo que les rodea. Perciben objetos concretos. El paso de lo concreto a lo abstracto resulta más natural utilizando todo tipo de materiales.

Valerse de materiales en el aula, permite no solamente introducir conceptos, sino que además, permite descubrir las aptitudes matemáticas naturales del alumno, desarrollar destrezas, habilidades y fomentar la creatividad.

El inconveniente mayor que casi todos los profesores ponemos al trabajo con materiales y recursos, es el tiempo consumido en su utilización y construcción. Pero este tiempo estará bien empleado, si la actividad reflexiva y creadora domina sobre la estrictamente manual.

Para el desarrollo de esta unidad didáctica son necesarios los siguientes materiales y recursos:

- Objetos de uso habitual con forma de cuerpos geométricos
- Cajas de cuerpos geométricos opacos y transparentes.
- Transparencias o diapositivas.
- Retroproyector o proyector de diapositivas.
- Pajitas y limpia-pipas, que permiten la construcción de cuerpos geométricos en el espacio.
- Plantilla de cuerpos geométricos, para la construcción de poliedros.
- Polydrón, piezas de plástico encajables.
- Policubos, consisten en piezas cúbicas de 2 cm. de arista, que pueden ensamblarse por cualquiera de sus caras.
- Centicubos o bloques multibase, cubos de 1 cm. de arista.
- Metro cúbico desmontable.
- Libros de texto y consulta.
- Regla, escuadra, cartabón.
- Tijeras, pegamento, cartulina, dados, etc.

Bibliografía

"Didáctica de la matemática moderna". Emma Castelnouvo. Editorial Trilla.

"Geometría I y II". *"Cuerpos"*. Ministerio de E. y C.

"Figuras y Cuerpos". Ministerio de E. y C

"Geoplanos y Mecanos". Menchu Bas, Javier Brihuega. Ministerio de E. y C.

"Geometría y Experiencias". Jesús García y Celesti Bertrán. Editorial Alhambra.

"El aprendizaje significativo en el área de las Matemáticas" Carmen Chamorro. Editorial Alhambra.

"Primaria Area de Matemáticas". Ministerio de E. y C.

"Secundaria. Area de Matemáticas". Ministerio de E. y C.

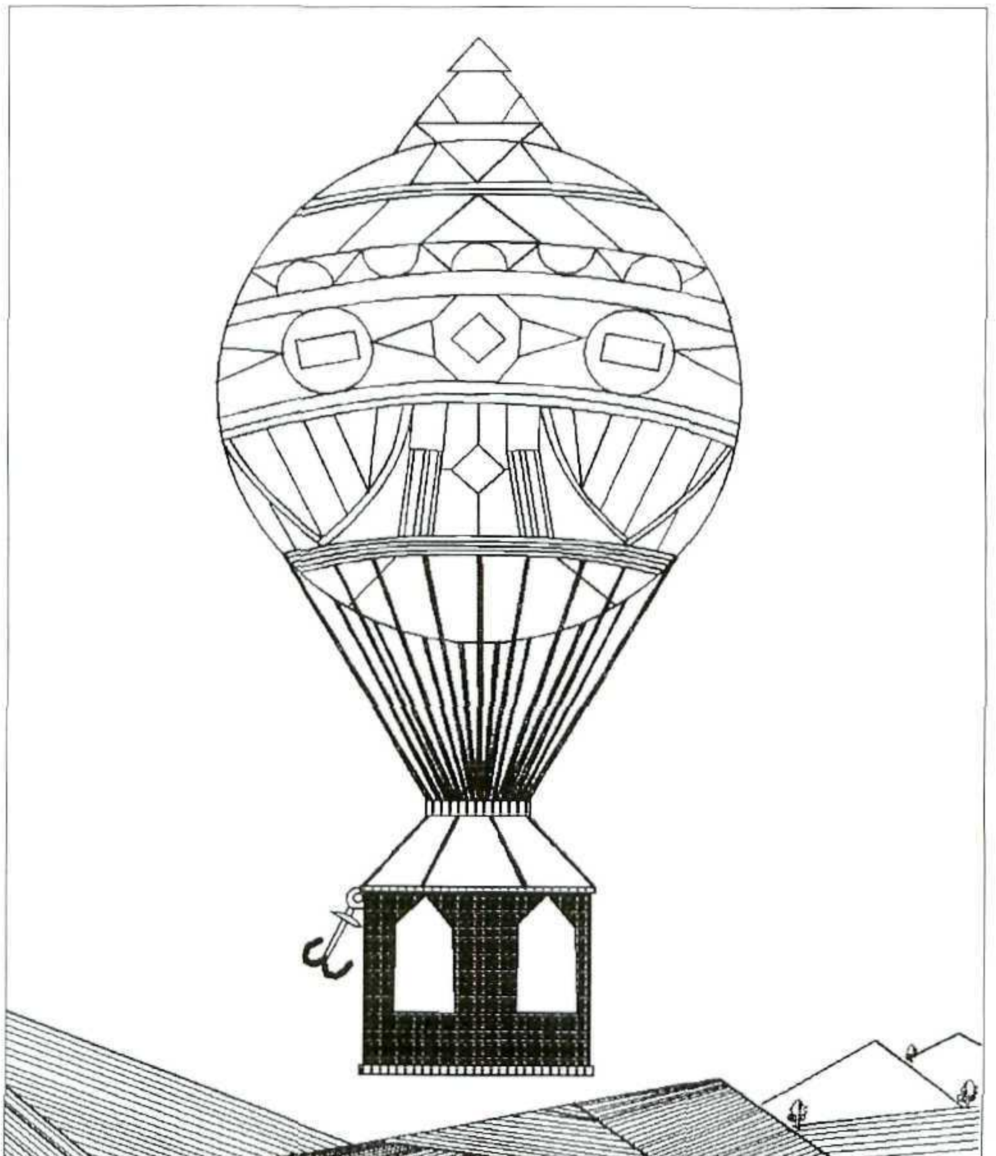
"Secundaria. Orientaciones Didácticas". M. E. C.

"La evaluación del Centro Educativó ". M. E. C.

Desarrollo de la unidad didáctica

Prueba de diagnóstico

1.- Observa atentamente el dibujo, y bordea las figuras GEOMÉTRICAS PLANAS del mismo, utilizando un color distinto para cada tipo de figura. Es suficiente con seis figuras diferentes.



2.- **Completa** el siguiente cuadro con los POLÍGONOS que hayas encontrado en el dibujo.

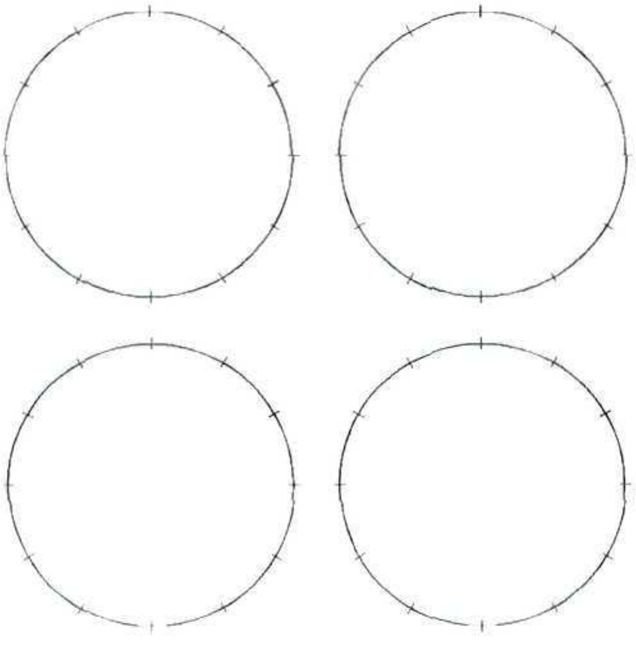
NÚMERO DEL POLÍGONO	NOMBRE DEL POLÍGONO	NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE VÉRTICES

3.- **Consulta** el dibujo anterior y contesta:

- *¿Hay polígonos con el mismo número de lados que tengan distinto nombre?.*
- *Cita al menos tres polígonos en los que suceda eso:*
- *Escribe el nombre que reciben todos los polígonos que tienen ese número de lados.*

4.- **Dibuja** un POLÍGONO REGULAR distinto en cada una de las siguientes circunferencias:

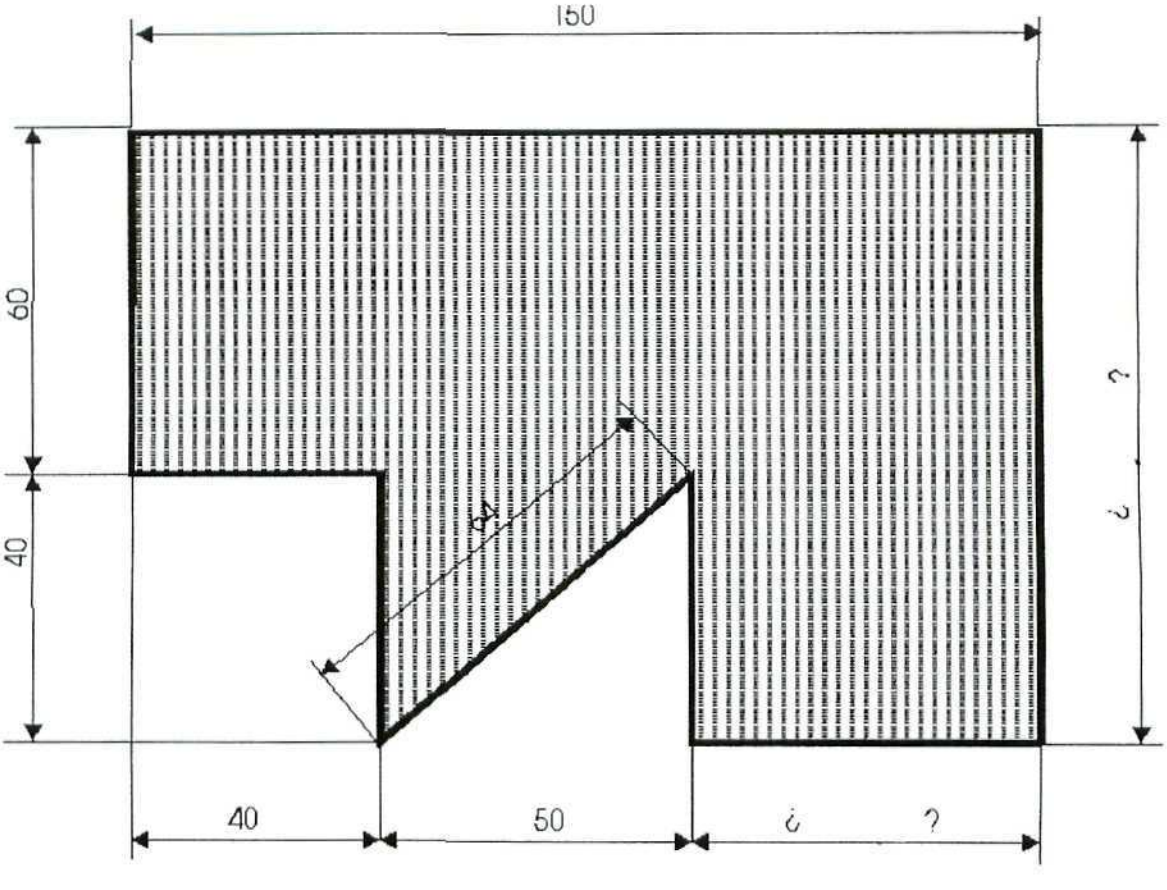
(La pregunta está diseñada para que los alumnos puedan dibujar fácilmente un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono y un dodecágono.)



5.- Colorea el **perímetro** de cada polígono en rojo y la **superficie** en verde.

6.- Observa con atención este dibujo y considera las medidas en centímetros.

a) Completa las **medidas** que faltan
b) Calcula el **perímetro,** (procura no olvidarte de ningún lado).
c) Calcula la **superficie** por partes, descomponiendo la figura en otras: rectángulos, cuadrados, triángulos, etc.



Evaluación de la prueba de diagnostico

Finalizada la prueba, el profesor revisa las actividades, para detectar y analizar, en un primer momento, los principales errores y carencias existentes. En la siguiente sesión de trabajo, con todos los alumnos y alumnas, se revisan en profundidad y se resuelven las dudas, se corrigen los errores, se comprueban los resultados, etc.

Según nuestra experiencia, las principales confusiones y dificultades son: — Incluir el círculo como polígono. — Desconocer el nombre de los polígonos de más de cuatro lados. — Dibujar el rectángulo como polígono regular. — Dificultades en la interpretación del dibujo. — Errar en el cálculo del perímetro. — Calcular incorrectamente el área del triángulo rectángulo, (no identifican la base y la altura).

o Criterios para el registro de la prueba.

Señalamos los criterios para considerar que los objetivos están adquiridos.

1.	Reconoce figuras geométricas planas.	Seis figuras si. Menos de seis no.
2a	Identifica polígonos.	Sólo polígonos, si. Círculo y circunferencia, no.
2b	Conoce el nombre de los polígonos.	La mayoría, si Sólo de cuatro lados, no.
2c	Lados y vértices.	Hay siempre igual número, si. No es el mismo número, no.
3.	Los cuadriláteros.	Conoce tres cuadriláteros, si. Conoce menos de tres, no.
4.	Dibuja polígonos regulares.	Todos regulares, si. Uno no es regular, no.
5.	Identifica perímetro y superficie.	Lo hace correctamente, si.
6a	Interpreta el dibujo.	Completa los datos, si. No los completa, no.
6b	Calcula el perímetro.	Correctamente, si. Faltan lados, no.
6c	Calcula la superficie por descomposición	Cuadrado, si/no. Rectángulo, si/no. Triángulo, si/no.

FICHA REGISTRO DE LA PRUEBA

DE "DIAGNOSTICO"

ACTIVIDADES		FIGURAS PLANAS						CONCEPTOS		APLICACIÓN A PROBLEMAS				
			POLÍGONOS									SUPERFICIE		
		Reconoce	Identifica	Nombra	Lados y vértices	Cuadriláteros	Dibuja regulares	Perímetro	Superficie	Interpreta	Calcula perímetro	Cuadrado	Rectángulo	Triángulo
ALUMNOS		1	2a	2b	2c	3	4	5		6a	6b	6c		
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														
26														
27														
28														
29														
30														

I. Cuerpos Geométricos

Un día antes se les pedirá a los alumnos que traigan a clase material diverso con forma de CUERPOS GEOMÉTRICOS.

PRIMERA SESIÓN: Entrega del primer cuadernillo a los alumnos. Lectura y comentario de la introducción, el esquema y los materiales de la Unidad Didáctica.

Introducción

El hombre ha vivido siempre con formas geométricas que se encuentran en vegetales, animales y minerales. Dichas formas las ha ido incorporando en sus instrumentos de trabajo, a los lugares en los que vive, al arte, a la arquitectura, etc. En el entorno que nos rodea, en casa, en la calle, en clase, etc., además de las figuras planas que ya conocéis, encontramos otras formas geométricas que ocupan un lugar en el espacio y que llamamos CUERPOS GEOMÉTRICOS.

- **Esquema**

  - Identificación.
  - Clasificación.
  - Construcción.
  - Representación.
  - Elementos y características.

- **Materiales**

De los alumnos.

- Objetos de uso habitual que tengan forma de cuerpo geométrico.
- Regla, escuadra y cartabón.
- Tijeras y pegamento.
- Libro de texto y consulta.
- Dados.

Del aula de matemáticas.

- Caja de cuerpos geométricos.
- Tramas isométrica y cuadriculada.
- Pajitas de sorber líquidos y limpia-pipas.
- Polydrón.
- Policubo.
- Transparencias.

OBJETIVO DIDACTICO: Observar, recoger y clasificarlos cuerpos del entorno, atendiendo a diversos criterios.

Actividades

1.- **Recoged** objetos de uso habitual, (botes de conserva, cajas, recipientes,....), que sean cuerpos geométricos y traedlos a la clase.

a) Agrupad en montones los cuerpos recogidos, teniendo en cuenta las características comunes en cuanto a la forma.

b) Anotad lo que tienen en común, los objetos de cada grupo.

Uno de los errores más frecuentes, es nombrar a los cuerpos geométricos como si fueran figuras planas: cuadrados, triángulos, círculos...

c) Distribuye los grupos anteriores en estos recuadros. **Escribe** el nombre de los objetos que pertenecen a cada uno y dibuja un representante. **Anota** el criterio acordado.

GRUPO Nº 1	GRUPO Nº 2
CRITERIO	CRITERIO
GRUPO Nº 3	GRUPO Nº 4
CRITERIO	CRITERIO

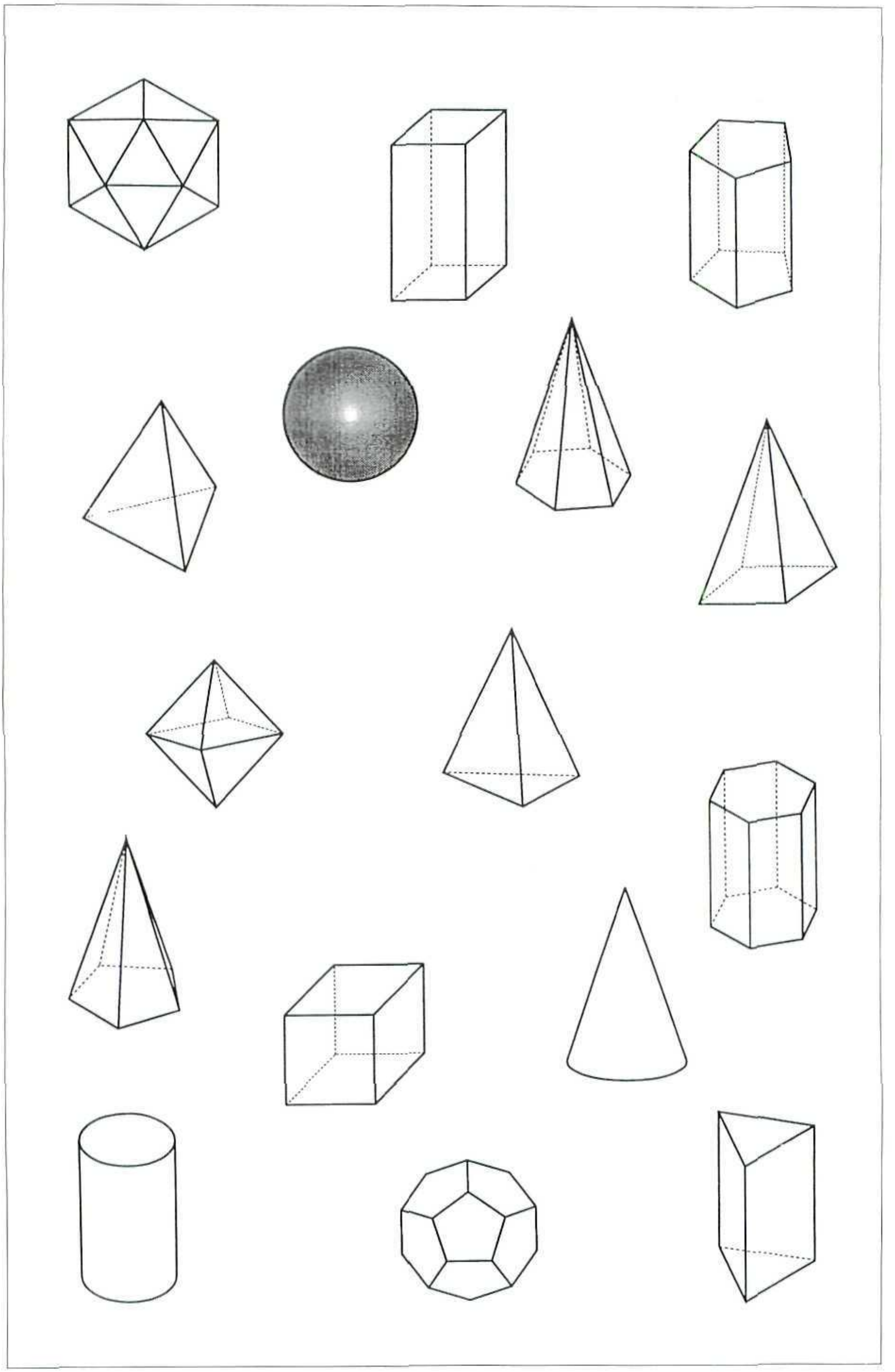
2.- **Haz una lista** de otros cuerpos geométricos, que has visto en el colegio, en la calle, en casa etc., y que no puedas traer aquí. Anota junto a cada cuerpo, el número del grupo, de la actividad anterior, en el que estaría.

CUERPOS GEOMÉTRICOS	Nº DEL GRUPO

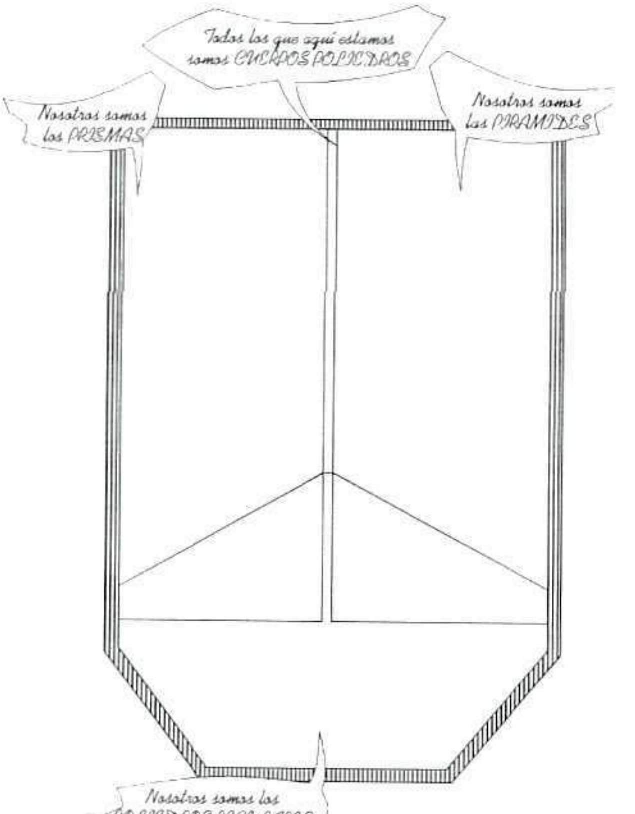
SEGUNDA SESIÓN.
OBJETIVO DIDÁCTICO: Clasificar los cuerpos geométricos en cuerpos redondos y poliedros, y éstos en prismas, pirámides y poliedros regulares.

3.- Para realizar esta actividad debéis utilizar la caja de **cuerpos geométricos** que hay en el aula, los libros de consulta y los dibujos de la plantilla:

a) Recorta un cuerpo,
b) Colócalo y pégalo en el lugar que corresponda,
c) Escribe su nombre.



Conviene orientar a los alumnos sobre la distribución de los dibujos en los gráficos. En el correspondiente a los poliedros, hay que advertir sobre la intersección; está pensada para los cuerpos que cumplen los dos criterios: el cubo y el tetraedro.



OBJETIVO DIDACTICO: Buscar las diferencias existentes entre las distintas clases de cuerpos geométricos.

4.- Escribe las diferencias entre poliedros y cuerpos redondos. Fíjate en la clasificación que has hecho en la actividad anterior.

POLIEDROS	CUERPOS REDONDOS

TERCERA SESION: Puesta en común de las actividades realizadas hasta ahora: número 1, 2, 3 y 4.

- *Los grupos de alumnos exponen los agrupamientos que realizaron con el material y los criterios empleados.*
- *Comunican qué cuerpos geométricos anotaron en la lista (actividad 2), y el criterio de clasificación.*
- *Se revisa la clasificación de los cuerpos geométricos y el nombre de cada uno.*
- *Con la aportación de cada grupo, se sacan conclusiones sobre las principales diferencias entre poliedros y cuerpos redondos.*
- *Se hacen descripciones verbales de cuerpos geométricos, utilizando el vocabulario adecuado: es un poliedro..., es un cuerpo redondo..., sus caras son..., etc.*
- *Se juega a "identifica este cuerpo", después de entregar a cada grupo uno distinto.*

CUARTA SESION. OBJETIVO DIDACTICO: Observar cuerpos geométricos en la arquitectura, el arte, la técnica, y apreciar su belleza.

TRANSPARENCIAS.

Esta actividad se realiza con toda la clase. Se pide a los alumnos que señalen y nombren los cuerpos geométricos que identifiquen en cada transparencia. Al presentarlas, el profesor puede dar una información oral de cada una de ellas. El orden de las transparencias sigue un criterio cronológico.

Primera transparencia: *Pirámide de Keops.*
Dibujo esquemático del complejo de Keops y sección de la Gran Pirámide. Se cree que fueron necesarios cien mil hombres para su construcción, y es la única de las llamadas "siete maravillas" que ha llegado hasta nuestros días.

Segunda transparencia: *Castillo de Peñafiel.*
Importante castillo de la provincia de Valladolid, de doscientos diez metros de largo y veinte de ancho, con forma de barco aunque no se aprecie en la transparencia. Tiene, torre del homenaje, patios de armas y se encuentra estratégicamente situado en un cerro.

Tercera transparencia: *Calle de la Lira y Torre de la Iglesia de San Martín.*
Calle del antiguo barrio de la judería de Valladolid.Torre sobria, de estilo cisterciense.

Cuarta transparencia: *Iglesia de Santa María la Antigua.*
La torre de esta iglesia constituye un elemento identificador de la ciudad de Valladolid. La torre y parte del claustro es de estilo románico, (siglo XII), y el resto es gótico.

Quinta transparencia: *Edificio de Correos y Telégrafos de Valladolid.*
Situado en la Plaza de la Rinconada, próximo al Ayuntamiento, destacan del edificio sus grandes ventanales.

Sexta transparencia: *Construcciones Energéticas. Dibujo de una torre de perforación de petróleo. Depósito de gas natural licuado. La forma esférica, hace que sea prácticamente imposible una explosión. Esquema del edificio donde está alojado el núcleo de un reactor nuclear. Esquema de los principales elementos de una central nuclear.*

Al finalizar la sesión se puede pedir a los alumnos un trabajo de investigación, sobre los principales monumentos de su ciudad, relacionando de esta forma los contenidos de geometría con el área de Ciencias Sociales.

5.- Después de observar las transparencias, comenta con tus compañeros de grupo, el uso que de los cuerpos geométricos, ha hecho el hombre, en la arquitectura, el arte y la técnica. Anota tus impresiones sobre su utilidad y belleza.

QUINTA SESION.
OBJETIVOS DIDACTICOS: Construir estructura de prismas y pirámides. Relacionar las estructuras construidas con los dibujos correspondientes.

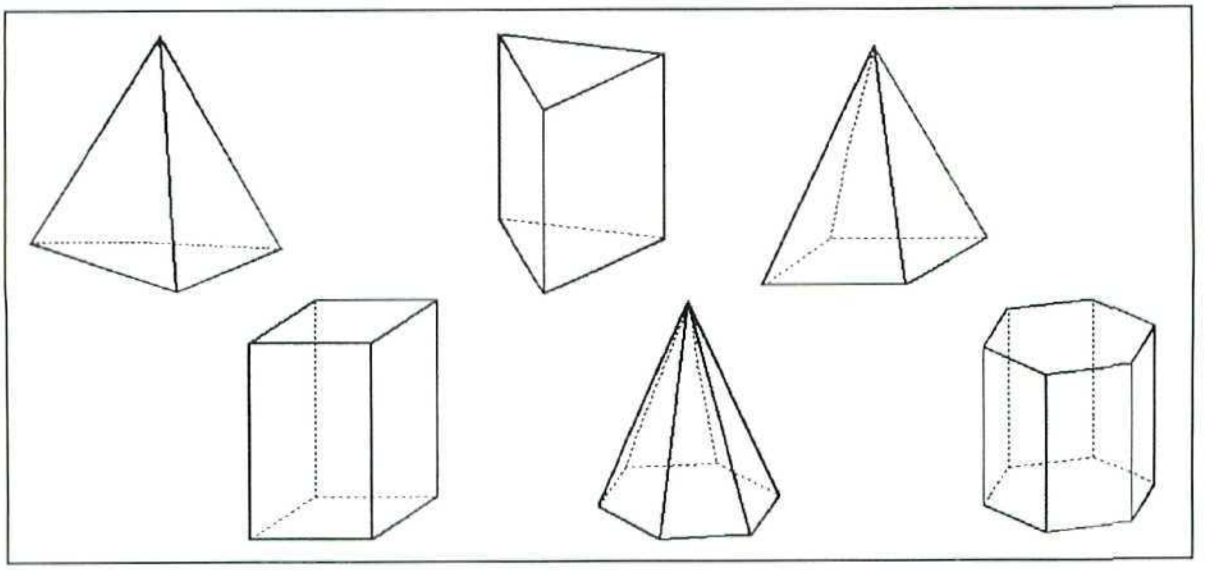
6.- **Construye** la estructura de estos prismas y pirámides, utilizando las pajitas y los limpia-pipas:

- Un prisma triangular, (bases triangulares).
- Un prisma cuadrangular, (bases cuadradas).
- Un prisma hexagonal, (bases hexagonales).
- Una pirámide triangular.
- Una pirámide cuadrangular.
- Una pirámide hexagonal.

Utiliza pajitas del mismo color para cada tipo de figura. Cada miembro del grupo debe construir uno de los cuerpos propuestos. Los de base hexagonal convienen realizarlos entre dos.

7.- Relaciona las estructuras construidas en el grupo, con los dibujos de la siguiente página, coloreándolos con el mismo color que la estructura correspondiente.

Escribe debajo de cada dibujo su nombre. Fíjate en la clase de poliedro que es y en la forma de las bases.



OBJETIVOS DIDÁCTICOS:
Identificar y contar los principales elementos en los poliedros regulares: caras, aristas y vértices.
Organizar datos mediante tablas.

8.- Elige de la caja de cuerpos geométricos los que son poliedros regulares. **Diseñad** una tabla y anotar: nombre, caras, vértices y aristas de cada figura:

Trabajo de investigación

Todos recordáis que el matemático griego **Pitágoras,** formuló un teorema que lleva su nombre y que se aplica en Geometría a los triángulos rectángulos. A lo largo de la historia, han existido otros matemáticos que también nos dejaron importantes trabajos relativos a los poliedros:

Platón (420-348 a. C.), fundó en Atenas su famosa Academia, en cuya entrada había rótulo que decía: "Nadie entre aquí que no sepa Geometría". A él se deben los llamados **sólidos platónicos:** los cinco poliedros regulares.

Arquímedes (287-213 a. C.), uno de los más grandes matemáticos de la antigüedad. Descubrió los trece poliedros semirregulares que se pueden formar con polígonos regulares diferentes: **sólidos de Arquímedes.** *(Ver anexo).*

Investiga sobre otros matemáticos que aportaron conocimientos relativos a las formas geométricas. Haz un pequeño resumen.

Leonhard Euler, nació en Basilea en 1707, y murió en San Petersburgo en 1783. Localiza estas ciudades en un atlas y anótalo.

• Actividades

Toma del polydrón, palabra que viene del griego poliedro, y significa sólido de muchas caras, cuatro triángulos equiláteros. **Construye** con dichos triángulos un tetraedro.

Coge ahora cuadrados, e intenta construir con ellos un cubo.

Haz lo mismo que antes, pero con doce pentágonos, para componer un dodecaedro.

Si utilizas tres triángulos y tres rectángulos, ¿que poliedro formas?.

Con los cuerpos anteriores, **completa** esta tabla.

NOMBRE DEL POLIEDRO	NÚMERO DE CARAS	NÚMERO DE VÉRTICES	NÚMERO DE ARISTAS

Observa los datos de la tabla:

a) El número de aristas siempre es   que el número de caras.

b) El número de vértices también es   que el número de caras.

c) Teniendo en cuenta tus respuestas completa la siguiente igualdad.

________________ + ________________ = ________________ + 2

Comprueba si dicha igualdad se cumple en cualquier poliedro.

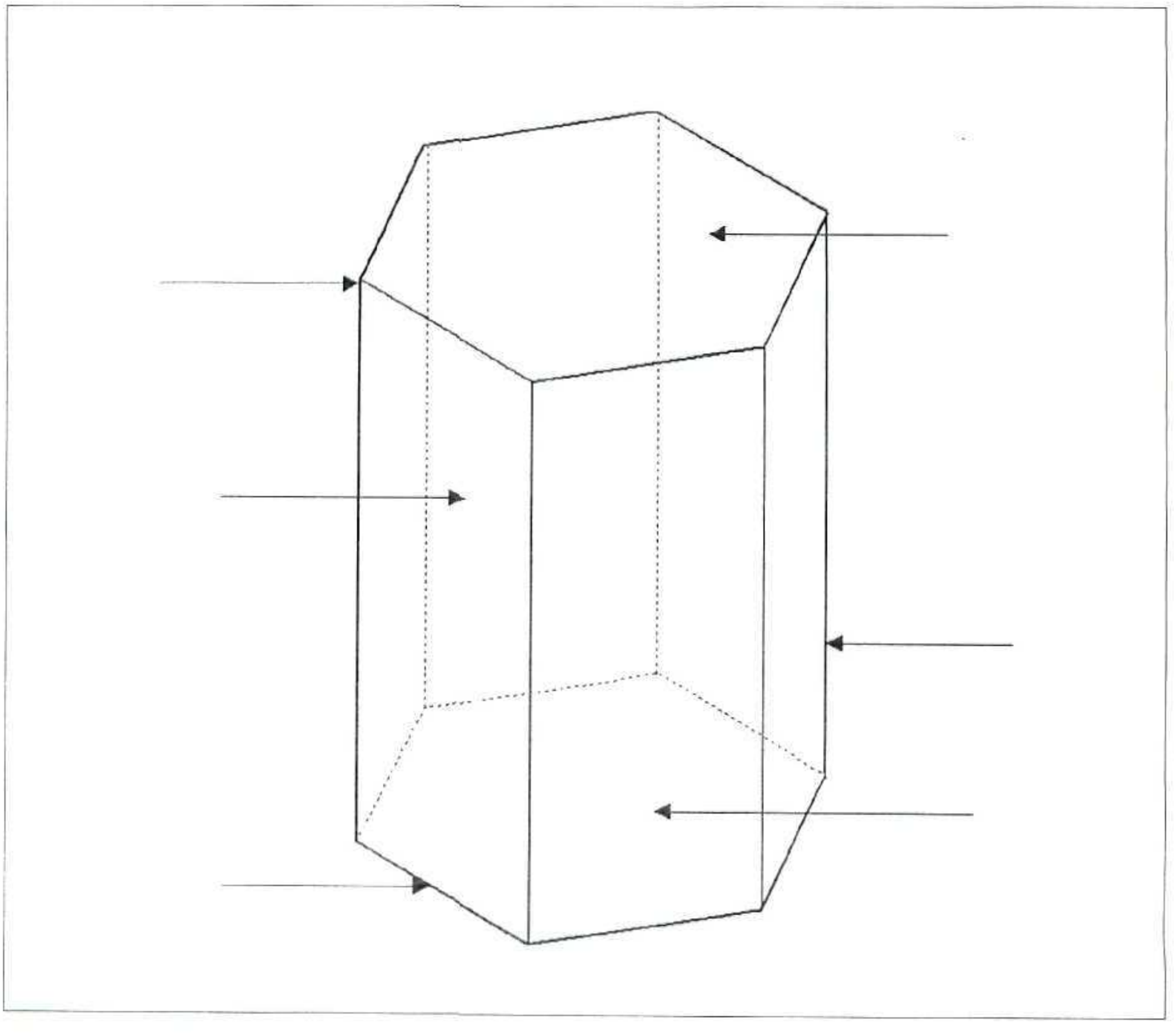
CONCLUSIÓN: Leonhard Euler, descubrió la relación existente entre:

por lo que se conoce como **Teorema de Euler.**

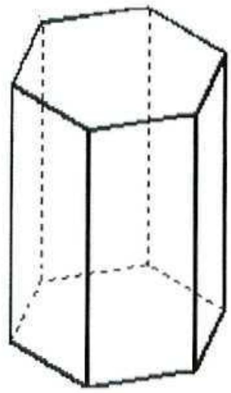
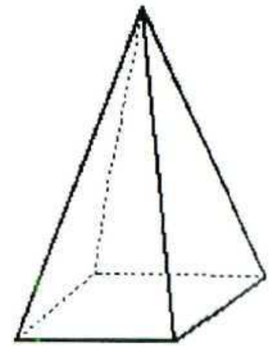
SEXTA SESION.
OBJETIVO DIDACTICO: Identificar, contar y describir los principales elementos de los poliedros irregulares: caras, aristas y vértices.

8.- Aquí tienes un prisma en el que están señalados sus elementos mediante flechas. Utiliza los libros de consulta y **escribe** el nombre completo de cada uno de ellos.

Es importante que diferencien claramente entre, caras laterales y básicas y, entre aristas laterales y básicas.



8.- **Completa** el siguiente cuadro, utilizando, si es necesario, el prisma y la pirámide de la caja de cuerpos geométricos.

POLIEDROS IRREGULARES			
CARAS	NÚMERO		
BÁSICAS	FORMA DE		
CARAS	NÚMERO		
LATERALES	FORMA DE		
NÚMERO	BÁSICAS		
DE	LATERALES		
ARISTAS	TOTALES		
VÉRTICES	NÚMERO		

10.- Después de realizar las actividades anteriores, **escribe** el significado de los siguientes términos:

Caras básicas:

Caras laterales:

Aristas:

Vértices:

SÉPTIMA SESIÓN: Puesta en común de las actividades realizadas desde la tercera sesión: números 6, 7, 8, 9 y 10.

- *Un miembro de cada grupo expone cómo se desarrolló la construcción de estructuras de prismas y pirámides con pajitas, y su impresión de la experiencia.*

- *Se comprueba si todos los alumnos relacionan el nombre del poliedro con la forma de su base.*

- *Se indaga la estrategia utilizada, por cada grupo, para el recuento de los elementos en los poliedros regulares.*

- *Se comentan y aceptan todas las estrategias.*

- *Se expone, por parte de los grupos, los resultados de la tarea de investigación, sobre el teorema de Euler.*

- *Se invita a los alumnos, a que investiguen sobre los poliedros semirregulares, dando algunas pistas sobre qué polígonos regulares combinar: pentágonos con triángulos, hexágonos con pentágonos (balón de fútbol), hexágonos con cuadrados, etc. (Ver anexo).*

- *Se confirma que cada grupo de alumnos, ha escrito el nombre completo de los elementos de los poliedros irregulares.*

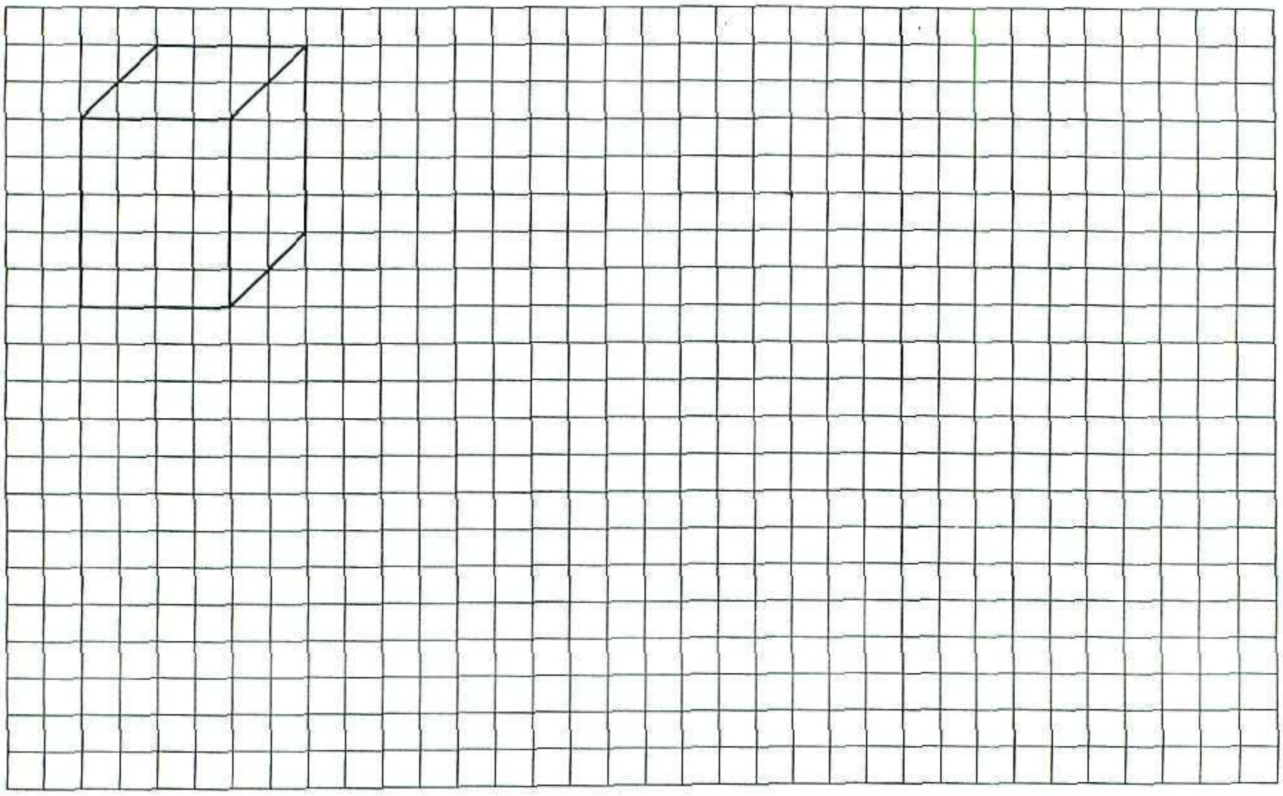
- *Cada grupo expone la descripción ~e los elementos: caras, aristas y vértices.*

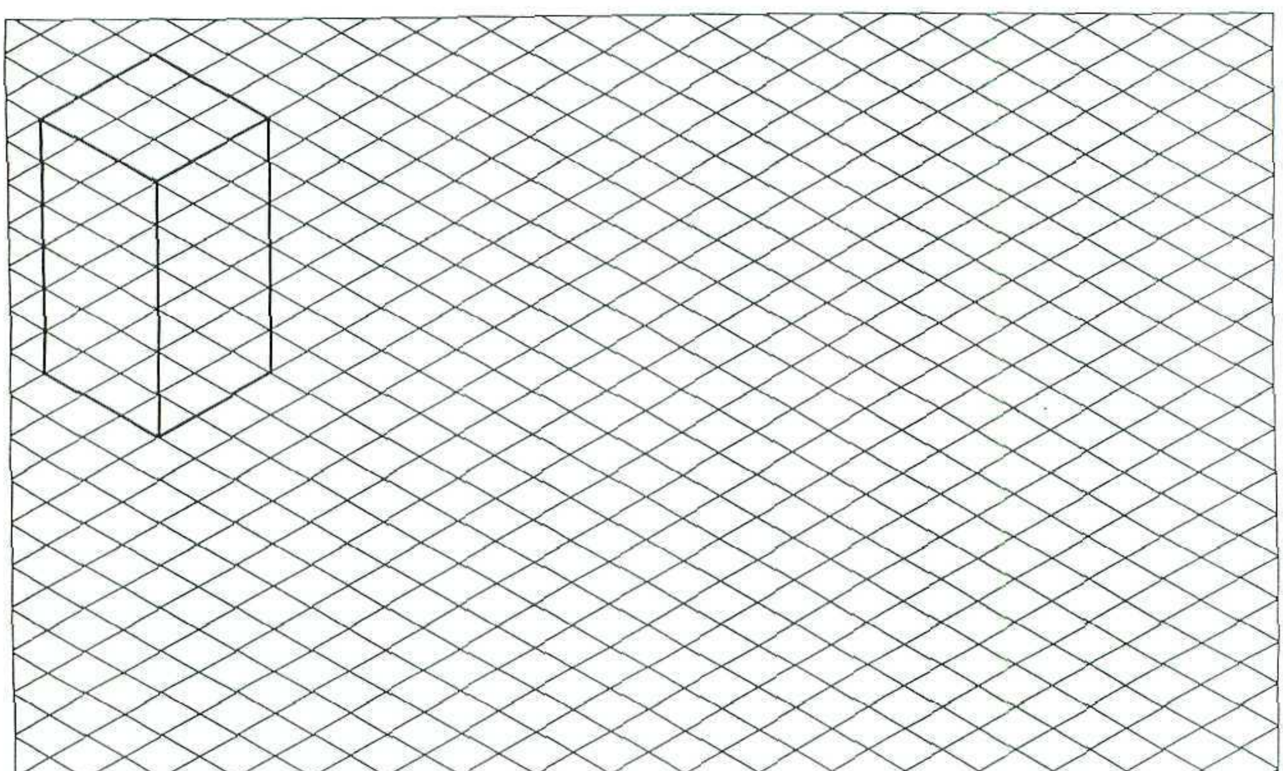
- *Se sacan conclusiones sobre estas descripciones utilizando el vocabulario geométrico adecuado.*

OCTAVA SESIÓN.
OBJETIVOS DIDÁCTICOS: Identificar y dibujar primas y pirámides con perspectiva.
Utilizar los instrumentos de dibujo.

11.- Dibuja en las "tramas" siguientes, algunos cuerpos geométricos, (al menos dos prismas y dos pirámides).

Observa atentamente el modelo dibujado, porque te servirá de ayuda.



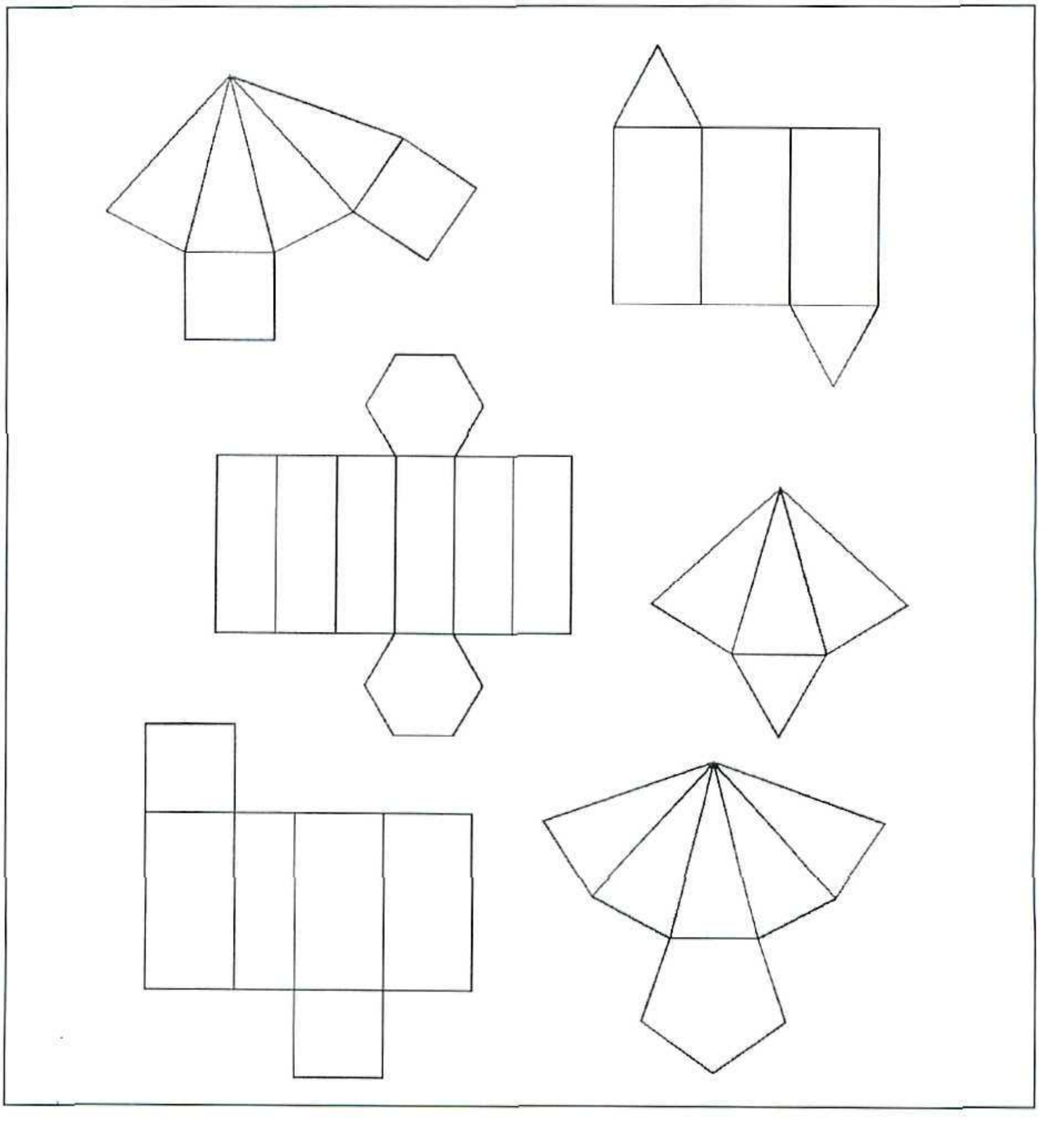


OBJETIVOS DIDÁCTICOS: Reconocer desarrollos planos correspondientes a prismas y pirámides.

12.- Observa los siguientes dibujos:

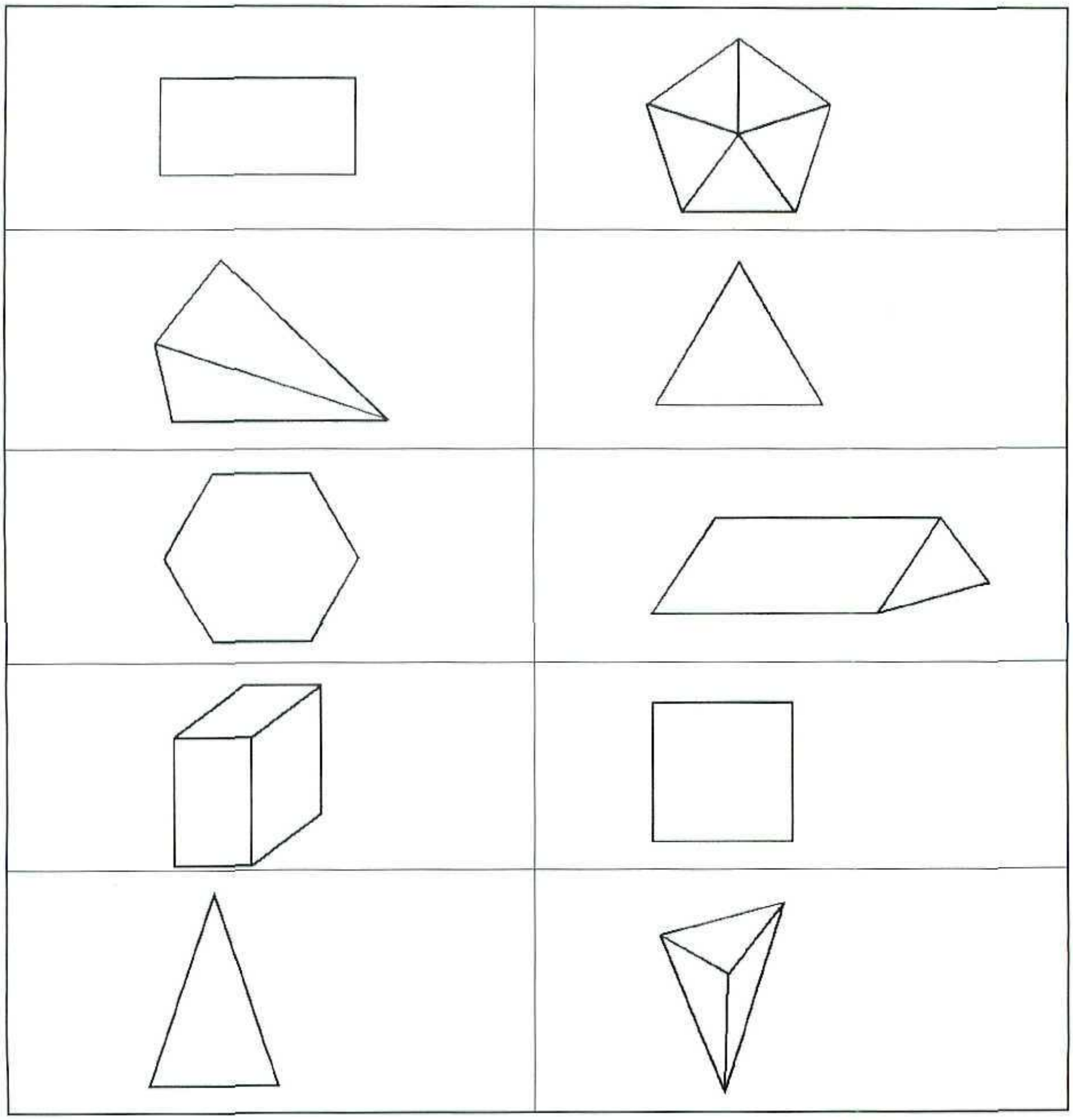
a) Indica junto a cada uno de ellos si es o no desarrollo de un prisma o de una pirámide.

b) Si lo es, escribe el nombre del prisma o la pirámide.



OBJETIVO DIDÁCTICO: Identificar y relacionar dibujos totales o parciales con el cuerpo geométrico correspondiente.

13.- **Observa** las siguientes figuras, **indica** a qué cuerpos geométricos pueden pertenecer cada una de ellas.



Conviene animar a los grupos de alumnos, a que agoten todas las posibilidades de cada una de las figuras propuestas.

NOVENA SESION: Puesta en común de las actividades 11, 12 y 13. Realización de la Ficha de Síntesis 1.
Autoevaluación y recogida de datos.

Ficha de síntesis 1: los cuerpos geométricos

1.- En el entorno hay infinidad de objetos que tienen formas muy variadas, las cuales se aproximan a los cuerpos geométricos como:

– Un dado a un ______________________

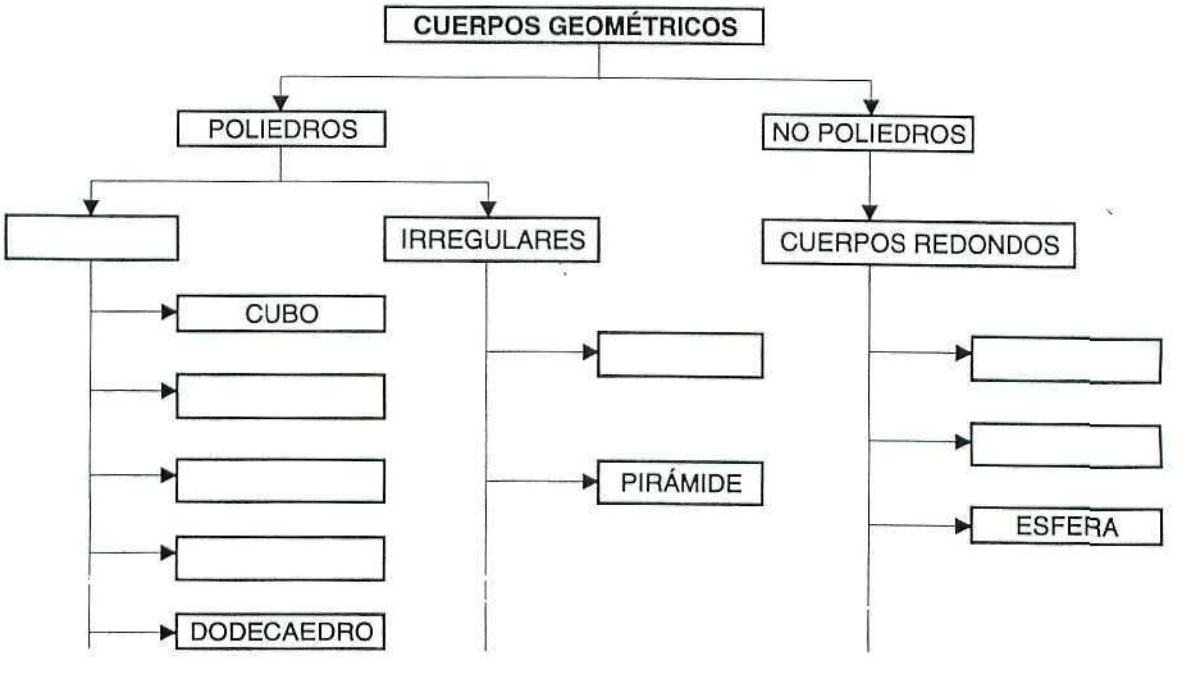
– Una pelota a una ______________________

– Un bote a un ______________________

– Una caja de leche a un ______________________

– Un cucurucho a un ______________________

2.- Entre los cuerpos geométricos, distinguimos los que están limitados por polígonos, *como la caja de leche, y otros que no, como el cucurucho de helados.* Según esto, **completa:**



3.- **Poliedro** es todo cuerpo limitado por ______________________________

4a.- **Poliedro regular,** es aquél cuyas __________ son polígonos iguales __________ entre sí, de modo que en cada vértice concurren el mismo número de __________

4b.- Sólo existen ______________ **poliedros regulares.**

5a.- Los elementos de los poliedros son aristas, ______________ y ______________

5b.- Los **prismas** tienen siempre ________ bases y sus caras laterales son ____________

5c.- Las **pirámides** tienen siempre ________ base, y sus caras laterales son ____________

6.- Según los polígonos de las bases, los prismas y las pirámides pueden ser:

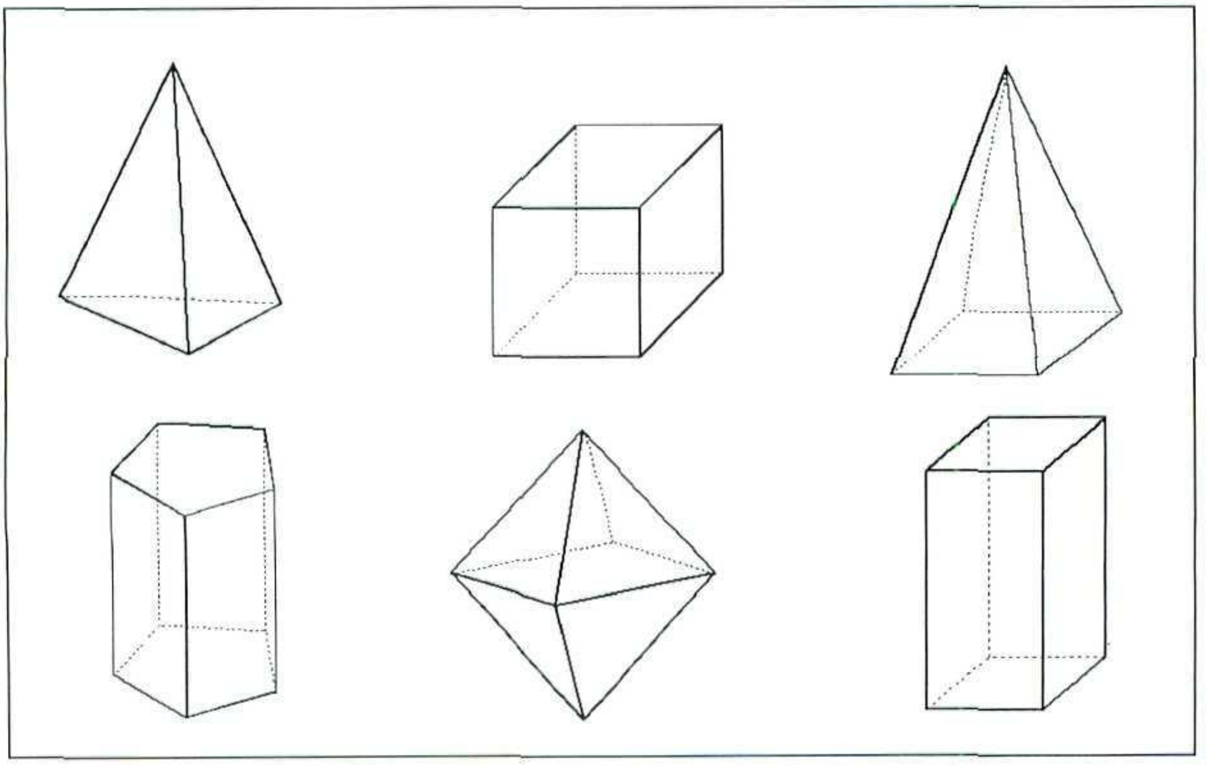
Si la base es un triángulo se llama triangular.

Si la base es un cuadrado se llama ____________________

Si la base es un __________ se llama __________

Si la base es un __________ se llama __________

7.- Escribe el nombre de estos prismas, pirámides y poliedros regulares:

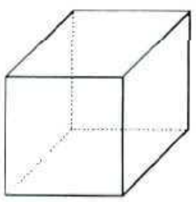
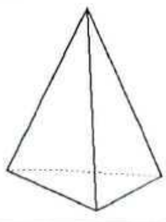
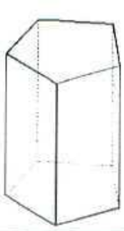


DÉCIMA SESIÓN: Prueba de evaluación, ***I: los Cuerpos Geométricos.***

1.- **Escribe** los números de la primera columna, en los cuerpos geométricos de la segunda y tercera columna:

	a)	b)
1. Canica		
2. Dado	Cilindro	
3. Gorro de payaso	Prisma	**CUERPO**
4. Rodillo	Esfera	**REDONDO**
5. Tejado de torre	Cono	
6. Caja de zapatos	Poliedro regular	
7. Lápiz de dibujo	Pirámide	**POLIEDRO**
8. Tubo fluorescente		

2.- Completa el siguiente cuadro:

Cuerpos geométricos	Nº de vértices	Nº de aristas	Nº de caras	Nombre de los polígonos de todas las caras
Cubo 				
Pirámide 				
Prisma 				

3.- **Describe** las diferencias entre:

	DIFERENCIAS
a) Cuerpos redondos y poliedros.	
b) Prismas y pirámdes.	

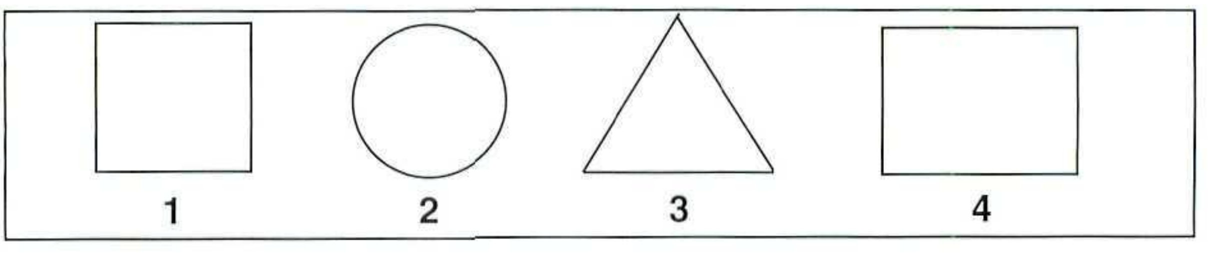
4.- De las siguientes afirmaciones, indcia cuáles son verdaderas, **(V)** y cuáles falsas **(F)**:

a) Las pirámides son cuerpos redondos
b) El dodecaedro tiene doce caras que son triángulos equiláteros
c) Un prisma octogonal tiene diez caras en total
d) El cono está limitado por una superficie curva y un círculo
e) En el cubo concurren cuatro aristas en cada vértice
f) Una pirámide tiene las caras laterales formadas por triángulos

5.- Elige un **poliedro regular**. Nómbralo y explica todas sus características.

6.- Observa estas figuras planas e indica:

a) A qué cuerpos geométricos pueden pertenecer.
b) Qué elementos de ese cuerpo pueden ser:



a) Cuerpo geométrico	b) Elemento
1	
2	
3	
4	

7.- En edificios, los instrumentos de trabajo y en la naturaleza, podemos apreciar la belleza y la utilidad de los cuerpos geométricos.

Escribe algunos ejemplos, y señala de qué cuerpos geométricos están formados.

FICHA REGISTRO DE LA PRUEBA DE EVALUACIÓN.
BloqueI: Cuerpos geométricos.
(Se adjunta en la siguiente página, la relación alumnos-actividades de evaluación).

FICHA REGISTRO DE LA PRUEBA DE EVALUACION I:

"CUERPOS GEOMETRICOS"

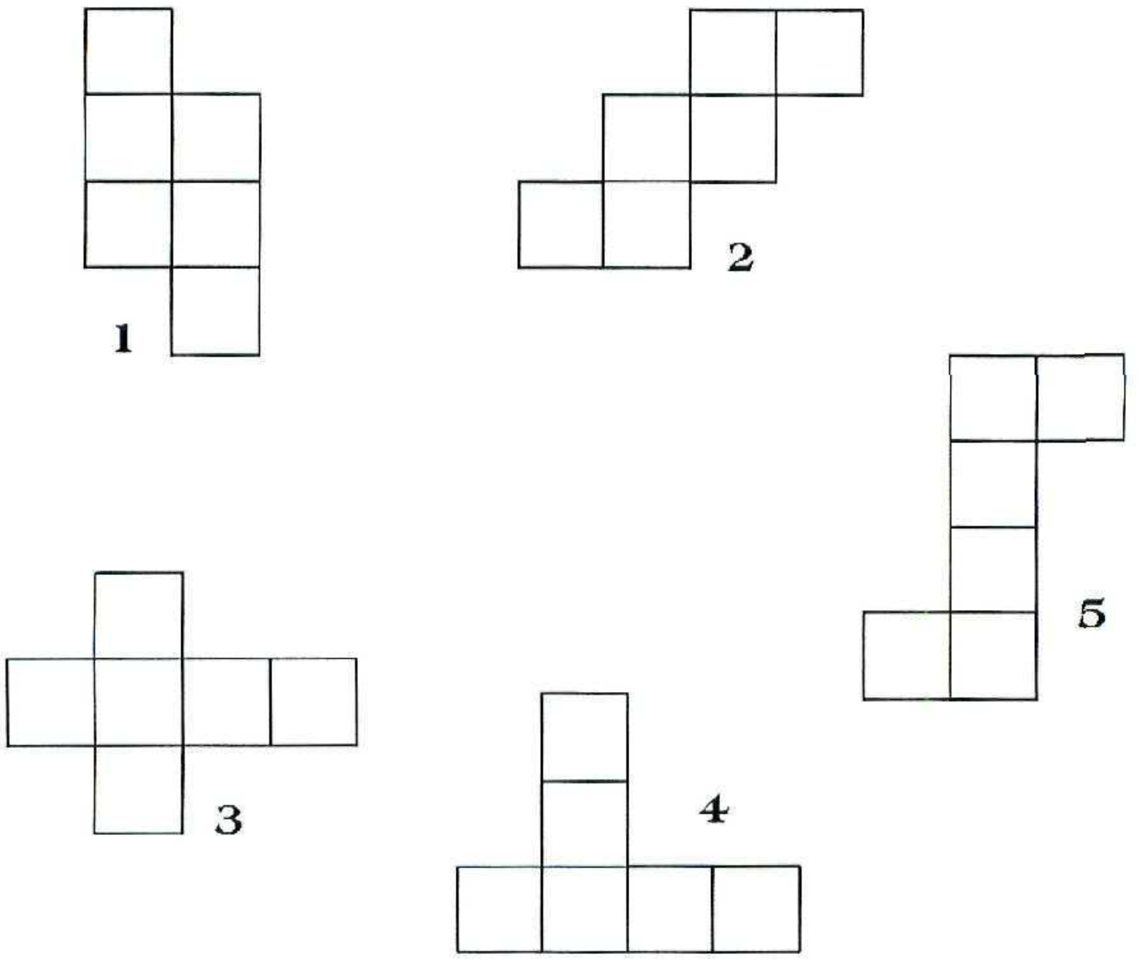
ACTIVIDADES		RELACIONA CLASIFICA		IDENTIFICA				DIFERENCIA			RECONOCE		
		Objetos	Cuerpos geométricos	Número de vértices	Número de aristas	Número de caras	Polígonos de las caras	Prismas y pirámides	Poliedros y cuerpos redo	Verdadero o falso	Poliedro regular	Elementos	Cuerpos geométricos en el entorno
ALUMNOS		1a	1b	2a	2b	2c	2d	3a	3b	4	5	6	7
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													
29													
30													

II. Superficie de los Poliedros

PRIMERA SESIÓN:
OBJETIVO DIDÁCTICO. De las figuras propeustas, seleccionar las que sean desarrollos planos del cubo.

Actividades

1.- Todas las figuras siguientes se han obtenido uniendo seis cuadrados idugales.



Sin recortar ni montar, señala cuáles crees que pueden ser desarrolos planos de un **cubo.**

OBJETIVO DIDÁCTICO: Componer, descomponer y desarrollar en el plano, cuerpos geométricos.
Describir verbalmente un cubo y reconocer sus principales elementos.

2.- Coge el polydrón y reproduce las figuras numeradas.
Intenta componer el cubo con cada una de ellas.

a) Completa la siguiente tabla:

Nº	Se obtiene	No se obtiene
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

b) ¿Eran desarrollos planos del cubo, todas las figuras que señalaste?
c) Intenta otros desarrollos planos distintos a los anteriores (hay once posibles), y dibuja la plantilla correspondiente.

(Ver en el anexo los once hexominos que al plegarlos dan un cubo.)

3.- Describe un cubo, utilizando vocabulario geométrico:

____

____

Diseña una tabla para recoger las características de los elementos del cubo: caras, aristas y vértices.

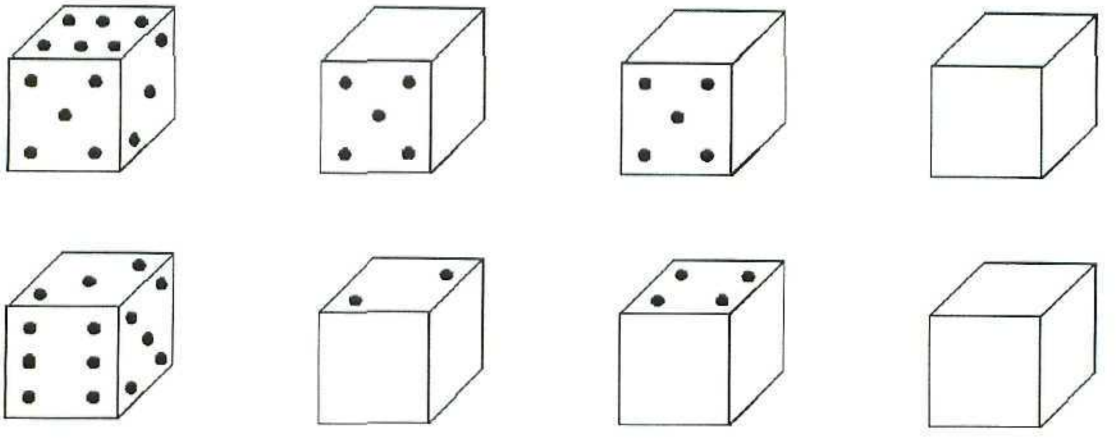
SEGUNDA SESION.
OBJETIVO DIDACTICO: Dibujar un cubo desde distintos puntos de vista.

4.- Coloca un cubo en distintas posiciones, respecto a tu punto de vista, e intenta dibujarlo en cada una de ellas (al menos en tres).

5.- Para esta actividad puedes utilizar un dado de los que se usan en los juegos.

a) Coloca el dado como en el primer dibujo. Ruédalo hacia la derecha, y dibuja las caras correspondientes a cada posición.

b) Inténtalo después, pero sin mirar el dado.



OBJETIVO DIDÁCTICO: Construir modelos geométricos en el plano y en el espacio.
Buscar estrategias para calcular la superficie del cubo.

6.- Dibuja en papel cuadriculado, el desarrollo plano de un cubo que tenga cinco centímetros de arista.

Calcula la cantidad de papel que se necesita para componer el cubo, sin contar con las pestañas.

a) Explica el camino que puedes seguir para saberlo:

b) Realiza las operaciones necesarias:

Exactamente he empleado ________ cm^2 de papel.

c) ¿Hay otro caminos para realizar el cálculo?. ________ Escríbelos:

d) Al calcular la cantidad de papel necesaria para construir el cubo, has hallado:

TERCERA SESION.
OBJETIVO DIDACTICO: Relacionar la medida de la arista del cubo, con su supefficie.
Descubrir una fórmula que exprese algebraicamente la relación anterior.

7.- Teniendo en cuenta la actividad anterior, completa el siguiente cuadro sobre la superficie del cubo:

Arista del cubo (cm.)	Superficie (cm^2) Indica las operaciones necesarias.
a = 1	
a = 2	
a = 3	
a = 4	

A partir de los datos de la tabla, saca una conclusión que te sirva para hallar la superficie (el área) de cualquier cubo.

Area del cubo:

Expresa la conclusión anterior mediante una **fórmula:**

CUARTA SESIÓN.

Puesta en común de las actividades anteriores.

Ficha de recuerdo

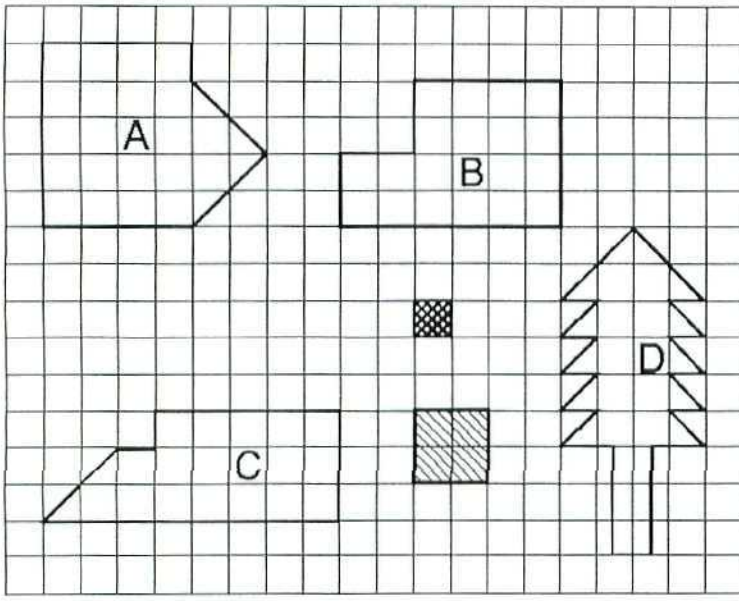
• **Las unidades de sueprficie**

Recuerda:

Medir superficies es compararlas con una unidad establecida. El número de unidades que contiene una figura plana, es la medida de su ____________________

Se llama área, al número y la unidad que expresa la medida de superficie.

1.- Tomando como unidad el cuadro negro y después el rayado, halla el área de todas las figuras de la cuadrícula



FIGURAS		
A		
B		
C		
D		

2.- Para medir superficies utilizamos cuadrados cuyos lados miden 1 mm., 1 cm, 1 dm., 1 m., etc.

Dibuja un cm^2 y un mm^2 Completa: 1 cm^2 = ________ mm^2.
1 m^2. = ________ dm^2.
1 dm^2 = ________ cm^2.

Para medir grandes superficies, utilizamos el dam^2 hm^2 y km^2 o las medidas agrarias, centiárea, área y hectárea.

1 km^2=______ m^2 1 hm^2= ______ m^2 1 dam^2=______ m^2
1 ha =______ m^2 1 a=__________ m^2 1 ca=__________ m^2

3.- Qué unidad consideras más adecuada para medir la superficie de:

Un bosque de pinos ________ Valladolid ____________________
El colegio ________________ Tu libro ______________________
Un campo de trigo _________ Tu clase ______________________

4.- Calcula aproximadamente los m^2 que miden estas superficies:

- La pizarra de la clase ____________ m^2
- El techo de la clase _____________ m^2
- El campo de baloncesto _________ m^2

5.- Calcula exactamente los cm2 que miden:

– Tu pupitre __________ cm^2 – El borrador _______ cm^2
– Esta hoja de papel ________ cm^2 – Una regla _________ cm^2

6.- Practica estos cambios de unidades de superficie:

	OPERACIONES	
0,5 m^2		cm^2
56 dm^2		mm^2
250 cm^2		dm^2
75 ha^2		m^2
1.000 mm^2		ca^2
0,07 km^2		hm^2
8.500 a		ha^2
6.880 hm^2		km^2
340,9 dam^2		a

CUARTA SESIÓN.

Puesta en común de las actividades números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

- *Se sacan conclusiones sobre la disposición de los seis cuadrados para que formen un desarrollo plano del cubo.*
- *Se dibujan los desarrollos de cubos encontrados por los grupos de alumnos. (Ver anexo).*
- *Se repasan las características de los elementos de los poliedros regulares.*
- *Se muestran en el encerado los dibujos del cubo en distintas posiciones, realizados por los alumnos.*
- *Se comunican las soluciones encontradas en el cálculo de la cantidad de papel necesaria para el cubo.*
- *Se reflexiona sobre las diferentes estrategias utilizadas por los grupos.*
- *Se establecen conclusiones generales para calcular el área del cubo.*
- *Se indaga sobre la fórmula encontrada por los grupos de alumnos para el cálculo del área del cubo.*
- *Se revisa la ficha de recuerdo sobre las unidades de supefficie, para preparar la aplicación a los problemas de cálculo de áreas.*
- *Se valora la costumbre de expresar, los resultados numéricos de las medidas, diciendo la unidad de medida utilizada.*
- *Se aconsejan más actividades de cambio de unidades de supefficie para realizar individualmente, si fuera necesario.*

Observaciones: ____________________

____

____

QUINTA SESIÓN:
OBJETIVO DIDÁCTICO: Describir verbalmente el proceso seguido en la resolución de problemas geométricos.
Aplicación de los algoritmos básicos en el cálculo del área del cubo.

8.- Observa este macetero.

¿Qué forma tiene?.

Queremos recubrir sus caras de cristal. Calcula la cantidad de cristal necesario para ello, teniendo en cuenta que la arista mide 25 cm.

Antes de hacerlo, comentad en el grupo el camino que vais a seguir.

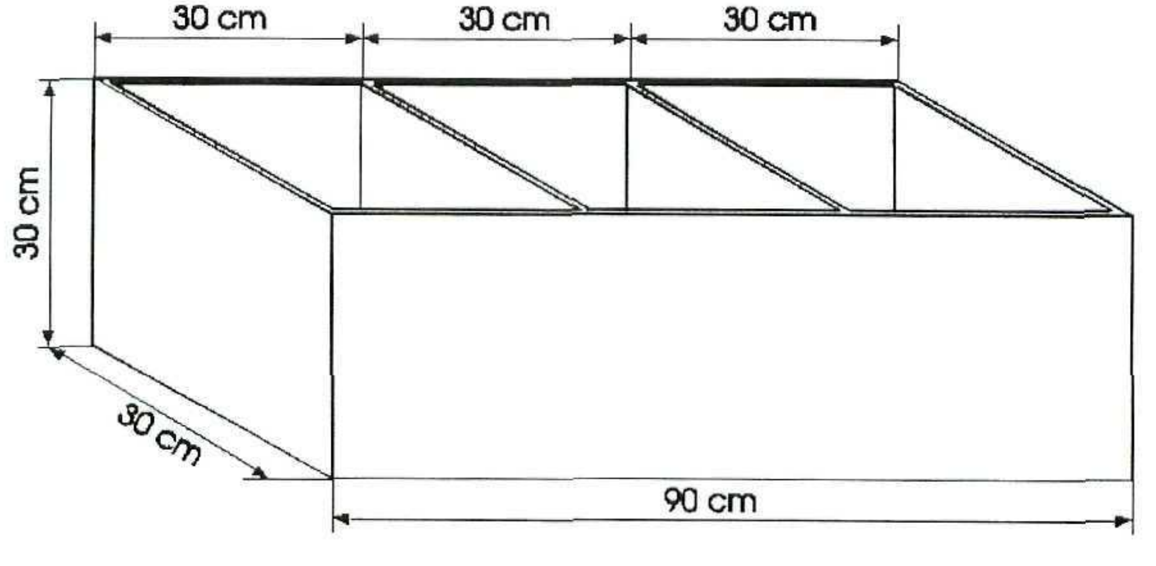
a) Explica cómo lo vas a hacer:

b) Realiza el cálculo y anota la unidad correspondiente.

OBJETIVO DIDACTICO: Reconocer y valorar la utilidad de la geometría, para resolver problemas reales de su entorno.

- **Actividad de ampliación**

9.- Tenemos una caja sin tapa, dividida en tres celdillas iguales mediante dos cartones.



Indica la forma que tienen las celdillas:

Queremos forrar el interior de cada celdilla con papel decorado, para colocar en ellas una colección de minerales. Calcula la cantidad de papel que necesitarás para forrar las tres casillas.

a) Camino a seguir:

b) Cálculo de la cantidad:

c) Tenemos un pliego de papel decorado de forma rectangular de 60 x 40 cm.

¿Será suficiente para forrar el interior de la caja? Efectúa las operaciones necesarias para responder la pregunta.

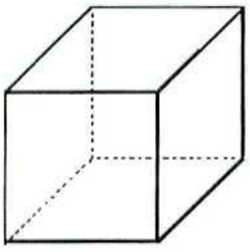
d) Calcula el número de pliegos de papel que tendrás que comprar, en el caso de no ser suficiente con el que tienes.

10.- Observa el siguiente cuadro y completa lo que falta.

POLIEDRO REGULAR	Nº DE CARAS	FORMA CARAS	PROCESO PARA CALCULAR SU ÁREA
Cubo	6	Cuadrada	Área del cuadrado (lado x lado), multiplicado por seis
Tetraedro		Triangular	
	8		

SEXTA SESIÓN.
Puesta en común de las actividades de 8, 9 y 10.
Realización de la Ficha de Síntesis II. Autoevaluación.

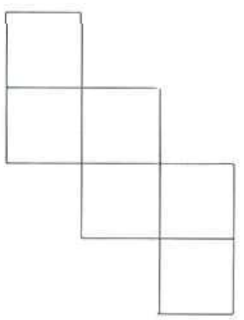
Ficha de síntesis II: la superficie de los poliedros, el cubo

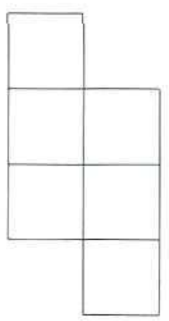


1. Completa: El cubo es un poliedro ____________ limitado por ____________ que son ____________ y en cada vértice, concurren ____________ aristas.

2. NOMBRE	3. Nº	DESCRIPCIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL CUBO
		Polígonos de forma cuadrada que componen la superficie del cubo.
		Punto donde se unen las caras y las aristas del cubo.
		Segmento formado por la intersección de dos caras del cubo.

4.- Señala de estas figuras las que al plegarlas formarán un cubo, y dibuja tú otra:





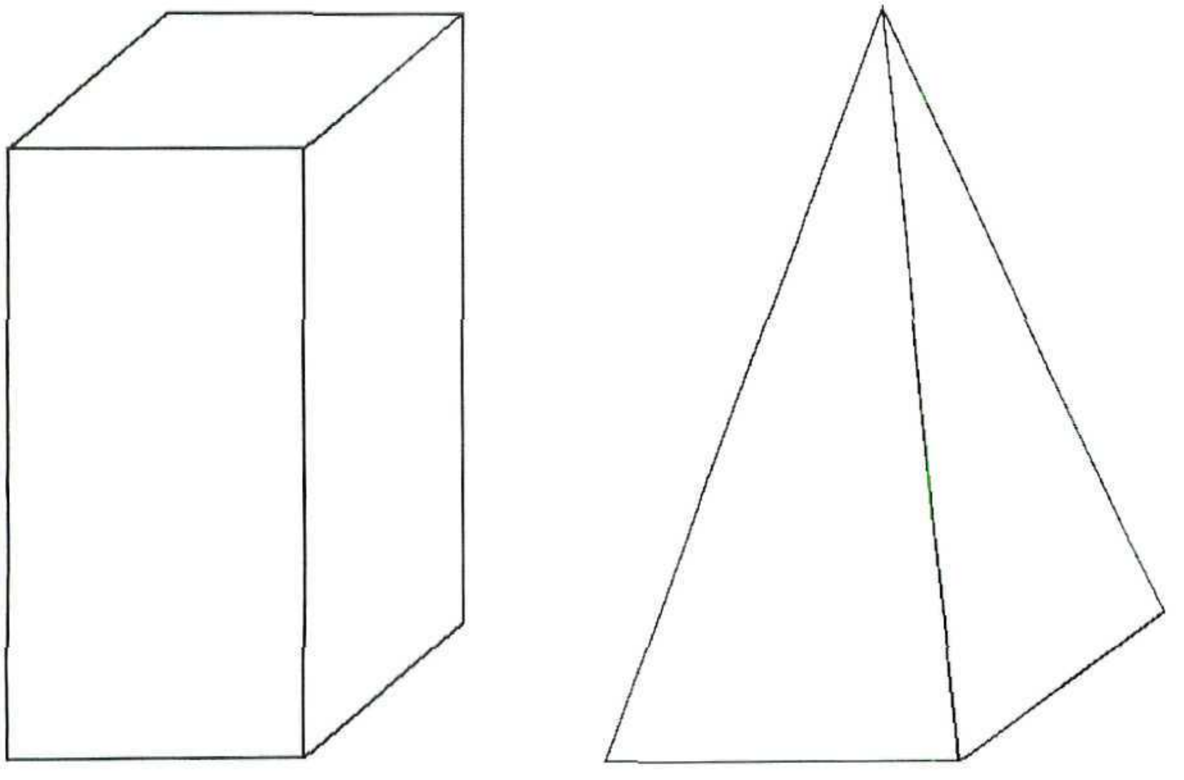
5.- Explica cómo puedes calcular el **área de un cubo:**

6.- ¿**Qué fórmula** podemos emplear para el cálculo de la superficie del cubo?

SÉPTIMA SESIÓN:
OBJETIVOS DIDÁCTICOS: Construir modelos geométricos, utilizando plantillas. Diferenciar entre caras laterales y bases, en los prismas y las pirámides.

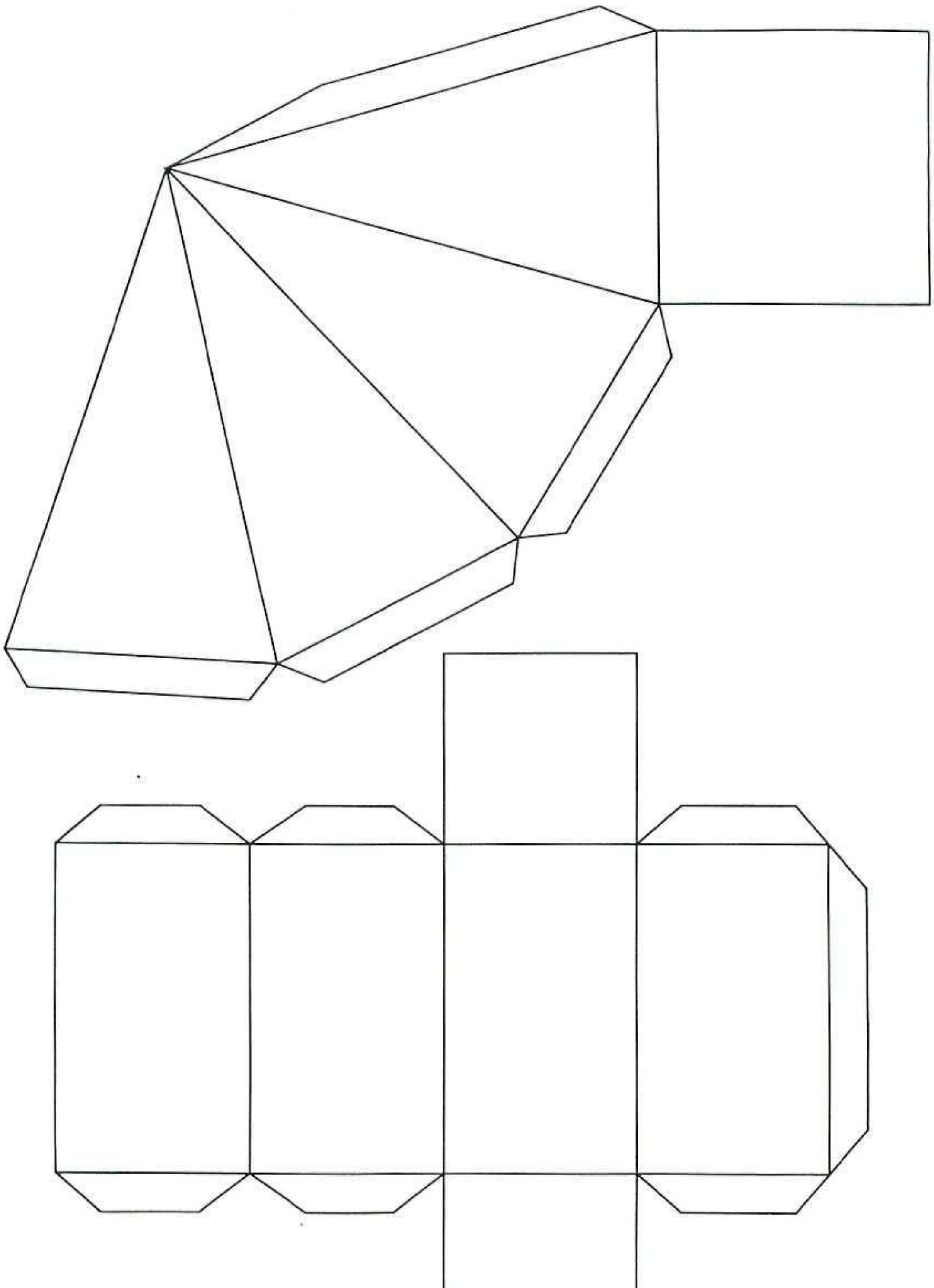
- **Superficie de los prismas y las pirámides.**

10.- Construye, utilizando las plantillas que te damos, los siguientes poliedros:



PRISMA CUADRANGULAR PIRÁMIDE CUADRANGULAR

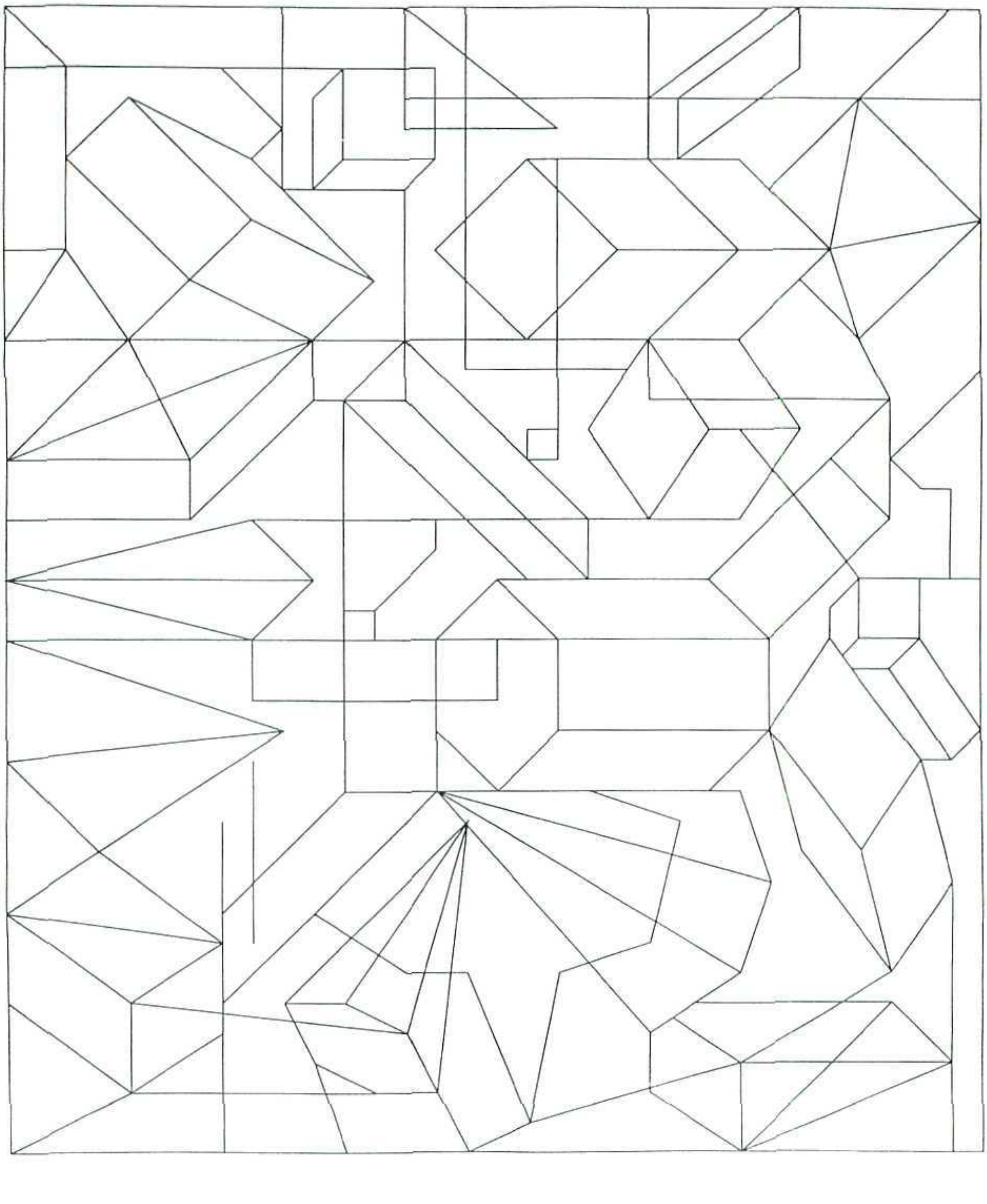
11.- Raya con rotulador rojo las caras laterales y con rotulador azul las bases de los cuerpos construidos.



OBJETIVO DIDÁCTICO: Identificar cuerpos geométricos y reconocer los que pertenecen a la misma clase.

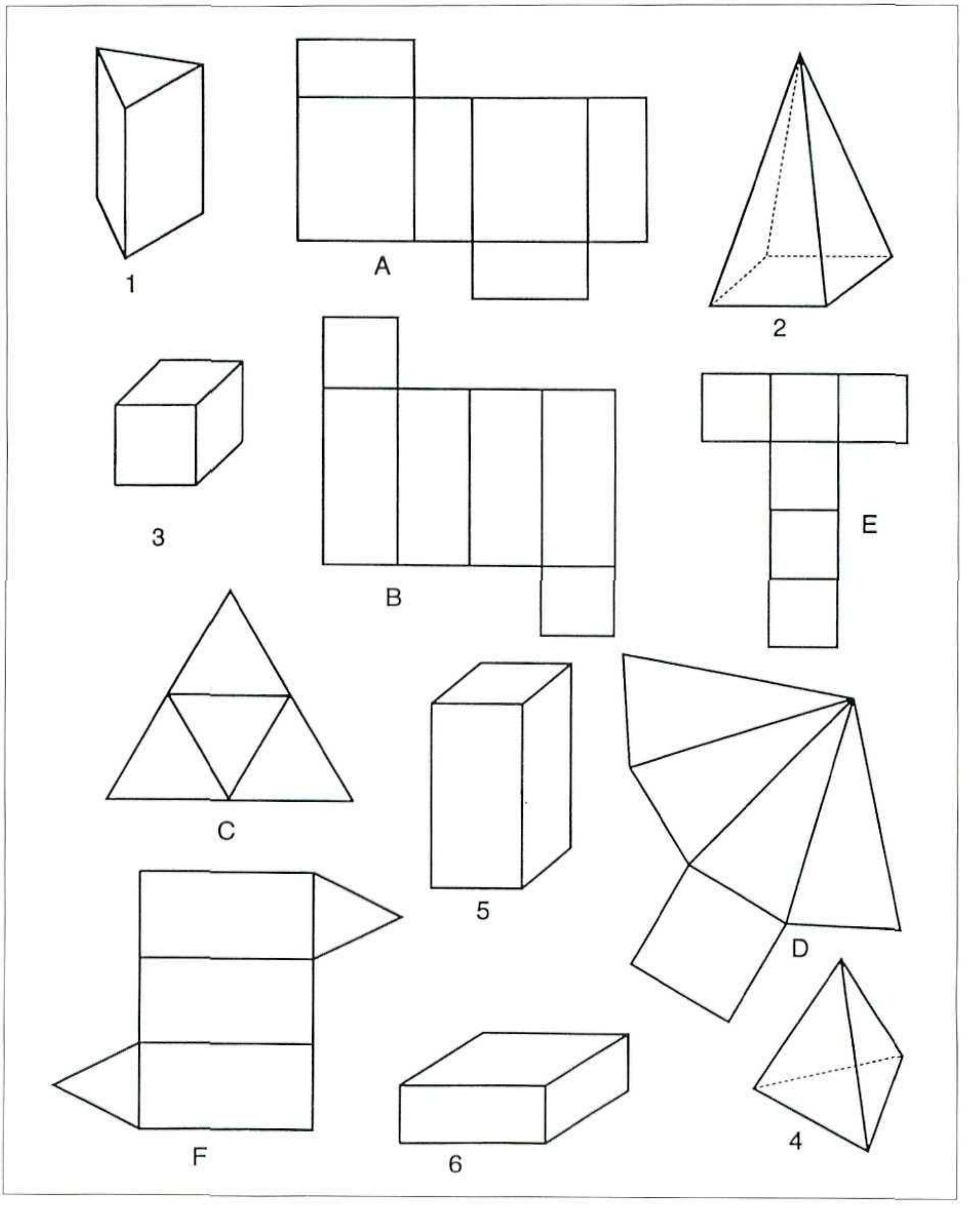
12.- Observa con atención el dibujo, y colorea con el mismo color todos los cuerpos geométricos que pertenezcan a la misma clase de poliedro.

Están coloreados en total _______ cuerpos geométricos.



OBJETIVO DIDÁCTICO: Relacionar los poliedros con sus correspondientes desarrollos planos.

13.- Observa estos cuerpos geométricos y sus desarrollos planos. Relaciónalos, completando la tabla de la página siguiente:

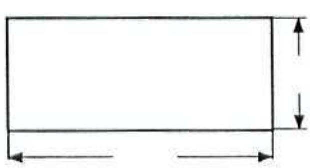
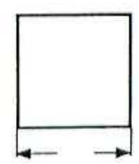
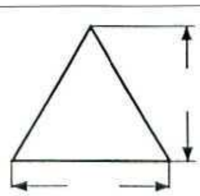
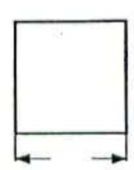


NÚMERO	NOMBRE DEL CUERPO GEOMÉTRICO	LETRA

OCTAVA SESIÓN.
OBJETIVOS DIDÁCTICOS: Utilizar la descomposición de figuras para analizarlas y obtener las medidas que se precisen.
Decidir qué operaciones serán las adecuadas en la resolución de los problemas propuestos.

14.- **Corta** por una arista, el prisma y la pirámide que has construido. Despliégalos.

a) Mide y anota en el cuadro:

LETRA GEOMÉTRICO	CARA LATERAL (en cm.)	BASE (en cm.)
PRISMA CUADRANGULAR		
PIRÁMIDE CUADRANGULAR		

b) **Calcula** la cantidad de papel empleado en la construcción del pisma y de la pirámide, siguiendo estos pasos:

1º Papel utilizado en una cara lateral. (Realiza aquí las operaciones necesarias).

Prisma Pirámide

2º Papel utilizado en todas las caras laterales. **(Área lateral)**

Prisma Pirámide

3º Papel utilizado en las bases. **(Área de las Bases)**

Prisma Pirámide

4º Papel utilizado en total. **(Área total)**

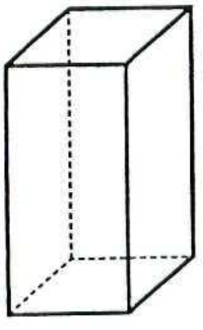
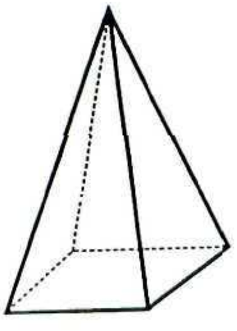
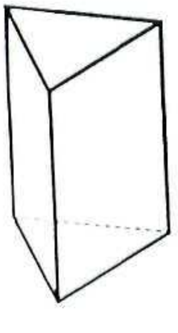
Prisma Pirámide

c) Utiliza los datos anteriores para completar el siguiente cuadro:

<table>
<tr><th rowspan="2">CUERPO GEOMÉTRICO</th><th colspan="2">ÁREA LATERAL</th><th colspan="2">ÁREA BASES</th><th rowspan="2">ÁREA TOTAL</th></tr>
<tr><th>UNA</th><th>TODAS</th><th>UNA</th><th>DOS</th></tr>
<tr><td>PRISMA</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>PIRÁMIDE</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

OBJETIVO DIDÁCTICO: Medir indirectamente, a través de fórmulas y relaciones sencillas.

15.- Observa los dibujos de estos cuerpos. Escribe sus nombres y completa los datos que falten a cada uno.

Dibujo	Altura de una cara	Aristas básicas	Altura de una cara	Área lateral	Área de una base	Área total
		4 cm	24 cm²			
	10 cm	5 cm²				
	8 cm			120 cm²	10,75 cm²	

NOVENA SESION: Puesta en común de las actividades realizadas en las sesiones séptima y octava, números 10, 11, 12, 13, 14y 15

- *Se comprueba que todos los alumnos diferencian las caras laterales de las bases, en los poliedros irregulares.*
- *Se comenta cómo un problema complejo, "cálculo del papel necesario en el prisma y la pirámide cuadrangular, se reduce a otros más sencillos, facilitando de esa manera su compresión y resolución.*
- *Se valora la utilidad de la medida para transmitir información precisa sobre los cuerpos geométricos.*
- *Se comprueban los cálculos de todos los grupos de alumnos, en la actividad 14.*
- *Se pide a cada equipo, que describa como ha obtenido de las medidas indirectas necesarias, para completarlos datos de la actividad 15.*
- *Se revisan las medidas y los cálculos realizados para comprobar la cantidad de papel necesaria para el prisma y la pirámide cuadrangular.*
- *Se generaliza a partir de las actividades en el cálculo del área lateral y total de los prismas y pirámides.*
- *Se proponen actividades complementarias, con recortables de papel, de monumentos, construcciones etc.*

Observaciones: ______________________________

____

____

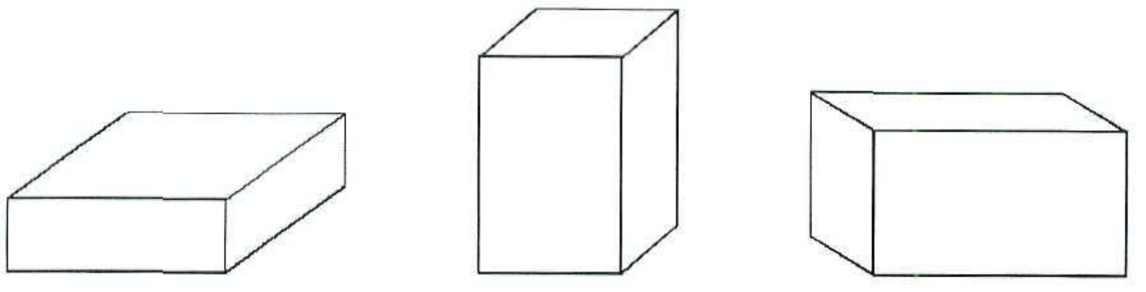
DÉCIMA SESIÓN.
OBJETIVO DIDÁCTICO: Buscar propiedades, regularidades y relaciones en el ortoedro.

16.- Observa los dibujos que aquí se presentan.

a) Haz una relación de diez objetos de tu entorno que tengan esta forma.

b) Busca razones que expliquen la abundancia de cuerpos con esta figura.

c) Investiga los nombres que puede recibir este cuerpo geométrico.

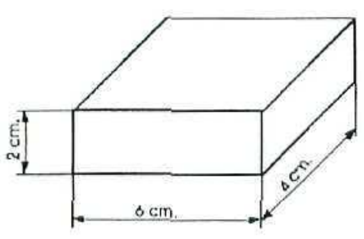


d) Despliega uno de los cuerpos, que tengáis en el grupo, con esta forma. Dibuja su desarrollo.

e) Explica las característica peculiares que tienen sus caras.

17.- Escribe la estrategia que puedes utilizar para calcular la superficie de cualquier ortoedro.

18.- Completa el siguiente cuadro:

ORTOEDRO	Área lateral	Área básica	Área total
			

19.- Plantea y resuelve dos situaciones problemáticas que tengan que ver, con el cálculo de la superficie, total o parcial, de un ortoedro.

Trabajo de investigación

Egipto ha sido la cuna de las civilizaciones. Cuando el mundo no había ingresado aún en la historia, se construía en Gizeh, la gran necrópolis de El Cairo, monumentos que hoy día, no se han logrado superar.

Infórmate:

¿Dónde está El Cairo y Gizeh?. ¿Que tipo de monumentos se construyeron en estas ciudades y en qué época?.

Uno de los monumentos más impresionantes es la Gran Pirámide. Su base es cuadrada. Cada arista de la base mide 246,2 m. y la altura de sus caras laterales tienen la misma medida.

Diseña:

Una pirámide semejante a ella, constrúyela, decórala y búscala una utilidad.

Calcula:

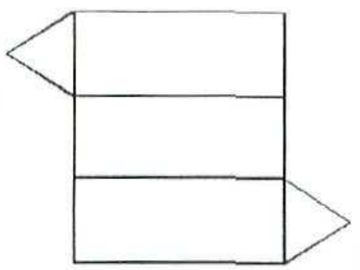
La extensión de terreno que ocupa la Gran Pirámide.

La superficie de la pirámide expuesta a los agentes erosivos naturales y a la devastación humana.

UNDÉCIMA SESION: Puesta en común de la actividades relacionadas con el ortoedro.
Realización de la Ficha de Síntesis II.
Autoevaluación y recogida de datos.

Ficha de síntesis II: superficie de los poliedros

1.- Completa el siguiente cuadro, sobre los cuerpos geométricos:

Nombre	Desarrollo plano	Superficie lateral	Bases
		Formada por cuatro triángulos isósceles iguales.	Tiene una y es un ________
			

2.- Conclusiones.

En los prismas:

Todas las caras laterales son ________________

Tienen __________ bases, formadas por ____________________

En las pirámides:

Todas las caras laterales son ____________________

Tienen ***una*** base, formada por ____________________

En los poliedros regulares:

Todas las caras son ____________________

3.- Recuerda y completa.

El polígono que forma las caras laterales de un prisma es el ______________

El área del rectángulo se calcula: ______________________________

El polígono que forma las caras laterales de una pirámide es el ______________

Su área se calcula: ______________________________

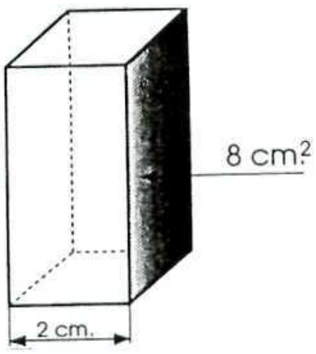
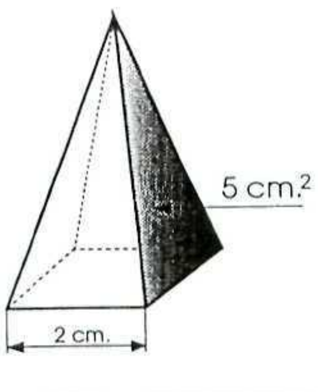
Otras áreas necesarias para calcular la superficie de los cuerpos geométricos son:

El área del cuadrado: ______________________

El área del polígono regular (pentágono, hexágono...):

____

4.- Completa la tabla teniendo en cuenta las medidas e indicando todos los pasos necesarios.

Cuerpo geométrico	Área lateral	Área de las bases	Área total
			
			

DUODÉCIMA SESIÓN:
Prueba de evaluación, II: ***Superficie de los poliedros.***

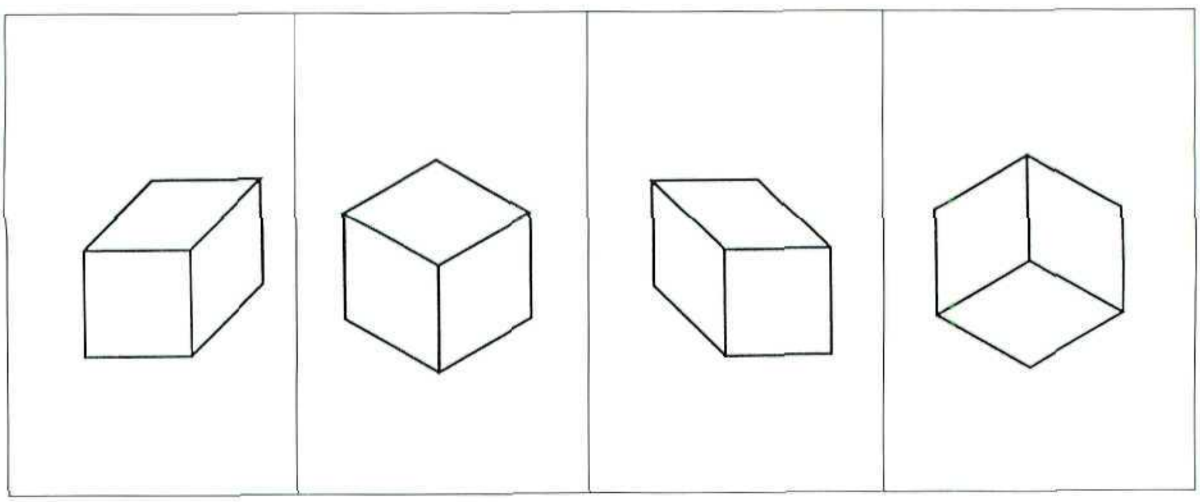
PRUEBA DE EVALUACIÓN II

1.- Identifica los cuerpos geométricos que se describen:

Tiene dos bases.	
La superficie lateral está formada por cinco triángulos isósceles	________________

Tiene dos bases.	
La superficie lateral está formada por tres caras rectangulares	________________

2.- Fíjate en estos cubos. Expresa, desde **qué punto de vista** está dibujado cada uno de ellos, utilizando las palabras: desde arriba, desde abajo, desde la derecha o desde la izquierda.



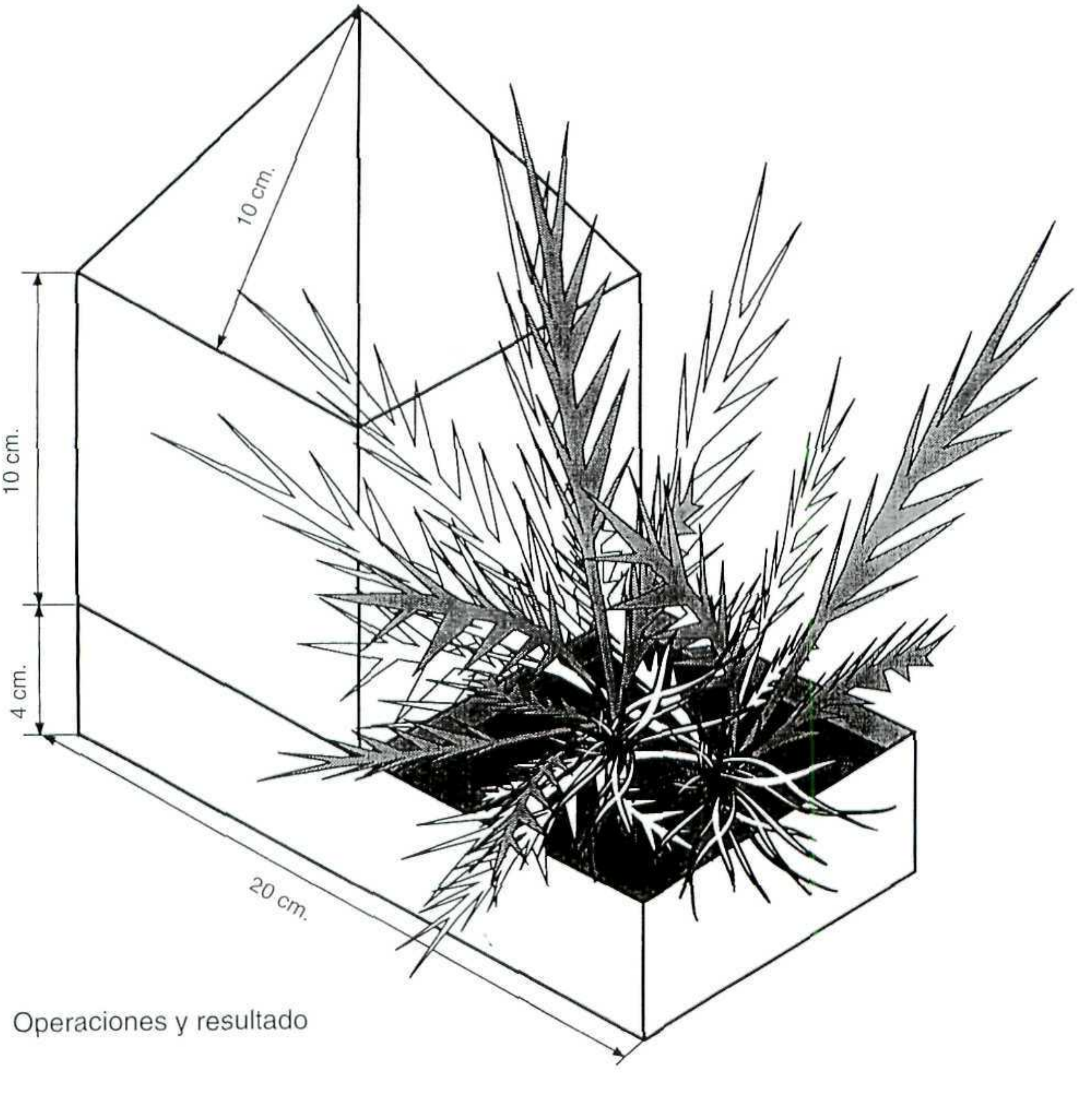
3.- Observa con atención el dibujo de la siguiente hoja y contesta:

a) Los poliedros que componen el macetero son:

b) Rellena esta tabla sobre los cuerpos anteriores, "completos".

Desarrollo plano (dibujo)	Características: caras laterales, bases, aristas, vértices ...

4.- Fíjate en el macetero, queremos forrarlo de espejo y necesitamos saber la cantidad que tendremos que comprar.
Recuerda: Debes anotar todas las operaciones que necesites para calcularlo.



Operaciones y resultado

FICHA REGISTRO DE LA PRUEBA DE EVALUACION II:

SUPERFICIE DE LOS POLIEDROS

ACTIVIDADES		IDENTIFICA		RECONOCE	DIBUJA DESARROLLOS PLANOS			CONOCE CARACTE-RISTICAS			APLICA CALCULO DE AREAS		
		Pirámide	Prisma	Puntos de vista del cubo	Cubo	Pirámide cuadrangula	Ortoedro	Cubo	Pirámide cuadrangula	Ortoedro	Cubo	Pirámide cuadrangula	Ortoedro
ALUMNOS		1		2	3a			3b			4		
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													
29													
30													

III. Iniciación al volumen

PRIMERA SESION.
OBJETIVO DIDÁCTICO: Componer y descomponer cubos con piezas cúbicas más pequeñas, para observarlos y analizarlos.

1.- Para realizar las actividades vas a utilizar los policubos y centicubos.

Observa el material y contesta:

a) ¿Qué forma tienen todas las piezas?.
b) ¿En qué se diferencian?
c) Expresa la equivalencia entre las piezas:
Un policubo = centicubos.

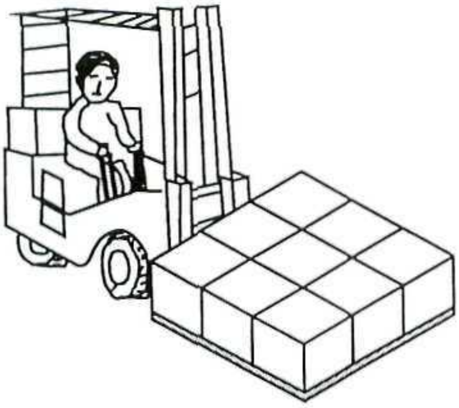
2.- Construye, con las piezas del policubo, cuatro cubos de distinto tamaño, comenzando por el más pequeño posible.

Fijándote en los cubos construidos, completa la siguiente tabla:

Cubos	Nº total de policubos	Nº de policubos en cada piso	Nº de policubos en cada arista
a			
b			
c			
d			

3.- En los almacenes, cuando hay que cargar o descargar cajas de un camión, se apilan en montones sobre un palé y con una máquina se desplazan todas juntas.

Observa el dibujo:



a) ¿Qué forma tienen las cajas que están sobre el palé?

____

b) ¿Cuántas cajas hay?

____

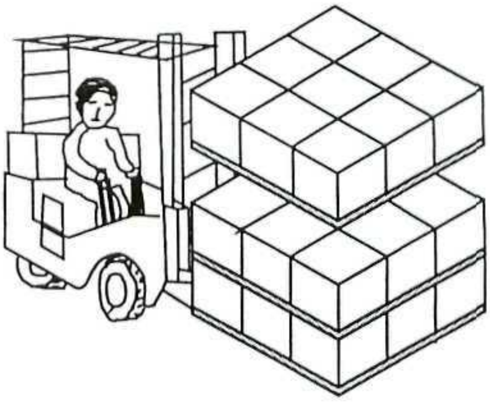
El operario ha añadido dos pisos más al palé.

c) ¿Qué cuerpo geométrico forma la pila de cajas?.

____

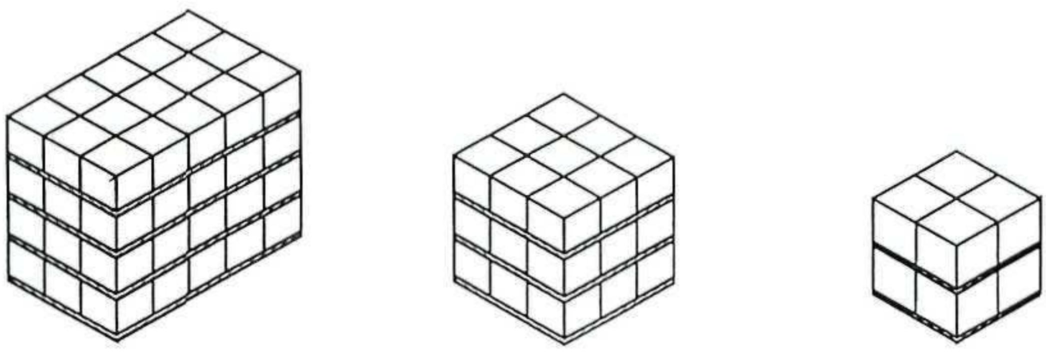
d) ¿Cuántas cajas se pueden trasladar ahora?.

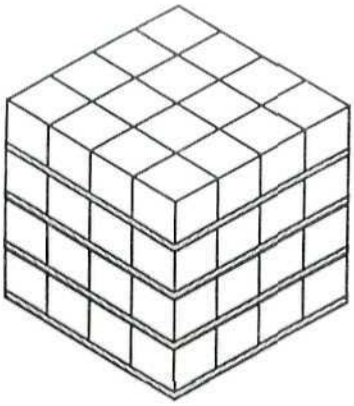
____

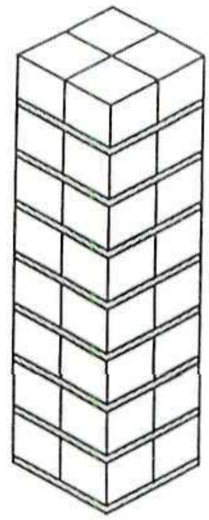


OBJETIVO DIDÁCTICO: Averiguar el número de piezas que tienen los prismas representados en el plano.

4.- Cuenta las cajas que hay en cada pila y anota el número debajo. Señala las que tengan forma de cubo.







OBJETIVO DIDACTICO: Reproducir en el espacio, configuraciones geométricas representadas en el plano.
Contar las piezas que forman una configuración geométrica determinada y calcular las que faltan para formar cubos.

5.- En los dibujos podrás observar montones de cajas, colocadas estéticamente para anunciar productos.

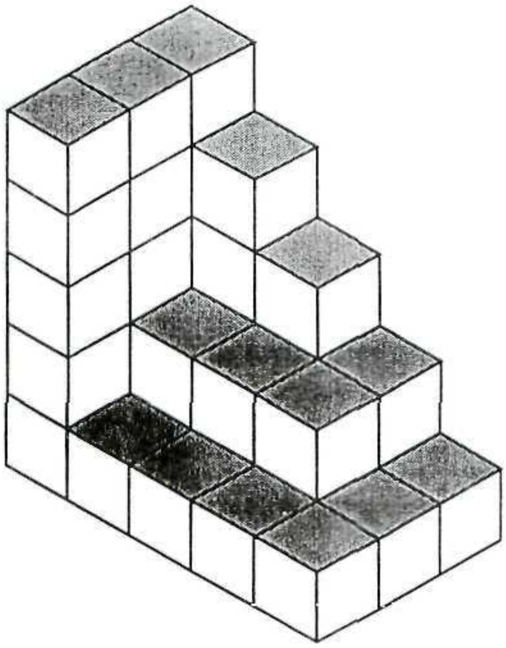
a) Por grupo, haced una reproducción de cada una de ellas, utilizando piezas del policubo del mismo color.

b) Contad el número de piezas utilizadas y anotadlo.

c) Completad con piezas de otro color, hasta formar un cubo, tomando como arista la de mayor número de cubos en cada caso.

d) Completa estos datos.

Piezas cúbicas:	N°
De la figura	______
Añadidas	______
Total del cubo	______
En cada arista	______



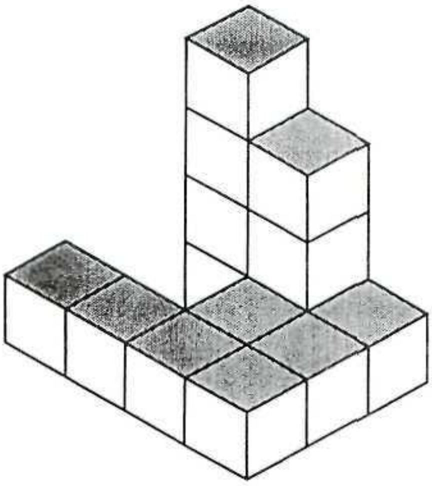
Piezas cúbicas: .... N°

De la figura .... ______

Añadidas .... ______

Total del cubo .... ______

En cada arista .... ______



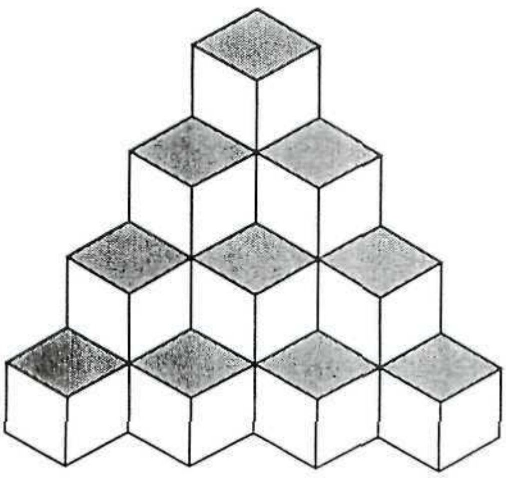
Piezas cúbicas: .... N°

De la figura .... ______

Añadidas .... ______

Total del cubo .... ______

En cada arista .... ______



Piezas cúbicas: .... N°

De la figura .... ______

Añadidas .... ______

Total del cubo .... ______

En cada arista .... ______

SEGUNDA SESION OBJETIVO DIDACTICO: Relacionar verbal y numéricamente, la medida de la arista con el volumen del cubo. Buscar estrategias para el cálculo del volumen del cubo.

6.- En todas las actividades anteriores habéis construido cubos, utilizando piezas cúbicas más pequeñas, y en cada caso sabéis el número de ellas que han sido necesarias.

a) ¿Qué es lo que estamos midiendo del cubo grande, cuando decimos que contiene 1, 8, 27, 64 ... cubos pequeños (piezas del policubo)?.

____

b) ¿Cuál es la unidad de medida en este caso?.

____

c) ¿Hay alguna relación entre el número de piezas cúbicas de la arista y el número total?. Anótala.

____

____

d) Completa el cuadro:

Arista (Nº de policubos de la arista)	Volumen (Nº de policubos total) Operaciones

A partir del cuadro, saca una conclusión que te sirva siempre que tengas que hallar el volumen de una figura cúbica.

Volumen del cubo: ______________________________

____

Escribe la conclusión, empleando una **fórmula:**

____

7.- Construye ahora con las piezas del policubo, dos prismas cuadrangulares, uno de base cuadrada y otro de base rectangular u ortoedro.

Completa el cuadro:

Dibujo	Número de piezas necesarias:		
	Para la base	En la arista lateral	En total

Fijándote en los datos de la tabla, contesta:

¿Cómo podemos calcular el volumen de un prisma cuadrangular?

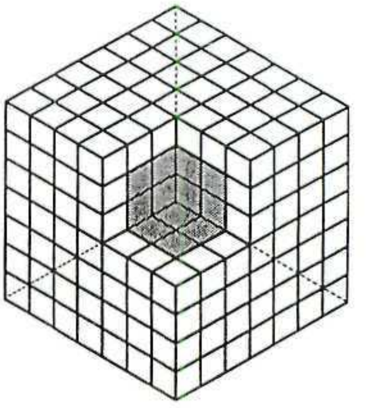
____

____

Escribe la conclusión anterior empleando una **fórmula:**

____

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN



Queremos saber cuál es el menor número de piezas cúbicas necesarias, para construir un cubo hueco.

Utiliza los policubos o centicubos para la construcción.

Completa esta tabla:

Número de piezas:					
De Arista	Cubo completo	Cubo hueco	De Diferencia	¿Forman cubo?	De arista
3					
4					
5					
6					
7					

Observa con atención los resultados.
Busca una relación entre los datos obtenidos, que te permita saber, sin necesidad de construirlos, cuántas piezas son necesarias para formar cubos huecos de:

a) Ocho piezas de arista ______________________

b) Diez piezas de arista ______________________

Explica la relación que has encontrado:

____

____

____

CUARTA
SESIÓN OBJETIVO DIDÁCTICO: Ampliar el Sistema Métrico Decimal, trabajando las unidades fundamentales de volumen.
Realizar estimaciones de volúmenes de objetos.

8.- Coge una pieza del centicubo.

¿Cuánto mide la arista de ese cubo?________________

¿Cuánto mide la superficie de una de sus caras?________________

¿Y la superficie de todas sus caras?________________

El volumen que ocupa una pieza del centicubo (de 1 cm. de arista) es **1 cm^3**.

Buscad objetos cuyo volumen tenga sea parecido a un cm^3.

Comparad por aproximación, los volúmenes de esos objetos, indicando si son mayores menores o iguales que el cm^3.

Objetos	Relación (>, =, <)	Volumen
		1 cm^3
		1 cm^3
		1 cm^3
		1 cm^3

9.- El volumen de un cubo que tiene de arista 1 cm. es 1 cm^3 = 1 centicubo

¿Cuánto tendrá que medir la arista de un cubo para que su volumen sea 1 dm^3.

____

¿Cuánto medirá la superficie de cada Cara?________________

¿Y la superficie de todas sus caras? ________________

Construye con cartulina un cubo que tenga de volumen **1 dm^3**.

Para unir las caras, dibuja *pestañas en el desarrollo*.

Deja sin pegar una de las caras, que te servirá de tapa.

a) Buscad objetos que tengan un volumen similar a un dm^3.
Elegid algún objeto que esté hueco y abierto (recipientes, vasos, cajas,...).

b) Haced la comparación con el $dm.^3$, llenando éste con arena seca o serrín y echándolo al recipiente. (Es posible que os llevéis alguna sorpresa).

Si los objetos son macizos o no se pueden abrir, tendréis que hacer la comparación por aproximación.

c) Completa la tabla con los objetos, indicando si tienen mayor, menor o igual volumen que el dm^3

Objetos	Relación (>, =, <)	Volumen
		1 dm^3
		1 dm^3
		1 dm^3
		1 dm^3

d) Completa la base del dm.3 construido, con centicubos.

¿Cuántos cm^3 necesitas para una arista ______________

¿Cuántos para completar la base? ____________________

Para rellenar todo el dm^3 __________________________

Por lo tanto: 1 dm^3 = ...cm^3

e)¿Cuántos policubos caben en un dm^3? _______ ¿Cómo lo habéis calculado?____

QUINTA SESIÓN

OBJETIVO DIDÁCTICO: Establecer equivalencias entre metro cúbico, decímetro cúbico y centímetro cúbico.

Distinguir los conceptos de superficie y volumen, a partir de construcciones de igual volumen y distinta superficie.

10.- El volumen de un cubo que tiene de arista 1 dm, es 1 dm^3.

¿Cuánto tendrá que medir la arista de un cubo para que su volumen sea **1 m^3:** __________ = __________ dm = __________ cm.

¿Cuánto medirá la superficie de cada cara? ____________________

¿Y la superficie de todas sus caras? ____________________

Ensambla las varillas del cubo desmontable y obtendrás un cubo de 1 m^3.

Para que os hagáis una idea de lo que realmente cabe en 1 m^3 vamos a llenarlo con paquetes de folios, libros, alumnos, etc. Anota los resultados obtenidos:

____

a) Busca objetos que tengan un volumen aproximado a 1 m^3.

b) Completa la tabla con los objetos, indicando si tienen mayor, menor o igual volumen que el m^3. Puedes medir si lo necesitas.

Objetos	Relación (>, =, <)	Volumen
		1 m^3
		1 m^3
		1 m^3
		1 m^3

c) Completa la base del m^3 construido, con decímetros cúbicos.

¿Cuántos dm^3 necesitas para una arista ____________________

¿Cuántos para completar la base? ________________________

Para rellenar todo el m^3 _____________________________

Por lo tanto:	$1\ m^3 =$ ....dm^3	$1\ m^3 =$ ....cm^3

d) ¿Cuántos policubos caben en un metro cúbico? ____________________________

11.- Construye cuatro figuras geométricas distintas con los centicubos.

Cada figura debe estar formada por cuatro piezas.

Anota las medidas que precises y completa la siguiente tabla:

Dibujo de la figura	Superficie total	Volumen
a		
b		
c		
d		

Saca una conclusión con los datos obtenidos, que compare la superficie y el volumen de tus construcciones.

____

____

12.- Vamos a calcular el volumen de cosas de nuestro entorno por aproximación, (a ojo), comparándolos con las unidades de volumen que conocemos:

cm^2	dm^2	m^3
Goma de borrar: ________	Un cajón: ________	Un ascensor: ________
Rotulador: ________	El radio-casete: ________	El aula: ________
Sacapuntas: ________	Una mochila: ________	El armario: ________
Barra de tiza: ________	El balón: ________	El gimnasio: ________
Libro de texto: ________	La papelera: ________	Cabina telefónica: ________

Ahora mide para comprobar los resultados obtenidos por el grupo y señala lo acertado de las aproximaciones:

Mucho bastante poco nada

SEXTA SESION Puesta en común de las actividades realizadas, correspondientes a los números 8,9, 10, 11y12.

- *Se comunican las soluciones encontradas a las tareas propuestas, utilizando el vocabulario adecuado.*
- *Se analizan los datos obtenidos por los distintos grupos en el cálculo de la superficie y el volumen de los tetracubos.*
- *Se diferencian los conceptos de superficie y volumen con ejemplos concretos.*
- *Se valora el acierto de los grupos, en la estimación y aproximación del volumen de los objetos.*
- *Se reflexiona sobre las equivalencia halladas a través de la experimentación, entre las principales unidades de volumen.*
- *Se plantean y resuelven actividades variadas, sobre los cambios de unas unidades de volumen a otras.*

ACTIVIDADES DE REFUERZO. LAS UNIDADES DE VOLUMEN

¿Cuántos cm^3 son?	
1 dm^3 = ...	107 mm^3 = ...
2 m^3 = ...	1/2 m^3 = ...
0,25 dm^3 = ...	1/10 m^3 = ...
2 m^3 y 8 dm^3 = ...	0,5 m^3 y 0,3 dm^3 = ...
¿Cuántos cm^3 son?	
1 m^3 = ...	2/5 m^3 = ...
0,06 m^3 = ...	10^5 cm^3 = ...
10^3 cm^3 = ...	2 m^3 y 800 cm^3 = ...
¿Cuántos cm^3 son?	
6 x 10^6 dm^3 = ...	704 dm^3 = ...
10^{12} cm^3 = ...	3 x 0,5 dam^3 = ...
8.500 dm^3 = ...	1/2 de 846.000 dm^3 ....

¿Cuántos m^3 serán necesarios para tener 1 hm^3? = ... ¿y 1 dam^3? = ...

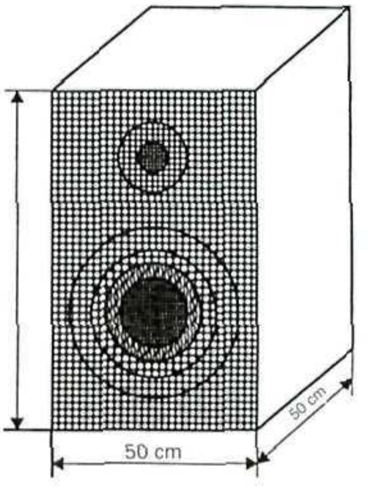
¿Cuántos m^3 faltan a 1,718 dm^3 para llegar a 2 m^3 ....

Investiga y anota las equivalencias entre unidades de volumen y de capacidad:

Volumen		Capacidad
1 dm^3	=	....
1 dm^3	=	....
1 dm^3	=	....

SÉPTIMA SESIÓN
OBJETIVO DIDÁCTICO: Aplicar los conocimientos adquiridos, a la resolución de problemas.

13.- La columna que ves en la figura es un altavoz de un equipo musical



¿En cuántas partes iguales se puede dividir la columna?. ____________

¿Qué forma tiene cada una de las partes?.

____

Calcula el espacio que ocupa la columna.

a) Camino a seguir ______________________________________

____

b) Cálculo del volumen:

c) Expresa el resultado en otra unidad de volumen:

Calcula la cantidad de chapa necesaria para proteger el altavoz del equipo musical, en los traslados.

a) Camino a seguir ______________________________________

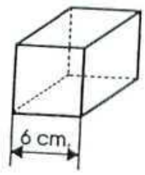
____

b) Cálculo de la superficie:

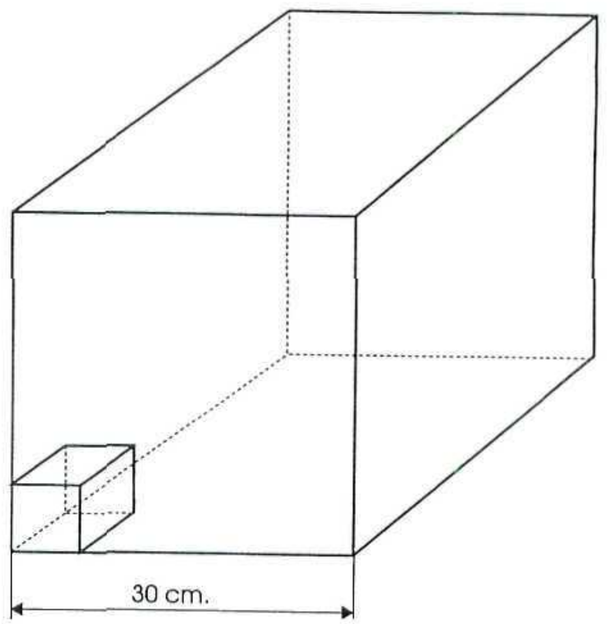
c) Cambia a otra unidad de superficie más adecuada:

14.- El encargado de una cafetería, hace un pedido de 300 paquetes de galletas, a un almacén. Quiere que los paquetes sean pequeños, de forma que pueda ofrecer a los clientes uno o dos en el desayuno.

Así son los paquetes pequeños de galletas, de los que dispone el almacén.



Para enviarlos a la cafetería utilizan cajas como ésta:



a) ¿Cuántos paquetes de podrán meter a lo largo de la caja? ____________

¿Cuántos a lo ancho? ______________________________

¿Cuántos en la base de la caja?________________________

¿Cuántos a lo alto?_______________________________

¿Cuántos paquetes de galletas podrán meter en el interior de la caja, sin que sobre ningún hueco? ___________________

b) ¿Cuántas cajas como éstas tendrán que enviar a la cafetería, para que pueda-contener todos los paquetes pedidos?

____

Explica el resultado ____

____

15.- Queremos averiguar la cantidad de agua necesaria para llenar un acuario.

Conocemos sus dimensiones:

Aristas básicas	Arista lateral
a = 50 cm.	c = 3 cm
b = 25 cm.	

a) Haz un dibujo aproximado del acuario y acota (con flechas) las medidas de cada arista.

b) Explica el camino a seguir:

c) Calcula el volumen del acuario:

d) Expresa la equivalencia entre unidades de volumen y capacidad:

e) Anota el resultado en las unidades más adecuadas:

OCTAVA SESIÓN

Puesta en común de las actividades realizadas, correspondientes a los números 13, 14 y 15.

- *Se comunican las soluciones encontradas a las tareas propuestas, utilizando el vocabulario adecuado.*
- *Se exponen los resultados de los problemas, describiendo en primer lugar, el camino seguido y después los algoritmos necesarios para el cálculo.*
- *Se valora la utilidad de la geometría para resolver problemas reales de su entorno.*
- *Se significa el hábito de expresar los resultados numéricos de las medidas, con la unidad utilizada en cada caso.*
- *Se reflexiona sobre el significado y la utilidad del cambio de unidades a otras más adecuadas.*
- *Se destaca el interés y el respeto por las soluciones a los problemas, distintas a las propias.*
- *Se elogian los dibujos de cuerpos geométricos que conservan una cierta sensación de perspectiva y los realizados con instrumentos de dibujo.*
- *Se repasan los principales conceptos, procedimientos y actitudes trabajados en este bloque de la U.D. "Iniciación al volumen".*
- *Se resuelven las dudas planteadas a lo largo del proceso.*

Observaciones: ____________________

____

____

NOVENA SESIÓN
Realización de la Ficha de Síntesis III.
Autoevaluación y recogida de datos.

FICHA DE SÍNTESIS III: INICIACIÓN AL VOLUMEN

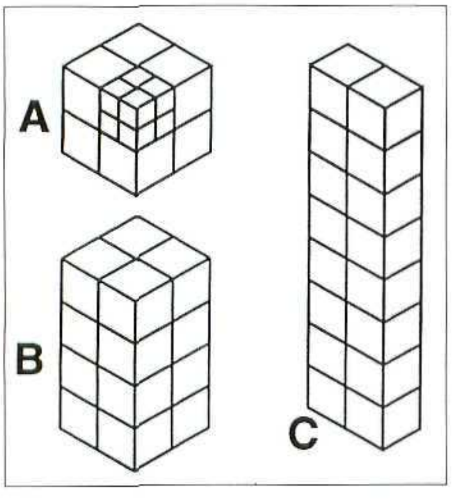
1.- Completa:

Todos los cuerpos geométricos (cajas, botes, edificios, ...), ocupan un lugar en el espacio, que llamamos ________________

Para medir el volumen de un cuerpo le comparamos con otro

que tomamos como ____________________

2.- Tomando como unidad el centicubo y el policubo, calcula el volumen de estas figuras cúbicas:



Figuras	Centicubo	Policubo
A		
B		
C		

3.- Para expresar la medida de un volumen no hay una sola unidad:

El m^3, el dm^3, el cm^3, ... son unidades de __________

El m^3, es un ______________ que tiene ____________ de arista.

El dm^3 es un ______________ que tiene ____________ de arista.

El cm^3 es un ______________ que tiene ____________ de arista.

Completa:

Cada unidad de volumen es ____________ veces mayor que la unidad inmediatamente inferior a ella.

1 m^3 = __________	dm^3	0,25 m^3 = __________	cm
1 dm^3 = __________	cm^3	500 dm^3 = __________	m^3
1 cm^3 = __________	mm^3	105 mm^3 = __________	cm^3

4.- ¿Qué unidad de volumen sería la adecuada para medir el espacio que ocupan estos cuerpos?:

Tú pupitre: ____________________ La goma de borrar: ____________

El aula: ____________________ Un pantano: ____________

Haz una relación de tres objetos, que su volumen sea aproximadamente:

1 cm^3	1 m^3	1 dm^3

5.- Explica cómo puedes calcular el volumen de un cubo.

____

____

6.- Explica cómo puedes calcular el volumen de un prisma.

____

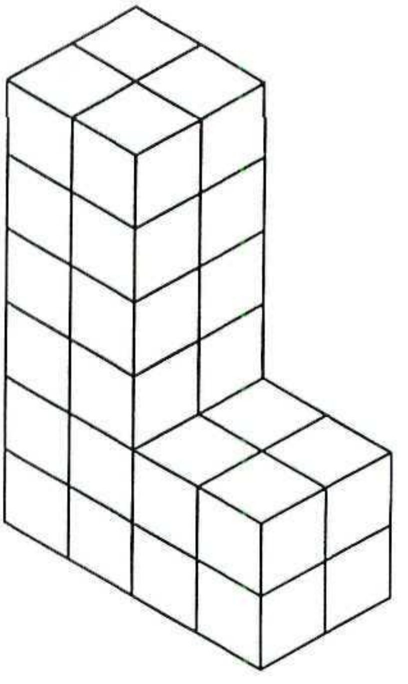
____

7.- ¿Qué fórmula empleamos para el cálculo del volumen de las figuras cúbicas?.

____

DÉCIMA SESION
Prueba de evaluación, Bloque III Iniciación al Volumen..

PRUEBA DE EVALUACION II



1.- Observa el siguiente cuerpo:

a) ¿Cuántos cubos de 1 cm.3 se han empleado para construirlo?

b) Con las piezas empleadas, ¿cuántos cubos se podrían construir de estas medidas?.

–De arista 1 cm. __________

–De arista 2 cm. __________

–De arista 3 cm. __________

–De arista 4 cm. __________

c) ¿Cuántas piezas faltan para poder construir un cubo de 4 cm. de arista?. __________

2.- Completa la tabla con estos objetos y expresa al lado de cada uno, su volumen aproximado:

Un balón de fútbol, una goma de borrar, un ascensor, un bolígrafo, el aula y un radio-casete.

cm^3	dm^3	m^3

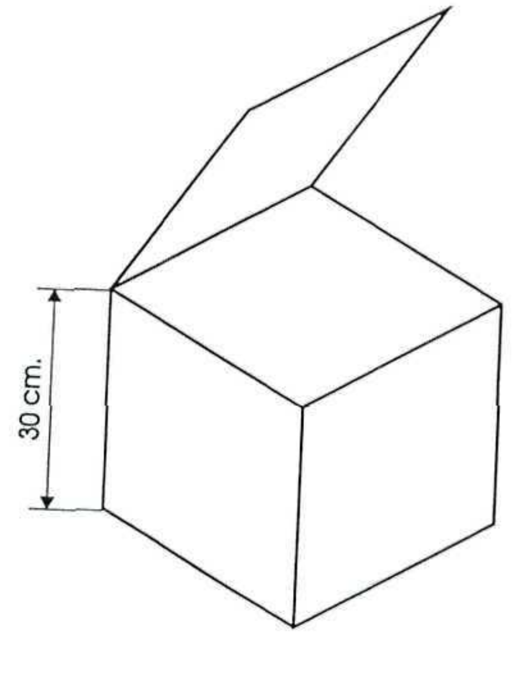
3.- Rodea las equivalencia correctas:

1 dm³ es:	**1 m³ es:**	**1 cm³ es:**
- 1.000 m³	- 100 cm³	- 100 mm³
- 1.000 cm³	- 1.000 dm³	- 0,001 dm³
- 1.00 cm³	- 10 dm³	- 1.000 mm³
- 0,01 m³	- 1.000.000 cm³	- 0,01 m³
- 0,001 cm³	- 100 dm³	- 10 mm³

4.- Si un cubo tiene 9,8 cm. de arista, calcula y señala;

a) Su área aproximada:	**b)** Su volumen aproximado:
- 450 cm^2	- 1.000 cm^2
- 700 cm^2	- 1850 cm^2
- 600 cm^2	- 6.000 cm^2
- 1.000 cm^2	- 2.000 cm^2

5.- Observa esta caja:



¿Cuánto terciopelo necesitas para forrarla por fuera?.
Escribe aquí las operaciones:

Cambia a las unidades adecuadas.

¿Qué es lo que has averiguado del cubo al conocer la cantidad de forro?.

Calcula el espacio que ocupa la caja. Escribe aquí todas las operaciones:

¿Qué es lo que conocemos del cubo al calcular el espacío que ocupa?

____

En la realidad, ¿cuántas cajas como esta podemos meter en un metro cúbico?

____

Explica el resultado:

____

6.- Resuelve:

FICHA REGISTRO DE LA PRUEBA DE EVALUACION III:

INICIACION AL VOLUMEN

ACTIVIDADES		PIEZAS CÚBICAS			ESTIMA			EQUIVALENCIAS			CALCULA DEL CUBO			
			RELACIONA		VOLÚMENES			UNIDADES			APROX.		EXACTO	
		Recuentos	Cubo - arista	Arista - cubo	En cm. cúbicos	En dm. cúbicos	En m. cúbicos	dm. cúbico	m. cúbico	cm. cúbico	Area	Volumen	Area	Volumen
ALUMNOS		1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4		5a	5b
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														
26														
27														
28														
29														
30														

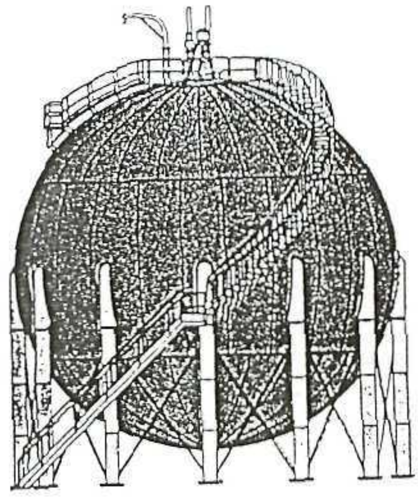
MATEMÁTICAS

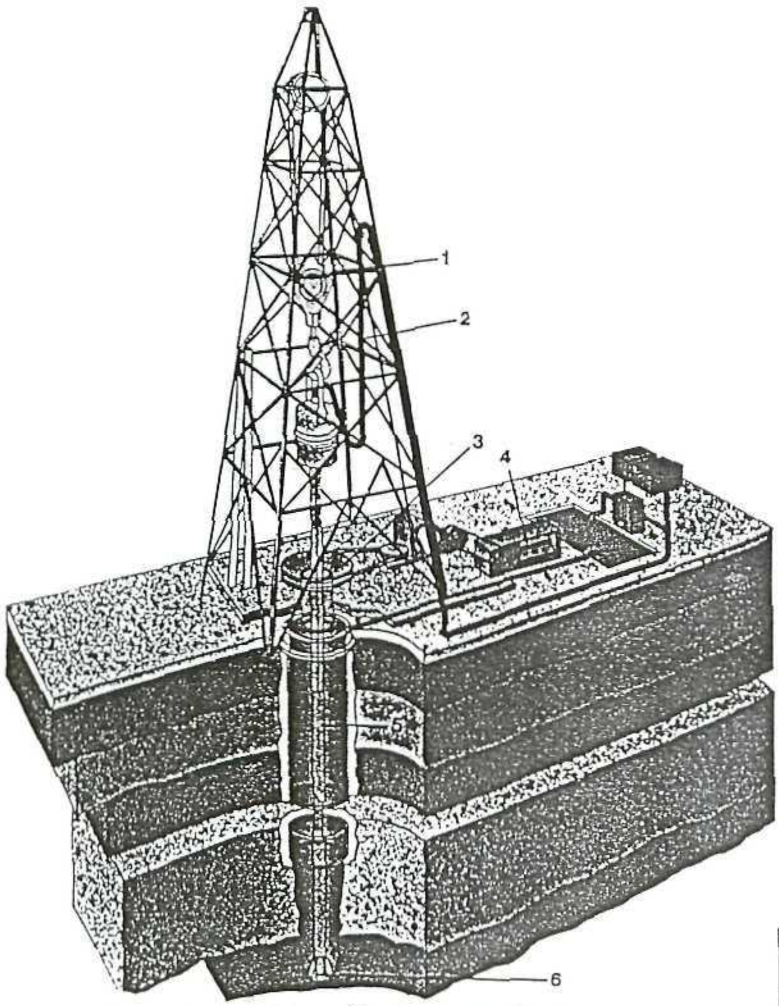
"NUESTRO ENTORNO" GEOMÉTRICO"

IV. ANEXO

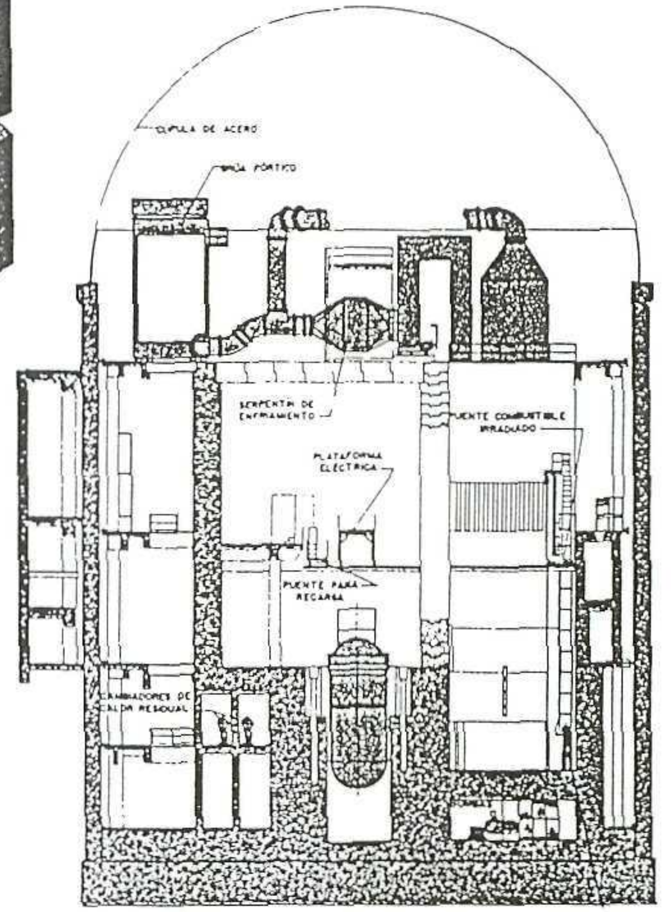
POLIEDROS SEMIRREGULARES HEXAMINOS

DEPÓSITO DE GAS NATURAL

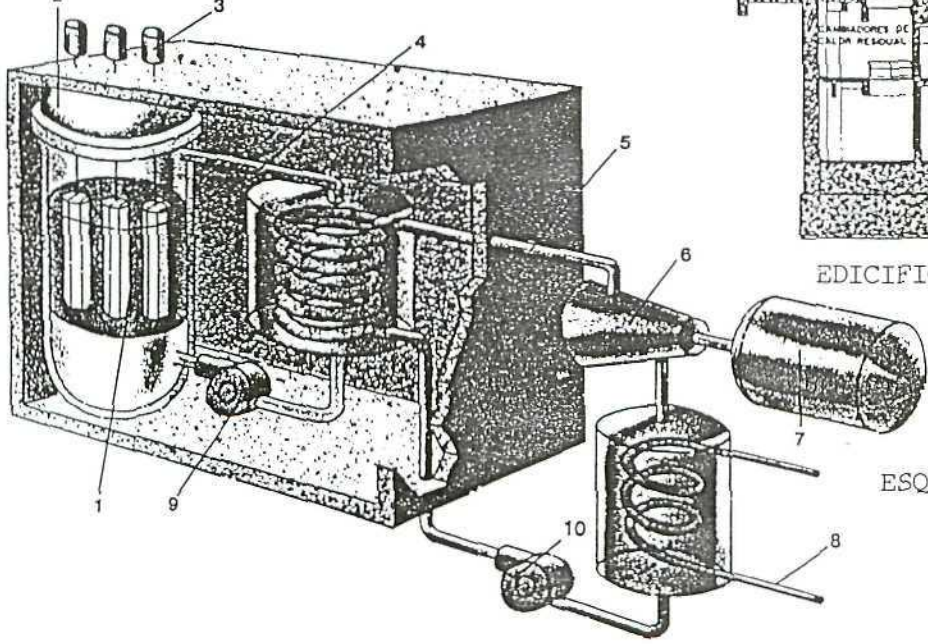




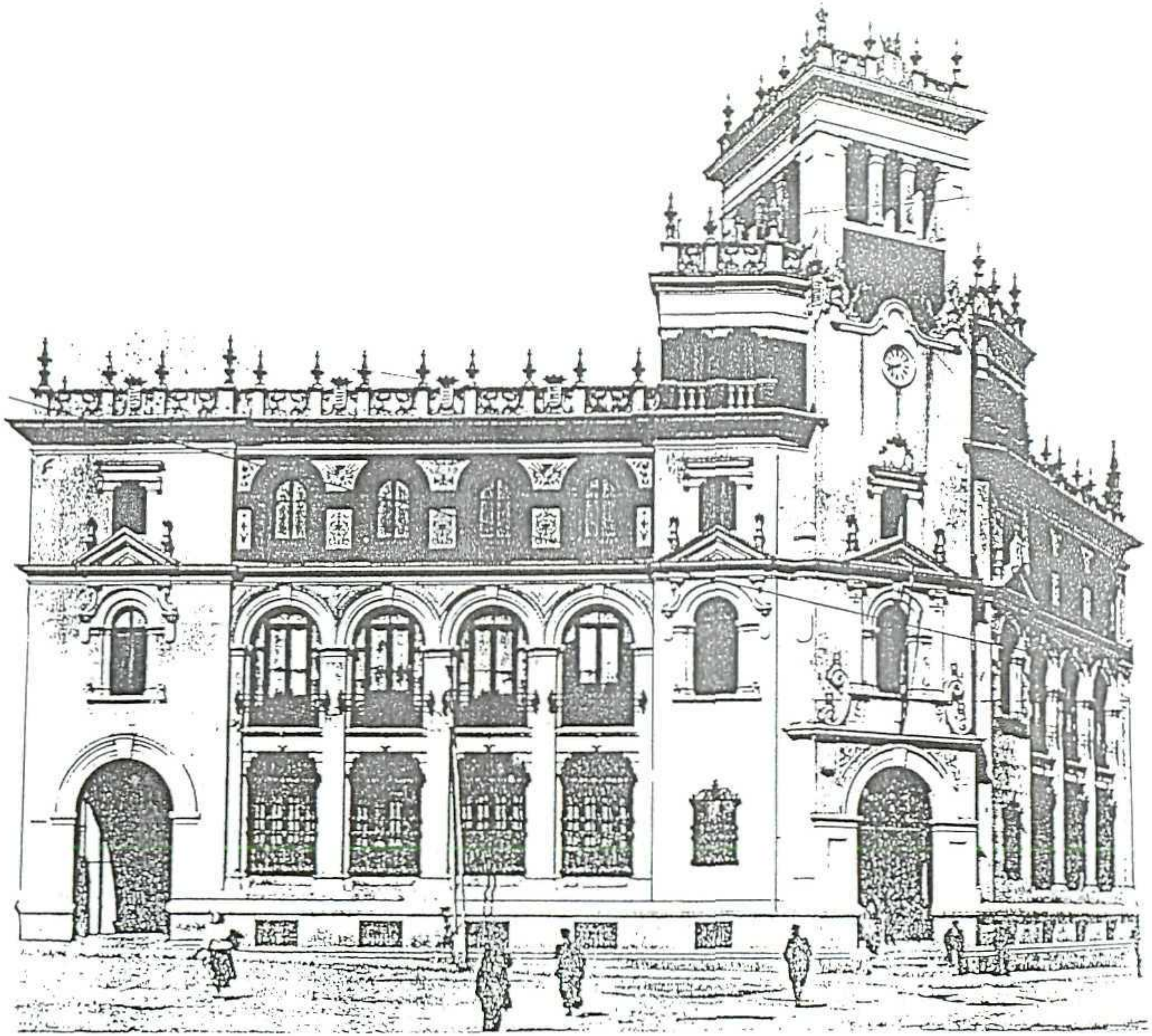
TORRE DE PERFORACIÓN DE PETROLEO



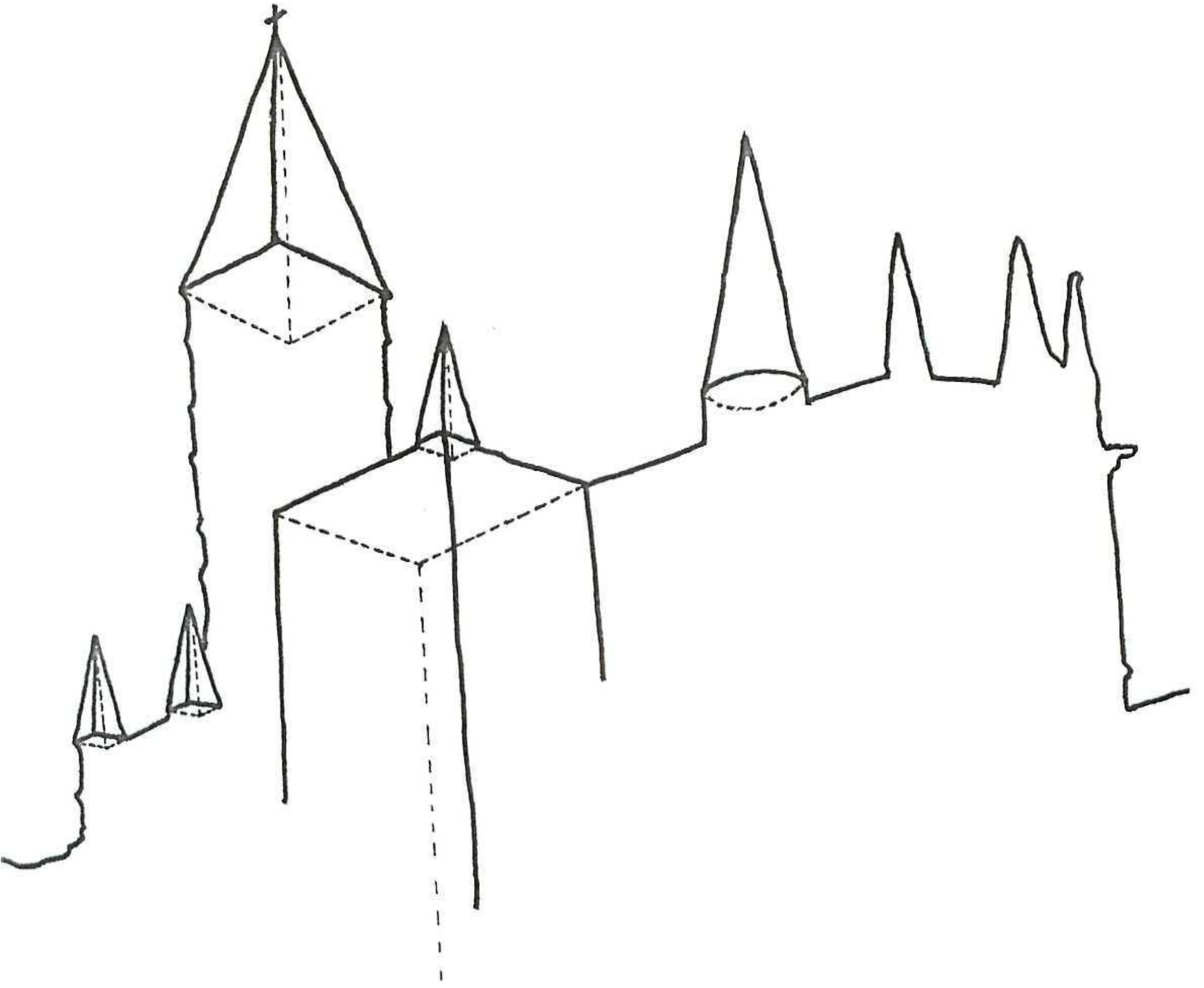
EDICIFIO DEL REACTOR NUCLEAR



ESQUEMA DE UNA CENTRAL NUCLEAR

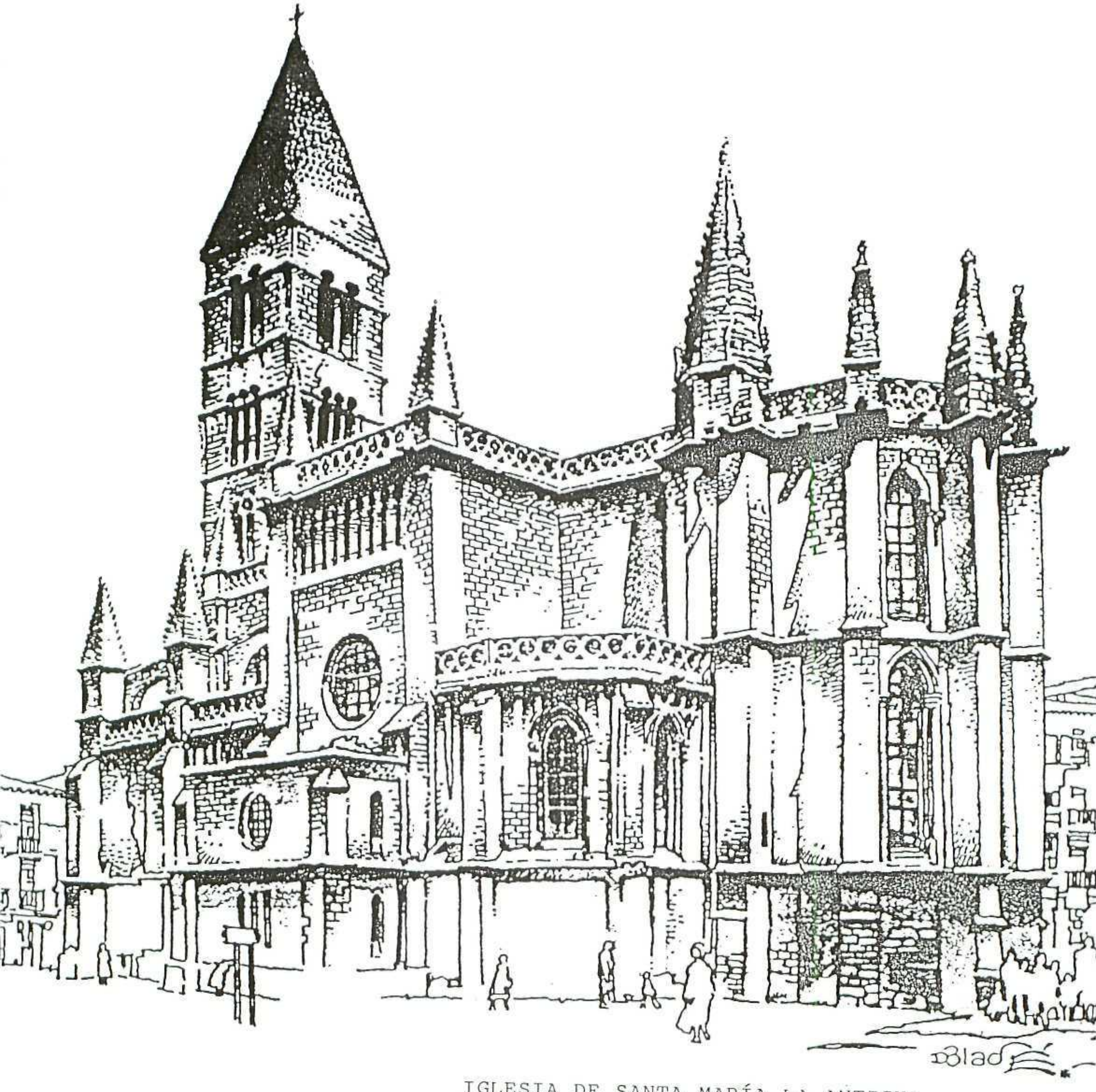


EDIFICIO DE CORREOS Y TELÉGRAFOS DE VALLADOLID

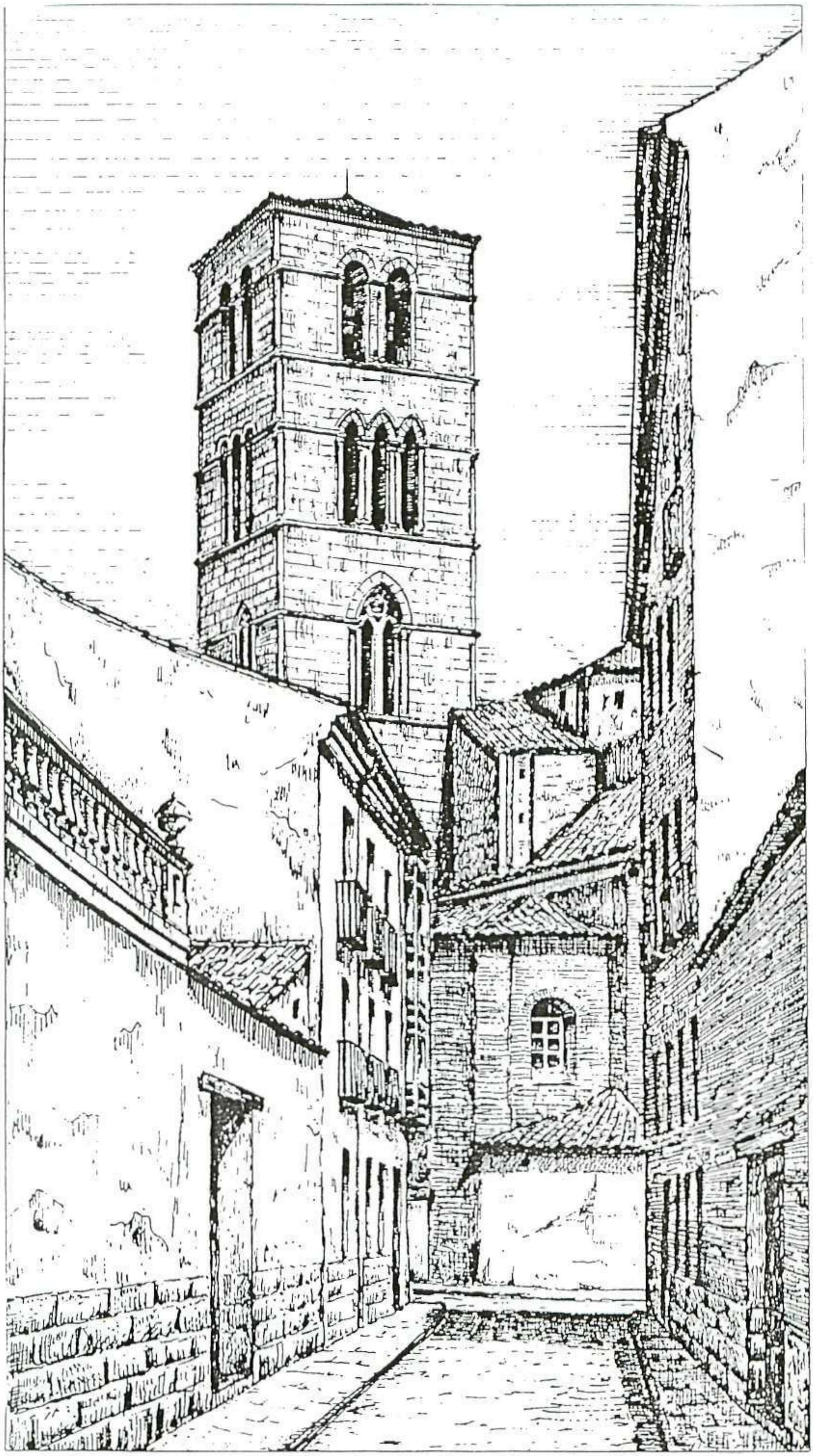


POSIBLES CUERPOS GEOMÉTRICOS A OBSERVAR EN

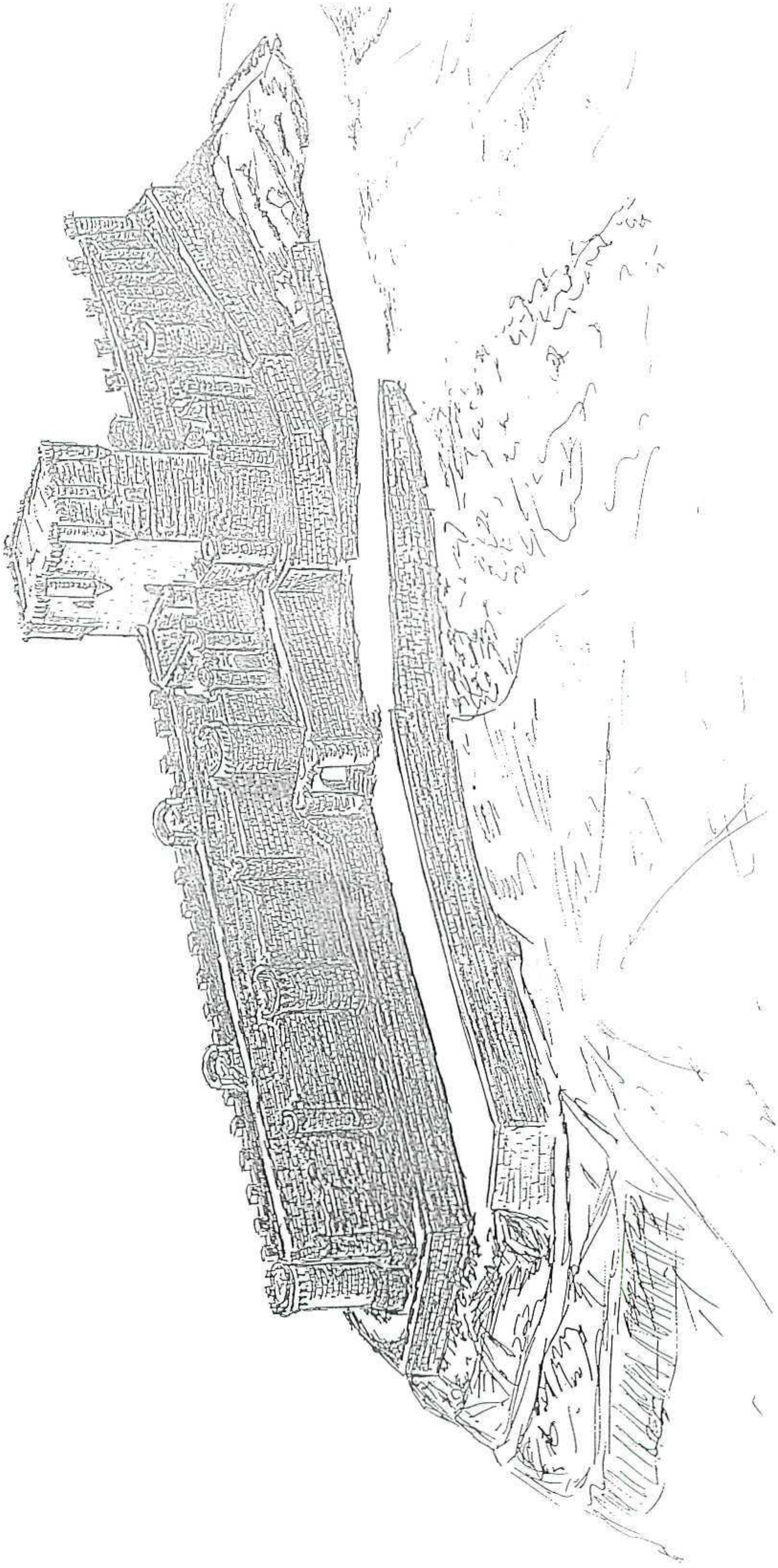
LA IGLESIA DE SANTA MARÍA LA ANTIGUA

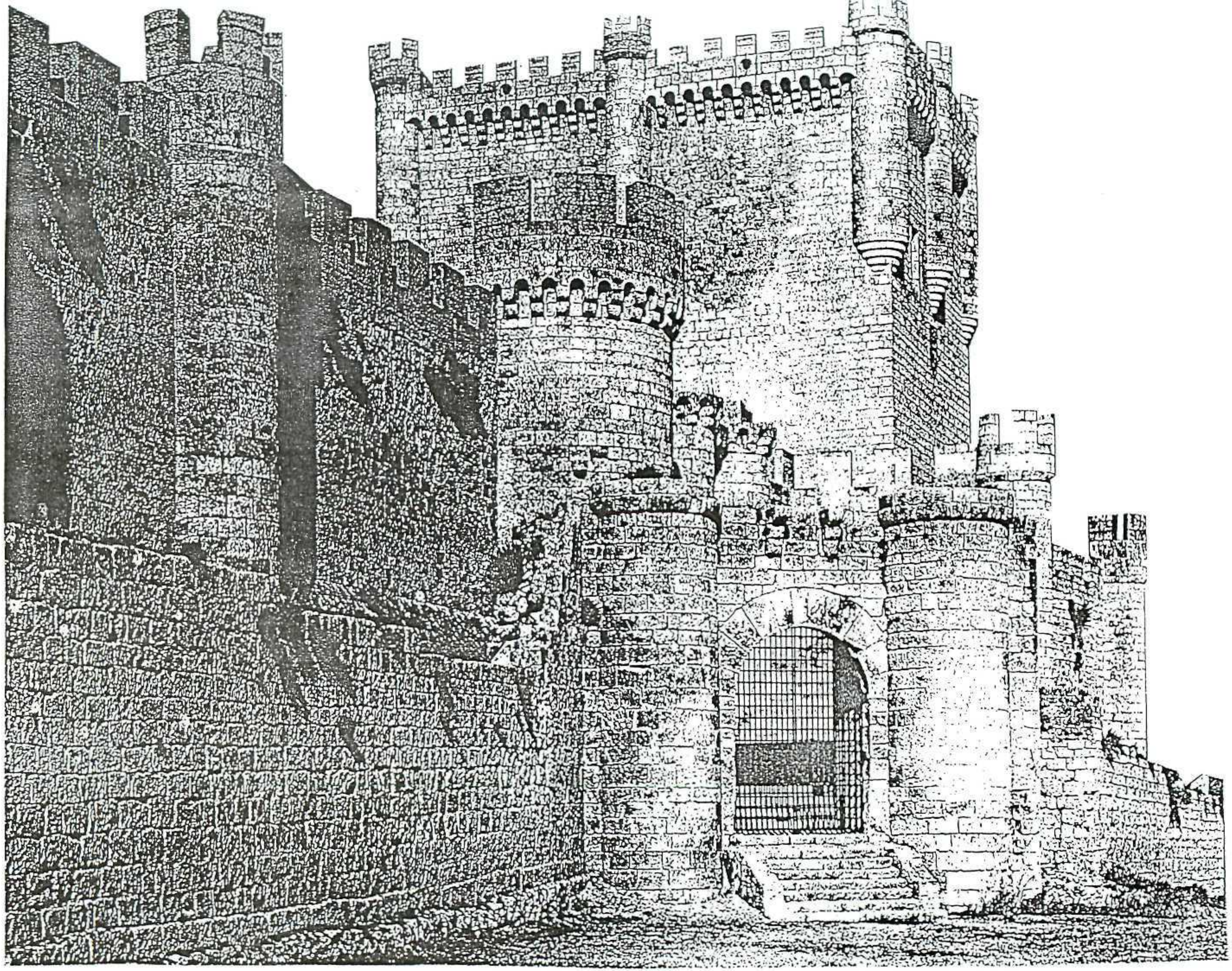


IGLESIA DE SANTA MARÍA LA ANTIGUA

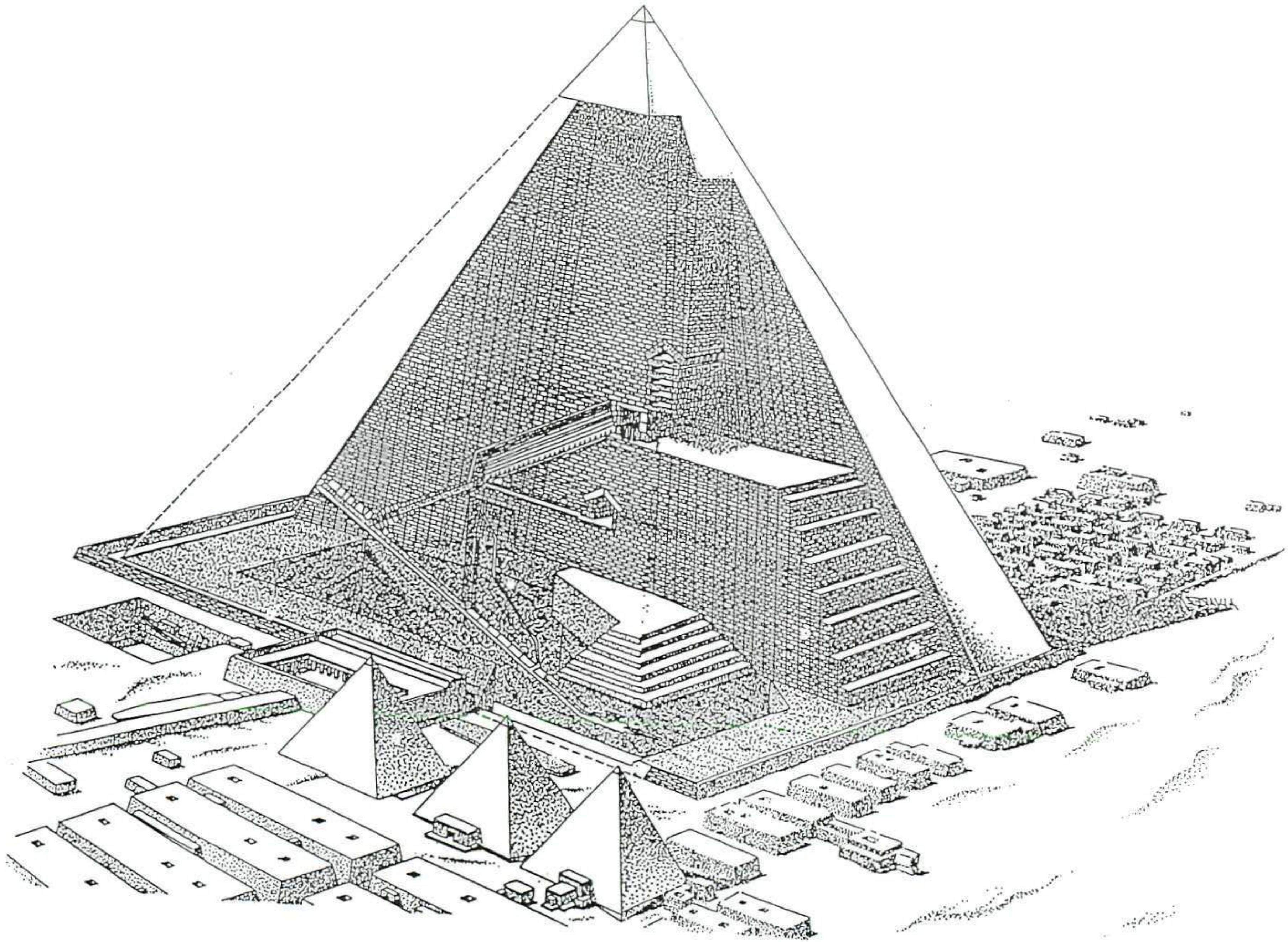


CALLE DE LA LIRA Y TORRE DE LA IGLESIA DE SAN MARTÍN

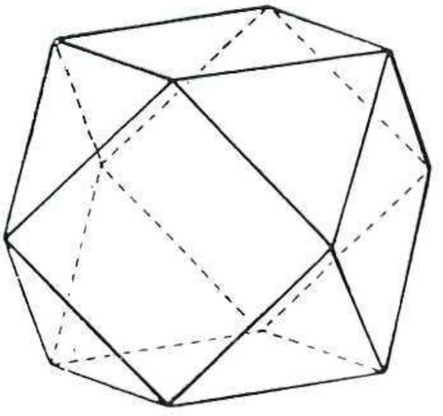


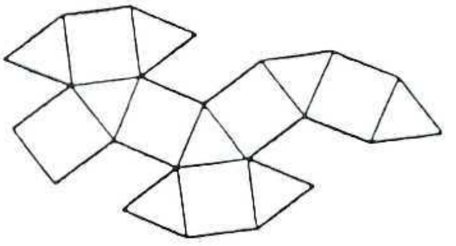


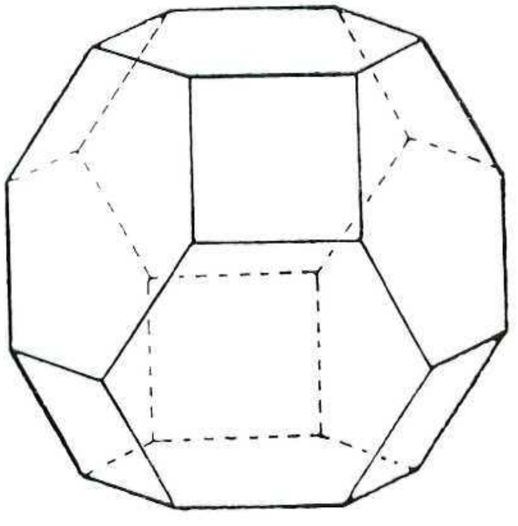
CASTILLO DE PEÑAFIEL (VALLADOLID)

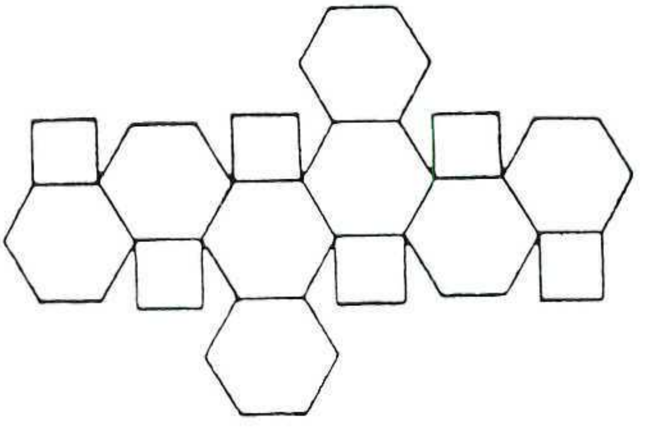


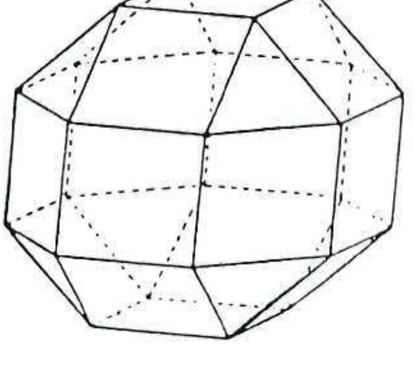
COMPLEJO DE KEOPS

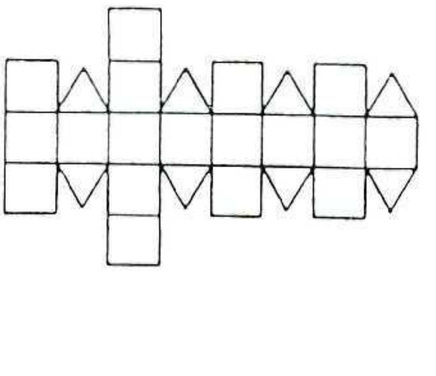


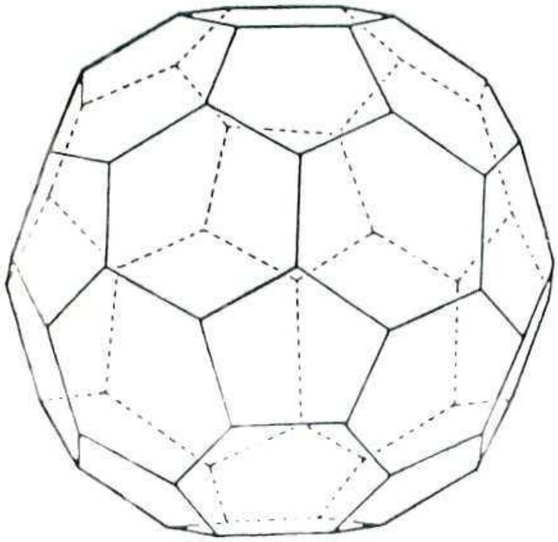


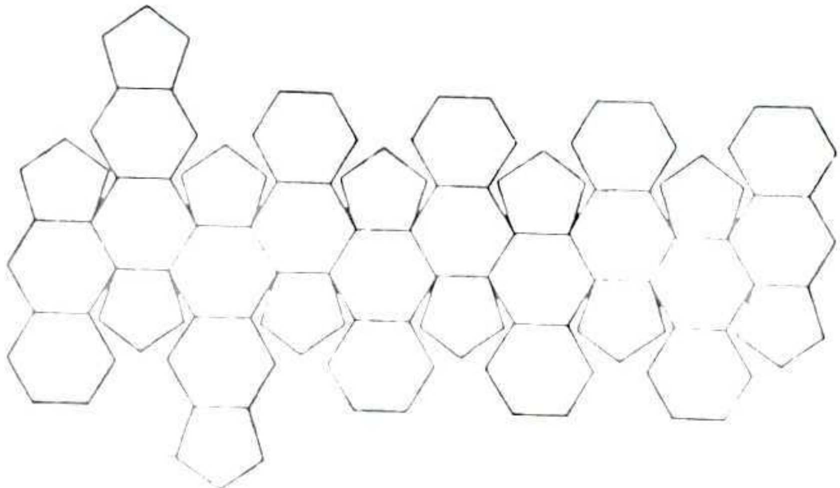


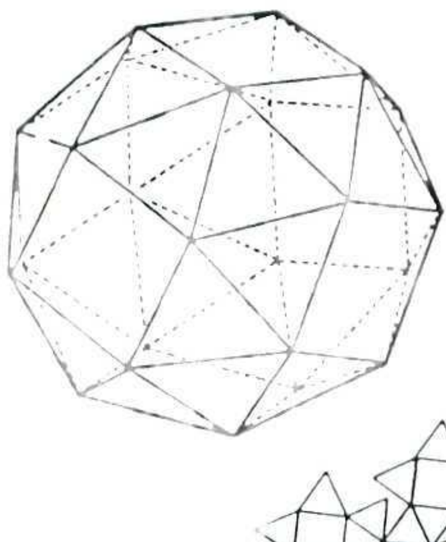


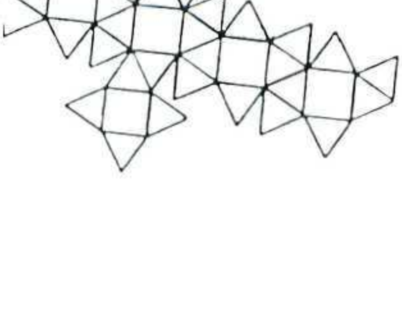


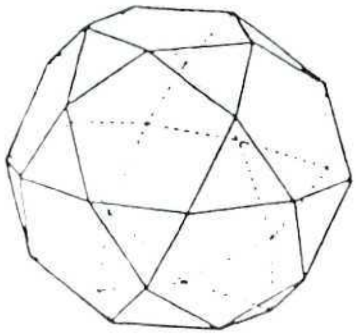


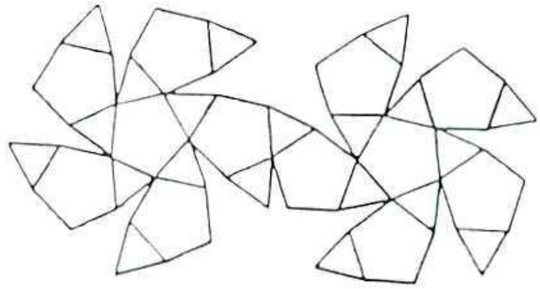


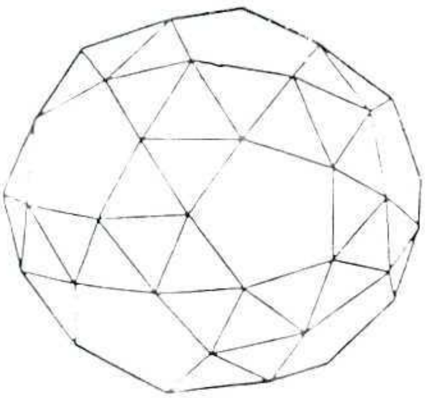


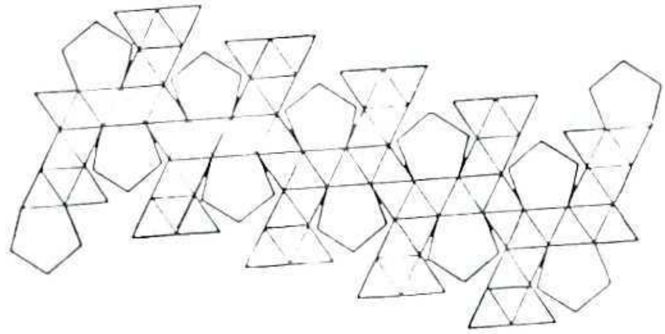


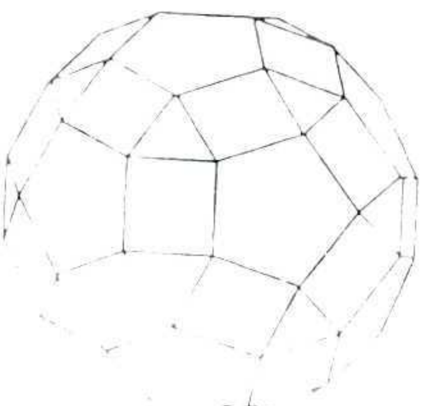


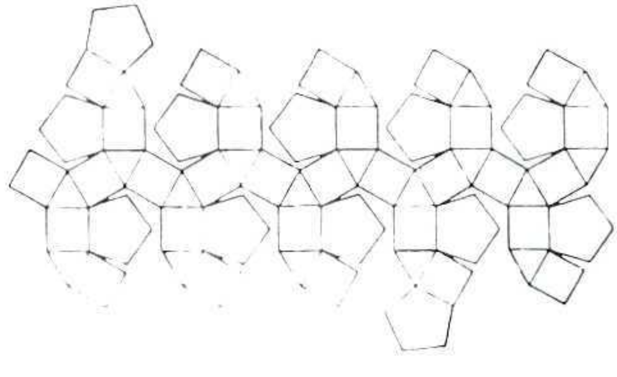




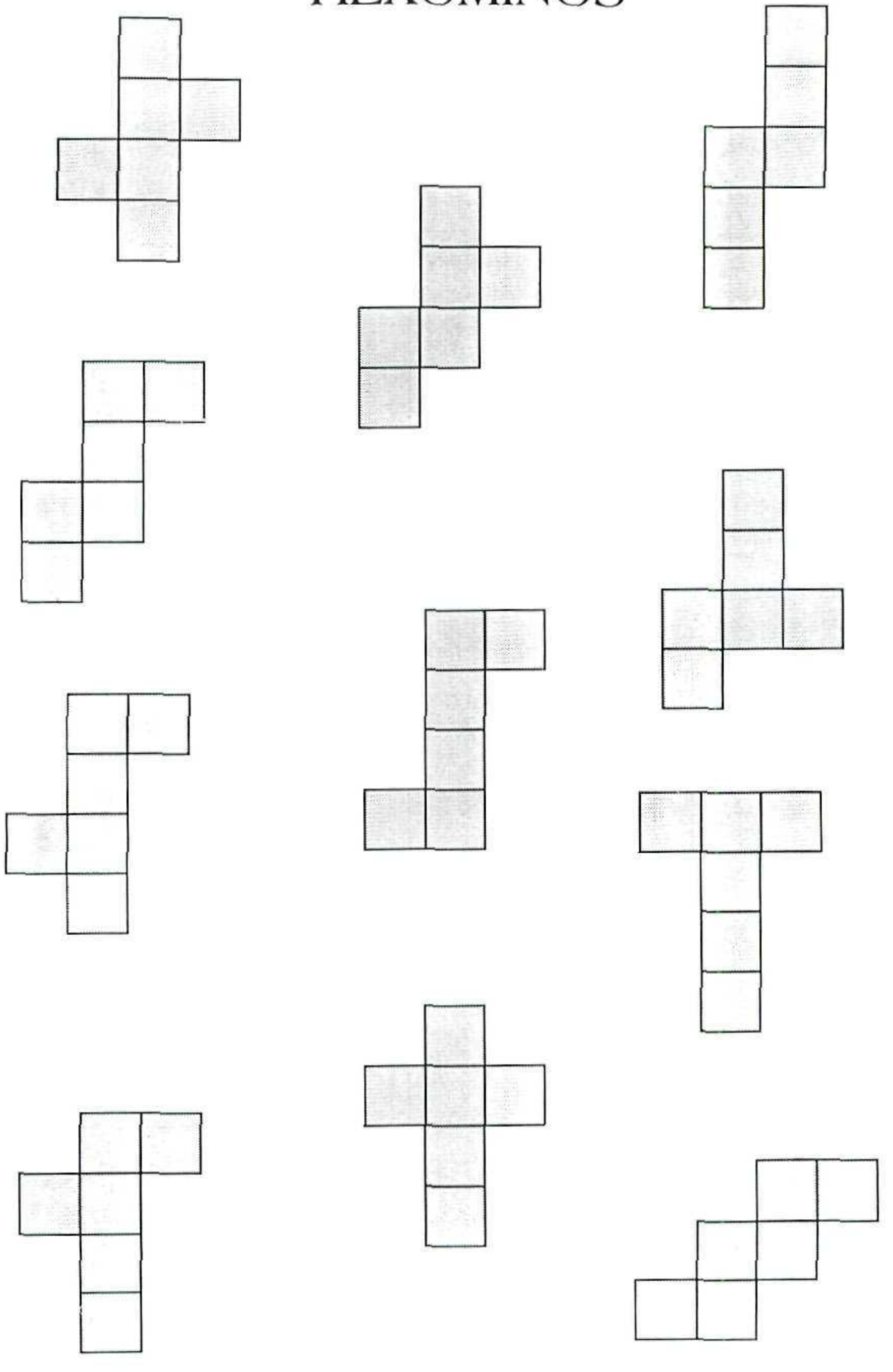








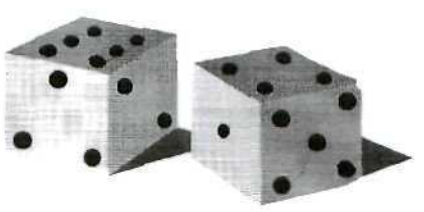
HEXOMINOS



Secundaria Obligatoria
Primer Ciclo

UNIDAD DIDÁCTICA

Azar
y
probabilidad



CARMEN CALVO ALDEA
ANA MELGAR DURÁN
MANUEL RIESCO SUÁREZ

Introducción

Esta unidad didáctica es el resultado de un curso ACD "A" de Matemáticas en Secundaria, realizado en el CEP de Móstoles (Madrid), 92/93. Fue elaborada y experimentada por profesores y profesoras pertenecientes al Primer y Segundo ciclo de la E.S.O. (Germán Marina, Antonio Rodríguez, Manuel Riesco, Ana Melgar y Carmen Calvo). Posteriormente, dicha unidad didáctica ha sido revisada por los tres últimos profesores señalados anteriormente.

La unidad va dirigida al Primer Ciclo de Secundaria, siendo decisión del profesorado aplicarla en el primero o segundo curso, puesto que se ofrece una variedad de actividades que va a permitir, a la hora de ponerla en práctica, elegir las que se consideren más adecuadas al grupo-clase.

El documento consta de varios apartados: objetivos didácticos, contenidos, metodología, evaluación y actividades, que pretenden orientar al profesorado de los cursos indicados, en la organización y desarrollo de una unidad didáctica.

Este grupo, siguiendo pautas y experiencias determinadas por el Informe Cockroft, por el Grupo Cero de Valencia y por otros colectivos matemáticos, ha pretendido hacer un desarrollo del tema que implique un aprendizaje significativo y un método que contemple:

- Pequeñas exposiciones por parte del profesorado,
- Trabajo individual del alumnado,
- Debates entre los equipos y entre el profesor o profesora y el equipo y grupo,
- Trabajo práctico adecuado y contextualizado,
- Consolidación y práctica de conceptos, destrezas y técnicas básicas,
- Resolución de problemas y
- Elaboración de pequeñas investigaciones

Las actividades que se proponen en este tema están organizadas en tres apartados: de experimentación, de consolidación y de aplicación, que recogen la metodología señalada anteriormente. Cada apartado va acompañado de unas orientaciones básicas para el profesorado.

La atención a la diversidad del alumnado está contemplada a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica: en los objetivos didácticos, en la evaluación y en las actividades.

Con esta unidad , que ha sido experimentada y modificada después de una reflexión en la práctica, se pretende ofrecer unos materiales de apoyo al profesorado. No es un modelo cerrado, sino que intentan servir de motivación para experimentar, mejorar y ampliar la propuesta realizada.

Metodología

Para desarrollar esta unidad didáctica, nos proponemos una serie de principios y criterios generales, que posibiliten un aprendizaje significativo:

- El alumnado será el protagonista de su propio aprendizaje; construirá y descubrirá los contenidos propuestos mediante la utilización de diversos materiales.

- El proceso de enseñanza-aprendizaje se iniciará mediante métodos inductivos para pasar, gradualmente, a métodos más deductivos y abstractos.

- El juego y la experimentación, serán ejes que sirvan al alumnado a probar, a organizar datos, a hacer conjeturas, a buscar regularidades, a comprobar hipótesis y a generalizar.

- Se fomentará el desarrollo del lenguaje matemático favoreciendo la explicación verbal de procesos seguidos en la resolución de las actividades. Se potenciará el trabajo de equipo que posibilite el debate y el respeto a las diferentes opiniones.

- Se organizarán las clases en equipos de 4 ó 5 alumnos o alumnas, siendo estos lo más heterogéneos posibles, de manera que se favorezca la interacción entre ellos y ellas.

- Se atenderá a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado mediante actividades que posibiliten diferentes grados de profundización, así como mediante la utilización de diversos materiales manipulables que faciliten la atención a la diversidad

- El profesorado será guía y motivador, realizando preguntas constructivas que ayuden a unir aprendizajes.

Para contribuir al desarrollo de estos principios y criterios se diseñan actividades de diversos tipos:

- **Actividades de experimentación,** que ayuden al alumnado a comprender y a asimilar los contenidos. Con este tipo de actividades se pretende:

  - Partir de las ideas que el alumno y la alumna tengan para detectar los errores que sirvan como punto de referencia para analizar su significado, así como para conectar los aprendizajes que tienen con los nuevos que se han diseñado.

  - Utilizar la manipulación y la experimentación de manera que posibiliten la construcción de los contenidos por parte del alumnado.

  - Favorecer la expresión verbal o gráfica de los experimentos realizados.

- **Actividades de consolidación,** mediante problemas y situaciones variadas, no repetitivas y motivadoras.

  Se incluyen actividades de recuperación y de profundización.

- **Actividades de aplicación,** en dos aspectos:

  - Planteamiento de problemas de la vida cotidiana
  - Problemas abiertos, de investigación que ayuden al alumnado a que se aventuren en ellos con la garantía de que todo avance hacia una solución.

Objetivos didácticos

1.- Analizar experimentalmente diferentes juegos para determinar si la solución es o no predecible.

2.- Reconocer y diferenciar sus juegos habituales, como de azar y deterministas.

3.- Determinar el grado de probabilidad cuantitativa en sucesos equiprobables.

4.- Analizar la variación de la frecuencia relativa en un suceso aleatorio.

5.- Resolver situaciones problemáticas relativas al azar y a la probabilidad en diferentes contextos.

6.- Expresar verbal, gráfica y simbólicamente los procesos realizados en azar y probabilidad, utilizando la terminología adecuada.

Para atender a la diversidad del alumnado se considera que:

- Los objetivos didácticos 1 y 2 deben ser alcanzados por todo el alumnado.
- El objetivo 4 será de profundización para aquellos alumnos y alumnas que lo permita su capacidad.
- En el objetivo 5 se *marcarán diferentes grados de profundización.*
- El objetivo 6 deberá ser alcanzado por la mayoría del alumnado. Se considerará únicamente la expresión oral en caso de alumnado con necesidades educativas especiales.

Contenidos

1.- Conceptos

- Fenómenos aleatorios
- Terminología:
  - Imposible - posible - seguro
  - Posible - probable
  - Aleatorio - determinista
  - Sucesos
- Experimentos y sucesos aleatorios: imprevisibilidad del azar.
- Asignación de probabilidades a un suceso:
  - Espacio muestral
  - Sucesos equiprobables
  - Frecuencia absoluta y relativa: Variación de la frecuencia relativa
  - Asignación de probabilidades a sucesos elementales equiprobables.
- Probabilidades de sucesos seguros, imposibles y contrarios.

2.- Procedimientos

- Utilización de distintos lenguajes:
  - **Verbal:** vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
  - **Gráfico:** elaboración de tablas de frecuencia y de tablas gráficas para representar los fenómenos aleatorios.
  - **Simbólico:** aplicación a las diversas situaciones
- Algoritmos y destrezas:
  - Obtención de números aleatorios usando diferentes técnicas.
  - Utilización de diversos procedimientos de recogida de datos (tablas, diagramas de árbol, etc.).
  - Cálculo de probabilidades, en casos sencillos, de sucesos equiprobables.
  - Detección y análisis de errores habituales en la interpretación del azar.

- Estrategias generales:
  - Reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana.
  - Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de los fenómenos aleatorios.
  - Planificación y realización de procesos para el estudio del comportamiento del azar.

3.- Actitudes

- Reconocimiento y valoración del azar para describir, interpretar y predecir situaciones inciertas.
- Curiosidad e interés por investigar fenómenos que estén relacionados con el azar.
- Valoración crítica ante las creencias populares sobre los fenómenos aleatorios.
- Reconocimiento y valoración del trabajo en equipo.
- Respeto a las opiniones de los demás.
- Gusto y sensibilidad por la precisión, claridad y el orden en la presentación de los trabajos

Evaluación

Entendemos la evaluación como una de las partes fundamentales del proceso enseñanza-aprendizaje, que tiene como finalidad la obtención y el análisis de información para facilitar la adecuación del proceso al progreso real del alumnado.

La evaluación debe ser, por tanto, una acción continuada y afectará tanto al proceso de enseñanza-aprendizaje de alumnos y alumnas como a la práctica docente.

1.- Qué evaluar

En consonancia con los objetivos didácticos propuestos, hemos fijado los siguientes

Criterios de evaluación:

1.- Recoger, organizar e interpretar datos.

2.- Representar datos en diagramas de barras.

3.- Analizar e interpretar resultados.

4.- Asignar probabilidades, de forma cualitativa (*) y cuantitativa, en fenómenos aleatorios, mediante recuento sistemático.

5.- Reconocer regularidades y relaciones en el azar.

6.- Participar de forma activa en el grupo, respetando los opiniones de los demás.

7.- Presentar con orden y claridad el trabajo escrito.

(*) El criterio nº 4, para el alumnado con necesidades educativas especiales, se evaluará únicamente en su aspecto cuantitativo..

2.- Cuándo evaluar

Realizaremos una **evaluación diagnóstica**, al inicio de la unidad y una **evaluación formativa** a lo largo de su desarrollo.

3.- Cómo evaluar

3.1.- Evaluación diagnóstica:

Con esta evaluación pretendemos conocer:

- El nivel real en que se encuentran los chicos y chicas en determinados aspectos conceptuales y que nos interesa detectar para el tratamiento del tema a experimentar.
- El dominio de aquellos procedimientos y técnicas que el alumnado necesita para el desarrollo de esta unidad.

Realizaremos esta evaluación mediante una prueba escrita. Los datos obtenidos en esta prueba se recogerán en una tabla para facilitar el conocimiento individual y del grupo-clase.

Uso de la tabla de la prueba diagnóstico:

Las actividades 1, 2, 3 y 4 van dirigidas a valorar el concepto y ordenación de fracciones, tanto gráfica como numéricamente, así como la expresión verbal sobre dicho concepto.

Las actividades 5 y 6 nos ayudarán a descubrir la idea que el alumnado tiene sobre algún vocablo de azar y probabilidad de uso coloquial.

Con las actividades 7 y 8 se pondrán de manifiesto los procedimientos que tiene el alumno o alumna para clasificar y organizar datos.

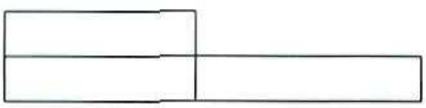
Con las actividades 9, 10 y 11 pretendemos valorar las ideas intuitivas que el alumnado posee sobre fenómenos imprevisibles.

PRUEBA ESCRITA PARA LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Nombre: .... **Curso:** ....

1.- Explica qué quiere decir: "Me he comido 1/6 de la tarta".

2.- ¿Qué fracción la falta a este dibujo para completar un rectángulo?



3.- Antonio pinta 1/6 de un folio, Ana 1/3 de otro folio del mismo tamaño. ¿Quién ha pintado más superficie del folio?

4.- Ordena estas fracciones: 2/3, 1/4, 3/5, 2/4 y 3/4. Explica el procedimiento utilizado.

5.- Lee con atención estas frases:

1- No puede suceder.
2- No sucede muy a menudo.
3- Sucede bastante a menudo.
4- Sucede casi siempre.
5- Sucede siempre.

Coloca a la derecha de las siguientes preguntas el número que tú creas que le corresponde de entre las frases anteriores:

– ¿Qué frase significa lo mismo que muy probable?
– ¿Qué frase crees que significa lo mismo que improbable?
– ¿Qué frase crees que significa lo mismo que probable?
– ¿Qué frase crees que significa lo mismo que imposible?

6.- Escribe una palabra o frase que signifique lo mismo que:

- Imposible
- Posible
- Igual posibilidad
- Poca posibilidad
- Muy probable

7.- Clasifica las letras de este texto (incluido el nombre del autor) en una tabla donde se vea claramente la cantidad de letras distintas que hay:

TEXTO:

UN GRAN DESCUBRIMIENTO RESUELVE UN GRAN PROBLEMA, PERO EN LA SOLUCIÓN DE TODO PROBLEMA HAY UN CIERTO DESCUBRIMIENTO

(G. POLYA)

8.- Haz una tabla para clasificar a los alumnos y alumnas de tu clase según el sexo y el color del jersey.

9.- Una ficha roja por un lado y verde por otro se lanza al aire. ¿Qué lado tiene más posibilidades de salir?

- El lado rojo
- El lado verde
- La misma posibilidad
- No lo sé

10.- En un curso hay 17 chicos y 21 chicas. Se toma un alumno al azar. marca la respuesta correcta:

- Es más probable que se trate de un chico.
- Es más probable que se trate de una chica.
- Es igual de probable que sea chico o chica.
- No lo sé.

11.- Sobre los rectángulos de la figura se lanza una moneda. ¿En qué rectángulo es más fácil caer en un tres?

- En el rectángulo a.
- En el rectángulo b.
- En los dos igual.
- No lo sé.

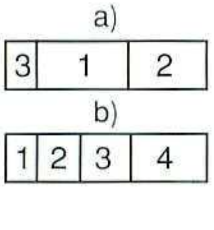


TABLA PRUEBA DIAGNÓSTICO						
NOMBRE	FRACCIÓN		LENG.	RECOG. DATOS		PROB.

Rojo: muy bien Azul: normal Verde: Necesita ayuda

3.2.- Evaluación formativa

Esta evaluación nos facilitará un seguimiento del alumnado a lo largo de todo el proceso, de manera que posibilite la intervención en el momento adecuado.

Este seguimiento implica:

- Una valoración individual y de grupo, tanto del proceso como del esfuerzo realizado.
- Una comunicación, a nivel individual y/o grupal, de las sucesivas valoraciones que se vayan realizando, intentando resaltar los aspectos positivos.
- Una orientación, una vez hechas las diversas observaciones y valoraciones, a cada uno de los alumnos y alumnas en aquellos procesos que sea necesario.

Se irá realizando a través de distintos **Procedimientos**, mediante la aplicación de **Instrumentos** adecuados a cada uno de ellos:

3.2.1.- Intercambios orales:

- **Entrevistas individuales**, que se intentarán realizar con aquellos alumnos y alumnas que presenten dificultades en el proceso de aprendizaje; estas entrevistas se diseñarán en el momento en que se adviertan las dificultades concretas a superar. Si en alguna ocasión no pudieran realizarse a nivel individual, se agrupará al alumnado por dificultades y se intentará reconducir el proceso a nivel de pequeño grupo.
- **Puestas en común:** Se planificarán regularmente sesiones para intercambio de opiniones, experiencias realizadas y conclusiones.
- **Debates**, dirigidos especialmente al análisis de errores habituales en la concepción del azar.

3.2.2.- Escala de observación

Observación sistemática: Con este instrumento se recogerán datos de cada alumno y alumna, de manera que proporcionen información sin las interferencias que causa el saber que se está siendo evaluado.

Esta observación se realizará de forma sistemática y con regularidad: se recogerán datos en la ficha adjunta de cuatro o cinco alumnos o alumnas diariamente, de manera que, al finalizar la Unidad Didáctica, se tenga un registro que contribuya a un mejor conocimiento y valoración del proceso de enseñanza-aprendizaje.
La toma de datos se llevará a cabo en diferentes situaciones: trabajo individual, en equipo, puestas en común,..., todas ellas en el marco de clase.

Para facilitar las observaciones directas y, de forma orientativa, se propone la siguiente relación de contenidos:

Conceptos:

1.- Utiliza el vocabulario adecuado
2.- No diferencia los diversos términos de azar

3.- Distingue entre casos favorables y posibles
4.- No distingue entre casos favorables y posibles
5.- Asigna probabilidades a sucesos muy sencillos
6.- No asigna probabilidades a sucesos muy sencillos
7.- Asigna probabilidades a sucesos aleatorios
8.- No asigna probabilidades a sucesos aleatorios
9.- Diferencia suceso seguro, imposible y contrario
10.- No diferencia suceso seguro, imposible y contrario
11.- Utiliza la probabilidad en fenómenos cotidianos
12.- No utiliza la probabilidad en fenómenos cotidianos

Procedimientos:

1.- Ordena datos en tablas
2.- No ordena datos en tablas
3.- Se expresa verbalmente con fluidez
4.- No se expresa verbalmente con fluidez
5.- Representa datos en gráficas
6.- No representa datos en gráficas
7.- Analiza e interpreta resultados
8.- No analiza ni interpreta resultados
9.- Reconoce y describe regularidades
10.- No reconoce ni describe regularidades
11.- Utiliza diagramas de árbol
12.- No utiliza diagramas de árbol
13.- Planifica y organiza una experiencia aleatoria
14.- No planifica ni organiza una experiencia aleatoria

Actitudes:

1.-Atiende y muestra interés por el trabajo en clase
2.- No atiende ni muestra interés por el trabajo en clase
3.- No se perciben bloqueos por el sentido del fracaso
4.- Se perciben bloqueos por el sentido del fracaso
5.- Tiene ilusión por aprender y se divierte con la tarea
6.- No tiene ilusión por aprender ni se divierte con la tarea
7.- Contrasta sus opiniones con los demás
8.- No contrasta sus opiniones con los demás
9.- Lleva el trabajo al día
10.- No lleva el trabajo al día
11.- Le gusta tener las cosas ordenadas y limpias
12.- No muestra interés en tener las cosas en orden
13.- Valora el trabajo bien hecho
14.- No valora el trabajo bien hecho
15.- Trabaja autónomamente, formula y comprueba ideas
16.- No trabaja autónomamente
17.- Sabe trabajar en equipo, respetando a los demás
18.- No sabe trabajar en equipo respetando a los demás

TABLA DE OBSERVACIÓN DIRECTA GRUPO: ....

NOMBRE	CONCEPTOS	PROCEDIM.	ACTITUDES	AYUDA

3.2.3.- Pruebas específicas

Se han diseñado tres ejemplos de este tipo de pruebas, las cuales también tienen como fin el ir adecuando los objetivos didácticos a las actividades de enseñanza-aprendizaje, en función de las necesidades que se vayan detectando en el alumnado a lo largo del proceso.

El alumnado dispondrá del material necesario para la experimentación.

El profesorado decidirá el momento y las condiciones de su aplicación

EJEMPLO 1

Se trata de lanzar dos dados cúbicos 100 veces e ir anotando el resultado de sumar los números que aparezcan.

A) Para responder razonadamente antes de realizar la experiencia:

1.- ¿Qué número va a salir más veces?

2.- ¿Cuál es el mayor número que puede salir?

3.- ¿Y el menor?

4.- ¿Cuántos resultados posibles hay?

B) Después de realizar las tiradas:

1.- Observa los resultados

2.- Comprueba si eran ciertas tus hipótesis.

3.- Representa los resultados en un diagrama de barras.

EJEMPLO 2:

Juan y Pedro han sido designados por su clase para que compren un décimo para el sorteo de la lotería de Navidad. Al llegar a la Administración de Lotería se encuentran que sólo tienen los siguientes números: **55455 00027 23456 17398 y 99984.**

A Pedro no le gusta el Nº 55455 porque piensa que es dificilísimo que salga un número con la misma cifra repetida. Tampoco le gusta el 00027 porque es muy bajo.

A Juana no le gusta el 23456 porque piensa que es prácticamente imposible que salgan las cinco cifras consecutivas. No quiere el 99984 porque dice que nunca ha salido un número tan alto.

De mutuo acuerdo deciden comprar el 17398 porque les parece el más normal de todos y, por lo tanto, el más probable de que les pueda tocar.

- Explica tu opinión sobre las ideas de Juana y Pedro.
- ¿Qué número habrías comprado tú? - ¿Por qué?

EJEMPLO 3:

Se escribe el nombre de cada mes del año en una ficha y se colocan todas las fichas en una caja. se extrae al azar una ficha. calcula la probabilidad de que:

a) Salga el mes de Julio

b) Salga un mes de verano

c) Salga un mes que tenga en su nombre la letra "r"

- Escribe el suceso contrario a cada uno de los anteriores y calcula sus probabilidades.

3.2.4.- Cuestionarios

Serán realizados tanto por el alumnado como el profesorado, siendo su fin la autoevaluación del proceso por parte de todos los participantes en el mismo.

Se adjuntan dos modelos de cuestionarios de autoevaluación:

a) para el alumnado

b) para el profesorado

Modelo a)

1.- Describe una o más ideas que no te hayan quedado claras:

2.- ¿Qué crees que podría ayudarte a mejorar tu comprensión?

3.- Describe lo fundamental que has entendido:

4.- Completa estas frases:

- He observado que
- He descubierto que
- Me ha gustado

5.- Rodea la puntuación que te parezca más adecuada (1:poco, 2:normal, 3:mucho)

– Mi trabajo personal en clase	1	2	3
– Mi trabajo con el grupo	1	2	3
– Mi esfuerzo personal en casa	1	2	3

6.- Di los aspectos en los que te encuentres más seguro o segura:

7.- Teniendo en cuenta tu nivel, el tema te ha resultado:

Muy difícil Difícil Normal Fácil Muy fácil

8.- Rodea con un círculo la valoración general del tema

(1: negativa, 2: normal, 3: positiva) 1 2 3

Modelo b)

1.- ¿Me he sentido a gusto desarrollando esta unidad?...........¿Por qué?

2.- La organización de la clase me ha resultado:

3.- ¿He tenido dificultades para exponer las actividades?.....¿Cuáles?

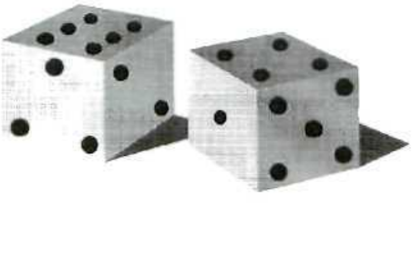
4.- El tiempo designado ha sido:

5.- ¿Qué le ha faltado a la unidad?

6.- ¿Qué le ha sobrado?

7.- El nivel alumnado-profesor o profesora y entre el alumnado ha sido:8.- ¿Qué he aprendido en el desarrollo de esta unidad?

ACTIVIDADES



Actividades de experimentación

Comentarios para el profesorado:

Con las actividades **"juegos de bolas y colores"** y **"la ruleta mágica"** se pretende que el alumnado tome conciencia de situaciones en loa cuales aparece la incertidumbre del resultado, dando comienzo la idea de azar. En estas actividades se recogen y tabulan datos en grupo y se comienza a interpretar y poder predecir, aunque sabiendo que nunca es seguro acertar.

Con **"preguntando por los hermanos"** los chicos y chicas aprenden a estudiar características de una población y a distinguir los términos "posible", "probable", "seguro" e "imposible".
Este tipo de actividad puede ampliarse con muchos otros casos a realizar en su entorno más inmediato (animales de compañía,...), lo que posibilita la atención a la diversidad.

En la actividad **"carrera de caballos"** se vuelve a colocar al alumnado en situación de predecir en situaciones de incertidumbre para, en la puesta en común, inducirle a interpretar datos con menor o mayor probabilidad. se trata de que llegue a diferenciar claramente entre "aleatorio" y "equitativo".

Al **"jugar con dados"** se favorece el uso de las fracciones y porcentajes para comprender las frecuencias, tanto absolutas como relativas. Con el último apartado se pretende que el chico o la chica compruebe la importancia de las gráficas cuando se trata de un número de datos considerable.

La actividad **"laberintos"** tiene como fin que el alumnado practique la técnica de la simulación y compruebe la utilidad de la misma para el estudio de experimentos aleatorios. Dado que pueden realizarse ejercicios de este tipo con diferentes laberintos, se considera una actividad muy adecuada para la atención a la diversidad.

1.- Juego de bolas y colores

Materiales para cada equipo:

- Bolsa opaca
- Siete bolas rojas y tres verdes.
- Casillero numerado del 0 al 10
- Tabla de recogida de datos
- Fichas de dos colores (una para cada jugador)
- Hoja de trabajo.

Desarrollo de la actividad:

Cada dos alumnos dispondrán de una bolsa opaca con 10 bolas (7 rojas y 3 verdes).

Los jugadores conocen los dos colores que hay, pero no la cantidad de bolas de color.

Cada jugador tiene una ficha de color diferente al del compañero y elige un sentido: hacia el 10 ó hacia el 0.

Para la salida se colocarán las dos fichas en la casilla número 5.

Gana el que llegue antes al 10 o al 0.

Uno de los alumnos debe predecir el color que cree que va a salir y saca una bola.

Ambos jugadores apuntan en sus tablas el color predicho y el que ha salido.

Se avanza una casilla si el color predicho es el mismo que ha salido, se retrocede una casilla si el color no coincide.

Se devuelve la bola a la bolsa y el otro jugador hace lo mismo: predice el color, saca bola y avanza o retrocede.

Cada pareja contestará las preguntas de la hoja de trabajo (a).

Se recogerán los datos, de todas las parejas de la clase y se volverá a responder en la hoja de trabajo (b).

MODELO DE CASILLERO

10
9
8
7
6
57
4
3
2
1
0

TABLA DE RECOGIDA DE DATOS		
Nº DE LA JUGADA	COLOR	
	PREDICCIÓN	REALIDAD

HOJA DE TRABAJO

Debéis responder dos veces: una a la vista de los datos del grupo, y la otra a la vista de los datos de toda la clase.

1. ¿Qué colores os han salido?

    a)

    b)

2. ¿De qué color creéis que hay más bolas?

    a)

    b)

3. ¿Es posible que os salga una bola negra?

    a)

    b)

4. ¿Qué colores son seguros que os saldrán?

    a)

    b)

5. ¿Qué color es más favorable a que os salga?. ¿Por qué?

    a)

    b)

6. ¿Qué número de bolas creéis que hay de cada color?

    a)

    b)

---

a) Respuestas por parejas.

b) Respuestas después de recoger los datos de la clase.

2.- La ruleta mágica

Coge un clip y colócalo en un lápiz en el centro de la ruleta. Gíralo y observa en qué zona (G, J, K, S).

1.- Haz una hipótesis sobre la zona que crees que va a caer más veces el clip y explica tu por qué.

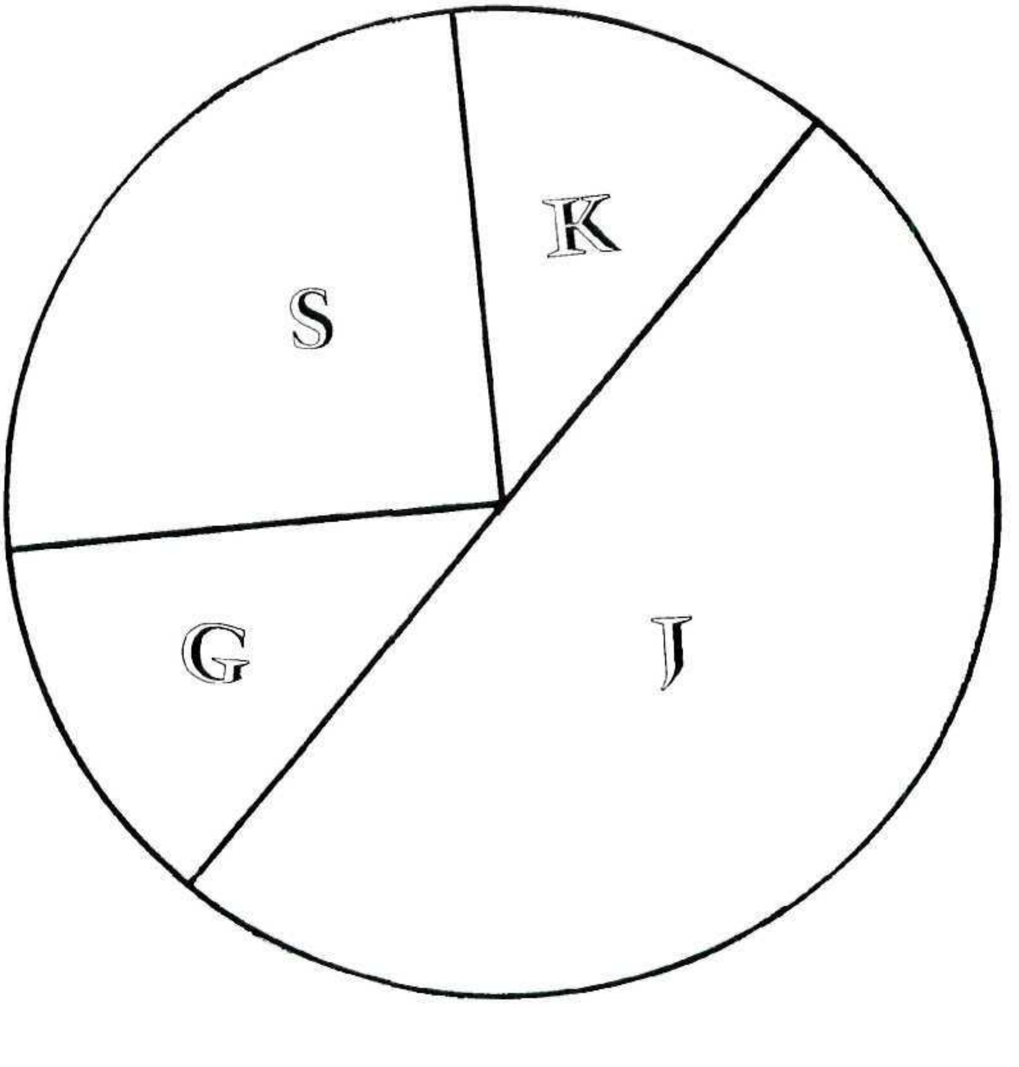
2.- Recoge datos en una tabla, girando el clip unas 100 veces.

3.- Escribe todas las observaciones que hayas visto.

4.- Recoge datos de todos los compañeros y compañeras de tu clase.

5.- Dibuja una gráfica con los datos recogidos

6.- Analiza los resultados y comprueba la certeza de tu hipótesis



3.- Preguntando por los hermanos

Materiales para cada equipo:

- Tabla de recogida de datos
- Tabla de recogida de totales
- Hojas de trabajos I y II

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

- Se hará un estudio en clase sobre el número de hermanos y hermanas del alumnado.
- Se considerará que cada persona es hermana de sí misma.
- Cada equipo dispondrá de una tabla de recogida de datos, donde señalará las casillas correspondientes que indique cada persona de la clase.
- Se realizará el recuento y los datos se anotarán en la tabla de totales.
- Cada equipo pondrá en común sus conclusiones, acordando cuáles son las correctas, que comunicarán al grupo-clase.

TABLA DE RECOGIDA DE DATOS						
ALUMNOS/ALUMNAS	0	1	2	3	4	+4
TOTAL						

Debes colocar una X en el cuadro correspondiente

HOJA DE TRABAJO I

Observa detenidamente la tabla de recogida de datos y responde a las siguientes cuestiones, indicando el porqué de dichas respuestas.

1.- Si elegimos al azar un alumno o alumna de la clase, ¿qué número de hermanos es posible que tenga?

2.- ¿Qué número de hermanos es más probables que tenga?

3.- ¿Qué número de hermanos es seguro que tiene?

4.- ¿Qué número de hermanos es imposible que tenga?

5.-¿Cuál es el conjunto de todos los sucesos, llamado espacio muestral?.

HOJA DE TRABAJO II

Anotar en la tabla siguiente las frecuencias absolutas y relativas de cada uno de los sucesos.

TABLA DE TOTALES

Nº DE HERMANOS	TOTALES	FREC. ABSOLUT.	FREC. RELATIVAS

Con estos datos haz un diagrama de barras de las frecuencias absolutas

4.- Carrera de caballos

Materiales para cada equipo:

- Dos dados cúbicos
- Fichas de colores.
- Tablero de carrera de caballos.
- Tabla de recogida de datos.
- Tabla de apuestas.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

- Hay siete caballos numerados del 1 al 6.

- Se forman equipos de trabajo de siete componentes; cada uno de ellos elegirá un número diferente del tablero.

- Cada jugador tira los dos dados rotativamente, se resta del número mayor el número menor y el jugador cuyo número elegido coincida con la diferencia, avanzará su ficha una casilla en dirección a la meta.

- El ganador del juego será quien antes llegue a la meta.

- Se irán anotando los resultados en la tabla y se confeccionará con ellos un diagrama de barras.

- Analizados los resultado de la partida, se elegirá de nuevo un número y se jugará otra partida.

- Se recogerán los nuevos datos del equipo.

- Se finalizará con una puesta en común donde se estudiarán los datos de todo el grupo clase.

TABLA DE APUESTAS

NOMBRE	PARTIDA 1	PARTIDA 2

TABLA DE RECOGIDA DE DATOS

	0	1	2	3	4	5	6
1ª PARTIDA							
2ª PARTIDA							

1) ¿Crees que todos los caballos tienen la misma posibilidad de ganar? ¿y la misma probabilidad?

2) Razona las respuestas.

TABLERO DE CARRERA DE CABALLOS

							META
0	1	2	3	4	5	6	SALIDA

5.- Jugando con dados

Materiales para cada equipo

- Dados cúbicos.
- Tabla de frecuencias.
- Tabla de recogida de datos.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

- Este juego constará de varias fases:

1ª FASE:

- Se formarán 10 equipos de alumnos que anotarán en la tabla de frecuencias las veces que piensan que saldrán el 1, el 2, el 3, el 4, el 5 y el 6 con cien tiradas.

- Con los datos de las cien tiradas se completará la tabla de frecuencias absolutas y relativas

	Nº DE VECES	FRE. ABS	FRE. REL.
1			
2			
3			
4			
5			
6			
TOTAL			

- Se recogerán los datos de todos los grupos y se hará una puesta en común, después de que cada equipo responda a la siguiente pregunta:

  - Qué observáis en la tabla?

2ª FASE:

– Se confeccionará la siguiente tabla con los datos de toda la clase:

Nº LANZAM.	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
F. ABS. (4)										
F. REL. (4)										

– ¿Ocurre lo mismo para el número 1? ¿y para el 6?

3ª FASE:

– Se recogerán datos de la frecuencia de otros dos números y se representarán, junto con la del cuatro, en una gráfica

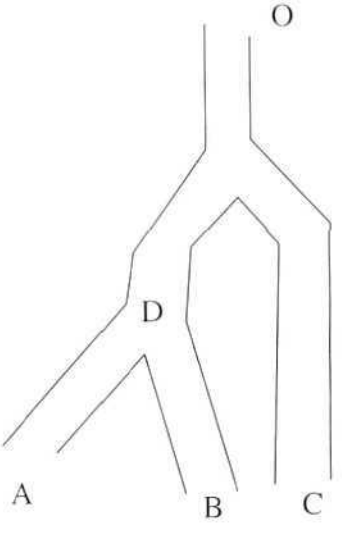
100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000

– ¿Qué observas en la gráfica?

– Analiza los resultados.

6.- Laberintos

Observa los caminos que muestra el dibujo:



Imagina que lanzamos 100 veces una canica desde O

- Predice cuántas veces saldrá por A, por B y por C
- Simúlalo lanzando una moneda 100 veces y respetando las reglas siguientes:

  • Si sale cara, avanza por el camino C
  • Si sale cruz, avanza hasta D y vuelves a lanzar: si ahora te sale cara, llegas a B y si te sale cruz vas hasta A

NÚMERO DE JUGADAS	C	D	
		A	B

Se recogerán los datos de toda la clase y se hará una puesta en común.

Actividades de consolidación

Comentarios para el profesorado

El Informe Cockroft señala que, **"Las matemáticas son una asignatura difícil de enseñar. Una de las causas consiste en que se trata de una asignatura jerarquizada, lo cual no significa que deba seguirse un orden rígido en el estudio de los temas, sino que la posibilidad de pasar de uno a otro depende con frecuencia de una buena comprensión de las cuestiones anteriores"**. Dicho Informe sigue analizando causas de esa dificultad y entre otras indica que **"Las matemáticas son, además, una asignatura que obliga a trabajar y a practicar mucho, con independencia del nivel de conocimientos que se tenga..." "...Otra razón que explica la dificultad de la enseñanza de las matemáticas es la gran diferencia que existe en el rendimiento y el ritmo de aprendizaje entre unos alumnos y otros"**. Por las indicaciones señaladas en este Informe, nosotros hemos considerado una serie de actividades que ayuden a consolidar, a afianzar y a asegurar los contenidos matemáticos que sobre el azar se proponen.

Se diseñan a continuación, una variedad de actividades, no con la intención de que los alumnos y alumnas las realicen todas, sino más bien para tener una selección que nos posibilite la atención a la diversidad en nuestras aulas.

Con las actividades 1, 2, 5 y 6 se pretende asegurar el vocabulario que existe sobre el azar. Es importante y muy enriquecedor favorecer en las aulas las puestas en común previo trabajo individual y de pequeño grupo que posibiliten la ayuda y una mejor comprensión a los alumnos y alumnas con dificultades. La actividad 2 nos puede sugerir la utilización de diversidad de recursos como el periódico.

La tercera actividad pretende que el alumnado identifique sucesos como el resultado de una experimentación. Se puede y deben utilizar dados y cartas para ver con mayor claridad los sucesos que pueden ocurrir.

La cuarta actividad nos sirve para consolidar los conceptos de experimento aleatorio y determinista que acontecen en situaciones de nuestra vida. Puede ser muy enriquecedora, para el conjunto de la clase, la puesta en común que se realice

Las actividades 7, 8, 9, 10, y 11 servirán para asegurar el concepto cuantitativo de la probabilidad. En algunos casos, y para atender a la diversidad de capacidades de nuestras aulas, podemos proponer a los alumnos y alumnas con dificultades que expresen la probabilidad cualitativamente mediante frases. En otros casos, la actividad se hará experimentalmente según las dificultades y necesidades de los chicos y chicas.

1.- A continuación figura una lista de expresiones a la izquierda, que debes relacionar con las situaciones de la derecha:

IMPOSIBLE	– No asistirá nadie
POSIBLE	– Asistirán alumnos y alumnas
BASTANTE PROBABLE	– Ese día amanecerá
SEGURO	– Que asistamos todos
IMPROBABLE	– Temperatura entre 15º y 25º
SE ESPERA QUE	– Ese día tendrá 27 horas
HAY IGUAL PROBABILIDAD	– Asistirá el alcalde
PUEDE SER	– Lo pasaremos bien
SIN DUDA	– A las 12 será mediodía
HAY ALGUNA POSIBILIDAD	– Ese día nevará

2.- A la vista de la predicción del tiempo que se hizo el día 2 de Marzo, escribe frases que contengan las palabras siguientes:

- Poco probable
- Imposible
- Seguro
- Posible
- Muy probable

EL PAÍS, 2 DE MARZO 1996

3.- Escribe los sucesos que pueden ocurrir si:

a) Lanzamos un dado

b) Sacamos una carta de la baraja española

4.- Señala con una X los experimentos de los que se sabe el resultado antes de realizarlo

- ☐ Accionar el conmutador de la luz.
- ☐ Lanzar una moneda al aire.
- ☐ Sacar una moneda de un bombo.
- ☐ Dejar de respirar más de 10 minutos.

5.- Inventa un suceso de cada uno de los siguientes tipos:

- Muy probable o casi seguro
- Poco probable
- Medianamente probable
- Casi imposible

6.- Clasifica de **"casi seguro"**, **"probable"**, **"poco probable"** o **"casi imposible"** a los sucesos siguientes:

- Que un equipo de primera división de fútbol gane un encuentro de la semana.
- Que ese mismo equipo gane algún encuentro durante la temporada.
- Acertar la Lotería Primitiva haciendo una única apuesta.
- Obtener un doble 6 al tirar dos dados cúbicos.

7.- Averigua la probabilidad de cada una de las siguientes cuestiones y sitúalas en la recta:

a.) ¿Cuándo lanzas una moneda, cuál es la probabilidad de que salga cara?

b) ¿Cuándo lanzas un dado cúbico, cuál es la probabilidad de que salga 3?

c) ¿Cuándo lanzas un dado cúbico, cuál es la probabilidad de que salga menor que 3?

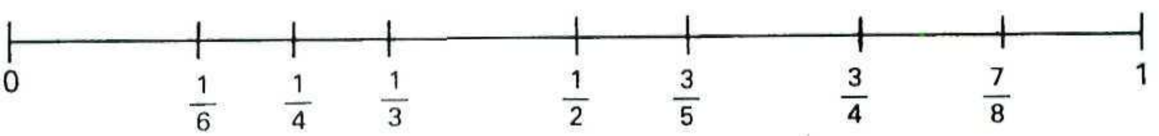
d) ¿Cuándo lanzas dos monedas, cuál es la probabilidad de que salgan dos caras?

e) Tienes una bolsa con dos bolas rojas y tres azules. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una bola azul?

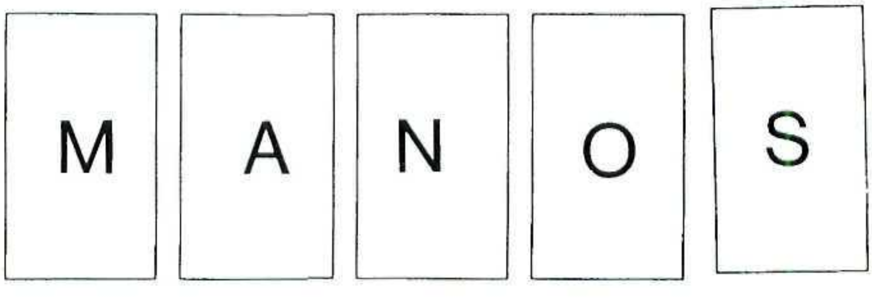
f) Tienes una bolsa con 1 bola roja, 1 azul y dos verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una bola amarilla?

g) Tienes cuatro tarjetas numeradas del 1 al 4. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una tarjeta menor que 5?

h) Tiras dos monedas a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que no salgan dos caras?



8.- Imagina que tienes estas 5 cartas colocadas boca abajo sobre una mesa.



Coges una. Cuál es la probabilidad de elegir:

a) Una vocal

b) Una letra con al menos un eje de simetría

9.- En una clase hay 17 chicos y 23 chicas. Se eligen al azar dos cualesquiera de ellos. Hallar la probabilidad de que sean:

- Dos chicos
- Dos chicas
- Un chico y una chica

10.- Hallar la probabilidad de:

- Obtener un número de una sola cifra al lanzar un dado cúbico.
- Obtener una suma de 20 puntos al lanzar dos dados cúbicos.
- Obtener dos caras al lanzar dos monedas

11.- Si la probabilidad de que se produzca un suceso es 2/3, ¿cuál es la probabilidad de que no se produzca?

Actividades de aplicación

Comentarios para el profesorado:

Las actividades **"¿qué caja prefieres?"** y **"bolas de tres colores"** plantean comparación de probabilidades. Los participantes pueden justificar sus preferencias usando porcentajes, fracciones o proporciones. Existe la alternativa posterior de representar estas conjeturas gráficamente, por ejemplo, en la recta numérica, diagrama de sectores, según las capacidades del alumnado. Es especialmente importante poner a prueba la competencia de toma de decisiones de los chicos y chicas.

En los **"juegos con la baraja"** es muy interesante la consideración de sucesos contrarios y nulos. En segundo curso (o como actividad de profundización de alumnado con más capacidad) pueden realizarse experimentos para iniciar la comprensión de probabilidad condicionada. Para los alumnos con necesidades educativas especiales, se aconseja que experimenten con el material antes de responder a las cuestiones que se plantean.

La actividad **"un buen menú"** ofrece una buena ocasión para hacer uso de los diagramas de árbol, una estrategia idónea para no dejar ningún caso fuera. Pueden cambiarse las premisas (tomar primer plato y postre,...) para ampliar el campo de las opciones y motivar a realizar cálculos diferentes. El apartado con (*) está indicado como actividad de profundización.

Jugando **"al agua patos"** se motiva al análisis de las hipótesis. Los alumnos y alumnas se dan cuenta de que han de jugar muchas veces para llegar a encontrar una buena distribución de las fichas, dada la gran variedad de posibilidades.
Este tipo de juegos favorece la atención a la diversidad, ya que, al ser realizado entre dos personas, se detectan errores, se aclaran dudas y ¡no siempre gana el más listo!.

El modelo que actividad que se ofrece en **"buscando el número de caras"** es muy adecuado para proponer actividades de profundización, dado que el nivel de dificultad de actividades semejantes puede ser muy diverso.

Por último, la actividad **"ruletas"** favorece enormemente la creatividad, , lo que posibilita una buena atención a la diversidad, puesto que en la construcción de ruletas pueden intervenir muchas variables a utilizar (espaciales, geométricas, de colores,...), de las que hará uso el alumnado en función de sus capacidades.

1.- ¿Qué caja prefieres?

Materiales para cada grupo:

- Dos cajas opacas
- 8 bolas negras
- 6 bolas blancas

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

1ª PARTE:

Tenemos dos cajas opacas A y B: En la caja A hay tres bolas negras y tres blancas. En la caja B hay tres bolas blancas y cinco negras.

Considerando que tienen premio las bolas blancas, ¿De cuál de las dos cajas preferirías sacar una bola?
¿Por qué?

2ª PARTE:

- Ahora vamos a comprobar si habías hecho una buena elección:

Realiza con tu grupo 50 extracciones de cada una de las cajas opacas. En cada extracción anota el resultado en la casilla correspondiente y devuelve la bola a su caja.

	BOLAS BLANCAS	BOLAS NEGRAS
CAJA A		
CAJA B		

- ¿Qué observas?
- Obtén conclusiones
- ¿Es cierta la hipótesis que habías hecho al principio? ¿Por qué?

2.- Jugando con la baraja

De una baraja española se extrae una carta al azar. Responde a las siguientes preguntas:

– ¿Cuál es la probabilidad de que sea de oros?

– ¿Y de espadas?

– ¿Y de copas?

– ¿Cuál es la probabilidad de que sea un rey?

– ¿Y de que sea un cinco?

– ¿Qué es más probable: que salga una figura o una carta que no lo sea?

3.- Otro juego con la baraja

Si se extrae al azar una carta de la baraja española, ¿Cuál es la posibilidad de que sea de oros o un seis?

* 4.- Bolas de tres colores

Tenemos dos bolsas: la primera de ellas contiene 7 bolas blancas, 2 negras y 1 roja y la otra 1 blanca, 2 negras y 7 rojas.

Tiramos un dado cúbico; si sale 1 ó 2 extraemos una bola de la primera bolsa y si sale 3, 4, 5 ó 6 sacamos una bola de la segunda bolsa. Ganamos si sale bola roja.

– ¿Qué es más fácil **ganar** o **perder**?

– ¿Por qué?

5.- Lanzando monedas

Si se lanzan tres monedas ¿cuál es la probabilidad de obtener, al menos, una cara?

6.- ¡Un buen menú!

El menú de un restaurante económico está formado por dos platos y postre. En el primer plato se puede elegir entre: ensalada, sopa y judías; las posibilidades de elección del segundo plato son: huevos, carne y pescado. de postre se puede tomar: fruta o helado.

- ¿De cuántas formas diferentes podrá comer una persona que tome primer plato, segundo plato y postre?
- Representa todas las posibilidades mediante un diagrama de árbol.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tome de segundo plato pescado?
- ¿Cuál es la probabilidad de que tome sopa?

- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona coma el siguiente menú:

  - Plato 1º : Judías
  - Plato 2º: Huevos
  - Postre: Fruta

– Comprueba tu conjetura en el diagrama de árbol.

7.- ¡Al agua patos!

Material para cada pareja:

– Hoja de juego- 12 fichas para cada jugador (usar colores diferentes)

– Dos dados cúbicos

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

Es un juego para dos personas.

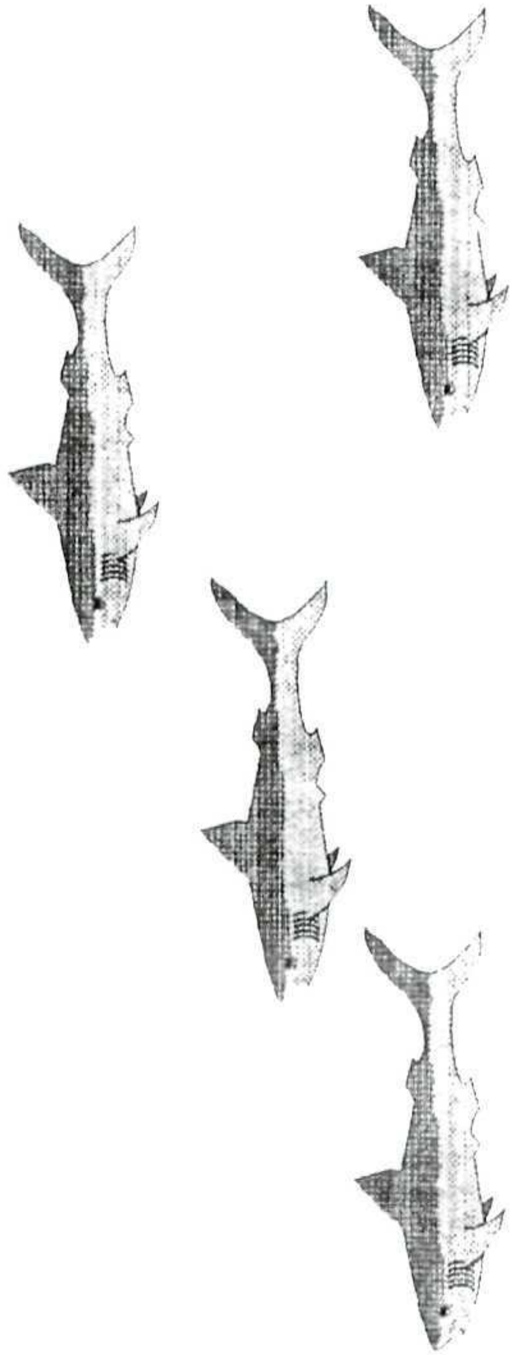
Cada participante debe colocar a su antojo las doce fichas en las casillas numeradas. Alternativamente los jugadores lanzan los dos dados a la vez y la suma de los mismos indica la casilla de la que hay que tomar una ficha y lanzarla al agua.
Gana la partida el jugador o jugadora que logre lanzar al agua todas sus fichas en primer lugar.

1.- Cada participante debe buscar la mejor colocación de sus fichas y justificarla.

2.- Se jugará la partida, anotando los datos de cada tirada.

3.- Una vez finalizada la partida cada pareja hará un análisis del resultado de la misma, en comparación a las dos hipótesis que se hicieron.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

8.- Buscando la U

Aquí tienes 20 palabras de ocho u nueve letras:

turístico	exclusivo	satélite	desastres		
programa	atractivo	universo	española	conseguir	
librerías	aventuras	cotidiano	profesión	petición	fanático
esfuerzo	armamento	controlar	difíciles	objetores	

1.- Investiga la posibilidad de obtener al menos una "u" en palabras de 8 ó 9 letras de una página de un periódico.

2.- Busca la frecuencia relativa de la letra "u" en las palabras del recuadro.

3.- Comenta los resultados en ambos casos y compara.
Haz un comentario.

9.- Buscando el número de las caras

Las caras de un dado cúbico están numeradas con 1 y 2, pero no sabes en qué proporción.

Lanzas el dado 210 veces y has obtenido este resultado:

221211222212221122211222122112221112222211
122122122122211221222222222212221222122121
2212212212212212212211112212111222221122122
222122111222112221112222221221222211122221
111222222221222122222222121222222122211222

¿Cuántos unos y cuántos doses crees que tiene el dado?

Escribe detalladamente el proceso que sigues para solucionar el problema.

10.- Ruletas

Construye ruletas de tiro al blanco para una feria de dos tipos:

a) para que el feriante tenga escasas posibilidades de perder.

b) para que los participantes tengan bastantes posibilidades de ganar.

Bibliografía

DÍAZ GODINO, J.; BATANERO, Mª C. Y CAÑIZARRES, Mª J. (1987). *Azar y probabilidad.* Editorial: síntesis. Madrid.

INFORME COCKROCFT. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan.* Ministerio de Educación y Ciencia: Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado. Madrid.

GRUPO CERO DE VALENCIA. (1985). *Curriculum de Matemáticas 12-16.* Editorial: Mestral. Valencia.

CALVO, C.; CALLEJO, I., AGUILERA, M. Y MARTÍNEZ, L. (1987). *Estadística y probabilidad (Reforma del Ciclo Superior de la EGB).* Ministerio de Educación y Ciencia: Dirección General de Renovación Pedagógica. Madrid.

FISHER, R. Y VINCE, A. (1990). *Investigando las Matemáticas* (libro 1, 2, 3 y 4). Editorial: Akal. Madrid.

CABALLERO RUBIO Y OTROS. (1991). *Guía y uso de los materiales de matemáticas (Educación Secundaria Obligatoria).* M.E.C. y Generalitat Valenciana: Conselleria d`Educació i Ciència.

CABALLERO RUBIO Y OTROS. (1991). *Probabilidad y estadística (1º y 2º curso de E.S.O.).* M.E.C. y Generalitat Valenciana: Conselleria d`Educació i Ciència.

Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

UNIDAD DIDÁCTICA

Procedimientos de Estimación

SILVIA ANA PÉREZ MATEO

Introducción

1. Comentarios sobre los contenidos tratados

La selección de contenidos del segundo curso de Bachillerato relativos a Inferencia Estadística debe basarse en lo señalado en el currículo de Bachillerato (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales) establecido en el Real Decreto 1179/1992 del 2 de octubre de 1992. En este texto encontramos lo siguiente:

SEGUNDO CURSO

Introducción al concepto, uso y alcance de la inferencia estadística: problemas relacionados con la elección de las muestras, las condiciones de representatividad y análisis de las conclusiones que cabe extraer de ellas.

Estudio de algún contraste de hipótesis basado en la distribución normal y aplicación a situaciones sencillas.

La poca concreción del párrafo anterior, así como la ausencia de orientaciones posteriores supone que la base sea tan amplia que sería posible elaborar unidades didácticas de características muy distintas. En este documento se presenta una propuesta de trabajo en la que hemos interpretado las palabras anteriores y considerado las posibilidades de los alumnos de este curso. No obstante, el profesor que imparta este 2º curso podrá seleccionar las actividades que crea necesarias según su propia concepción de lo que es útil y a la vez asequible para sus alumnos.

A continuación se comentan algunos aspectos que se consideran interesantes para entender la selección de contenidos que se ha realizado.

1.1. Población e inferencia estadística

El proceso de estimación de un parámetro poblacional se inicia con la elección de una muestra. El hecho de que la población sea finita o infinita influye en la técnica de muestreo y en el procedimiento de estimación. Intentaremos explicar esto brevemente:

Supongamos que partimos de una población finita de tamaño N de la que estudiamos un determinado aspecto. Este aspecto constituye una variable estadística de la que se pueden calcular, por ejemplo las características: media y desviación típica. El número de elementos de la población está perfectamente determinado y por lo tanto también lo está el número de muestras de tamaño n que podemos extraer de esa población y cual es su composición.

Si partimos de una población infinita de la que estudiamos un determinado aspecto, el número de elementos de la población no estará determinado y, por lo tanto, tampoco lo estará el número de muestras de tamaño n y tampoco su composición.

Dicho de otra manera, si estudiamos un aspecto de una población finita y extraemos de ella una muestra de tamaño n, el aspecto estudiado en la muestra constituye una **variable estadística**, sin embargo, en poblaciones infinitas el aspecto estudiado pasa a ser una **variable aleatoria**.

Podemos pensar que realmente no existen poblaciones infinitas, pero podemos encontrarnos con poblaciones de las que no conocemos el tamaño, por ejemplo, la producción de tornillos de una máquina que los produce constantemente o el número de personas que padecen una determinada enfermedad. Por otra parte, hablando de modelos matemáticos teóricos, si una población tiene un tamaño superior a 100.000 individuos puede considerarse infinita. Esto nos sirve para poner un ejemplo que aclare lo anterior.

– Supongamos una población formada por 5 alumnos de edades 2, 3, 6, 8, 11 años. El aspecto que estudiamos es «la edad de los individuos de la población». Si de esta población extraemos muestras sin reemplazamiento de tamaño 3, tendremos que las posibles muestras son:

(2, 3, 6), (2, 3, 8), (2, 3, 11), (2, 6, 8), (2, 6, 11), (2, 8, 11), (3, 6, 8), (3, 6, 11), (3, 8, 11) y (6, 8, 11).

En cada muestra tenemos 3 variables estadísticas que pueden tomar los valores 2, 3, 6, 8 y 11. Además podemos calcular la probabilidad de haber obtenido cada una de ellas.

– Supongamos la población formada por los habitantes de un país. El aspecto que estudiamos es «padecer osteoporosis». Si de esta población extraemos muestras sin reemplazamiento de tamaño 3, lo conveniente es suponer que para cada muestra tenemos 3 variables aleatorias cuya distribución de probabilidad es la misma que para toda la población.

Según lo anterior podemos concluir que el proceso de inferencia depende de que la población en estudio sea finita o infinita.

A la hora de diseñar actividades para realizar en el aula, cabe pensar que lo asequible para nuestros alumnos es trabajar con poblaciones finitas, de manera que pueda estudiarse por un lado la población completa y por otro las conclusiones que nos permite hacer la inferencia y comparar ambas. Sin embargo, el tratamiento matemático que requiere la inferencia en poblaciones finitas es más complicado que para poblaciones finitas y, por otra parte en el mundo laboral es más probable que el alumno tenga que trabajar con poblaciones infinitas.

1.2. Muestras e inferencia estadística

Dada una población podemos elegir la muestra que vamos a estudiar de diferentes maneras, y esta elección determinará la manera de realizar la inferencia y los resultados que obtengamos de ella. Por ejemplo, las muestras elegidas y el tratamiento posterior varían si elegimos los elementos que la componen según las dos siguientes maneras:

- Muestreo aleatorio simple.

  Según el cual todos los elementos de la población pueden ser elegidos y tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

- Muestreo estratificado.

  Según este tipo de muestreo se tiene en cuenta que la población está dividida en estratos y nos interesa que cada muestra esté formada por elementos en cantidad proporcional al tamaño de cada estrato.

Para diseñar actividades de estimación debemos tener en cuenta que el tratamiento posterior es más sencillo si tratamos con muestreos aleatorios simples con reposición.

1.3. Procedimientos de estimación

Las actividades planteadas en esta unidad tratan solamente el problema de la estimación de la media poblacional de una variable ya que los procedimientos de estimación de la varianza poblacional requieren el manejo de la distribución $\_^2$ que, claramente, no está entre las distribuciones de probabilidad que se estudian en primero de Bachillerato. Los tipos se estimación analizados son:

- Estimación puntual.
- Estimación por intervalo.
- Contraste de hipótesis.

En todos los casos, los contenidos básicos se refieren al caso en que la distribución en el muestreo de la media muestral sea:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$\bar{x}$: media muestral
μ: media poblacional
σ: desviación típica poblacional
n: tamaño muestral

por lo tanto:

$$\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Como se verá en el desarrollo de la unidad, si la desviación típica poblacional es desconocida, se puede sustituir su valor por la cuasidesviación típica muestral, s, en el caso en que el tamaño de la muestra sea superior a 30. Si el tamaño de la muestra es menor que 30, esta sustitución lleva consigo que la variable anterior cambie de distribución:

$$\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Las actividades de este tipo se han considerado de ampliación ya que será necesario explicar previamente la distribución t-Student.

La estimación de proporciones es un contenido que, por su interés, podría haberse incluido en esta unidad, pero que no se ha tratado por las siguientes razones:

- Los contenidos seleccionados cubren suficientemente los objetivos básicos de la unidad.
- El tiempo disponible es insuficiente para ampliar los contenidos y por lo tanto el número de actividades.
- El conocimiento de la distribución en el muestreo de la proporción muestral se basa en la identificación de una variable que sigue una distribución binomial, cuestión que puede entrañar bastante dificultad para los alumnos. Intentaremos explicar esto brevemente.

Supongamos que la característica objeto de estudio es cualitativa (no numérica) de manera que lo que nos interesa estimar es la proporción de individuos de la población que poseen esa característica. Definimos para ello la siguiente variable aleatoria:

$$X_i \begin{cases} \rightarrow 1 & \text{si el individuo posee la característica} \\ \rightarrow 0 & \text{si el individuo no posee la característica} \end{cases}$$

Llamamos **p** a la probabilidad de que un individuo de la población posea la característica y **q = 1 - p** a la probabilidad de que no la tenga.

Obsérvese que la variable X, que toma los valores 0 y 1, sigue una distribución de Bernouilli.

Estamos interesados en estimar la media de esta variable:

$$E[X] = p$$

Para estimar el parámetro **p** extraemos una muestra de tamaño **n** y analizamos si los individuos de la muestra tienen o no la característica en estudio. Una estimación puntual de **p** es:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

siendo x_i los valores que toma la variable X para los individuos de la muestra.

La variable aleatoria $n\hat{p}$ sigue una distribución binomial de parámetros **n** y **p** ya que:

- El experimento aleatorio que realizamos es elegir a un individuo de la población y observar si tiene o no la característica en estudio. La probabilidad de que la tenga es **p**.

- Si realizamos el experimento **n** veces, es decir, si elegimos una muestra de tamaño **n** (con reemplazamiento) y consideramos el estadístico:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

entonces, $\mathbf{n\hat{p}}$ equivale a considerar el número de veces que aparece un individuo con la característica, luego $\mathbf{n\hat{p}}$ es una binomial de parámetros **n** y $\hat{\mathbf{p}}$.

Recordando el valor de la media y la varianza de una binomial, lo anterior nos permite calcular fácilmente la media y la varianza del estimador $\hat{p}$:

$$E[n\hat{p}] = np \quad nE[\hat{p}] = np \quad E[\hat{p}] = p$$

$$V[n\hat{p}] = npq \quad n^2V[\hat{p}] = npq \quad V[\hat{p}] = \frac{pq}{n}$$

Luego, el estimador $\hat{p}$ es insesgado y de varianza mínima.

Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande el estadístico:

$$\frac{\hat{p} - p}{\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{n}}$$

sigue aproximadamente una distribución N(0,1).

Como se puede ver, el hecho de que el estadístico $n\hat{p}$ siga una distribución binomial , supone una complicación adicional para la comprensión de este tipo de estimación. Por ello no hemos considerado conveniente incluir la estimación de proporciones como objetivo básico. No obstante, el profesor podrá encontrar actividades relacionadas con este aspecto en la bibliografía citada.

2. Estructura de la unidad

La propuesta de trabajo desarrollada en el apartado «Actividades» se presenta estructurada en cuatro bloques:

I. Encuestas y técnicas de muestreo.
II. Estimación puntual y distribución en el muestreo de la media muestral.
III. Estimación por intervalo. Tamaño muestral.
IV. Contraste de hipótesis.

Todos ellos incluyen:

- **Problemas resueltos**

  La finalidad de estos problemas es mostrar el procedimiento de resolución del tipo de problemas que se plantean en cada bloque. Su redacción está pensada para el alumno de manera que, con su lectura, comprenda ese procedimiento de resolución. Por lo tanto, si el profesor lo considera conveniente, primero propondrá la lectura y después que los alumnos vuelvan a realizar el problema.

- **Problemas propuestos**

  Tras cada problema resuelto se propone una serie de problemas «del mismo tipo» que los alumnos deberán resolver. Después de los problemas que recogen los contenidos básicos se plantean, problemas de ampliación. En algunas ocasiones se incluyen comentarios que pueden ser de utilidad para el profesor.

Además de estos dos apartados fijos, algún bloque contiene una descripción de contenidos teóricos recogida bajo el nombre de **Lectura**. El objetivo de estas lecturas es proporcionar una fuente de conocimientos teóricos que sea asequible para los alumnos por lo tanto, también están diseñadas como material para el alumno.

3. Recursos

La calculadora es el único material que consideramos imprescindible para desarrollar esta unidad. Suponemos que todos los alumnos saben utilizarla para calcular la media o la desviación típica de un conjunto de datos.

Por otra parte, aunque existen en el mercado programas informáticos que tratan problemas de estimación, no los hemos considerado adecuados para conseguir los objetivos que pretende esta unidad. La razón está en que con estos programas se pueden calcular rápidamente estimadores puntuales o intervalos de confianza, pero el usuario no «aprende» nada sobre cómo y por qué se realizan estos cálculos. Serían una buena herramienta en el caso de que estas estimaciones fueran la base de un trabajo posterior y el «foco del aprendizaje» no estuviera puesto en la comprensión del porqué de los procedimientos de cálculo. No obstante, en el apartado **Materiales y recursos** se citan dos de estos programas por si el profesor considerase adecuado su uso.

Planteamiento de la unidad

1. Conocimientos previos

- Cálculo de la media y la desviación típica de un conjunto de datos.
- Variables aleatorias.
- Distribución normal. Tipificación de una variable $N(\mu, \sigma)$. Utilización de tablas.
- Población y muestra.

2. Objetivos

- Comprender el significado de la estimación estadística.
- Conocer algunas técnicas de muestreo. Representatividad de una muestra.
- Identificar las medias de las distintas muestras (tamaño determinado) que se pueden extraer de una población como valores de una variable aleatoria cuya distribución es igual a la variable objeto de estudio.
- Reconocer que el momento de elección de la muestra es el único componente aleatorio del proceso de estimación.
- Conocer la distribución en el muestreo de la media muestral y las condiciones que deben darse para ello.
- Calcular estimaciones puntuales y por intervalo de la media poblacional.
- Calcular estimaciones de varianzas poblacionales.
- Entender el significado del nivel de confianza con el que se da un intervalo.
- Calcular tamaños muestrales.
- Realizar contrastes de hipótesis sobre la media poblacional de una variable.

3. Contenidos

Conceptos

- Muestras y técnicas de muestreo.
- Estimador puntual de la media poblacional: media muestral.
- Estimador puntual de la varianza poblacional: cuasivarianza muestral.
- Distribución en el muestreo de la media muestral: media y desviación típica.
- Intervalo y nivel de confianza. Error máximo.
- Contraste de hipótesis: hipótesis nula y alternativa, región crítica y de aceptación, error de tipo I y de tipo II, nivel de significación, decisión de un contraste.

Procedimientos

- Pasos que se deben seguir en la elaboración de una encuesta.
- Elección de muestras por muestreo aleatorio simple (utilizando una tabla de números aleatorios) y por muestreo estratificado.
- Cálculo de la media muestral y de la cuasivarianza muestral.
- Cálculo de probabilidades de la variable media muestral. Utilización de tablas de la N(0,1).
- Cálculo e interpretación de un intervalo de confianza para la media poblacional.
- Interpretación del error cometido al realiza una estimación puntual o por intervalo.
- Determinación del tamaño que debe tener una muestra conocido el nivel de confianza y el error máximo admisible.
- Realización de contrastes bilaterales sobre la media poblacional.
- Relación entre un contraste con nivel de significación α y un intervalo con un nivel de confianza $1-\alpha$

Actitudes

4. Recursos

Bibliografía

NORTES, A. (1991). *Encuestas y precios. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje, nº 28.* Síntesis. Madrid.

QUESADA, V. Y OTROS. *Curso y ejercicios de estadística.* Alhambra Universidad. Madrid.

SPIEGEL, M. (1993). *Estadística*. McGraw-Hill. Madrid.

Programas de ordenador

EBAO. Serie Software educativo para el aula. Ministerio de Educación y Ciencia.

STATGRAPHICS. Distribuidor en España: Software científico. Pza. de Manolete 5, 28020 Madrid.

Actividades

1. ENCUESTAS Y TÉCNICAS DE MUESTREO

Con este primer bloque de actividades se pretende, en primer lugar, que los alumnos tengan una idea clara del contenido y del objetivo de la unidad que se va a desarrollar. Para ello se propone una lectura previa en la que se hace una descripción muy general de lo que es la inferencia estadística. En segundo lugar se hace una revisión de dos aspectos que posiblemente el alumno ya habrá estudiado en la ESO: realización de encuestas y técnicas de muestreo. Nos interesa profundizar en los conocimientos que tienen los alumnos sobre estos dos temas, ya que son la base del método de trabajo estadístico que pretendemos realizar.

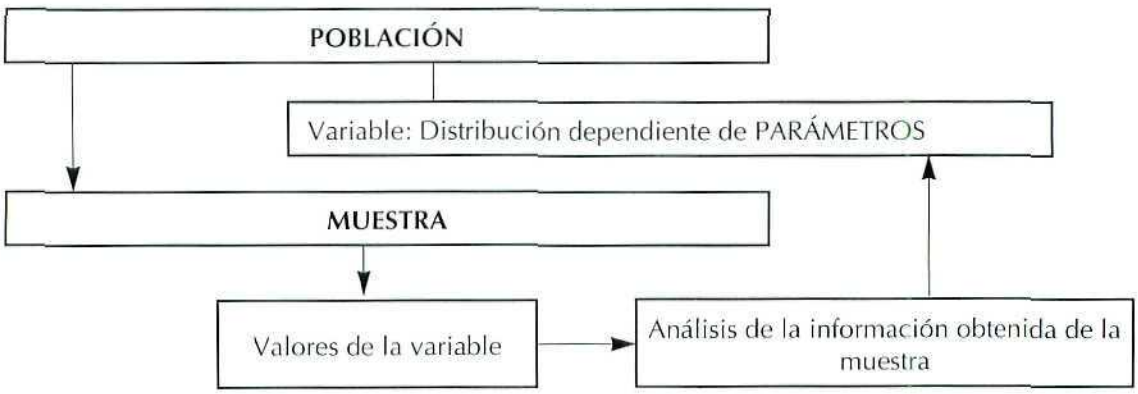
LECTURA PREVIA

Toda investigación estadística consiste en tomar información sobre una o varias características de un conjunto de elementos que puede estar constituido por personas, animales, experimentos químicos, experimentos físicos, hogares, ciudades, etc. Este conjunto es lo que se denota con el nombre de **población** o **universo estadístico**. La información recogida de cada elemento se plasma en un valor (numérico o no numérico) de manera que la característica objeto de estudio se traduce en una variable.

Cuando el estadístico o el investigador toma información de todos y cada uno de los elementos de la población estadística se dice que está realizando un **censo**. Sin embargo, esto no es muchas veces posible, ya sea por el coste que resulta de la toma de información, o bien porque la toma de información lleve consigo la destrucción del ente en cuestión (p.e. controles de tiempo de vida de un aparato).

Otras veces no se puede hacer un censo porque la población está constituida por entes potenciales, por ejemplo enfermos.

Este problema lleva al investigador a tomar la información de unos cuantos elementos de la población estadística, este proceso recibe el nombre de **muestreo**. El conjunto de elementos de los que se toma información en el proceso de muestreo se llama **muestra**. Una vez tomada la información de la muestra la **Estadística inferencial** se encarga de hacer referencias, predicciones y generalizaciones sobre toda la población estadística. Para hacer esto, se pone en marcha un método de trabajo que, muy en general, podemos describir de la siguiente manera:



Como vemos, la información que se obtiene de la muestra, permite obtener información sobre los parámetros de la población mediante un proceso que recibe el nombre de **estimación**. Según cómo se presente esta información tenemos dos tipos de estimación:

- **Estimación puntual**

  La estimación de un parámetro de la población dada por un sólo número se llama estimación por punto del parámetro.

- **Estimación por intervalo**

  Una estimación de un parámetro de la población dada por dos números entre los cuales se puede considerar que está el parámetro se llama estimación por intervalo.Las estimaciones por intervalo indican en sí mismas la precisión de la estimación y por lo tanto son preferibles a la estimación por punto.

Existe, además, otra manera de inferir información sobre la población basándose en la información de una muestra. Se trata del **contraste de hipótesis** en el que mediante procedimientos de inferencia se rechaza o acepta una hipótesis sobre determinada característica de la población.

Estos tres métodos de inferencia son los que vas a estudiar en las siguientes páginas, pero no sólo trataremos los métodos de inferencia; para que puedas comprobar «sobre el terreno» en qué consiste el trabajo de un estadístico, te proponemos que, según se desarrolla la unidad, vayas aplicando lo que se estudia en cada paso a un estudio estadístico que te interese realizar en tu centro.

Tras esta lectura el profesor comentará el texto con los alumnos tratando de que se formen una idea clara del contenido de la unidad. A continuación, propondrá el inicio de esa actividad a la que se alude al final del texto: la realización de un estudio estadístico sobre aspectos relacionados con el centro. Consideramos que ésta es una actividad muy interesante ya que los alumnos tendrán la oportunidad de afrontar un problema real de *inferencia estadística*. El único y quizás gran inconveniente es que, como veremos en el desarrollo de este tema, su realización requerirá bastante tiempo. Sin embargo, otra de sus ventajas es que puede utilizarse como una actividad de evaluación. Con objeto de organizar el trabajo será conveniente que se expliquen con cierto detenimiento los pasos que se deben seguir en la realización de una encuesta, pasos que Andrés Nortes Checa describe ampliamente en su libro *Encuestas y precios* y que a continuación resumimos:

1. Definición de la característica o características que se quieren estudiar.
2. Programación y planificación de la encuesta, incluyendo los objetivos a cubrir y la metodología a utilizar. Es decir, redactar un proyecto acompañado de su presupuesto.
3. Organización del trabajo con la formación de los grupos de trabajo y la designación del equipo coordinador.
4. Selección de los entrevistadores formando los equipos que se encargarán de las entrevistas para cumplimentar el cuestionario.
5. Borrador del cuestionario, utilizando para ello un fichero de preguntas posibles estudiando la manera de formularlas.
6. Diseñar la muestra estudiando el tipo de muestreo que se va a realizar.
7. Se establecerá un plan de análisis de los datos recogidos y de su presentación.
8. Una vez confeccionado el cuestionario hacer una prueba con él, cumplimentándolo todo el equipo más algunas personas de fuera para eliminar las preguntas dudosas o reformar otras, cambiando el lenguaje utilizado. Esto se llama ensayar el cuestionario o hacer un Pre-test
9. Una vez modificado el cuestionario se hace definitivo, pasando a imprimirlo y dando instrucciones a los encuestadores sobre la forma de llevarlo a cabo.
10. Planificar el trabajo de campo, es decir la realización de las entrevistas.

11. Realización del trabajo de campo.
12. Recopilación de los datos obtenidos con los cuestionarios así como de los informes de los entrevistadores que indicarán si ha habido algo especial.
13. Procesamiento de los datos (manualmente o mediante ordenador) con el fin de obtener los resultados numéricos que se deseen (porcentajes, medias, dispersión, etc.).
14. Interpretación de los resultados.

El libro citado anteriormente recoge también las características más importantes que debe tener un buen cuestionario. Será conveniente que llegado el momento de elaborar uno el profesor aconseje sobre el tipo de preguntas que se van a formular.

La segunda parte de este primer bloque trata sobre las técnicas de muestreo. Para introducir algunas de ellas se propone la lectura del siguiente problema resuelto:

PROBLEMA 1

Supongamos que la dirección de un gran hospital desea averiguar la opinión de los pacientes sobre ciertos aspectos de funcionamiento del centro. Ante la imposibilidad de obtener esta información de cada paciente se decide obtener una muestra. Veamos cómo se podría realizar el muestreo según la variable que se estudia en cada caso:

- *Horario de visitas*

  Observaciones: Interesa la opinión de cualquier tipo de paciente.

  Tipo de muestreo: Se elige la muestra de manera que cualquier paciente del hospital tiene la misma probabilidad de ser elegido cada vez que se extrae un elemento de la muestra.

- *Servicio de limpieza*

  Observaciones: La respuesta a esta pregunta puede depender del servicio en el que se encuentra el paciente. Interesa recoger por igual la opinión sobre todos los servicios.

  Tipo de muestreo:

  – Se divide el total de elementos de la muestra entre el número de servicios obteniéndose un valor k.

– De cada servicio se eligen, utilizando el método anterior, k pacientes.

- *Tiempo de permanencia en el hospital*

  Observaciones: También el servicio en el que se encuentre el paciente puede influir en el valor de esta variable. Puesto que se va a obtener el tiempo de permanencia medio, interesa que cada servicio aporte a la muestra una cantidad de elementos proporcional al número de pacientes que se está ingresado en él.

  Tipo de muestreo: De cada servicio $S_1, S_2, ..., S_p$ se eligen $n_1, n_2, ..., n_p$ pacientes de manera que:

$$\frac{k_1}{n_1} = \frac{k_2}{n_2} = \ldots = \frac{k_p}{n_p} = \frac{K}{n}$$

siendo $k_1, k_2, ..., k_p$ el número de pacientes de $S_1, S_2, ..., S_p$ respectivamente, K el número de pacientes del hospital y n el número de pacientes de la muestra.

– ¿Qué semejanzas y diferencias encuentras entre los tres tipos de muestreo?

– ¿Por qué crees que en cada situación se aplica una técnica de muestreo distinta?

– ¿Cómo realizarías el primer tipo de muestreo?

– Describe cómo se realiza cada una de las técnicas de muestreo anteriores y cuándo es adecuado aplicarlas.

Una vez que los alumnos han contestado a las preguntas anteriores, el profesor aclarará lo que se entiende por técnicas de muestreo e indicará las características de las más habituales:

– Muestreo aleatorio simple (MAS)

Se indicará en qué consiste y se repasará la utilización de tablas de números aleatorios ya que es el procedimiento habitual para realizar este muestreo. También se debe advertir que este muestreo se puede hacer con o sin reemplazamiento. En el primer caso las variables que componen la muestra son independientes (cualquier elemento de la población tiene siempre la misma probabilidad de ser elegido) y en el segundo no. Sin embargo, si el muestreo se hace sin reemplazamiento y la población es muy grande la probabilidad de obtener un elemento es prácticamente igual a la probabilidad de obtener el anterior.

– Muestreo estratificado

Se explicarán las razones por las que es conveniente realizar este tipo de muestreo y se definirá lo que se entiende por estrato y afijación.

- **Muestreo aleatorio por conglomerados**

Mientras que en el muestreo estratificado se busca la homogeneidad de la población dentro de los estratos y la heterogeneidad entre estratos, en el muestreo por conglomerados interesa la heterogeneidad dentro del conglomerado y la homogeneidad fuera. Se busca que cada conglomerado sea una representación (copia en pequeño) de la población. En el estratificado se eligen elementos de cada estrato y en éste se selecciona la muestra entre los conglomerados, es decir varios de los conglomerados que se hayan determinado formarán parte de la muestra.

Ejemplos de conglomerados son: colegios, municipios, familias, bloques de viviendas, colegios electorales, etc.

A veces cuando se efectúa un muestreo aleatorio por conglomerados, cada conglomerado seleccionado está formado por otros conglomerados de menor tamaño y cada uno de estos por otros de menor tamaño, etc. En este caso se dice que se realiza un muestreo **polietápico**, cuando hay sólo dos etapas, recibe el nombre de **bietápico** y es el que realiza normalmente el INE en las encuestas de presupuestos familiares.

- **Muestreo no aleatorio**

El más utilizado es el **opinático** que consiste en que el investigador selecciona la muestra que supone más representativa, utilizando un criterio subjetivo y en función de la investigación que realiza.

A continuación se propondrán los siguientes problemas de aplicación.

PROBLEMA 2

El decano de una facultad desea realizar una encuesta sobre los siguientes aspectos:

- Funcionamiento de la biblioteca.
- Interés por asistir a un ciclo de conferencias.
- Opinión sobre el nuevo plan de estudios.

Los datos del centro son los siguientes:

Curso	Nº de alumnos
1º	254
2º	230
3º	156
4º	115
5º	97

Obtener una muestra de 50 alumnos para obtener información sobre cada uno de los aspectos citados. Piensa qué tipo de muestreo convendría realizar y explica tus razones.

La intención de este problema es que los alumnos aprecien que en cada una de las situaciones propuestas sería posible aplicar uno de los tipos de muestreo estudiados. Por ejemplo:

- Para estudiar el funcionamiento de la biblioteca podemos pensar que cualquier alumno puede formar parte de la muestra, independientemente del colectivo o grupo al que pertenezca. Por lo tanto se podría realizar un MAS con reemplazamiento.
- El curso en el que se encuentre el alumno y por lo tanto su edad y el grado de implicación con los estudios que cursa, puede influir en su opinión sobre la participación en las conferencias. Un muestreo estratificado con afijación igual podría ser adecuado.
- También el curso en el que se encuentra un alumno puede influir a la hora de opinar sobre nuevos planes de estudios, teniendo en cuenta que, además, puede ser interesante que la participación de cada curso en la muestra sea proporcional al número de alumnos de ese curso. Se trataría entonces de un muestreo estratificado con afijación proporcional.

PROBLEMA 3

Se quiere realizar un estudio sobre la situación económica de 3.500 centros de educación privada por todo el territorio nacional. Para ello se extrae una muestra de 200 centros.

a) ¿Cómo se seleccionarían estos centros si el procedimiento de muestreo es aleatorio simple sin reemplazamiento? ¿Y con reemplazamiento?

b) Los centros está divididos en 4 estratos según el número de alumnos matriculados:

Nº de alumnos	Nº de alumnos
Más de 1.400	**250**
900-1.400	**652**
400-900	**1.124**
Hasta 900	**1.474**

Explica cómo se realizaría un muestreo estratificado con afijación igual y con afijación proporcional.

PROBLEMA 4

Piensa varias características que te gustaría estudiar de tu centro y para las que consideres conveniente realizar un muestreo aleatorio simple o un muestreo estratificado (con afijación igual y con afijación proporcional).

2. ESTIMACIÓN PUNTUAL Y DISTRIBUCIÓN EN EL MUESTREO DE LA MEDIA MUESTRAL

En este segundo bloque se introduce el concepto de estimador y se definen los estimadores media y cuasivarianza muestral. Una vez realizados algunos ejercicios de cálculo de estos estimadores se aborda el estudio de la distribución en el muestreo de la media muestral.

Nuestro objetivo es que los alumnos sepan que esta distribución es «generalmente» una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ siendo μ y σ los parámetros poblacionales. Decimos «generalmente» ya que, como comentaremos más adelante, esta distribución depende de las condiciones iniciales del problema estadístico objeto de estudio. Sin embargo, en los contenidos básicos que se refieren a este aspecto sólo vamos a considerar este caso, por su sencillez y porque es el que se presentará en más ocasiones en este nivel. No obstante se propondrá alguna actividad de ampliación en la que la media muestra siga una distribución t-Student.

En cuanto a la distribución relacionada con el estadístico cuasivarianza muestral (buen estimador de la varianza poblacional), creemos que excede las pretensiones de este curso por lo que no se incluye ninguna actividad sobre ello. Si el profesor lo considera conveniente podrá proponer algunos problemas que encontrará formulados en la bibliografía que se indica en este documento.

2.1. Estimación puntual

La dificultad más importante a la que se enfrenta cualquiera que comienza a estudiar inferencia estadística es entender que los estimadores son nuevas variables que dependen de la muestra elegida y que, como tales variables, tienen una media y una varianza. Con el problema que se expone a continuación, pretendemos que los alumnos comprueben este hecho en un caso concreto. Por supuesto, la población de partida está formada por un número finito (además es muy pequeño) de elementos, de manera que sea posible formar todas las posibles muestras. Aunque no vamos a tratar la inferencia en poblaciones finitas tal y como hemos explicado anteriormente, consideramos que es interesante proponer este ejemplo ya que es, a nuestro entender, la mejor manera de salvar esa dificultad a la que aludíamos en un principio. El profesor insistirá en que se trata de una situación totalmente artificial en la que nunca se utilizarían métodos de estimación, pero que el ejemplo va a servir para entender la base de los problemas reales de estimación que se propondrán posteriormente.

Queremos destacar que vamos a proponer que se realice un MAS con reemplazamiento por los siguientes motivos:

1. Aprovecharemos este ejercicio para que el alumno calcule la media y la desviación típica de la variable «media muestral» y para que las compare con los parámetros poblacionales.

2. Si la población es finita (como en este caso) y el muestreo se realiza sin reemplazamiento, se verifica que la media de la variable «media muestral» es igual a la media poblacional y que la varianza de esta variable es:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

siendo σ^2 la varianza poblacional, n el tamaño muestral y N el tamaño de la población. Sin embargo, si el muestreo se hace con reemplazamiento, la varianza de la variable «media muestral» es:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

es decir, coincide con lo que sucede en poblaciones infinitas. Dicho de una manera muy informal, si el muestreo es con reemplazamiento podemos equiparar la población a una infinita ya que «se puede tomar cualquier número de muestras y de cualquier tamaño sin que se agote la población».

3. Cuando el alumno compare (con alguna ayuda del profesor) los parámetros poblacionales con el valor obtenido para la media y la varianza de la media muestral, podrá comprobar la igualdades anteriores. Posteriormente esto será de mucha utilidad cuando se estudien las distribuciones en el muestreo de la media. El profesor debe advertir que si, en este caso, se realizase un muestreo sin reemplazamiento, los resultados obtenidos serían diferentes.

PROBLEMA 5

Consideramos la población formada por 5 niños cuyas edades son 2, 3, 6, 8 y 11 años y estudiamos la variable «edad de los elementos de la población».

Puesto que conocemos el valor de la variable considerada para cada elemento de la población, tenemos un **censo**. Esto nos permite calcular la media y la varianza de la población. Hazlo.

Veamos cómo podríamos estimar el parámetro media poblacional si no tuviésemos la oportunidad de calcularlo.

Elige una muestra de tamaño 2 por muestreo aleatorio simple con reemplazamiento. ¿Cuál es la media de los valores de la variable que corresponden a los elementos de tu muestra? Podemos estimar que la media poblacional es la media muestral que acabas de obtener. ¿Coinciden tu media muestral y la media poblacional? ¿Esperabas que hubieran sido iguales? ¿Por qué? ¿Podrías haber obtenido otro valor para la media muestral?

Escribe todas las posibles muestras de tamaño 2 que se pueden elegir en esa población por muestreo aleatorio simple con reemplazamiento y considera los valores que toma la variable en cada elemento de todas las muestras. ¿Podemos considerar que elegir una muestra de tamaño 2 y observar los valores de la variable en cada elemento equivale a observar los valores de 2 variables?

Haz una tabla en la que aparezcan todas las posibles muestras (indicando los valores de la variable en cada elemento) y su media muestral. ¿Es la media muestral una variable aleatoria? ¿Cuáles son sus valores?

Si la media muestral es una variable aleatoria tendrá una media y una varianza, calcúlala.

Compara los valores de la media y la varianza poblacional con la media y la varianza de la variable «media muestral» y redacta tus conclusiones.

La siguiente lectura sirve de complemento al último problema y prepara el camino para llegar a la definición de estimador.

LECTURA

Ya has estudiado en otros cursos que cuando una población es muy numerosa, la característica objeto de estudio puede considerarse como una variable aleatoria que tiene una determinada distribución de probabilidad. Por ejemplo, si consideramos como población a todos los habitantes de un país y como variable

X: estatura en centímetros de los elementos de la población

esta variable aleatoria se ajusta bien a un modelo de distribución normal.

Población: habitantes de un país (A_1, A_2, A_3, ..., A_i,...)
X : estatura $N(\mu, \sigma)$

Si conocemos los parámetros que definen a esa distribución, en nuestro ejemplo la media y la desviación típica de la distribución normal, conoceremos perfectamente el comportamiento de la variable en esa población y podremos calcular probabilidades, pero lo habitual es que esos parámetros, llamados **poblacionales**, sean desconocidos. Con objeto de «averiguar algo» sobre ellos se sigue un proceso como el que describimos a continuación basándonos en nuestro ejemplo:

1. Consideramos la población anterior y la variable X que tiene una distribución normal de parámetros μ y σ.

2. Se eligen, por ejemplo, 100 elementos de la población por MAS con reemplazamiento. Se estudian los valores que toma en ellos la variable.

$$\begin{array}{ll} \text{MUESTRA} & (A_1, A_2, \ldots, A_{100}) \\ & \quad\downarrow \quad \downarrow \qquad\;\; \downarrow \\ \text{VALORES DE LA VARIABLE} & (x_1, x_2, \ldots, x_{100}) \end{array}$$

3. Obsérvese que el primer elemento de la muestra podría haber sido cualquier otro elemento de la población distinto de A_1, el segundo elemento podría haber sido otro distinto de A_2, etc., de manera que el primer valor de la variable podría haber sido cualquiera de los que toma la variable en toda la población, lo mismo para el segundo y así sucesivamente.

MUESTRA (____, ____, ..., ____)

cualquier valor de una $N(\mu, \sigma)$

Esto quiere decir que por cada elemento de la muestra tenemos una variable con las mismas características que la X, es decir con una distribución $N(\mu, \sigma)$.

MUESTRA $(X_1, X_2, \ldots, X_{100})$

$N(\mu, \sigma)$

4. Calculamos la media y la varianza de los valores particulares que hemos obtenido para la muestra (media y desviación típica muestral). Puesto que la muestra está formada por los 100 valores correspondientes a 100 variables aleatorias, la media y la varianza muestral serán también variables aleatorias.

5. Estimamos que los valores de la media y la desviación típica poblacional coinciden con los valores de la media y la desviación típica muestral. Al realizar esta estimación estamos cometiendo un error que podremos medir por medio de probabilidades, teniendo en cuenta que los parámetros muestrales son variables aleatorias.

Tras esta lectura el profesor dará la definición de estimador y explicará las características que debe tener un buen estimador:

- Insesgado o centrado
  Que quiere decir que la media de los valores que toma el estimador coincide con el valor del parámetro que pretende estimar.

- Varianza mínima.
  Lo que significa que la varianza de los valores que toma el buen estimador es la menor de las varianzas de otros estimadores.

A continuación se expondrá que un buen estimador de la media poblacional es la **media muestral**:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{n} \quad \text{ESTIMADOR DE LA MEDIA POBLACIONAL}$$

siendo x_i los valores de la variable observados en la muestra, n_i sus frecuencias absolutas y n el tamaño muestral.

En la resolución del problema 5 el alumno ha tenido la oportunidad de calcular el valor de la media y la desviación típica de la media muestral de una variable. Los resultados obtenidos servirán para inducir que:

- La media de la variable media muestral es la media poblacional.

$$E[\bar{x}] = \mu$$

- La desviación típica de la variable media muestral es igual al cociente entre la desviación típica poblacional y la raíz cuadrada del tamaño muestral.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

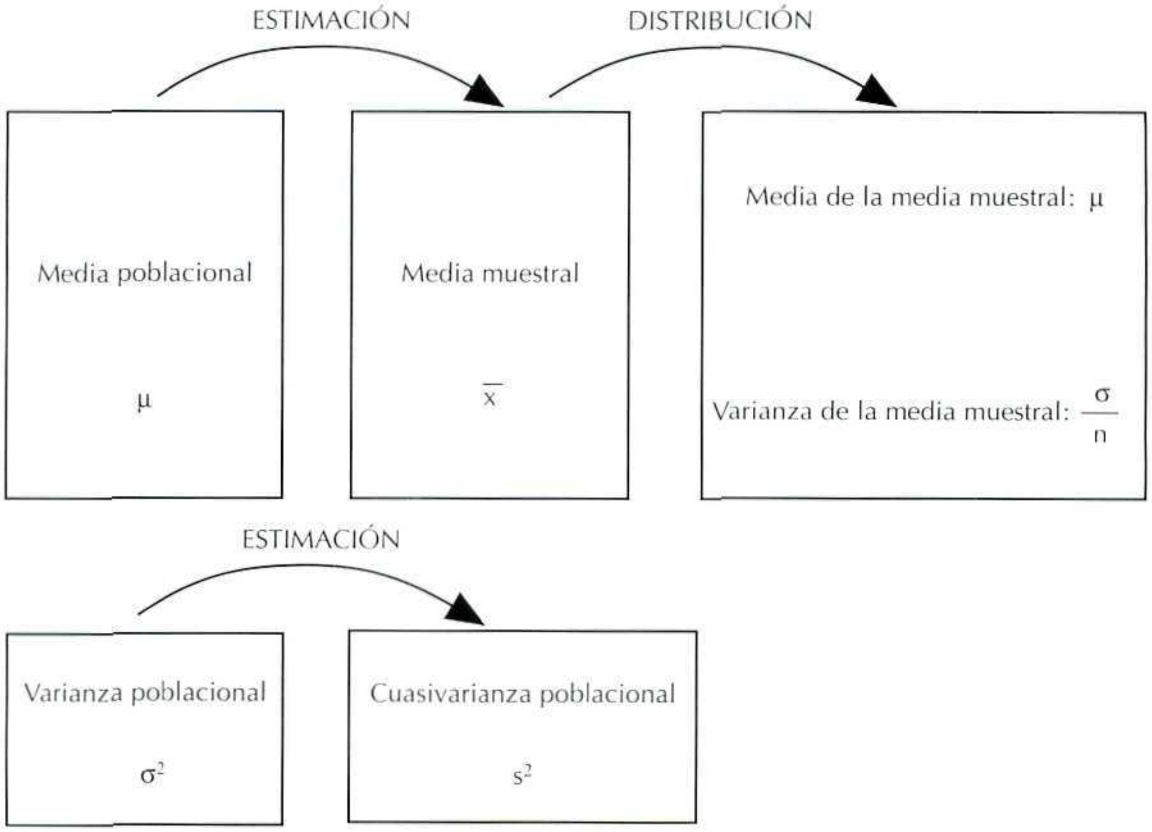
Será conveniente indicar que la desviación de la variable media muestral disminuye cuando aumenta el tamaño de la muestra. Esto es lógico ya que si la media muestral está centrada en la media poblacional, según vamos tomando muestras de mayor tamaño (cada vez hay más elementos de la población que forman parte de la muestra) la media muestral se «parecerá más» a la media poblacional y por lo tanto la dispersión será menor.

La varianza muestral no es un buen estimador de la varianza poblacional ya que este estimador no es insesgado. Sí es un buen estimador la **cuasivarianza poblacional**:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1} \qquad \text{ESTIMADOR DE LA VARIANZA POBLACIONAL}$$

La demostración de la bondad de estos estimadores supera, a nuestro entender, el nivel de este curso. No obstante, puede considerarse una actividad teórica de ampliación.

Será necesario recordar constantemente que estos estimadores son variables aleatorias por lo que tienen que tener una media y una varianza. Como ya ha podido comprobar cualquiera que se inicia en el estudio de la inferencia, identificar la distintas medias y varianzas es un «auténtico martirio». Un cuadro como el siguiente puede ser útil:



Es decir, estamos hablando de tres medias distintas: la poblacional, la muestral y la de la variable media muestral; y de tres varianzas distintas: la poblacional, la muestral y la de la variable media muestral.

PROBLEMA 6

Para estudiar el absentismo laboral de una empresa se eligen al azar 50 trabajadores y se anota el número de días de baja por diversos motivos durante los últimos 4 meses. Estos han sido los resultados en días:

5	4	6	8	7	4	2	7	6	1
0	2	1	1	4	3	8	9	6	5
2	3	1	0	7	7	6	2	1	0
4	7	3	1	2	3	6	5	1	1
5	2	2	3	3	4	4	5	6	0

¿Qué variable estadística se estudia? ¿Cuál es la población en la que se realiza el estudio?

Da una estimación de la media, de la varianza y de la desviación típica poblacional.

La calculadora puede ser un instrumento útil para resolver este problema, ya que no se pretende que el alumno aprenda a calcular una media o una cuasivarianza (suponemos que ya es capaz de hacerlo) sino que sepa para qué se utilizan. Si es necesario, se recordará cómo se usan las teclas relacionadas con la estadística. Quizás la única novedad sea la obtención de la cuasidesviación típica (raíz cuadrada de la cuasivarianza) que se consigue con la tecla σ_{n-1}.

PROBLEMA 7

Un instituto de investigaciones agronómicas siembra en 5 parcelas diferentes un tipo de maíz híbrido con el que están experimentando. Las producciones en quintales métricos son las siguientes:

90 85 95 76 80

a) ¿Crees que estas producciones pueden considerarse una muestra? ¿Cuál es la población?

b) Suponiendo que la producción de este maíz sigue una distribución normal, estima los parámetros de esta distribución.

La primera pregunta que se plantea intenta poner de manifiesto que, en ocasiones, la población objeto de estudio está formada por elementos potenciales. Esto quiere decir que puede ser que no existan en el momento de realizar la investigación, sino que esta se realiza para estimar lo que sucedería. En este caso la población estaría formada por todos las parcelas, con una extensión y terreno similar a las mencionadas, que se cultivasen con el tipo de maíz investigado.

2.2. Distribución de la media muestral

Como ya hemos comentado en la introducción de este apartado, el objetivo básico es que los alumnos resuelvan problemas en los que tengan que aplicar que el estadístico

media muestral sigue una distribución $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ Sabemos que esto es cierto si,

además de realizar el muestreo por MÁS con reemplazamiento para asegurar la independencia de las variables que componen la muestra, se cumplen determinadas condiciones. La importancia relativa de plantear en clase todos los casos radica no solo en el necesario rigor y grado de formalización que requiere la enseñanza en este nivel, sino también en que su conocimiento permite aplicar otros resultados conocidos de antemano y que justifican el porqué la media muestral sigue esta distribución.

A continuación exponemos las condiciones a las que nos hemos referido anteriormente:

Primer caso

- La variable objeto de estudio sigue una distribución normal de parámetros μ, σ.
- La varianza poblacional es conocida.
- El tamaño de la muestra puede tomar cualquier valor n.

En este caso la distribución de la media muestral es:

$$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Este resultado se justifica por la reproductividad de la distribución normal que se enuncia de la siguiente manera:

Si consideramos *n* variables aleatorias independientes que siguen una distribución normal

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$$
$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$$
....
$$X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$$

entonces, la suma de las *n* variables también sigue una distribución normal con los parámetros que se indican.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \sim N\left(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}\right)$$

Podemos considerar que la muestra está formada por *n* variables aleatorias independientes que siguen todas una distribución normal con los mismos parámetros μ y σ, por lo que, según la reproductividad, se demuestra el resultado deseado:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \sim N\left(n\mu, \sqrt{n\sigma^2}\right)$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Segundo caso

- La variable que se estudia no es normal o se desconoce su distribución.
- La media y la desviación típica de la distribución son μ y σ respectivamente.
- La muestra es suficientemente grande ($n > 30$).

También en este caso la distribución de la media muestral es:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El teorema central del límite, que se enuncia a continuación, es la base para demostrar este resultado:

> Consideramos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:
>
> $E[X_i] = \mu$
> $V[X_i] = \sigma^2$
>
> si *n* es suficientemente grande, entonces:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \sim N\left(n\mu, \sqrt{n\sigma^2}\right)$$

En el caso de no conocer el valor de la varianza poblacional, se puede estimar por la cuasivarianza muestral, s^2.

En ambos casos por el proceso de tipificación que puede aplicarse a una variable que sigue una distribución normal (que posiblemente haya que recordar a los alumnos), podemos afirmar:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N\,(0{,}1)$$

Después de leer lo anteriormente expuesto dejamos a la elección del profesor (y al nivel que observe en sus alumnos) la forma de abordar este asunto, que a nuestro entender, se reduce a dos posibilidades:

- Especificar las hipótesis en cada caso y determinar cuál es la distribución de la media muestral y porqué podemos asegurarlo.
- Simplemente presentar el resultado, advirtiendo que existen casos en los que no se puede aplicar.

Ambas son aceptables y se pueden desarrollar con las actividades que se proponen en esta unidad.

Por último, comentar que se propondrá una actividad de ampliación para tratar aquellos casos en los que se den las siguientes hipótesis:

- La distribución de la variable es o no normal.
- La varianza poblacional es desconocida.
- El tamaño de la muestra, n, es menor que 30.

ya que, entonces, la variable: $\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ sigue una distribución t-Student con n-1 grados de libertad.

Para terminar queremos poner de manifiesto otra dificultad que surge al abordar el problema de la distribución en el muestreo de la media, dificultad que creemos tan importante que puede llegar a producir un bloqueo en el aprendizaje: ¿cómo es posible que en muchos problemas se pida una estimación de la media poblacional (por lo que se supone desconocida) y, sin embargo, se de como dato la varianza poblacional? Para matizar un poco más la pregunta podemos añadir lo siguiente: los alumnos «saben» que el cálculo de la varianza de una variable requiere calcular previamente el valor de la media, ¿cómo es posible entonces que se conozca la varianza y no la media? Muy groseramente podemos aclarar un poco este punto con el siguiente ejemplo.

Supongamos que un estadístico quiere controlar la calidad de la producción de una máquina que fabrica tornillos. Esta máquina está reglada para que los tornillos tengan una longitud de *k* centímetros. Concretamente le interesa calcular la probabilidad de que la diferencia entre la longitud media de los tornillos fabricados y la longitud que deben tener (k cm) sea mayor que un determinado valor p. El problema estadístico que se plantea cuenta con los siguientes datos:

- Población: tornillos que fabrica la máquina.
- Variable: longitud de los tornillos.
- Media poblacional: longitud media de los tornillos, k cm.

Para iniciar la resolución de este problema el estadístico extraerá una muestra y observará cual es la longitud media de los tornillos seleccionados. Como se verá más adelante, para continuar el proceso es necesario dar un valor a la varianza poblacional (que se desconoce) y es el tamaño de la muestra el que determina cómo se asigna este valor:

- Si es posible elegir una muestra de más de 30 tornillos, la varianza poblacional puede estimarse por la cuasivarianza muestral.

- Si el tamaño de la muestra es inferior a 30, no se puede realizar la estimación anterior. Entonces el estadístico «utiliza» la información de un estudio estadístico anterior que proporciona una estimación de la varianza poblacional y lo toma como el verdadero valor de la varianza. Pero entonces, ¿por qué no tomar también la estimación de la media poblacional del estudio anterior? La respuesta se basa en la siguiente reflexión: parece lógico pensar que si una máquina se «desajusta» lo hará variando la media, pero manteniendo (más o menos) la dispersión, por lo que se puede considerar que mientras que la longitud media de los tornillos puede cambiar de un estudio a otro, la desviación típica se mantiene constante.

Los cuatro problemas siguientes se proponen para estudiar que el conocimiento de la distribución de la media muestral puede proporcionar determinadas informaciones sobre la población. El primero de ellos se presenta resuelto para dar las pautas de resolución de este tipo de problemas.

PROBLEMA 8. RESUELTO

Se quiere estudiar la permanencia media de pacientes en un hospital, con el fin de considerar una ampliación del mismo. De investigaciones anteriores se sabe que la variable X: «tiempo de permanencia en el hospital» sigue una distribución normal cuya desviación típica es de 9 días. Para completar el estudio se extraen varias muestras de tamaño 15 según un muestreo aleatorio simple con reemplazamiento.

¿Cuál es la probabilidad de que una de las medias muestrales diste de la media poblacional en menos de 2 días?

Si llamamos $\overline{x}$ a la media de los valores de una muestra cualquiera y μ a la media de los valores de la población, la pregunta planteada puede traducirse por:

$$¿P\{|\overline{x} - \mu| < 2\}? \quad (1)$$

Vamos a calcular esta probabilidad basándonos en que sabemos que la variable media muestral sigue una distribución normal cuyos parámetros conocemos:

$$\overline{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\overline{x} \sim N(\mu, \frac{9}{\sqrt{15}})$$

y por lo tanto:

$$\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{9}{\sqrt{15}}} \sim N(0,1)$$

Nuestro objetivo es que en la expresión (1) aparezca esta variable que sigue una N(0,1) ya que, como verás, sabemos calcular sus probabilidades.

Recuerda que para **cada** muestra de 15 pacientes, contamos con 15 valores de la variable «tiempo de permanencia» con los que calculamos la media de **esa** muestra. Si la muestra cambia, cambiará también la media por lo que la media muestral es, a su vez, otra variable.

Volvamos a la expresión (1):

$$¿P\{|\overline{x} - \mu| < 2\} = P\{-2 < x - \mu < 2\} =$$

Dividimos los términos de estas inecuaciones por

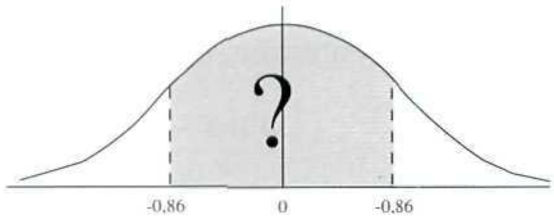
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{15}}$$

$$= P\left\{-\frac{2}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < \frac{2}{\frac{9}{\sqrt{15}}}\right\} = P\left\{-0{,}86 < \frac{x - \mu}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < 0{,}86\right\}$$

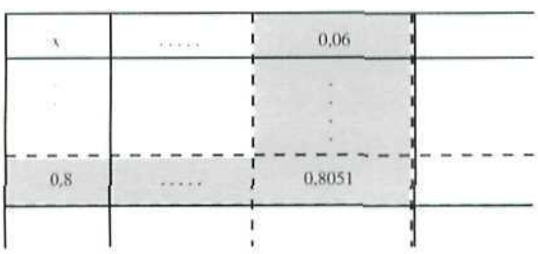
N(0,1)

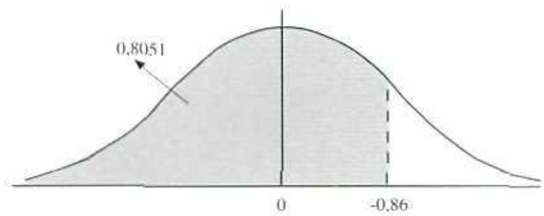
El cálculo de esta última probabilidad se puede plantear de la siguiente manera:

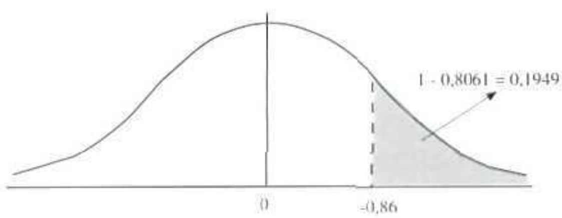
¿Cuál es la probabilidad de que una variable que sigue una distribución N(0,1) esté entre los valores -0,86 y 0,86?

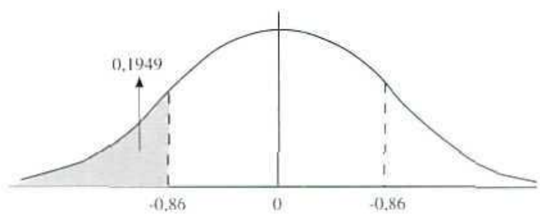


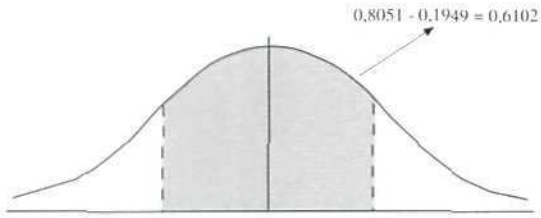
Ahora, recuerda cómo se consultan una tablas de la N(0,1) para calcular probabilidades. Te ayudamos utilizando unas tablas que indican «la probabilidad a la izquierda».











Por lo tanto la probabilidad buscada es 0,6102.

PROBLEMA 9

Una fábrica que produce cigarrillos sabe que la variable:

$$X: \text{«contenido de alquitrán (en mg) de un cigarrillo»}$$

se distribuye según una normal de parámetros:

$$\mu = 20 \text{ mg}$$
$$\sigma = 3 \text{ mg}$$

La empresa va a ser inspeccionada por un equipo del Ministerio de Sanidad que analizará una muestra de 20 cigarrillos elegidos al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo elija una muestra en la que el contenido medio de alquitrán sea superior a 21 mg?

b) Si se eligen 100 muestras como la anterior, ¿en cuántas cabe esperar que el contenido medio de alquitrán sea superior a 21 mg?

PROBLEMA 10

Consideramos la variable aleatoria:

$$X: \text{n}^{\underline{o}} \text{ de barriles de petróleo que produce un pozo diariamente}$$

cuya distribución se desconoce. Se sabe, sin embargo, que la desviación típica de esta variable es 16 barriles. Si se observa la producción en 64 días, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia entre la media en ese período y el verdadero valor de la producción media por día sea inferior a 4 barriles.

PROBLEMA 11

Una empresa que se dedica a la fabricación de automóviles desea comprobar el consumo medio de gasolina de su último modelo. Para ello se prueban 40 vehículos obteniéndose los siguientes resultados:

Consumo medio: 8,9 l cada 100 km
Cuasivarianza: 0,25

¿Cuál es la probabilidad de que el consumo medio medido en la muestra diste del verdadero valor del consumo medio en más de 0,2 l? Interpreta el significado de esta probabilidad.

PROBLEMA AMPLIACIÓN 1

Rehacer el problema anterior si la comprobación se hubiera hecho con 15 automóviles.

El proceso de resolución de este problema es similar al planteado anteriormente. Sólo varía en el momento de consultar las tablas, ya que en este caso:

$$\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

luego debemos calcular la probabilidad utilizando una tabla de la t-Student con 14 grados de libertad. La forma de utilizar estas tablas es análoga a la de la normal.

3. ESTIMACIÓN POR INTERVALO. TAMAÑO MUESTRAL

3.1. Estimación por intervalo

Los contenidos de este bloque están muy relacionados con la última parte del anterior: la construcción del intervalo de confianza para la media poblacional depende de la distribución de la media muestral. Además, lo verdaderamente interesante de esta cuestión es que los alumnos entiendan el significado de la estimación por intervalo y del nivel de confianza, ya que es frecuente que se cometa un error que, seguramente, está motivado por la manera en que se habla del intervalo. Veremos esto con un ejemplo: si se dice que la media poblacional de una determinada variable pertenece al intervalo (21,3;24,8) con un nivel de confianza del 95%, puede inducirse el error de pensar que la media poblacional se encuentra en ese intervalo con una probabilidad igual a 0,95. Esto es incorrecto ya que una vez que se conoce el intervalo, la media poblacional (que es un valor fijo) pertenece o no pertenece al intervalo con lo que no tiene sentido hablar de probabilidad.

Para explicar el significado correcto de estos términos se propondrá a los alumnos la lectura del siguiente problema resuelto.

PROBLEMA 12. RESUELTO

Volvamos al problema número 8 en el que estudiábamos el tiempo medio de permanencia de los pacientes en un hospital. Recuerda que sabemos que la desviación típica de la variable en la población es de 9 días y que elegimos muestras de tamaño 15 por MÁS. Vamos a resolver una cuestión similar a la que has tratado en ese problema:

¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra y la media de la población disten menos de un día y medio?

Llamando X a la variable estudiada, la pregunta se puede plantear de la siguiente manera:

$$¿P\{|\ \bar{x} = \mu| < 1{,}5\}?$$

o bien:

$$¿P\{-1{,}5 < \bar{x} - \mu < 1{,}5\}?$$

que, como sabes, se resuelve teniendo en cuenta que la distribución de la media muestral es.

$$x \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \longleftrightarrow \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0{,}1) \quad \blacktriangleright \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{9}{\sqrt{n}}} \sim N(0{,}1)$$

Así:

$$P\{|\ \bar{x} - \mu| < 1{,}5\} = P\{-1{,}5 < \bar{x} - \mu < 1{,}5\} = P\{\frac{-1{,}5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{1{,}5}{\sqrt{n}} =$$

$$= P\{\frac{-1{,}5}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < \frac{1{,}5}{\frac{9}{\sqrt{15}}}\} = P\{0{,}65 < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < 0{,}65\} = 0{,}4844$$

$$N(0{,}1)$$

Este resultado puede interpretarse de la siguiente manera: el 48,44% de las muestras tienen una media muestral que dista de la poblacional en menos de 1,5 días.

Nos planteamos ahora el problema inverso:

¿Cuánto distan la media muestral y la poblacional en el 95% de todas las posibles muestras de tamaño 15?

Es decir, se trata de calcular el valor **d** para que:

$$P\{|\ \bar{x} = \mu| < d\} = 0{,}95$$

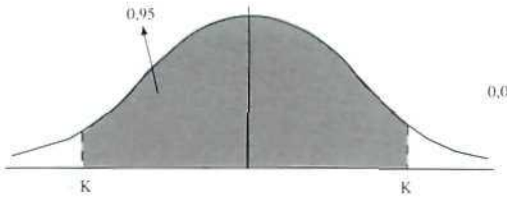
Con un proceso análogo al anterior podemos llegar a la solución del problema:

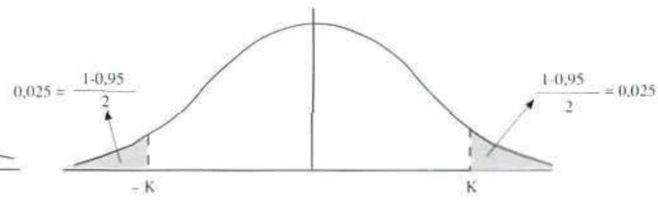
$$P\{|\ \bar{x} - \mu| < d\} = 0{,}95 \longleftrightarrow P\{\frac{-d}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < \frac{d}{\frac{9}{\sqrt{15}}}\} = 0{,}95 \longleftrightarrow$$

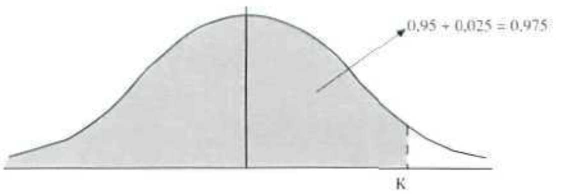
$$P\{-0{,}43d < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < 0{,}43d\} = 0{,}95$$

Ahora debemos buscar en las tablas de la N(0,1) el valor **k** de la variable para el que se cumple:

$$P\{-k \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{9}{\sqrt{15}}} < k\} = 0{,}95$$







x	.....	0,06	
⋮		⋮	
1,9	.....	0,975	

siendo

$$k = 1{,}96$$

por lo que

$$0{,}43d = 1{,}96$$

$$d = 4{,}56$$

Luego, podemos concluir que en el 95% de las muestras de tamaño 15 la media muestral y la poblacional distan menos de 4,56 días. Dicho de otra forma, 95 de cada 100 muestras tienen una media muestral que se diferencia de la poblacional menos de 4,56 días.

Y por último, llegamos al verdadero problema:

Supongamos que de entre todas las muestras de tamaño 15 que podríamos elegir, hemos elegido una de las que cumple lo anterior. Calculamos la media de esa muestra y obtenemos un valor de 8,4 días. Puesto que suponemos que es una muestra cuya media dista de la poblacional en menos de 4,56 días tenemos:

$$-4{,}56 < \bar{x} - \mu < 4{,}56$$
$$-4{,}56 < 8{,}4 - \mu < 4{,}56$$
$$8{,}4 - 4{,}56 < \mu < 8{,}4 + 4{,}56$$
$$3{,}48 < \mu < 12{,}96$$

es decir

$$\mu \in (3{,}84;12{,}96)$$

A este intervalo se le llama **intervalo de confianza** para la media poblacional con un **nivel de confianza**, α, del 95%.

Fíjate que si decimos que la media poblacional pertenece al intervalo (3,84;12,96) con un nivel de confianza del 95%, no se debe interpretar que la probabilidad de que la media poblacional pertenezca a ese intervalo es 0,95, ya que la media poblacional no es una variable, es un valor fijo que pertenecerá o no al intervalo. La interpretación correcta es:

1º Hemos visto que en el 95% de las muestras de tamaño 15 la media muestral y la poblacional distan menos de 4,56 días.

2º Si la muestra elegida (de media 8,4 días) es una de las que cumplen lo anterior (en algunas ocasiones nos referiremos a ella como una muestra «de las buenas»), entonces:

$$\mu \in (3{,}84;12{,}96)$$

3º Luego el nivel de confianza se refiere a la probabilidad de elegir una muestra que cumpla lo expuesto en el primer apartado y no a la probabilidad de que la media poblacional pertenezca al intervalo.

Por otra parte, si la muestra elegida es «una de las buenas», es decir es una muestra que cumple:

$$-4{,}56 < \bar{x} - \mu < 4{,}56$$

y se utiliza la media de esta muestra (8,4 días) para estimar la media poblacional, por lo anterior podemos asegurar que el error máximo cometido en esta estimación es de 4,56 días. Por esta cuestión, la estimación por intervalo es preferible a la estimación puntual ya que, además de la estimación, proporciona el error que se comete.

Esperamos que la lectura del problema anterior sirva, no sólo para que los alumnos comprendan cómo ser deben interpretar los intervalos de confianza sino que también enseñe un procedimiento «razonado» para calcularlos. El profesor decidirá la conveniencia de, en algún momento, sintetizar el cálculo del intervalo con la aplicación de la expresión:

$$(\bar{x} - \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

siendo $-\lambda\alpha$ y $\lambda\alpha$ los valores opuestos de una variable N(0,1) «encierran» un área igual a α.

Por último, queremos recordar que, como se verá en el siguiente problema resuelto, en caso de que la varianza poblacional sea desconocida se puede estimar (sustituir) por el valor de la cuasivarianza muestral siempre que el tamaño de la muestra sea superior a 30.

PROBLEMA 13. RESUELTO

¿Recuerdas el problema nº 6 que trataba del absentismo laboral en una empresa? Veamos cómo se calcula en este caso un intervalo con un nivel de confianza del 99% para la media poblacional de la variable estudiada.

Vamos a llamar μ a la media poblacional de la variable:

X: número de días que el trabajador ha estado de baja

de la que tenemos los 50 valores que aparecían en el enunciado del problema con los que debiste obtener los siguientes resultados:

Media muestral, $x = 3{,}7$ días
Cuasivarianza muestral, $s^2 = 6{,}05$
Cuasidesviación típica muestral, $s = 2{,}46$ días

Según hemos visto, para calcular el intervalo debemos saber previamente cual es el valor **d** para el que se cumple:

$$¿P\{|\bar{x} - \mu| < d\} = 0{,}99$$

Vamos a seguir un proceso similar al descrito en otras ocasiones:

$¿P\{|\bar{x} - \mu| < d\} = 0{,}99 \leftrightarrow P\{-d < \bar{x} - \mu < d\} = 0{,}99 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow P\left\{\frac{=d}{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}} < \underbrace{\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}}}_{N(0,1)} < \frac{d}{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}}\right\} = 0{,}99$$

Consultamos las tablas y obtenemos:

$$\frac{d}{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}} = 2,58$$

$$d = 2,58 \frac{\sigma}{\sqrt{50}}$$

Ya que en este caso no conocemos la varianza poblacional, podemos sustituir su valor por el de la cuasivarianza muestral, ya que el tamaño de la muestra es mayor que 30:

$$d = 2,58 \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,58 \frac{2,46}{\sqrt{50}} = 0,9$$

Luego el 99% de las muestras tienen una media muestral que dista de la poblacional menos de 0,9 días. Si la muestra que nos dan (los 50 valores del enunciado del problema) es una de las que lo cumple, tendremos:

$$-0,9 < \bar{x} - \mu < 0,9$$
$$\bar{x} - 0,9 < \mu < \bar{x} + 0,9$$
$$3,7 - 0,9 < \mu < 3,7 + 0,9$$
$$2,8 < \mu < 4,6$$

es decir, tenemos el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel del 99%

$$(2,8 \ ; 4,6)$$

PROBLEMA 14

La media de la muestra a la que se alude en el problema 10 es de 500 barriles diarios de petróleo. Calcula un intervalo con un nivel de confianza del 90% para la media poblacional de la variable que se estudia.

PROBLEMA 15

Calcula un intervalo con un nivel de confianza del 95% para la media poblacional de la variable que se estudia en el Problema 11.

PROBLEMA 16

Una agencia de alquiler de automóviles necesita estimar el número medio de kilómetros diarios que realiza su flota de coches. A tal fin, en varios días de la semana, anota los recorridos de 100 vehículos y obtiene que la media muestral es 165 km/día y la cuasivarianza muestral es 36. Calcular un intervalo con un nivel de confianza del 95% para el número medio de kilómetros diarios de la flota de automóviles de esa empresa.

PROBLEMA DE AMPLIACIÓN 2

Calcula dos intervalos con niveles de confianza del 90% y del 95% respectivamente, para la media poblacional de la variable estudiada en el problema de ampliación número 1.

PROBLEMA 17

Una empresa que se dedica a investigar sobre medio ambiente estaba interesada en estudiar el impacto de una determinada autopista en su entorno. Una de las variables que eligieron para ello fue la concentración de monóxido de carbono en lugares próximos a esa autopista. Para obtener información sobre este variable se utilizó un espectrómetro que midió la concentración de monóxido de carbono en el aire en 35 momentos a lo largo de un año. Los valores obtenidos, en partes por millón, fueron:

102,2	98,4	104,1	101	102,2	100,4	98,6
88,2	78,8	83	84,7	99,8	105,1	106,2
111,2	108,2	105,2	103,2	99	98,8	100,3
102	105,4	97,8	110	111,5	97	91,4
100,6	75	80,2	97,5	103,6	113,5	95,3

Utiliza esta información para obtener un intervalo con un nivel de confianza del 99% para la concentración media de monóxido de carbono que hay en los alrededores de esa autopista.

PROBLEMA 18

Calcula un intervalo con un nivel de confianza del 90% para la media poblacional de la variable del problema anterior. Compara los intervalos que has obtenido en cada caso.

El objetivo de este problema es insistir en la interpretación del intervalo de confianza. Para describir exactamente lo que queremos decir vamos a basarnos en los intervalos construidos en estos dos últimos problemas.

Nivel de confianza 99%: (94,75 ; 102,93)

Nivel de confianza 90%: (96,24 ; 101,44)

La amplitud del segundo intervalo (5,2) es menor que la del primero (8,18), por lo que parece que el intervalo al 90% es más preciso que el intervalo al 99%. Sin embargo, hay que tener en cuenta que al disminuir el nivel de confianza, hay menos probabilidad de elegir una «buena muestra», dicho de otra forma, lo que se gana en precisión se pierde en confianza.

Otro problema que se puede plantear en este apartado es el análisis y la interpretación de algún artículo aparecido en prensa en el que se trate una estimación. Generalmente en estos artículos aparece la llamada «ficha técnica» en la que suelen hacer referencia al «margen de error» o al nivel de confianza.

3.2. Tamaño muestral

La determinación del tamaño que debe tener una muestra para satisfacer una serie de condiciones impuestas por el investigador se aborda en la resolución del siguiente problema. Como se puede observar se trata de una mera continuación de los problemas sobre intervalos de confianza, con la diferencia de que, en esta ocasión, hay «un cambio de incógnitas», el error se supone dado y se trata de calcular el tamaño muestral.

También en este caso consideramos que debe ser el profesor el que decida explicitar en algún momento la fórmula:

$$n \approx \lambda_\alpha^2 \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

siendo:

- n : tamaño de la muestra
- λ_α: valor de la N(0,1) que deja a su derecha un área igual a $(1-\alpha)/2$
- σ: desviación típica poblacional
- ϵ : error máximo permitido

PROBLEMA 19. RESUELTO

Hasta ahora has calculado intervalos de confianza para la media poblacional de una variable con los datos obtenidos de una muestra, es decir conociendo el tamaño, la media y la cuasivarianza de una muestra. Como vimos, dado el nivel de confianza, el intervalo proporciona el error máximo que se comete al estimar la media poblacional mediante la media muestral. Sin embargo, en muchas ocasiones el verdadero trabajo estadístico plantea otro problema. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que, con un nivel de confianza determinado, la distancia entre la media muestral y la poblacional sea menor que un valor fijo? Es decir, los datos del problema son: el nivel de confianza (entendido de la misma manera que en el problema de los intervalos) y el error máximo permitido. Esta situación tiene bastante sentido, ya que parece lógico pensar que el estadístico desee acotar el error de la estimación estudiando previamente cuántos elementos debe tener la muestra.

Vamos a ver que para resolver este problema no necesitamos saber nada nuevo. Para ello volvamos al problema 8 en el que se estudiaba el tiempo medio de permanencia de un paciente en un hospital. Sabiendo que la desviación típica de esta variable es de 9 días nos planteamos la siguiente pregunta:

> ¿Cuántos pacientes deben formar parte de la muestra para que la distancia entre la media muestral y la poblacional sea menor de 3 días con un nivel de confianza del 95%?

Como siempre, traducimos esta pregunta por:

$$P\{|\bar{x} - \mu| < 3\} = 0{,}95$$

También como antes, podemos modificar la expresión anterior hasta conseguir:

$$P\left\{\frac{-3}{\frac{9}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{9}{\sqrt{n}}} < \frac{3}{\frac{9}{\sqrt{n}}}\right\} = 0{,}95$$

Consultando las tablas obtenemos:

$$\frac{3}{\frac{9}{\sqrt{n}}} = 1{,}96$$

de donde:

$$\sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 9}{3}$$

Observa que en estos problemas la incógnita de la ecuación es el valor de n.

$$n = 34{,}57$$

Luego debemos elegir una muestra de 35 pacientes para que, con un nivel de confianza del 95%, el error de estimación sea menor de 3 días.

PROBLEMA 20

Vuelve a leer el enunciado del problema 11. Estima el valor de la varianza poblacional por la cuasivarianza muestral y calcula cuántos elementos adicionales deben formar parte de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor de 0,10 l/100 Km.

PROBLEMA 21

Busca los resultados que obtuviste en el problema 16.

- ¿Cuánto distan como máximo la media muestral y la media poblacional en el 95% de las muestras de tamaño 100?
- Supongamos que la varianza poblacional es igual a 36. Si queremos tener la seguridad de que en el 95% de las muestras la diferencia entre la media muestral y la poblacional es menor de 0,5 km/día, ¿debemos extraer una muestra de más de 100 elementos o de menos? Comprueba tu suposición.
- Para un nivel de confianza fijo, ¿qué ocurre a medida que aumenta el tamaño muestral?

PROBLEMA 22

La empresa mencionada en el problema 17 realizó una investigación adicional sobre muestras de tamaño 70 estimando que valor de la desviación típica poblacional es de 9,37 ppm. En estas condiciones afirma que la diferencia entre la media muestral y la poblacional *es inferior a 6 ppm. Consulta los resultados del* problema 17 para contestar a esta pregunta: ¿el nivel de confianza de esta afirmación es mayor o menor que el 99%? Compruébalo.

4. CONTRASTE DE HIPÓTESIS

El contraste o test de hipótesis es el último procedimiento de estimación que estudiaremos en esta unidad. Concretamente se analiza cómo realizar un contraste bilateral sobre la media poblacional de una variable, ya que por una parte es un procedimiento asequible para los alumnos de este nivel y, por otra, es suficiente para se formen una idea clara de los aspectos fundamentales de este método de estimación.

Como se verá en el problema que aparece resuelto a continuación, el proceso de realización del test está basado en la misma idea que guía la construcción de un intervalo de confianza. Consideramos que esta es la mejor manera de hacerlo ya que se presenta como una continuación de los problemas planteados en la parte anterior y simplifica el aprendizaje de unos conceptos que, de otro modo, resultarían verdaderamente complicados. Por otra parte, cualquier otro método de obtención del test resulta, a nuestro entender, inasequible para los alumnos del nivel en el que nos encontramos.

PROBLEMA 23. RESUELTO

Se está investigando el salario medio de un colectivo de trabajadores sabiendo que la desviación típica de los salarios en ese colectivo es de 20.000 pesetas.

Si se extraen muestras de 1.600 trabajadores, sabemos que la expresión general de un intervalo de confianza para la media poblacional, con una confianza del 95%, es:

$$\bar{x} = 1{,}96 \frac{20.000}{\sqrt{1.600}}, \ \bar{x} + 1{,}96 \frac{20.000}{\sqrt{1.600}})$$

$$(\bar{x} - 980, \ \bar{x} + 980)$$

es decir, en el 95% de las muestras, el intervalo $(\bar{x} - 980, \bar{x} + 980)$ contiene al valor de la media poblacional:

$$\mu \in (\bar{x} - 980, \ \bar{x} + 980) \text{ en el 95\% de las muestras de tamaño 1.600}$$

Según esto, en el 5% de las muestras de tamaño 1.600, el intervalo $(\bar{x} - 980, \bar{x} + 980)$ no contiene el valor de la media poblacional:

$$\mu \notin (\bar{x} - 980, \ \bar{x} + 980) \text{ en el 5\% de las muestras de tamaño 1.600}$$

Ahora supongamos que hacemos la hipótesis de que el salario medio poblacional es de 95.000 pesetas.

Hipótesis: $\mu = 95.000$ pesetas

Para averiguar si esta hipótesis es cierta o falsa se extrae una muestra de 1.600 trabajadores y se calcula el salario medio de los elementos de esa muestra, obteniéndose:

$\bar{x} = 93.500$ pesetas

Según esta información, ¿debemos rechazar la hipótesis establecida? Veamos que, como siempre sucede con los problemas de estimación, rechazar o aceptar la hipótesis no es algo que se pueda hacer con una seguridad absoluta, sino que tendremos que hablar de probabilidades.

Hemos visto que podemos clasificar el conjunto de todas las muestras de tamaño 1.600 en dos clases:

1ª CLASE	2ª CLASE
Muestras para las que $\mu \in (\bar{x} - 980,\ \bar{x} + 980)$	Muestras para las que $\mu \notin (\bar{x} - 980,\ \bar{x} + 980)$
95% de las muestras	5% de las muestras

Por lo tanto:

- La probabilidad de elegir una muestra de 1.600 trabajadores que pertenezca a la primera clase es 0,95.
- La probabilidad de elegir una muestra de 1.600 trabajadores que pertenezca a la segunda clase es 0,05.

Si la muestra elegida (cuya media es de 93.500 pesetas) pertenece a la primera clase, entonces:

$\mu \in (93.500 - 980, 93.500 + 980)$

$\mu \in (92.520, 94.480)$

Puesto que el valor considerado para la media poblacional no pertenece a este intervalo:

$95.000 \notin (92.520, 94.480)$

con la información proporcionada por la muestra decidimos rechazar la hipótesis enunciada, ¿es una decisión correcta? Fíjate en que pueden ocurrir dos posibilidades:

a) Que la hipótesis μ = 95.000 pesetas sea falsa, en cuyo caso hemos tomado la decisión correcta.

b) Que la hipótesis μ = 95.000 pesetas sea cierta y que la muestra elegida pertenezca a la 2ª clase, es decir esté entre el 5% de las muestras en las que el intervalo ($\bar{x}$ - 980 , $\bar{x}$ + 980) no contiene a la media poblacional. En este caso nuestra decisión será equivocada.

¿Cuál es la probabilidad de que hayamos tomado la decisión equivocada? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que rechacemos la hipótesis formulada, siendo esta hipótesis cierta? Lo indicado en el apartado b) nos dice que esta probabilidad es igual a la probabilidad de haber elegido una muestra de la 2ª clase que es igual a 0,05.

$$P\{\text{ rechazar } \mu = 95.000 \text{ pesetas siendo cierta}\} = 0{,}05$$

Para indicar esto, diremos que rechazamos que el salario medio de la población sea 95.000 pesetas con un **nivel de significación** de 0,05, es decir, especificamos cuál es la probabilidad de habernos equivocado.

En este problema hemos realizado un **test de hipótesis** sobre la media poblacional de una variable. Como has podido comprobar, realizar un test con un nivel de significación α equivale a obtener un intervalo cuyo nivel de confianza es el tanto por ciento correspondiente a 1 - α. Si el valor considerado en la hipótesis pertenece al intervalo, lo aceptamos y si no pertenece al intervalo tomamos a decisión de rechazarlo.

LECTURA

El **contraste** o **test de hipótesis** es un procedimiento de estimación utilizado en estadística. Para realizarlo establecemos una hipótesis sobre el parámetro que se pretende estimar y la comparamos con los resultados obtenidos en una muestra. Nosotros vamos a limitar nuestro estudio a realizar test de hipótesis para estimar la media poblacional de una variable. Extraeremos una muestra y calcularemos el valor de la media muestra. Algunos valores de la media muestras pueden llevarnos a sospechar que la hipótesis no es razonable y debe ser rechazada; otros pueden considerarse como una justificación de la hipótesis. Sin embargo, tanto en un caso como en otro podemos equivocarnos, es decir podemos rechazar la hipótesis siendo verdadera o bien aceptarla siendo falsa.

En el problema anterior hemos realizado un contraste sobre el salario medio de un colectivo de trabajadores. Vamos a utilizarlo como ejemplo en las definiciones que te presentamos a continuación.

Contraste o test de hipótesis sobre la media poblacional

Procedimiento estadístico mediante el cual se investiga la aceptación o rechazo de una afirmación acerca del valor de la media poblacional.

Ejemplo

Contraste sobre el salario medio, _, de un colectivo de trabajadores.

Hipótesis nula

Es la hipótesis que se quiere contrastar y es por lo tanto la que se acepta o se rechaza al final del contraste. Se simboliza por H_0.

La hipótesis complementaria de la hipótesis nula se denomina **hipótesis alternativa** y se simboliza por H_1.

Puesto que estamos hablando de contrastes sobre la media poblacional, la hipótesis nula consistirá en asignar un valor a esa media:

$$H_0: \mu = k$$

Ejemplo

H_0: μ = 95.000 pesetas
H_1: $\mu \neq$ 95.000 pesetas

Nota

Para establecer la hipótesis nula se utiliza, si es posible, el siguiente criterio que se *justificará más adelante: se elige de forma que el error más grave que se cometa* sea rechazarla cuando es cierta. Por ejemplo, supongamos que estamos investigando sobre si cierta medicina produce cáncer con el fin de ponerla o no a la venta. Podemos establecer dos hipótesis, «produce cáncer» o «no produce cáncer», ¿cuál debemos elegir como hipótesis nula?

- Elegimos como H_0: «produce cáncer»

  Si como resultado del contraste decidimos rechazarla, la conclusión es que no es cierto que produzca cáncer y el producto se pondrá a la venta. Si realmente es cierto que la medicina produce cáncer (H_0 cierta) hemos cometido un error.

- Elegimos como H_0:«no produce cáncer»

  Si como resultado del contraste decidimos rechazarla, la conclusión es que la medicina produce cáncer y no se pondrá a la venta. Si en realizad no causa esta enfermedad (H_0 cierta) hemos cometido un error.

¿Qué error es más grave? Claramente el primero ya que se pondrá a la venta un producto que produce cáncer, mientras que en el segundo caso lo único que ocurre es que el producto no se comercializará. Por lo tanto en este caso se elegiría como hipótesis nula «produce cáncer».

Tipos de errores

Una vez establecida la hipótesis nula los errores que se puede producir en la decisión que resulta del test se recogen en el siguiente cuadro.

Posibilidad / Decisión	H_0 falsa	H_0 cierta
Rechazar H_0	Decisión correcta	**Error de tipo I**
No rechazar H_0	**Error de tipo II**	Decisión correcta

Observa que, según el criterio que se utiliza para elegir la hipótesis nula, el error de tipo I es el más grave.

Ejemplo

Error de tipo I: rechazar H_0: μ = 95.000 PTA siendo cierto que μ = 95.000 PTA
Error de tipo II: aceptar H_0: μ = 95.000 PTA siendo falso que μ = 95.000 PTA

Nivel de significación

Es la probabilidad de cometer el error de tipo I. Se simboliza con la letra α

$$\alpha = P\{\text{cometer el error de tipo I}\} = P\{\text{rechazar } H_0 \text{ siendo cierta}\}$$

Puesto que el error de tipo I es el más grave que se puede cometer, lo primero que se hace cuando se plantea un contraste es fijar el valor del nivel de significación, es decir cual va a ser la probabilidad de cometer el error de tipo I. Habitualmente se utilizan tres valores:

1º $\alpha = 0{,}01$
2º $\alpha = 0{,}05$
3º $\alpha = 0{,}1$

Si la decisión del contraste es rechazar la hipótesis nula, en con el primer valor de α se dice que se rechaza **muy significativamente**, con el segundo valor se rechaza **significativamente** y **casi significativamente** si α toma el tercer valor.

Ejemplo

$\alpha = 0{,}05$

Región crítica

Fijado el nivel de significación de un test (α) y el tamaño de la muestra (n), el conjunto de todas las muestras de ese tamaño se pueden clasificar en dos clases llamadas **región crítica** y **región de aceptación** respectivamente.

1. Región crítica

Pertenecen a esta clase todas las muestras de tamaño n cuya media cumple:

$$\mu \in \left(\bar{x} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo:

α : la media poblacional
$\bar{x}$: la media muestral
σ: la desviación típica poblacional
n: el tamaño de la muestra

En cuanto al valor indicado con λ se puede expresar de varias formas, por ejemplo:

a) λ es el valor de la N(0,1) que deja a su derecha un área igual a $\alpha/2$

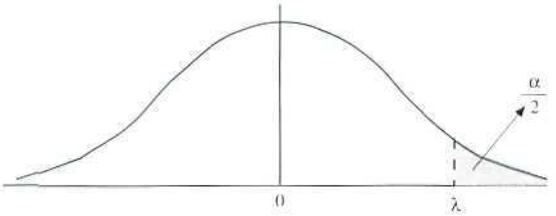
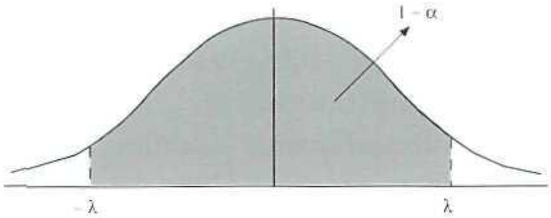


Ilustración 1

b) λ es el valor de la N(0,1) que, junto con -λ «encierra» un área de 1-α



Según las tablas de la N(0,1) que tengas por costumbre manejar, deberá decidirte por una u otra interpretación.

2. Región de aceptación

Pertenecen a esta clase todas las muestras de tamaño n cuya media cumple:

$$\mu \in \left(\bar{x} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \bar{x} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

(Insistimos en aclarar que tanto la región crítica como la de aceptación son conjuntos de muestras. La pertenencia de una muestra a uno u otro conjunto está relacionada con «algo que ocurre con un intervalo», pero el intervalo **no constituye ninguna región**.)

Observa que:

– La probabilidad de elegir una muestra que pertenezca a la región crítica es:

$$P\{\mu \notin (\bar{x} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}})\} = P\{-\lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \bar{x} - \mu > \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = P\{-\lambda > \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \lambda\} = \alpha$$

Puedes comprobar la última igualdad en la ilustración 1.

– La probabilidad de elegir una muestra que pertenezca a la región de aceptación es:

$$P\{\mu \in (\bar{x} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}})\} = 1 - \alpha$$

Ejemplo

El nivel de significación es 0,05 y el tamaño de la muestra 1.600.

1. Región crítica

Contiene a todas las muestras de tamaño 1.600 que tienen una media que cumple:

$$\mu \in (\bar{x} - \lambda \frac{20.000}{\sqrt{1.600}}, \bar{x} + \lambda \frac{20.000}{\sqrt{1.600}})$$

siendo λ el valor de la $N(0,1)$ que deja a su derecha un área igual a $0,05/2$

$$\lambda = 1,96$$

entonces:

$$\mu \notin (\bar{x} - 980 , \bar{x} + 980)$$

luego la región crítica está formada por todas las muestras de tamaño 1.600 para las que el intervalo ($\bar{x}$ - 980 , $\bar{x}$ + 980) no contiene a la media poblacional. Hemos visto que el 5% de las muestras están en esta situación, luego la probabilidad de elegir una de ellas es 0,05.

2. Región de aceptación

Con cálculos similares a los realizados en el punto anterior llegamos a la conclusión de que pertenecen a esta región todas las muestras de tamaño 1.600 que tienen una media que cumple:

$$\mu \in (\bar{x} - 980 , \bar{x} + 980)$$

La región de aceptación está formada por todas las muestras de tamaño 1.600 para las que el intervalo $(\bar{x} - 980 , \bar{x} + 980)$ contiene a la media poblacional. La probabilidad de elegir una de estas muestras es 0,95.

Decisión de un contraste

Resumimos esquemáticamente el proceso que hemos realizado hasta ahora:

Hipótesis nula, H_0: $\mu = k$
Nivel de significación, α
Tamaño muestral, n
Región crítica
Región de aceptación

Hasta aquí llega la «preparación del contraste», a continuación vemos cómo conseguir la decisión final.

– Se extrae una muestra de tamaño n.

– Se calcula su media muestral, $\bar{x}$

– Se obtiene el intervalo $I = (\bar{x} - \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

– La decisión del contraste se basa en esta reflexión: «si el valor asignado a la media poblacional en la hipótesis nula ($\mu = k$) fuera el verdadero valor de esta media, la probabilidad de elegir una muestra para la que el intervalo I contiene a k es muy grande. Si al elegir la muestra resulta que k no pertenece al intervalo sospechamos que no es el verdadero valor y por lo tanto lo rechazamos» Formalizamos esta idea en el siguiente criterio que recoge la decisión del contraste:

a) Si K $\notin (\bar{x}-\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x}+\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ se toma la decisión de **rechazar la hipótesis nula**

b) Si K $\in (\bar{x}-\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x}+\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ se toma la decisión de **aceptar la hipótesis nula**

– A pesar de que la probabilidad mencionada en el punto anterior es muy grande, no es exactamente 1, lo que quiere decir que existe la posibilidad de elegir una muestra para la que el intervalo no contiene al verdadero valor de la media poblacional. En este caso, puede ocurrir que la hipótesis nula fuera cierta y decidiéramos rechazarla, con lo que se comete un error. La probabilidad de ese error es igual a la probabilidad de haber elegido una de esas muestras, es decir α.

Ejemplo

H_0: μ = 95.000 PTA
n = 1.600
α = 0,05

Región crítica

$$\mu \notin (\bar{x} - 980 , \bar{x} + 980)$$

Región de aceptación

$$\mu \in (\bar{x} - 980 , \bar{x} + 980)$$

Probabilidad de elegir una muestra de la región crítica, 0,05
Probabilidad de elegir una muestra de la región de aceptación, 0,95

Se extrae una muestra de tamaño 1.600 y se calcula su media, obteniéndose:

$$(\bar{x} = 93.500 \text{ PTA}$$

Puesto que:

$95.000 \notin (93.500 - 980, 93.500 + 980)$
$95.000 \notin (92.520,04.480)$

decidimos rechazar la hipótesis μ = 95.000 PTA con un nivel de significación de 0,05.

PROBLEMA 24

Una empresa que fabrica cigarrillos indica en sus paquetes que el contenido medio de nicotina es de 1,6 mg. Para contrastar la veracidad de esta afirmación se extrae una muestra de 30 de esos cigarrillos obteniéndose un contenido medio de nicotina de 1,71 mg con una cuasidesviación de 0,8 mg. Determinar, con un nivel de significación de 0,05 la veracidad de la indicación recogida en los paquetes.

PROBLEMA 25

La vida media de una muestra de 100 tubos fluorescentes producidos en una fábrica es de 1.570 horas con una cuasidesviación de 120 h. Si μ es la vida media de todos los productos de esa fábrica, contrastar la hipótesis de que $\mu = 1.600$ h primero con un nivel de significación de 0,05 y después con un nivel de significación de 0,01.

PROBLEMA 26

Se quiere comprobar con un nivel de significación de 0,05 si una muestra de tamaño 20 con una media de 10 procede de una población que se distribuye según una N(14,3).

PROBLEMA 27

El nivel medio de protombina en una determinada población es conocido y resulta ser de 20 mg/100 ml de plasma. Se toma una muestra de 40 pacientes que se sabe tienen deficiencia de vitamina K con los siguientes resultados:

$\overline{x} = 18{,}50$ mg/100 ml
$s = 4$ m/100 ml

¿Se puede afirmar, con un nivel de significación del 0,01, que la deficiencia de vitamina k afecta al contenido de protombina en sangre?

PROBLEMA 28

Busca en tus papeles los datos que sean necesarios para saber si, con un nivel de significación del 0,1, se puede afirmar que la permanencia media de los pacientes del hospital que hemos estado estudiando en este tema es de 10 días.

PROBLEMA 29

La empresa de automóviles de la que se habla en el problema 10 afirma en su publicidad que el consumo medio de su último modelo es de 9,5 l cada 100 km. ¿Qué se puede decir de esta afirmación?

Evaluación

A continuación se exponen algunos elementos que permitirán evaluar el aprendizaje de los alumnos:

- En caso de que se haya realizado esa actividad global a la que se alude en el apartado *Encuestas y técnicas de muestreo* el trabajo final se puede utilizar como evaluación. Una vez que todos los alumnos dispongan de los datos utilizados y de los resultados obtenidos, se pueden plantear algunos problemas que los alumnos resolverán consultando ese trabajo.
- Cualquiera de los problemas propuestos puede servir para hacer evaluaciones parciales del proceso de aprendizaje.
- La colección de problemas que se plantean a continuación puede plantearse como «examen final» si se utilizan todos o como «exámenes parciales» si se van seleccionando a medida que se desarrolla el tema.

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN

1. Se quiere estudiar el salario medio percibido por los 1.500 trabajadores de una empresa. ¿De qué tipo crees que debe ser el muestreo?

2. El concejal de educación de un municipio quiere investigar el tipo de estudios universitarios que realizarán los alumnos de 2º de Bachillerato. Para simplificar el trabajo clasifica las carreras universitarias en 4 bloques: artes, humanidades y ciencias sociales, ciencias naturales y tecnología. En su zona hay 60 cursos de 2º de Bachillerato distribuidos de la siguiente manera:

Modalidad de Bachillerato	Nº de cursos
Artes	4
Ciencias de la Naturaleza y Salud	28
Humanidades y Ciencias Sociales	23
Tecnología	10

Explica cómo se elegiría una muestra de 40 alumnos para estudiar la variable considerada.

3. ¿Es la media muestral una variable aleatoria?

4. ¿Depende la fiabilidad de una estimación del tamaño de la muestra elegida? ¿Por qué?

5. Queremos saber cual es la probabilidad de que la media de una muestra extraída de una población esté comprendida entre dos valores fijos, ¿qué datos son necesarios para este cálculo?

6. Consideramos una población y una variable que se estudia en esa poblacional. Conocida la desviación típica poblacional, ¿de qué depende la amplitud de un intervalo de confianza para la media poblacional?

7. Di si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y por qué:

   a) La varianza de la variable media muestral depende del valor de la media poblacional.
   b) La probabilidad de que la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor que un determinado valor sólo depende de la desviación típica poblacional y del tamaño de la muestra.
   c) Es imposible que la media muestral tome un sólo valor.
   d) El nivel de confianza de un intervalo nos informa de la probabilidad de que la media poblacional pertenezca o no al intervalo.
   d) Al aumentar el nivel de confianza disminuye la precisión de la estimación.
   e) Si el nivel de significación de un test aumenta, también aumenta la probabilidad de cometer el error de tipo 2.

8. Durante un período de entrenamientos se han medido los tiempos conseguidos por un plusmarquista que corre los 100 m, obteniéndose los siguientes resultados en segundos:

10,14	10,20	10,15	10,16	10,14
10,18	10,14	10,20	10,21	10,12
10,17	10,15	10,12	10,12	10,20
10,12	10,22	10,11	10,10	10,15
10,23	10,15	10,16	10,19	10,17
10,16	10,16	10,25	10,23	10,16
10,10	10,11			

   a) Calcula un intervalo con un nivel de confianza del 99% para la el tiempo medio en que este atleta recorre los 100 m. Con esa misma confianza, ¿qué error se comete al estimar el tiempo medio por el tiempo medio muestral? Si disminuimos el nivel de confianza, ¿cómo será el error cometido?
   b) ¿Cuántas tiempos deberíamos haber medido para que, con una confianza del 95%, la media muestral y la poblacional difieran en menos de 0,02 s?
   c) El entrenador de este atleta dice que la media de los tiempos es de 10,16, ¿qué puedes decir de esta afirmación? Considera los tres niveles de significación más usuales.

Ministerio de Educación y Cultura
Secretaría General de Educación y Formación Profesional
Centro de Investigación y Documentación Educativa (C.I.D.E.)