MATEMATICAS

Estudios y experiencias educativas

Serie E.G.B. Nº 8

Matemáticas

ESTUDIOS Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

SERIE E.G.B. N.º 8

Matemáticas

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA

Dirección General de Educación Básica

1981

Texto: Subdirección General de Ordenación Educativa.

Edita: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Coordina la Serie: Servicio de Planes de Estudio y Orientación.

Equipo colaborador: D.ª M.ª Dolores de Prada Vicente, Catedrática de Matemáticas e Inspectora Central de E.M.
D. Jaime García Berlanga, Profesor de E.G.B.
D. Pedro García Pérez, Profesor de E.G.E.
D. Ramón González Díaz, Inspector de E.G.B.
D. Luis Guaita Bermejo, Profesor de E.G.B.
D. Vicente Guillén López, Catedrático de I.N.B.
D.ª Rosaura Hernández Nistal, Agregada de I.N.B.
D. Pedro Jiménez Altabe, Profesor de E.G.B.
D. Manuel Luque Lucena, Inspector de E.G.B.
D. Angel Martínez Páez, Catedrático de I.N.B.
D. Teófilo Navarro García, Agregado de I.N.B.
D. Angel Nieto Descalzo, Agregado de I.N.B.
D. Juan Paños Gahete, Profesor de E.G.B.
D. Miguel Angel Varas Reviejo, Profesor de E.G.B.

Edita: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Diseño de cubierta: E. CATA.

Imprime: RAYCAR, S. A. Matilde Hernández, 27. Madrid-19

Depósito legal. M. 20.032.—1981
I.S.B.N.: 84-369-0856-2

Impreso en España.

INDICE

¿POR QUE UNA RENOVACION EN LOS PROGRAMAS DE MATEMATICAS?

Desde 1971 la Dirección General de Educación Básica no ha establecido nuevas orientaciones o programaciones en la enseñanza de la matemática.

La labor diaria del profesor ha detectado dificultades en la enseñanza y las evaluaciones realizadas a título experimental, o con motivo de exámenes de graduado escolar o de exploración inicial en la entrada en los I.B. confirmaban también frecuentemente fallos y lagunas en el aprendizaje de las matemáticas, debido muchas veces a que los contenidos no se ajustaban al momento evolutivo. Tales dificultades no pueden considerarse aisladas sino dentro del contexto en que ha venido desarrollándose la Educación General Básica:

a) La extensión de la enseñanza a mayor número de hombres, que si bien es un hecho positivo en una sociedad democrática, comporta el riesgo de la masificación que puede suponer un deterioro de los niveles de preparación y una frustración de los que creen que los estudios comportan una elevación social y económica.

b) La promoción casi automática de un grado a otro en E.G.B. que se ve deteriorada por la poca eficacia de las enseñanzas de recuperación, la interpretación equivocada de la evaluación continua y la utilización de los libros de consulta como libros de texto y quizá para algunos profesores de forma dogmática.

c) La desigual formación y metodología del profesorado, que en el caso de Matemáticas se agudiza teniendo en cuenta que buena parte de éste ha tenido que reestudiar la materia, aprender nuevos términos y símbolos y utilizar un lenguaje y unas ideas que la mayoría desconocía. Aunque hay que reconocer el esfuerzo que han hecho muchos profesores para ponerse al día, es lógico que esta situación problemática haya producido un cierto rechazo instintivo hacia la mal llamada «matemática moderna», de la que no se ven claramente sus aplicaciones y a la que se aleja de las motivaciones concretas que rodean al alumno y del cultivo de los automatismos del cálculo y del bagaje geométrico que tradicionalmente se enseñaban en la escuela Primaria.

d) Los desfases en la programación y la falta de estudios psicopedagógicos donde se analicen las causas del rechazo de los alumnos hacia algunas materias y la formación en éstos de hábitos de estudio y trabajo.

La validez de estas afirmaciones ha sido contrastada con algunas reflexiones más planificadas.

I. Los grupos de profesores que han trabajado en el tema de la conexión de niveles E.G.B.-Bachillerato y F.P. en el área de Matemáticas, han llegado a conclusiones bastante unánimes que nos permiten sintetizar algunas dificultades de contenido que por ser fruto de una reflexión sobre la experiencia de profesores que trabajan en ambos niveles hay que considerar en un momento en que se pretende hacer una renovación de los programas de E.G.B.

Las dificultades del paso de la E.G.B. a la Enseñanza Media, han sido agudizadas por algunos hechos que es preciso recordar.

En el caso de las Matemáticas, las principales dificultades se podrían sintetizar así:

— Conocimiento incorrecto del concepto de función, dominio e imagen.
— Ausencia o conocimiento incorrecto de los contenidos relativos a la goemetría del triángulo, ángulos, segmento, paralelismo y perpendicularidad, con todo lo que supone respecto al proceso de resolución de problemas.
— Incorrecta formalización de los conjuntos, relaciones y estructuras.
— Fallos en los automatismos del cálculo con números racionales y radicales.
— Fallos en los mecanismos de simplificación y de resolución de ecuaciones.
— Fallos en el manejo operatorio de la geometría del plano.
— Dificultad para hacer una lectura comprensiva y seguir un razonamiento.
— Falta de hábito para mantener la atención.
— Dificultad para la representación gráfica.

II. Las conclusiones de la encuesta que la Dirección General de Enseñanza Media, a través de la Inspección de Bachillerato dirigió a una muestra de 1/3 de los Institutos y Centros homologados de Bachillerato sobre el tema de la conexión de niveles E.G.B.-Bachillerato, corroboran las anteriores dificultades.

III. La encuesta sobre evaluación de 1.° de Bachillerato realizada en 1976 por la Inspección de Enseñanza Media aporta las siguientes conclusiones a nivel nacional sobre los alumnos que acceden a Bachillerato:

En relación con las Matemáticas, el 55 por 100 de los profesores consideran insuficiente el nivel de conocimientos de los alumnos que llegan a los I.B. y el 64 por 100 consideran insuficiente el nivel inicial de los alumnos en cuanto a aptitudes y dominio de las técnicas de trabajo.

Estos antecedentes nos hacen pensar en un cambio metodológico que permita corregir las deficiencias antes apuntadas.

Pero además, el estudio de las finalidades de la E.G.B. nos aboca a pensar en una matemática básica, para todos; matemática del sentido común y de la vida práctica, sin olvidar el objetivo formativo que supone la organización de las estructuras mentales, la adquisición de un vocabulario y el desarrollo de las capacidades intelectuales, del pensamiento y de la creatividad.

Todo esto es posible aunarlo siempre que:

a) En un contexto de ayuda al estudiante sepamos qué puede aprender el alumno de esta edad, cómo enseñárselo y para qué desarrollar dicho aprendizaje.

b) En un contexto sociológico sepamos formar al hombre apto para integrarse en esta sociedad de hoy, con sus características tecnológicas y de rápidos cambios, lo que exige una autoformación permanente.

c) En un contexto de respeto a la ciencia que se imparte, sepamos mantener la coherencia, sistematización y probidad científica.

IV. De acuerdo con todo ello, los grupos que han trabajado en la renovación de los programas han considerado oportuno introducir algunas modificaciones en las orientaciones pedagógicas para la E.G.B. de 1971.

¿CUALES SON ESTAS MODIFICACIONES?

Distinguiremos dos aspectos:

a) Estructura.

b) Nivel de profundización.

a) **Estructura de los programas**

La diferencia fundamental respecto a las orientaciones pedagógicas del año 1971, es que éstas son más concretas, amplias y desarrolladas y constan de unos *niveles básicos de referencia* y un *documento de apoyo al profesorado.*

NIVELES BASICOS DE REFERENCIA

Los contenidos a impartir desde 6.° a 8.° de E.G.B. (Ciclo Superior) se han integrado en 8 bloques temáticos:

— Conjuntos numéricos.
— Divisibilidad.
— Geometría plana.

— Funciones.
— Polinomios.
— Proporcionalidad.
— Geometría del espacio.
— Estadística

Cada uno de los cuales comprende varios temas.

Los objetivos a alcanzar dentro del ciclo (ya que no se especifican para cada curso) son considerados de nivel mínimo, lo cual permite espacios y tiempos para actividades nuevas, más abiertos y flexibles que permitan desarrollar capacidades de los mejor dotados y recuperar las de los que no han llegado al nivel mínimo.

Las actividades modélicas propuestas para cada objetivo dan pautas sobre el grado de profundización, de extensión y de dificultad del objetivo.

Las introducciones que preceden a cada bloque temático y a cada tema incluyen el contenido del bloque y los límites, los enlaces con la E.G.B. y el Bachillerato, las relaciones interdisciplinarias y las dificultades que se pueden encontrar en su desarrollo.

b) **Nivel de profundización**

Se pretende mediante el desglose por objetivos indicar los límites en extensión y el nivel de profundización de cada bloque temático.

En cuanto a *cantidad* de conocimientos en los programas renovados se elimina todo aquello que la experimentación ha demostrado no ser asequible al nivel de desarrollo evolutivo de los alumnos y se introduce por otra parte aquellos conocimientos, técnicas y habilidades básicas que se adaptan al nivel evolutivo y que permiten un desarrollo más eficaz de las capacidades de los alumnos.

Explicitemos para cada bloque tales modificaciones.

1. CONJUNTOS NUMERICOS

Se eliminará la construcción formalizada de los conjuntos numéricos, el estudio de las estructuras de grupo, anillo y cuerpo, los isoformismos entre N y Z^+ y entre Z^+ y Q^+, y se intensificarán los mecanismos del cálculo.

JUSTIFICACIÓN. Si bien, bajo un punto de vista matemático, estos temas cumplen un objetivo importante como es el desarrollo del poder de abstracción, es obvio que es más necesario que en estos niveles el alumno haya adquirido unos conocimientos básicos y unas técnicas instrumentales. Bien es verdad que la técnica implica un automatismo lógico y esto supone conocer y aplicar bien las propiedades, pero para llegar a abstraer la noción de estructura es necesario haber manejado muchos casos particulares, de no ser así se pone al alumno en contacto con un lenguaje vacío y formalizado que no comprende a qué puede referirse. En cuanto a las construcciones formalizadas de los conjuntos numéricos en la práctica no se ha llegado a conseguir familiarizar a los alumnos con los números, sino al contrario, ya que lo ven como algo alejado de la realidad y no captan el sentido y el rigor matemático de dichas construcciones. Por ello, nosotros consideramos que su lugar apropiado es el Bachillerato, donde el alumno puede sistematizar los conocimientos adquiridos.

2. DIVISIBILIDAD

Este tema, que se iniciaba en 5.° de E.G.B., se pasa ahora al Ciclo Superior pero estudiándolo sólo en N y con el objeto de llegar al estudio del m.c.d. y m.c.m. que permitirá la operatividad en Q y la resolución de problemas.

3. GEOMETRIA PLANA

Se eliminará el estudio de los semigrupos de segmentos y ángulos generales y de la hipérbola, y se intensificará el de la geometría del triángulo (casi desaparecida), de los ángulos en la circunferencia y de las construcciones con regla y compás, la semejanza y los movimientos.

JUSTIFICACIÓN. La riqueza de situaciones de esta geometría permite al alumno ejerçitarse en el desarrollo de la intuición creadora y en la formulación de conjeturas que favorezcan su creatividad; así como en la adquisición de hábitos correctos de pensar, en la iniciación en el razonamiento lógico y en la comprensión de lo que es una demostración, en el momento en que debe distinguir conscientemente entre la verdad intuitiva y la obtenida por razonamiento.

La geometría con la utilización del plegado, el uso de instrumentos, las construcciones de modelos estáticos y dinámicos son actividades que a la vez que cultivan la intuición espacial le permiten ejercitarse en el dibujo y los trabajos manuales como la mejor introducción a la tecnología.

4. FUNCIONES

Se insistirá en el concepto de función, dominio y rango; concepto importante con incidencia en muchas discipiinas y ramas de la matemática y asequible para los alumnos de esta edad.

La representación de las funciones cuadráticas sólo se hará en casos sencillos y mediante aproximaciones, ya que estos alumnos no poseen el instrumental del cálculo diferencial. No se afrontará la representación de la hipérbola.

Sólo se estudiarán ecuaciones lineales y ecuaciones de 2.° grado con coeficientes en Q y sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas con coeficientes en Q.

Se eliminarán, por tanto, las ecuaciones irracionales y las inecuaciones, cuyo cálculo entraña la dificultad del manejo de las desigualdades, cálculo que se pospone para el Bachillerato.

5. POLINOMIOS

Se eliminan las fracciones racionales, la división de polinomios [salvo el caso sencillo de la división de un polinomio por el binomio $(x-a)$] y la divisibilidad de polinomios.

Se afianza el cálculo operatorio con polinomios, como base para la resolución de ecuaciones y sistemas y para el estudio de funciones.

6. PROPORCIONALIDAD

Se intensifica este tema, añadiendo la proporcionalidad entre segmentos que desemboca en el estudio de la homotecia, semejanza y simetrías. Se estudia la «aritmética mercantil» como aplicación de la proporcionalidad de magnitudes.

JUSTIFICACIÓN. Unificar en torno al concepto y caracterización de la proporcionalidad todos los problemas clásicos de aritmética comercial y los conceptos geométricos de semejanza, homotecia, simetrías.

Se justifica también su introducción por las múltiples aplicaciones que tiene para solucionar problemas de la vida real, aplicaciones a la economía, geografía, demografía y por sus relaciones interdisciplinares con otras disciplinas del *curriculum* escolar.

7. GEOMETRIA DEL ESPACIO

El tratamiento que se le daba a la geometría del espacio en la E.G.B. era demasiado escaso, no hay que olvidar que vivimos en un espacio de tres dimensiones y que la geometría euclídea es el modelo abstracto de este espacio, soporte de las aplicaciones técnicas.

Aun siguiendo en la misma línea de hacer geometría descriptiva, se culminará la descripción y reconocimiento de cuerpos geométricos, las relaciones de perpendicularidad y paralelismo de rectas y planos en el espacio y la comprensión de áreas y volúmenes, no tanto como un estudio particular de propiedades sino bajo el punto de vista del desarrollo de la intuición espacial y de las aplicaciones técnicas que de este estudio derivan.

8. ESTADISTICA

Se elimina la probabilidad y el estudio de distribuciones estadísticas.

Se afianza el estudio, clasificación y agrupación de datos estadísticos para confeccionar tablas y la interpretación de gráficas, dada la utilidad que tiene la estadística descriptiva para el estudio de fenómenos y su cuantificación.

Se estudian las medidas más conocidas de tendencia central y de dispersión, aplicándolas al estudio de fenómenos estadísticos de una variable.

Los principios metodológicos que deben regir el desarrollo de estos programas de Matemáticas son los de: actividad del alumno, respeto al ritmo personal y adaptación.

En este sentido todos los conceptos deben ir precedidos de experiencias que permitan familiarizar al alumno con las fases del proceso de abstracción, respetando los ritmos de aprendizaje y las distintas capacidades intelectuales. Se insistirá más en la adquisición y uso correcto de un vocabulario y en la descripción y construcción de figuras que en las definiciones, en la comprensión y utilización adecuada de las propiedades que en las demostraciones, en la consecución de automatismos que en las construcciones formalizadas.

DOCUMENTO DE APOYO

Junto a los Niveles Básicos de Referencia expresados en objetivos a conseguir por los alumnos al finalizar la E.G.B., se publica también para uso de los profesores un documento de apoyo que contiene unas orientaciones metodológicas mínimas para el Ciclo Superior.

El comentario metodológico a cada uno de los bloques ha sido realizado por distintos profesores, lo que da una redacción no uniforme, que no es óbice a la comprensión del documento sino enriquecedora puesto que en todos los casos los comentarios mantienen una estructura semejante.

— Hay un comentario a cada objetivo en términos de análisis, delimitación y explicación del significado, con una propuesta de actividades para lograrlo.

— Unas pautas sobre el proceso metodológico a seguir para la comprensión del objetivo por los alumnos, donde se incluye una sencilla orientación científico-didáctica-metodológica, con mención explícita de las dificultades que se pueden encontrar y una sugerencia de actividades para los alumnos bien dotados y para los alumnos que necesiten recuperación.

La temporalización prevista para cada bloque a lo largo de los tres cursos del Ciclo Superior es la siguiente:

Bloques temáticos	Número de semanas
1	23
2	3
3	20
4	19
5	4
6	12
7	10
8	5

A título orientativo y siempre respetando la libertad del profesor, una lógica distribución por cursos podría ser la siguiente:

Bloques		Sexto	Séptimo	Octavo	TOTAL
1	TEMAS	N.º racionales positivos. Q^+	N.º enteros. Z	N.º racionales y decimales. Q	
	N.º semanas	11	5	7	23
2	TEMAS	Divisibilidad en N	—	—	
	N.º semanas	3			3
3	TEMAS	Segmentos y ángulos y su medida. Figuras planas. Perímetros y áreas.	—	Angulos en la circunferencia. Aplicaciones métricas en el triángulo.	
	N.º semanas	15	—	5	20
4	TEMAS	—	Funciones y su representación gráfica. Funciones de primer grado.	Ecuación de 2.º grado. Parábolas. Sistemas lineales de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.	
	N.º semanas	—	11	8	19
5	TEMAS	—	—	Polinomios.	
	N.º semanas	—	—	4	4
6	TEMAS	—	Aplicaciones lineales. Magnitudes proporcionales. Aplicaciones. Aritmética mercantil.	Proporcionalidad geométrica y su relación con la medida.	
	N.º semanas	—	8	4	12
7	TEMAS	—	Perpendicularidad y paralelismo en el espacio. Areas de cuerpos geométricos.	Volúmenes de cuerpos geométricos.	
	N.º semanas	—	6	4	10
8	TEMAS	Construcción e interpretación de gráficas. Medidas tendencia central.	Medidas de dispersión.	—	
	N.º semanas	3	2	—	5
TOTAL		32	32	32	96

CARACTERISTICAS DE LOS PROGRAMAS RENOVADOS DE MATEMATICAS

Es un programa de *mínimos,* lo que permite espacios y tiempos para actividades nuevas más abiertas y flexibles.

Es un programa *dinámico* en el sentido de que no intenta impartir conocimientos fijos y cerrados sino abrir los caminos de una enseñanza de la matemática menos lineal y más adaptada a las necesidades de los alumnos.

Es un programa que intenta *crear expectativas* nuevas en torno a la matemática, pretende ayudar a descubrir otras actividades y problemas.

Es un programa *concreto* para los niveles mínimos, lo cual permite establecer puntos de referencia para la promoción de alumnos.

Es un programa de *ayuda* al profesor que lo necesite y por ello inserta un documento de apoyo con orientaciones metodológicas sobre cada uno de los objetivos y con actividades abiertas de proacción y retroacción.

M.ª DOLORES DE PRADA VICENTE

1. CONJUNTOS NUMERICOS
DURACION: 23 SEMANAS

Tema 1: CONJUNTOS NUMERICOS

OBJETIVO:

1.1.1. QUE EL ALUMNO SEPA DISTINGUIR LOS NUMEROS NATURALES, ENTEROS, RACIONALES Y DECIMALES NO RACIONALES

ANALISIS:

Creemos que el alumno habrá alcanzado este objetivo cuando *identifique, reconozca* y *escriba* los elementos de estos tres conjuntos numéricos.

1. Entendemos por *identificar y reconocer* que, dado una serie de números de distintos conjuntos, el alumno sepa a qué conjunto pertenece y sitúe cada uno de estos números en el diagrama correspondiente.

2. Entendemos por *escribir* que el alumno sepa representar al «dictado matemático» el simbolismo numérico.

METODOLOGIA:

Recomendamos el estudio de los racionales positivos y decimales en el 1.er curso del ciclo superior. El conjunto Z (números enteros) en el 2.° curso y en el curso último el conocimiento del conjunto Q.

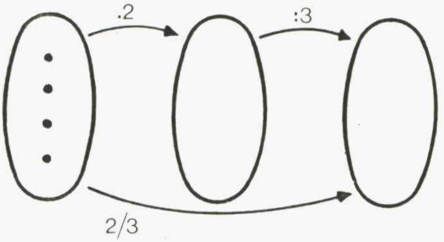
1. La introducción en el conjunto Q^+ se puede hacer desde dos aspectos:

— Mediante el operador compuesto.

— De forma intuitiva.

a) El operador compuesto se explicará combinando dos operadores simples, que el alumno ya conoce, de tal manera que llegue a la conclusión de que el primer operador multiplica y el segundo divide, se puede simbolizar en forma de fracción.

EJEMPLO:



b) La idea intuitiva se hará partiendo una cuartilla, una barra de tiza, etcétera... en partes iguales. Tomando como unidad la cuartilla o la tiza, el número de partes que se tomen será el numerador y el número de partes en que haya sido dividida la unidad será el denominador.

2. La introducción al número decimal se hará a partir de la división de dos números naturales a/b cuando el resto es distinto de cero o a partir de la medida.

3. Ante la no existencia de la diferencia $a-b$ para todo a, $b \in N$, $a < b$, surge la necesidad de ampliar el campo de los número naturales. Al valor numérico $b-a$, con el signo $(-)$ menos delante se le denomina número entero negativo. A los números naturales con el signo $(+)$ más delante se les denominará números enteros positivos. A tal conjunto se le denomina conjunto de números enteros y se simboliza por Z.

Esta introducción al conjunto Z se puede hacer también a partir del producto cartesiano $N \times N$.

4. Conocidos los conjuntos Q^+ y Z, no existirán dificultades para introducir el número racional negativo.

El número decimal también surgirá partiendo de los números racionales 1/10, 1/1.000, etc..., que se simbolizarán en la forma 0,1; 0,001; etcétera..., denominados décima, milésima, etc...

Puede presentarse la siguiente duda:

Cuando a un alumno se le pregunta a qué conjunto pertenece el número 3 suele responder que al conjunto N. Igualmente si se pregunta por el -3 dirá que es entero, cuando en realidad 3 es natural, entero y racional; así como -3 es entero y racional por los isomorfismos N ——— Z^+ y Z ——— Q_1.

Q_1 es el conjunto de los números racionales cuyo representante canónico es de la forma $\frac{a}{1}$.

Dada la importancia del objetivo que se propone es imprescindible su conocimiento en toda su extensión y profundidad.

OBJETIVO:

1.1.2. DISTINGUIR ENTRE FRACCION Y NUMERO RACIONAL

ANALISIS:

El alumno habrá alcanzado este objetivo cuando dado un conjunto, potencialmente infinito, de fracciones equivalentes, *sepa* que dicho conjunto es el número racional y que cada elemento que lo forma es una fracción.

Pretendemos, además, con este objetivo que el alumno *utilice* en todo momento el vocabulario correcto para cada uno de estos conceptos.

METODOLOGIA:

El desarrollo de este objetivo debe hacerse en el primer curso del ciclo superior, debiendo haberse alcanzado al finalizar dicho curso.

El alumno ya sabe qué es una fracción. Ahora pretendemos que busque fracciones equivalentes. Podemos utilizar el método intuitivo haciéndole ver que 2/3 de una cuartilla es lo mismo que 4/6. También podemos proponerle que multiplique el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número. Es fundamental que el Profesor insista en los distintos conceptos, consiguiendo que el alumno distinga con claridad:

— Fracción.

— Representante canónico.

— Número racional.

Se insistirá en ejercicios de amplificación y multiplicación de fracciones, así como de reducción a común denominador, haciendo notar que las fracciones obtenidas son equivalentes a las dadas. Este proceso enlaza con la simplificación de fracciones algebraicas.

Una de las dificultades más frecuentes es que el alumno confunde el representante canónico con el número racional. Hay que hacerles ver que el representante canónico es una fracción más de la clase de equivalencia que es el numero racional.

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

1. ¿Hay fracciones equivalentes? ¿Hay números racionales equivalentes? Razona la respuesta.

2. Sabiendo que la fracción a/b es equivalente a 8/12 y que $a + b = 5$. Halla sus términos.

3. Hallar fracciones equivalentes a una dada por varios métodos distintos.

B) Para alumnos con dificultades:

1. Escribe fracciones equivalentes a una dada.

2. Halla el representante canónico de un número racional dado.

3. De los siguientes pares de fracciones, indica cuáles son equivalentes:

$$\frac{3}{5} \text{ y } \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{3}{7} \text{ y } \frac{15}{35} \quad ; \quad \frac{1}{2} \text{ y } \frac{4}{3} \quad ; \quad \frac{3}{4} \text{ y } \frac{6}{8}$$

OBJETIVO:

1.1.3. ORDENAR NUMEROS NATURALES, ENTEROS Y RACIONALES Y REPRESENTARLOS EN UNA RECTA

ANALISIS:

Este objetivo estará logrado cuando el alumno:

a) Sepa *representar* los números naturales, enteros, racionales y decimales. De los decimales se pide, al menos, representarlos por su fracción correspondiente.

b) Sepa *leer* los puntos señalados en la recta. Se saben ordenar números cuando dados unos cuantos, se colocan en orden creciente o decreciente de forma razonada y cuando se entiende qué es ser un número mayor que otro, aunque no se conozca la definición de $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

Saber leer un número señalado en la recta implica conocer la medida del segmento desde el punto cero al señalado.

METODOLOGIA:

Empezamos por la representación de los naturales que es inmediata. También es sencilla la de los enteros que va muy unida a la forma de presentarlos. Una de las posibilidades es dar, por simetrización, la representación de los negativos. De esta forma se introduce también el valor absoluto de los enteros.

La representación de los racionales plantea el problema de las fracciones en las que el numerador es mayor que el denominador, que no se hará en el primer curso del ciclo, puesto que aún no sabe el alumno dividir un segmento en partes iguales. En todo caso para representar la fracción 5/9 dividimos la unidad en 9 partes y tomamos 5 veces 1/9, método que es válido para 13/9 y $-16/9$.

La ordenación es inmediata en los naturales y en los enteros y se puede dar gráficamente o como una relación de orden $a \geqslant b \Leftrightarrow a - b \geqslant 0$.

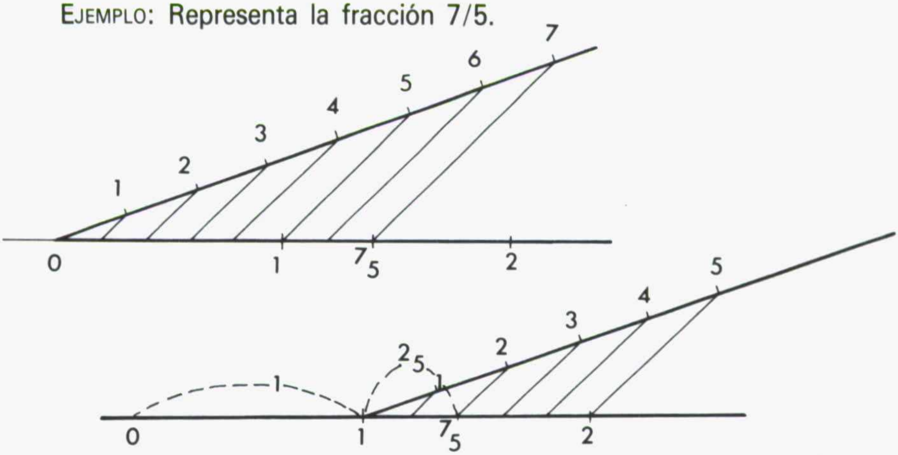
Si los racionales se representan sobre una recta es intuitiva la ordenación, pero al comparar 7/9 y 13/17 nos resulta muy difícil desde el punto de vista gráfico decir cuál es mayor de los dos y hay que hacerlo desde un criterio algebraico, o bien haciendo la división de a entre b, y también reduciendo a común denominador y comparando los numeradores.

Los decimales, ya dijimos anteriormente, se representan como la fracción correspondiente.

Creemos que el alumno a veces tiene dificultad para ordenar los números enteros negativos. Pensamos que un buen camino para subsanar esta dificultad es representarlos en la recta y ver que siempre el menor será el que se encuentre más a la izquierda.

Otra dificultad, de la representación de Q surge cuando el numerador es mayor que el denominador. Podemos orientarles para que transformen esta fracción en una suma de entero y racional, o dividir varias unidades en partes iguales y tomar las necesarias.

EJEMPLO: Representa la fracción 7/5.



ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

1) Escribir números racionales comprendidos entre otros dos.

EJEMPLO: Escribe 3 fracciones mayores que 1/2 y menores que 2/2. Escribe 3 fracciones mayores que 3/5 y menores que 3/4.

2) Dados los intervalos $A = \left(-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right)$ y $B = \left(-\frac{3}{5}, 1\right)$, calcular $A \cap B$ y $A \cup B$.

3) Siendo $A = (X, Y)$ y $B = (Z, T)$ con $X < Y$ y $Z < T$, expresar por comprensión: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\overline{A \cup B}$ y $\overline{A \cap B}$. (— quiere decir complementario).

B) Para alumnos con dificultades:

1) representar números enteros y racionales sobre una recta, exceptuando aquellas fracciones con numerador mayor que el denominador.

OBJETIVO:

1.1.4. ADQUIRIR EL CONCEPTO DE OPERACION ADICION EN Z Y Q

ANALISIS:

Con este objetivo pretendemos que el alumno sepa efectuar la suma de enteros y racionales. Con los racionales hay que llegar a saber sumar reduciendo a común denominador por el m.c.m. Aunque no lo dice explícitamente se entiende que ha de saber restar. También ha de entender el sentido de la suma y la resta aplicado a las situaciones reales.

METODOLOGIA:

1. *Concepto de suma de números racionales.*—Supongamos que hemos presentado la suma partiendo de la fracción 3/7 como una cuartilla dividida en 7 partes y le planteamos que sume $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$. Automáticamente obtenemos $\frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$, con lo que ya ha aprendido a sumar.

Si hubiésemos enseñado las fracciones por el método de operadores entonces habría que buscar qué fracción produce el mismo efecto que la suma de los resultados de $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$.

Pero ¿y si las fracciones tienen distinto denominador? En este caso no se puede sumar si no se reducen a común denominador. Habrá que enseñar previamente a reducir a común denominador, principalmente por el método del m.c.m.

Quizás haya algún alumno que se le ocurra preguntar si da lo mismo sumar $\frac{6}{10} + \frac{12}{8}$ que otras dos fracciones equivalentes y si no, se les sugiere la idea para ver que el resultado no es la misma fracción, pero sí otra equivalente. Esta es la propiedad uniforme de la suma de números racionales que permite sumar dos números racionales, eligiendo cualquier representante.

La sustracción se hace de forma análoga. En el primer curso del ciclo superior no se puede decir que restar es sumar el opuesto porque aún no se conoce esta propiedad. En este caso se definiría la equivalencia $a + b = c \Leftrightarrow c - a = b$. Cuando se den las propiedades se puede utilizar la propiedad del opuesto de un elemento para restar sumando el opuesto.

Nota: Por supuesto, que aunque las propiedades de la suma aparecen en el objetivo siguiente, la resta en Q^+, Z y en Q, se estudia después de la propiedades correspondientes de la suma.

2. *Concepto de suma de números enteros.*—La construcción de la suma depende de la presentación de los enteros. Hay dos métodos fundamentales: trabajar con los pares y llegar a las clases de equivalencia y los representantes canónicos y dotar a los naturales de dos sentidos, el positivo y el negativo, subir y bajar, tener y deber. El objetivo no obliga a hacerlo por ningún método concreto. Pero como se eluden las estructuras a lo largo de toda la programación el primer método se hace algo más largo y dificultoso de lo que era en el plan anterior. En todo caso se llega a la suma de enteros y se entiende su sentido geométrico y real. Para entrar en la resta hay que ver antes las propiedades.

Pensamos que hay muchos alumnos que tienen dificultades para sumar números enteros y más aún para restar. Creemos que con ejemplos reales se les puede dar una idea más intuitiva de la operación.

EJEMPLO: $(+3) + (-5)$. Piensa que tienes 3 pesetas y debes 5. Si pagas las tres seguirás debiendo dos y lo expresamos así (-2).

$(-3) - (-5)$. Has de ver que el signo de restar entre ambos paréntesis indica el opuesto del segundo número y por lo tanto ahora podemos pensar que debemos 3 pesetas y tenemos 5, así que podemos pagar y nos sobrarían dos que lo indicamos así $(+2)$.

En general siempre que restamos un entero o un racional se ha de hacer ver que la diferencia se consigue sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

OBJETIVO:

1.1.5. ADQUIRIR LOS AUTOMATISMOS PARA SUMAR Y RESTAR EN Z Y Q APLICANDO LAS PROPIEDADES DE LA SUMA

ANALISIS:

Lo que pretendemos con este objetivo, es que el alumno consiga realizar *todos los tipos* de sumas y diferencias, tanto de números enteros como racionales, aplicando todas y cada una de las propiedades de la suma.

METODOLOGIA:

La propiedad uniforme nos permite asegurar que el resultado de la suma no depende de los representantes elegidos.

La operación es interna, pues al operar dos números enteros o racionales el resultado será otro número entero o racional. La aplicación de la propiedad asociativa nos permitirá realizar la suma de más de dos sumandos presentados de la forma $a + b + c$, que será igual a $(a + b) + c$ o bien $a + (b + c)$. Análogamente se llega a que $a + b + c + d$ es una expresión perfectamente definida pues son iguales $(a + b) + (c + d)$ y $[(a + b) + c] + d$ y ......

La propiedad conmutativa nos permitirá poder alterar el orden de sumandos para obtener el mismo resultado.

Al realizar la suma de un número entero o racional con el cero, obtenemos como resultado el número dado, lo que tiene como consecuencia la aparición inmediata del elemento neutro.

El elemento opuesto tiene importancia vital a la hora de hacer diferencias, ya explicada en el tema anterior.

Una vez que el alumno conoce la operación suma, el automatismo lo logrará realizando operaciones y ejercicios que incluyan las propiedades de la adición.

Se realizarán ejercicios de sumas de números enteros que presupongan la aparición de paréntesis, corchetes, etc... precedidos de signo más o menos hasta lograr el manejo, lo más perfecto posible, de los signos. Con estos mismos ejercicios se logrará la automatización de la diferencia sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejercicios similares se realizarán con números racionales para terminar el proceso con la resolución de ejercicios que combinen sumas y diferencias, paréntesis, corchetes precedidos de signo menos, etc...

Será necesario insistir sobre la función del signo menos tanto cuando precede a un número como a un paréntesis y por qué se cambian de signo los elementos que hay dentro. En las sumas de números enteros y racionales se recalcará que los enteros pueden considerarse como números racionales escritos con una notación especial: $a = \frac{a}{1}$. Insistir también en que la suma es una operación binaria y que para sumar más de dos sumandos es necesario aplicar la propiedad asociativa.

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

1) Ejercicios del tipo:

$$(+6) - \left[\left(+\frac{3}{5}\right) - (-6) + \left(-\frac{2}{3}\right) - (+2)\right] + (+6) - \left(+\frac{2}{3}\right)$$

2) Comprobar que para todo $a \in Q$; $-(-a) = a$ y para todos a, $b \in Q$ se cumple:

- $(a + b) = -a - b$.
- $(a - b) = b - a$.
- $(-a - b) = a + b$.

B) Para alumnos con dificultades:

Se insistirá en operaciones de sumas y diferencias binarias con enteros y racionales, y en cuanto a estos últimos se harán por el m.c.m. para obtener fracciones equivalentes y poder sumar.

1) $(+4) - (+3)$; $(-6) + (-3)$; $(-7) + (+5)$; $(-5) + \left(-\frac{3}{5}\right)$.

2) Reducir a común demominador y sumar:

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{10} \;;\; \frac{1}{6} + \frac{5}{4} \;;\; \frac{3}{8} - \frac{1}{4}.$$

OBJETIVO:

1.1.6. RESOLVER PROBLEMAS RELACIONADOS CON LA OPERACION SUMA

ANALISIS:

El alumno habrá alcanzado este objetivo cuando sea capaz de *aplicar* el concepto de la suma a la resolución de problemas; cuando sepa *distinguir* los datos que se le dan; cuando *vea* las relaciones que hay entre los mismos, y las que hay entre los datos y el resultado a conseguir.

METODOLOGIA:

El problema debemos entenderlo como la aplicación práctica a la resolución de un caso concreto de los conocimientos hasta ahora adquiridos. En consecuencia, debemos poner al alumno en situaciones problemáticas no sólo en el ciclo superior de E.G.B. sino desde el principio de su escolaridad. Una vez que ha alcanzado la idea de fracción como un operador de la forma a/b «multiplicar por *a* y dividir por *b*» se le pueden poner problemas del tipo:

«Un alumno tenía 90 ptas. y gastó 2/3 en un libro. ¿Cuánto dinero le quedó?».

Cuando el alumno haya aprendido la transformación de un número racional en un conjunto de fracciones equivalentes y los automatismos de sumar y restar números racionales, se le pueden proponer problemas del tipo de grifos, trabajadores que realizan juntos una obra, o del tipo:

«De una pieza de tela de *m* metros se venden sucesivamente 3/7, 1/5, 1/4. ¿Cuántos metros se venden en cada partida y cuántos quedan?».

Aplicaremos los conceptos de número entero positivo y negativo así como el de suma de los mismos, a la orientación en una recta mediante los problemas de temperaturas, ascensores de subida y bajada, viajar un cierto número de Km. en direcciones Norte-Sur, Este-Oeste, el haber y el debe de una cuenta bancaria, etc...

En los problemas, creemos, que más que exigir al alumno el resultado exacto del mismo hemos de evaluar el proceso seguido para conseguir su resolución, aunque sin desdeñar aquellos que logren un resultado fiel.

Insistimos que este objetivo es de todo el período escolar del alumno, aunque en el ciclo superior de E.G.B. debemos comenzar con problemas en Q^+ con fracciones conocidas por él (1.^{er} curso), para seguir con enteros (2.° curso) y terminar con *problemas* en Q (3.^{er} curso), combinándolos hasta conseguir que el educando llegue a proponer él mismo los problemas para unos datos previamente fijados y aún más, la proposición autónoma de problemas.

Las dificultades más frecuentes que hemos podido apreciar son las derivadas de la no comprensión de los conceptos que ha de aplicar y de no apreciar las relaciones entre los datos y el resultado. Creemos que hay que insistir más en las lecturas colectivas de problemas y en analizar las partes del mismo para deducir estas relaciones entre datos y resultado, así como la ejercitación del alumno en el llamado «dictado matemático» para acostumbrarlo al lenguaje científico usado en los mismos y a su familiarización con él.

En problemas del tipo: «Los $\frac{2}{3}$ de personas que van en un avión son españoles y los 18 restantes extranjeros», es frecuente que el alumno se pregunte ¿cómo pueden hacerse partes de un hombre y que el resultado sea un número entero? Hay que insistir en que no se divide a una persona en 3 partes sino que la unidad que se divide en 3 es el número total de viajeros.

OBJETIVO:

1.1.7. ADQUIRIR EL CONCEPTO DE OPERACION PRODUCTO EN Z Y Q.

ANALISIS:

Al enunciar este objetivo pretendemos que el alumno sepa *efectuar* el producto de números racionales, el de números enteros y de racionales y enteros conjuntamente. Se entiende también, implícitamente, que ha de saber efectuar la división en Q, en Z y en Q y Z; por ser operación inversa del producto.

Igualmente pretendemos que el alumno *capte* el sentido de estas operaciones para la aplicación a situaciones problemáticas.

NOTA: Por supuesto que cuando hablamos de operaciones entre enteros y racionales, nos referimos a operaciones entre racionales, cuando alguno de ellos está escrito en su notación abreviada $a = \frac{a}{1}$

METODOLOGIA:

1. Números racionales. Los alumnos no tienen dificultades en aprender el mecanismo del producto de numeros racionales

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Para que adquieran el concepto de la operación podemos partir de la multiplicación de un número natural (n) por un número racional $\frac{a}{b}$ explicada como suma de sumandos iguales.

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \overset{(n)}{\cdots\cdots} = \frac{a + a + a + \overset{(n)}{\cdots\cdots}}{b} = \frac{a \cdot n}{b}$$

2. Números enteros. El producto de números enteros es igual que el de naturales, por lo que tampoco tiene dificultad que los alumnos aprendan el mecanismo, salvo en lo que se refiere a los signos que preceden al número.

De la misma forma que hemos explicado en los apartados 1) y 2) se puede enseñar el concepto de producto de un número racional por un número entero.

Eludimos intencionadamente hablar aquí del cociente entre números racionales porque para explicar el mecanismo de esta operación es necesario conocer la propiedad de elemento inverso del producto, de la que hablaremos en el próximo objetivo.

La distribución por cursos de este objetivo será la siguiente:

— En el 1.er curso del ciclo superior se adquirirá el concepto de producto en Q^+.

— En el 2.° curso el concepto de producto en Z y en Z y Q^+ conjuntamente.

— En el 3.er curso introduciremos el subconjunto Q^- para operar en Q.

Como única dificultad vemos la que pueda derivarse de la multiplicación y división en Z al emplear signos distintos (+) y (−).

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

1) Realiza las siguientes operaciones:

$$\frac{\frac{4}{5} \cdot 3}{\frac{2}{3} - 4} \cdot \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}$$

2) Realiza esta operación de dos formas:

— Como producto.

— Como suma de sumandos iguales.

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot (+3) =$$

Compara los resultados.

B) Para alumnos con dificultades:

1) Realiza las operaciones:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \; ; \quad \left(-\frac{4}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{4}\right) \; ; \quad \frac{7}{3} \cdot (-4) \; ; \quad \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{6}\right)$$

2) Realiza esta operación como suma de sumandos iguales:

$$\frac{2}{3} \cdot 4$$

Compara el resultado al hacerla como producto.

OBJETIVO:

1.1.8. ADQUIRIR LOS AUTOMATISMOS PARA MULTIPLICAR Y DIVIDIR EN Z Y Q APLICANDO LAS PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION

ANALISIS:

Este objetivo estará alcanzado cuando el alumno:

a) Conozca las propiedades del producto.

b) Compruebe estas propiedades con ejemplos numéricos.

c) Resuelva ejercicios de multiplicaciones y divisiones, combinando en uno solo los distintos conjuntos N, Z y Q.

En este objetivo, con los alumnos mejor dotados, podemos conseguir que sepan generalizar las propiedades empleando letras.

EJEMPLO: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

METODOLOGIA:

Una vez conseguido el concepto de la operación producto (objetivo anterior) empezaremos a explicar cada una de las propiedades. Pondremos un ejemplo con números y comprobaremos que se cumple la propiedad que tratamos de presentar.

EJEMPLO:

$$\underbrace{\underbrace{(7 \cdot 5)}_{35} \cdot 3}_{105} = \underbrace{7 \cdot \underbrace{(5 \cdot 3)}_{15}}_{105}$$

Después pondremos sucesivos ejemplos para que los alumnos comprueben si efectivamente se cumple la propiedad. De esta forma, con varios ejemplos, conseguiremos que el alumno conozca la propiedad. Así iremos haciendo con todas las propiedades y trataremos de que el alumno las generalice con letras, incluso debemos tratar que las exprese con lenguaje matemático (ya hemos apuntado anteriormente que esto último es para alumnos bien dotados).

Hacemos mención aparte de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma porque consideramos que es muy importante conocerla por las aplicaciones que tiene al abordar el estudio de otros temas.

EJEMPLO:

$$\underbrace{(-4) \cdot \underbrace{[(+6)+(-8)]}_{(-2)}}_{+8} = \underbrace{\underbrace{[(-4)\cdot(+6)]}_{(-24)} + \underbrace{[(-4)\cdot(-8)]}_{(+32)}}_{+8}$$

En este momento, una vez conseguido el conocimiento de las propiedades del producto, entre ellas la de elemento inverso, es cuando introduciremos el concepto de división como producto del dividendo por el inverso del divisor.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Nos referimos al conjunto Q.

Para adquirir los automatismos deberemos proponer al alumno gran variedad y cantidad de ejercicios en los conjuntos Z y Q.

La distribución por cursos de este objetivo deberá ser la siguiente:

— En el 1.er curso de este ciclo explicaremos las propiedades trabajando en Q^+. Conseguiremos los automatismos del producto en este conjunto.

— En el 2.º curso introduciremos las propiedades anteriores más la de elemento opuesto en el conjunto Z. Conseguiremos los automatismos del producto y división en este conjunto y trataremos de generalizar las propiedades con letras.

— En el 3.er curso volveremos a insistir en todas las propiedades y abordaremos la generalización con letras en el conjunto Q.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

1. Escribe con letras la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en el conjunto Q.

2. Resuelve:

$$[(+4)\cdot(-5)\cdot(-7)\cdot(-3)] : \left[[(-4)\cdot(-3)]\cdot[(-5):(-1)]\right] =$$

3. Resuelve:

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot(-5)\cdot\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{7}\right):\left(-\frac{3}{5}+\frac{2}{4}\right)\right] =$$

B) Para alumnos con dificultades:

1. Comprueba que:

$$\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)$$

2. Efectuar:

$$[(-5) \cdot (+4) \cdot (-6)] : [(-3) \cdot (+8)] =$$

3. Escribe con letras la propiedad asociativa del producto.

4. Elige 3 números enteros. Comprueba con ellos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

OBJETIVO:

1.1.9. RESOLVER PROBLEMAS RELACIONADOS CON ESTAS OPERACIONES (PRODUCTO Y DIVISION)

ANALISIS:

El alumno habrá conseguido este objetivo cuando sea capaz de *aplicar* el concepto del producto y de la división a la resolución de problemas; cuando sepa *distinguir* entre los datos que se le dan; cuando *vea las relaciones* que hay entre los mismos y las que hay entre estos datos y el resultado a conseguir.

METODOLOGIA:

Ya dijimos en el objetivo 1.1.6 que el problema debe entenderse como la aplicación práctica a la resolución de un caso concreto donde es necesario emplear los conocimientos previamente adquiridos.

Como este objetivo se refiere a la resolución de problemas relacionados con el producto y la división en Z y Q, empezaremos proponiendo al alumno sencillos problemas en los que su resolución implique hacer la operación producto.

EJEMPLO:

En una finca de 9.000 m^2 se han sembrado las 2/3 partes de trigo, las 3/5 partes del resto de maíz y el resto se plantó de árboles frutales. ¿Cuántos m^2 ocupan los árboles frutales?

Después combinaremos en un mismo problema el producto y la división y números racionales con números enteros.

Una vez más insistiremos que en la resolución de los problemas nos fijaremos más en el proceso seguido por el alumno para su resolución que en el resultado final, aunque con esto no queremos decir que haya que despreciar la solución como algo accesorio.

La distribución por cursos viene dada con arreglo a la distribución que se ha hecho a la hora de proponer los distintos conjuntos. Por lo tanto, en el 1.^{er} curso trabajaremos con problemas relacionados con operaciones en Q^+; en el 2.° curso plantearemos problemas con operaciones en Z, y en el 3.^{er} curso introduciremos problemas en Q y repaso de los anteriores hasta conseguir que el alumno consiga los mecanismos necesarios para que estas resoluciones pueda llevarlas a cabo con éxito.

En cuanto a dificultades, señalamos las mismas que en el objetivo 1.1.6, las que se derivan de la no comprensión de los conceptos que tiene que aplicar y de la no apreciación de las relaciones entre los datos propuestos y el resultado.

En este objetivo se debe llegar a conseguir que los alumnos, dándoles los datos, lleguen a plantear el problema e incluso los planteen con datos que ellos piensen.

OBJETIVO:

1.1.10. ESCRIBIR FRACCIONES EN FORMA DECIMAL Y VICEVERSA

ANALISIS:

Lo que pretendemos en este objetivo es que el alumno *conozca* y *comprenda* la relación existente entre fracciones y números decimales, así como el proceso de transformación de fracciones en números decimales y viceversa, e *identifique* los distintos tipos de decimales resultantes de esta transformación.

Entendemos por conocer, el que el alumno, a la vista de una fracción, sepa que ésta tiene un número decimal asociado que resultará de dividir el numerador por el denominador.

La comprensión de esta relación la habrá adquirido el alumno cuando dado un conjunto de números fraccionarios junto a otro de números decimales, sepa encontrar la relación que existe entre cada fracción y su decimal correspondiente, así como realizar la operación inversa.

El proceso de transformación de una fracción decimal lo adquirirá a partir de la identificación de dicha fracción como el cociente de dos números, y al realizar dicha división el resultado obtenido será un número decimal, que podrá ser exacto o periódico, y dentro de los periódicos, puro o mixto. No debemos cerrar con esto la puerta al alumno, es conveniente darle a conocer la existencia de otros números decimales que no son enteros ni periódicos, sino que tienen infinitas cifras decimales en las cuales no se llega nunca a repetir una o varias de ellas (período), por lo que reciben el nombre de números irracionales (π, $\sqrt{2}$, etc.) y que serán objeto de estudio en 1.° de B.U.P.

METODOLOGIA:

El desarrollo de este objetivo se iniciará a partir de la transformación de fracciones decimales en números decimales. Al principio es conveniente que el alumno realice las divisiones, para que una vez adquirido cierto automatismo pueda hacerlos directamente (dividir por la unidad seguida de ceros).

No debe olvidar el Profesor en el inicio de este proceso, que el alumno en todos y cada uno de los ejercicios compruebe mediante la operación inversa si la transformación está bien hecha. Una vez conseguido esto, el Profesor encontrará gran facilidad en hacer comprender a sus alumnos que la diferencia entre un número decimal y una fracción decimal está en la manera de representarlos.

A partir de aquí, y mediante la división del numerador entre el denominador, comprobará el alumno cómo cualquier fracción se puede transformar en número decimal y le iremos haciendo conocer y distinguir los distintos tipos de números decimales que nos van apareciendo.

Insistimos en que toda fracción que sea transformada en número decimal, necesariamente tendrá que llevar adosada la operación inversa, lo que implícitamente nos impondrá la necesidad de iniciar el proceso de la manera más sencilla.

Primero: obtención de números decimales exactos:

1/5, 3/6, 5/2, 25/50, etc...

Segundo: obtención de números decimales periódicos puros:

2/6, 2/9, 5/9, etc..., y el proceso inverso:

$0,\overset{\frown}{3}$; $0,\overset{\frown}{7}$; $0,\overset{\frown}{6}$; etc...

Tercero: obtención de números decimales periódicos puros con parte entera y período de más de una cifra:

12/33, 19/3, 83/33, etc...

$0,\overset{\frown}{273}$; $6,\overset{\frown}{42}$; $17,\overset{\frown}{243}$; etc...

Cuarto: obtención de números decimales periódicos mixtos:

1/6, 1/14, 3/35; $0,3\overset{\frown}{71}$; $2,15\overset{\frown}{3}$; etc...

La necesidad de esta transformación viene dada porque al operar con números decimales periódicos el resultado que se obtiene nunca será exacto por ser una serie infinita de cifras, por lo que será necesario transformarlos en fracción si queremos obtener un resultado exacto. A partir de este momento se deja el camino abierto para la introducción al concepto de límite.

En el primer curso del ciclo superior se llevará a cabo la transformación de fracciones decimales, dejando para el tercer curso el estudio de las fracciones generatrices y sus operaciones.

La mayor dificultad la encontrará el alumno en la transformación de decimales periódicos mixtos a fracción generatriz, dificultad que se superará fácilmente repitiendo ejercicios de este tipo hasta que adquiera el automatismo de la operación, tanto directa como inversa.

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

Además de realizar ejercicios de conversión de decimales periódicos mixtos en fracciones generatrices, con o sin parte entera, sería conveniente que memorizaran y aplicaran directamente distintas reglas de transformación.

Reconocimiento directo de las fracciones que dan lugar a números decimales exactos, periódicos puros y mixtos, según la descomposición factorial de sus denominadores.

B) Para alumnos con dificultades:

Reconocimiento de decimales de todo tipo, así como de la parte entera y decimal, y dentro de ésta, del período.

Insistir en ejercicios de transformación de fracciones en decimales y viceversa, hasta adquirir el automatismo.

OBJETIVO:

1.1.11. ADQUIRIR LOS AUTOMATISMOS EN LAS OPERACIONES DE ADICION, SUSTRACCION, MULTIPLICACION Y DIVISION DE NUMEROS DECIMALES

ANALISIS:

Habremos logrado este objetivo cuando el alumno sepa *realizar* correctamente todo tipo de operaciones encuadradas dentro de la suma, resta, multiplicación y división de números decimales, así como casos particulares de multiplicación y división por la unidad seguida de ceros, y *comprenda* la necesidad de transformar los decimales periódicos de todo tipo en fracciones generatrices si desea obtener un resultado exacto al operar con ellos.

El límite de este objetivo sería la aparición de las operaciones con números decimales no racionales.

METODOLOGIA:

El proceso de aprendizaje se iniciará con la suma de números decimales basándonos en la suma de números naturales, pues si para sumar éstos es necesario que las cifras del mismo orden (unidades, decenas...) estén unas debajo de otras, al sumar decimales las décimas, centésimas, etc..., deberán estar también unas debajo de otras; esto tendrá como consecuencia el que las comas estén en columna, pero deberá desterrarse como definición que para sumar decimales las comas deben estar en columna y presentarlo de la forma antes expuesta.

Se dará por superada esta parte del objetivo cuando el alumno recibiendo de forma indicada o dictada varias cantidades en la que se mezclen enteros y decimales sepa colocarlos correctamente para realizar la suma.

Se insistirá en que el alumno no olvide poner la coma en el resultado y sería aconsejable hacer leer al alumno el decimal obtenido en el resultado de las operaciones.

Lo dicho sobre la colocación de cifras para la suma es válido para la resta, aunque aquí es necesario hacer alguna consideración sobre dificultades que encuentran algunos alumnos, pues confunden el concepto de que un número sea mayor que otro con el número de cifras que tienen y algunos creen que 1,742 es mayor que 5,3.

Cuando tengamos que restar de un entero un decimal, o el sustraendo tenga más cifras decimales que el minuendo, se pondrán ceros en los lugares de dicho minuendo, justificando esta operación presentando el entero de la forma a,000 y demostrando mediante la prueba de la diferencia que de otra manera la operación no es correcta.

EJEMPLO: $5 - 3{,}27 \neq 2{,}27$ pues $2{,}27 + 3{,}27 \neq 5$

$$5 - 3{,}27 = 5{,}00 - 3{,}27 = 1{,}73$$

El producto de números decimales no ofrece dificultades en sus tres casos posibles: entero × decimal, decimal × entero y decimal × decimal. La justificación de estas operaciones se podrá realizar transformando cada decimal en su fracción generatriz correspondiente.

En el caso de multiplicación por la unidad seguida de ceros, creemos que sería conveniente que los alumnos, en un principio, hagan la multiplicación y después hacerlo ya directamente hasta que adquieran un cierto automatismo en el movimiento de la coma, tanto en decimales con parte entera como sin ella, así como en los casos en que el número de ceros del multiplicador sea mayor que el número de cifras decimales del multiplicando.

Será la división la que mayor dificultad nos planteará si desde el principio no se realiza correctamente su resolución. La justificación de los distintos casos, lo mismo que en la multiplicación, se llevará a cabo transformando dichos decimales en sus correspondientes fracciones generatrices. Para la división por la unidad seguida de ceros seguiremos el mismo caso expuesto para la multiplicación.

Completamos el desarrollo metodológico de este objetivo con la necesidad de transformar los decimales periódicos en fracción generatriz al operar con ellos, pues es la única manera de obtener un resultado exacto:

EJEMPLO:

$$0{,}\widehat{3} + 2{,}\widehat{27} \neq 2{,}\widehat{57}$$

$$\frac{3}{9} + \frac{225}{99} = \frac{33 + 225}{99} = 2{,}\overline{60}$$

Esto tiene una importancia fundamental a la hora de resolver problemas y ecuaciones en los que haya que operar con decimales periódicos.

EJEMPLO:

$$3x + 5 = 9 \quad ; \quad 3x = 9 - 5 \quad ; \quad 3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3} = 1{,}\widehat{3} \quad \text{al comprobar } 3\,(1{,}\widehat{3}) + 5 \neq 9$$

Las dificultades que se pueden presentar es cuando el alumno, al operar por la unidad seguida de ceros, tiene que mover la coma sobre todo cuando el número tiene menos cifras decimales que ceros siguen a la unidad y tiene que añadir ceros. También entraña alguna dificultad la diferencia entre un entero y un decimal.

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

Operaciones con decimales exactos y periódicos, su transformación en fracciones generatrices.

B) Para alumnos con dificultades:

Operaciones sencillas de todo tipo con decimales, exactos, periódicos y producto y división por la unidad seguida de ceros.

OBJETIVO:

1.1.12. ADQUIRIR LOS AUTOMATISMOS DE LAS OPERACIONES CON POTENCIAS EN LOS CONJUNTOS N, Z Y Q (EXCEPTO POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL Y BASE NEGATIVA)

ANALISIS:

Este objetivo estará alcanzado cuando:

1.° El alumno *interprete* la potencia como un producto de factores iguales cuando el exponente es natural o entero.

2.° *Distinga* los términos de las potencias y sepa qué significa cada uno.

3.° Sepa *leer, escribir* y *calcular* potencias de forma correcta.

4.° Sepa *operar* con potencias de la misma y distinta base hasta conseguir su automatización.

Cuando decimos que el alumno interprete la potencia como un producto de factores iguales, queremos expresar que él sepa que se puede escribir cualquier producto con estas características en forma de potencia, y también que cualquier potencia se puede descomponer en producto según convenga para el cálculo

Cuando decimos que distinga los términos, queremos que sepa que la base es el factor que ha de repetir y el exponente el que indica las veces que ha de hacerlo.

Cuando decimos que lea, escriba y calcule de forma correcta, queremos expresar que traduzca a lenguaje matemático los signos escritos y viceversa, así como que obtenga el resultado exacto de la operación.

Cuando expresamos que sepa operar con potencias de igual o distinta base, queremos fijar que aplique el concepto de potencia y productos, cociente, fracciones, etc., y distinga qué debe hacer cuando los productos o cocientes de potencias tienen igual base y cuando no la tienen.

Para conseguir este objetivo se deben desarrollar los siguientes contenidos:

— Concepto de potencia.

— Reconocimiento de potencias: lectura y escritura.

— Cálculo de potencias en N, Z y Q con exponente natural, entero y racional. Signos.
— Memorizar algunas potencias: a^0, a^1, 1^n, 10^n, 10^{-n}, 0^n.
— Potencia de un producto y cociente.
— Potencia de otra potencia.
— Producto de potencias de igual base.
— Cociente de potencias de igual base.

METODOLOGIA:

Al alumno se le presenta una multiplicación de factores iguales, explicándole que en vez de escribir $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ se puede expresar de una forma nueva para él (3^4), donde al 3 que es el factor repetido se le denomina *base* y el 4 representa el número de factores iguales repetidos y se llama *exponente.* Habrá que ejercitar al alumno para que distinga entre varios productos, cuáles son potencias y cuáles no, así como su escritura.

Cuando operamos en Z y en Q hay que dejar muy claro que la base es el número o la fracción con su signo, así como cuando se traten potencias de exponente entero o racional, éstos también lleven su signo correspondiente, independiente del de la base.

En la lectura hay que evitar expresiones como «tres partido por cuatro al cuadrado», pues pueden inducir a error, como interpretar $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ como $\frac{3}{4^2}$.

Como la regla de los signos en la multiplicación ya la conoce, mediante ejemplos puede deducir el mismo alumno por qué si el exponente es par siempre la potencia tiene resultado positivo y si es impar repite el signo de la base.

Cuando el alumno sabe hallar la potencia de un número natural con exponente natural, podemos realizar potencias de productos basándonos en el concepto de la misma para generalizar diciendo que habrá que elevar cada factor a dicha potencia:

EJEMPLO:

$(a\ b)^4 = (a\ b)\ (a\ b)\ (a\ b)\ (a\ b) = a.a.a.a.b.b.b.b. = a^4 \cdot b^4$.

Para llegar a la regla del producto o cociente de potencias de igual base y potencia de otra potencia, nos basaremos también en el concepto de potencia y su transformación en productos. En los conjuntos Z y Q con exponente natural se puede seguir el mismo proceso y puntualizar que en el número racional hay que elevar el numerador y denominador.

La transformación de una potencia de exponente negativo en la potencia del mismo exponente y de base inversa a la dada, se le puede presentar al alumno en forma de cociente de potencias de igual base y exponente mayor en el divisor $a^n : a^{n+1}$, para que aplique la norma general (restar exponentes) y conservar la base $a^{n-(n+1)} = a^{-1}$, que equivale a la simplificación de la fracción

$$\frac{a^n}{a^{n+1}} \quad \text{m.c.d. } (a^n, a^{n+1}) = a^n$$

$$\frac{a^n : a^n}{a^{n+1} : a^n} = \frac{1}{a} \quad ; \quad \text{luego } a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Si las raíces cuadradas se explican en el primer curso del ciclo superior y las potencias de exponente racional en el último, mediante sencillos ejemplos podemos hacer comprender al alumno que estas potencias equivalen a raíces de índice igual al denominador del exponente y radicando igual a la base elevada al numerador del exponente.

En el primer curso del ciclo superior de E.G.B. se deben desarrollar las potencias de base en N y Q^+ con exponentes naturales. En el segundo curso se desarrollarán las potencias de base en Z con exponente natural y en el tercer curso se completarán con potencias de base en Q y exponente en Z y Q.

En las potencias de base en Z vemos una dificultad en distinguir $-a^{2n}$ y $(-a)^{2n}$. Pensamos que es falta de comprensión en la lectura de estas potencias: hay que insistir que en $-a^{2n}$ la base es a y el signo indica opuesto de la potencia y en $(-a)^{2n}$ la base es $(-a)$ y por lo tanto al ser exponente par siempre será potencia positiva.

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

1. $8^{2/3}$; $16^{-3/4}$; 2^0 ; $8^{-2/3}$
2. $(a^{1/3} + b^{1/3})^2 \cdot [a^{2/3} + (ab)^{1/3} + b^{2/3}]$
3. $0{,}008^{1/3}$; $0{,}008^{-1}$; $0{,}008^{-1/3}$
4. $\left[\left(\frac{1}{32}\right)^{2/5}\right]^{-1/2}$; $(0{,}008^{-2/3})^{-1/2}$

B) Para alumnos con dificultades:

1. Expresa en forma de potencia:

   $a \cdot a \cdot a \cdot a =$; $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

2. Halla el valor de:

   $1^n =$; $10^n =$; $a^{-1} =$

   $a^0 =$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$

   $a^{x/y} =$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{x/y} =$; $\left(a^n\right)^m =$

OBJETIVO:

1.1.13. ADQUIRIR LOS MECANISMOS NECESARIOS PARA REALIZAR LAS OPERACIONES CON RADICALES: EXCEPTO RADICACION CON NUMEROS NEGATIVOS

ANALISIS:

Consideramos que el alumno ha alcanzado este objetivo cuando:

1.° *Interprete* la radicación.

2.° *Lea, escriba* y *sepa* el significado de cada término.

3.° Obtenga raíces cuadradas.

4.° Obtenga raíces de distinto índice.

5. Sepa operar con radicales hasta conseguir su automatismo.

Cuando decimos que el alumno interprete la radicación, queremos expresar que identifique esta operación con la inversa de la potencia, y por lo tanto tendrá por objeto buscar un número que elevado a un exponente igual al índice nos dé el radicando.

Cuando expresamos que sepa el significado de cada término, pretendemos que establezca las relaciones que hay entre base → raíz, exponente → índice y potencia → radicando y que siempre lo que se pretende es buscar esa base desconocida.

Cuando decimos que lea y escriba, queremos que se exprese correctamente en un lenguaje matemático; cuando decimos que obtenga raíces cuadradas, entendemos que ha de saber hallar el resultado, para naturales y decimales, aunque no sepa justificar el procedimiento.

Cuando decimos que obtenga raíces de distinto índice, queremos conseguir que ante cualquier raíz de un número o expresión algebraica sepa buscar soluciones siempre que sea factible por la descomposición del radicando en producto de factores.

Una vez conseguidos los anteriores conceptos, queremos que adquiera los automatismos de las distintas operaciones con radicales.

Para conseguir este objetivo se deben desarrollar los siguientes contenidos:

- Concepto de raíz. Términos.
- Cálculo de la raíz cuadrada de un número decimal.
- Raíz de índice superior a dos en N y Q^+.
- Raíz de un producto.
- Raíz de un cociente.
- Raíz de una raíz. Simplificación.
- Potencias de raíces.
- Suma y resta de radicales.
- Producto y cociente de radicales.
- Racionalización de radicales.

METODOLOGIA:

Cuando el alumno domina el objetivo anterior (potencias) podemos iniciarlo en la radicación a través de él, invitándole a que busque un número que elevado al cuadrado dé el propuesto.

Hay que hacer notar que no todos los números naturales tienen raíz cuadrada exacta: así $\sqrt{7}$, pues no encontraremos en N, ni en Z, ni en Q, un número que elevado al cuadrado dé 7 exactamente. Se les puede decir que a estos números se les llama irracionales, y no pertenecen a Q aunque se pueden expresar aproximándolos siempre a un número natural. $\sqrt{7}$ es aproximadamente igual a 2. A la diferencia $7-2^2=3$ se le denomina resto por defecto.

El cálculo de raíces se iniciará con cuadrados perfectos menores de 100, para continuar con números menores de 100 que no sean cuadrados en N y pasar a los números cuyas raíces cuadradas tengan dos o más cifras.

Cuando operamos en Z, ante la duda de $\sqrt{-9}$ que se le planteará al alumno, no podemos contestar en estos niveles nada más que en los conjuntos numéricos estudiados por él no encontramos ningún elemento cuyo cuadrado sea negativo: $(+3)^2=+9$; $(-3)^2=+9$, y que su estudio se realizará en B.U.P. De esta forma también se les puede explicar que $\sqrt{9}=\pm 3$ pues: $\sqrt{+a}=\pm b \Longleftrightarrow (b)^2=a$ y $(-b)^2=a$.

La raíz en Q^+ se puede iniciar del mismo modo que en N.

Siguiendo el mismo proceso para la raíz de un producto, se le puede hacer ver con ejemplos que es igual al producto de las raíces de cada factor

$$\sqrt{9\cdot 36}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{36}=3\cdot 6=18$$
$$\sqrt{9\cdot 36}=\sqrt{324}=18$$

Una vez que el alumno domine la radicación de índice dos se puede ampliar a otros índices.

EJEMPLO:

$$\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2^{5/5}=2^1=2$$
$$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=2^{6/3}=2^2=4$$

Creemos que sólo a los alumnos bien dotados se les debe exigir raíces de índice superior a 2 que no sean exactas.

Podemos explicar que raíz de raíz es el operador inverso de potencia de potencia, y si para elevar una potencia a otra se multiplican los exponentes, para hallar la raíz de una raíz se multiplican los índices, que son sus equivalentes en la radicación.

También se podría explicar hallando las sucesivas raíces del radicando.

EJEMPLO:

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^6}}=\sqrt{2^{6/3}}=\sqrt{2^2}=2^{2/2}=2^1=2$$
$$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2^{6/6}=2^1=2$$

Para sumar radicales, sólo utilizaremos raíces sencillas: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

La multiplicación y el cociente los podemos utilizar en todo el conjunto de radicales, pues siempre que tengamos dos se puede hallar su producto y su cociente.

Creemos que podemos continuar con la potencia de una raíz aplicando el concepto de potencia y el de producto de radicales.

EJEMPLO:

$$\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^4\right] = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^{1+1+1+1}} = \sqrt[3]{a^4}$$

La racionalización de denominadores se puede realizar viendo el paralelismo que existe entre fracciones numéricas y fracciones con radicales, si bien el concepto último (fracciones con radicales) escapa a los conocimientos del alumno de E.G.B.

EJEMPLO:

$$\frac{a}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{a \cdot \sqrt[5]{a^{5-2}}}{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^{5-2}}} = \frac{a \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^3}} = \frac{a \cdot \sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{a \cdot \sqrt[5]{a^3}}{a}$$

Creemos que en el primer curso del ciclo superior de E.G.B. sólo se debe desarrollar el concepto de raíz cuadrada con números de varias cifras.

El objetivo se cumplirá en el tercer año del ciclo.

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

1. Efectúa las operaciones:

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{4}{\sqrt{5}-1} - \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

2. $\sqrt{4 + \sqrt{a^4} + 8\,a^3 + 16\,a^2}$

3. $\sqrt[4]{(a-b)^2} + \sqrt{(a-b)^3} + 5 \cdot a$

4. Racionalizar: $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5}}$

OBJETIVO:

1.1.14. ADQUIRIR LOS MECANISMOS DE SIMPLIFICACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS EN LOS CASOS DE: COMPLETAR CUADRADOS Y SACAR FACTOR COMUN

ANALISIS:

Como en E.G.B. no hay otro objetivo que hable de fracciones algebraicas, aunque en el presente sólo se exprese la necesidad de adquisición de los mecanismos propios de la simplificación de estas fracciones, creemos que el objetivo estará alcanzado cuando el alumno:

1.° *Distinga, escriba* y *lea* correctamente fracciones algebraicas.

2.° *Comprenda* que las propiedades de las fracciones numéricas son válidas para las algebraicas.

3.° *Sepa aplicar* estas propiedades para la simplificación.

4.° *Sepa obtener* el valor numérico de fracciones algebraicas para un valor de su indeterminada.

METODOLOGIA:

Para comenzar este objetivo el alumno ha de dominar el concepto de polinomio y su descomposición factorial y así introducimos el concepto de fracción algebraica de igual manera que lo hacíamos en Q. Al no poder expresar todas las divisiones de polinomios en el conjunto de los polinomios surge la fracción algebraica, que en este nivel podríamos decir al alumno que es una división indicada. Así evitaríamos un error bastante generalizado en los alumnos al incluir las fracciones algebraicas en el conjunto de los polinomios.

Podemos seguir ejercitando al alumno en la lectura y escritura de fracciones algebraicas hasta que domine bien este concepto.

Seguiremos explicando con sencillos ejemplos y siempre comparándolos con el conjunto Q, las propiedades de las fracciones para obtener otras equivalentes por ampliación o simplificación de sus términos, así como para averiguar cuándo dos fracciones algebraicas son equivalentes:

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} \quad ; \quad \frac{3x^2}{11x} = \frac{3x^2 \cdot 2x}{11x \cdot 2x}$$

Conseguidos los conceptos de fracciones algebraicas y fracciones equivalentes, podemos empezar a simplificar éstas por las más sencillas: Monomio/monomio.

Para terminar, al hallar el valor numérico de una fracción algebraica para un valor de la indeterminada, podemos acostumbrarlos a que simplifiquen primero para evitar el cero en el denominador.

Este objetivo es propio del tercer curso del ciclo superior de E.G.B. y una aplicación directa de la descomposición de polinomios en factores, por lo que, repetimos, no podrá lograrse hasta que el alumno no domine las operaciones con los polinomios. Consideramos que no se deben proponer ejercicios con polinomios de grado superior al tercero con una sola indeterminada, aunque en la simplificación de un monomio dividido por otro monomio puedan aparecer más de una, pues el objetivo pretende familiarizar al alumno con las fracciones polinómicas y que vea la semejanza con las numéricas en cuanto a sus propiedades para que en B.U.P. pueda completar su estudio y esté ya iniciado en el mismo.

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

1. Simplifica: $\dfrac{3\,(a^2 + b^2) - 6 \cdot ab}{a\,(a^2 + b^2 - 2\,ab)}$

2. Simplifica: $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}{x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x}$

B) Para alumnos con dificultades:

Dado que el objetivo es una iniciación al estudio de las fracciones algebraicas y que su completo desarrollo lo realizarán en cursos superiores, estos alumnos no deben llegar a simplificar más que aquellas fracciones cuyos términos sean monomios o polinomios de segundo grado muy conocidos: $(a \pm b)^2$; $a^2 - b^2$; etc.

2. DIVISIBILIDAD EN N
DURACION: 3 SEMANAS

Tema 1: DIVISIBILIDAD

OBJETIVO:

2.1.1. ADQUIRIR EL CONCEPTO DE MULTIPLO Y DIVISOR Y SABER RECONOCER MULTIPLOS Y DIVISORES

ANALISIS:

Este objetivo comprende:

— Adquirir el concepto de múltiplo y divisor, definirlos y saber su notación.

— Saber hacer ejercicios del tipo: Dados los números 21, 35, 85 y 546, decir cuáles son múltiplos de 7 y cuáles no. Escribir todos los divisores de 12.

Anque explícitamente no se indica en el objetivo, es necesario conocer las siguientes propiedades:

— Todo número es múltiplo de sí mismo y de 1.

— Si un número *a* es múltiplo de otro, *b,* y éste a su vez lo es de un tercero, *c,* entonces el primero lo es del último. (Propiedad transitiva de la relación «ser múltiplo de».)

— Si dos números son múltiplos de un tercero, su suma y su diferencia también lo son.

— Análogamente las propiedades correspondientes a los divisores.

METODOLOGIA:

Hay varios caminos para presentar el tema de la divisibilidad. Uno de los más bellos se basa en presentar el m.c.m. y el m.c.d. como dos operaciones entre números. Nosotros seguiremos el camino habitual.
Podemos empezar con un ejemplo análogo al siguiente: Se dispone de un cubo de 6 litros de capacidad y una cuba de 18 litros. ¿Se podrá

llenar la cuba con un número exacto de cubos de agua? ¿Y si la cuba tuviese 26 litros? Con unos cuantos ejemplos se va manejando el concepto de múltiplo, luego se le define y se da su notación (múltiplo de 6 = 6).

A continuación se ven las propiedades indicadas en el objetivo.

Por el mismo método podemos llegar al concepto de divisor de un número y a saber escribir y reconocer divisores.

Llegados a este punto se pueden seguir dos caminos: estudiar a fondo la dualidad entre los conceptos de múltiplo y divisor y aplicarla para obtener las propiedades de los divisores o bien obtenerlas directamente. En todo caso, hay que llegar a ellas, y de prescindir de alguna, prenscindiremos de las propiedades de los múltiplos.

ACTIVIDADES:

Los alumnos más aventajados pueden llegar a las siguientes propiedades:

— El cero es múltiplo de todos los números.
— Un número tiene infinitos múltiplos.

Los alumnos con dificultades insistirán en calcular y reconocer múltiplos y divisores.

OBJETIVO:

2.1.2. RECONOCER Y DEFINIR NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

ANALISIS:

Este objetivo se logra cuando:

— Haciendo divisiones, se sabe decir de cualquier número de hasta tres cifras si es primo o compuesto.
— Se conocen y memorizan las definiciones de números primos y compuestos.
— Se saben de memoria los primeros números primos.

METODOLOGIA:

Ahora nos entretenemos buscando todos los divisores de un número. Este ejercicio nos lleva a dos consecuencias fecundísimas: Al concepto de número primo con su definición y a la utilidad de los criterios de divisibilidad que veremos después. Entre las dos se intercala la definición de número compuesto.

DIFICULTADES:

Los niños suelen tener dificultad en darse cuenta que cualquier número es divisible por uno y por sí mismo. Se ayuda a solventar el problema pidiéndole que antes de buscar los divisores compruebe si el 1 divide a un número dado y si le divide el propio número.

ACTIVIDADES:

Los alumnos más aventajados pueden: Construir la Criba de Eratóstenes y aprender el método reducido para saber si un número es primo o no, consistente en irle dividiendo sucesivamente por todos los números primos hasta llegar a una división exacta (número compuesto) o a una en la que el cociente sea menor que el divisor (número primo).

Para alumnos con dificultades, las encaminadas a reconocer números compuestos hasta el 100 y números primos hasta el 51.

OBJETIVO:

2.1.3. CONOCER Y MEMORIZAR LOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD POR 2, 3, 5, 9 Y 11

ANALISIS:

Este objetivo comprende:

— *Conocer* y *memorizar* los criterios de divisibilidad del 2, 3, 5, 9 y 11.
— Saberlos *aplicar*.

Aparece el criterio del 11 por ser muy sencillo.

El criterio del 4, 25 y 6 aparecen como actividades de proacción. El del 7 está en el límite de lo conveniente por ser difícil y poco útil, y el del 8 y el 125 por ser casi inútiles.

METODOLOGIA:

Evidentemente se ha de llegar a ellos a través de algún tipo de razonamiento. Probablemente lo más oportuno es darles unas «semidemostraciones» análogas a la siguiente:

Criterio de divisibilidad por 3. Sabemos que:

$10 = 1 + 9 = 1 + \dot{3}$, es decir 1 más un múltiplo de 3.
$100 = 1 + 99 = 1 + \dot{3}$, » » » » » » » »
$1.000 = 1 + 999 = 1 + \dot{3}$, » » » » » » » »

Y así sucesivamente.

Elijamos ahora un número cualquiera, por ejemplo, el 6.975 y vamos a ver si es divisible por 3, pero sin hacer la división. Si descomponemos el número en sumandos obtenemos:

$$\begin{aligned} 6.975 &= 6 \times 1.000 + 9 \times 100 + 7 \times 10 + 5 = \\ &= 6\ (1 + \dot{3}) + 9\ (1 + \dot{3}) + 7\ (1 + \dot{3}) + 5 = \\ &= 6 + \dot{3} + 9 + \dot{3} + 7 + \dot{3} + 5 = \\ &= (6 + 9 + 7 + 5) + \dot{3}. \end{aligned}$$

Y si $6 + 9 + 7 + 5$ es múltiplo de 3, su suma con otro múltiplo de 3 nos daría que 6.975 también lo es, luego para saber si 6.975 es divisible por 3 basta con ver si lo es la suma de sus cifras.

Si en lugar de 6.975 hubiésemos escrito el 5.417, ¿podríamos haber aplicado el mismo proceso?, ¿qué habríamos obtenido? Evidentemente, para que 5.417 sea divisible por 3 basta con que lo sea $5 + 4 + 1 + 7$.

¿Podríamos seguir el mismo camino para cualquier otro número? Sí. Luego, para saber si un número es divisible por 3 basta con ver si lo es la suma de sus cifras.

La descomposición polinómica de un número en potencias de 10 es un ejercicio muy interesante para comprender el sentido de la numeración decimal y como introducción a los polinomios.

DIFICULTADES:

Al aplicar el criterio de divisibilidad por 11 a números como el 31.648, los alumnos suelen confundir la idea de que el 6 es una cifra par con la que está en un puesto impar. La dificultad se puede solventar haciendo previamente algún ejercicio para distinguir estos conceptos, escribiendo con tizas de distinto color las cifras de lugar par y las de lugar impar.

ACTIVIDADES:

Los alumnos con dificultades deberán prescindir de las demostraciones y de la divisibilidad por 11 y practicar los demás criterios de divisibilidad.

Los alumnos aventajados deberán conocer el criterio de divisibilidad del 4 y del 25 y el de algunos números compuestos, como el 6 y el 10, por descomposición de estos números en producto de dos números de criterios de divisibilidad conocidos. Ejemplo: $6 = 2 \times 3$ y $10 = 2 \times 5$.

OBJETIVO:

2.1.4. ADQUIRIR EL CONCEPTO DE M.C.D. Y M.C.M. EN N

ANALISIS:

Este objetivo comprende:

- Saber descomponer un número en producto de sus factores primos.
- Saber identificar el m.c.d. de dos números escribiendo todos sus divisores.
- Saber definir el m.c.d. de dos números.
- Saber cuándo dos números son primos entre sí.
- Saber identificar el m.c.m. de dos números, escribiendo algunos de sus múltiplos (casos sencillos).
- Saber definir el m.c.m. de dos números.

METODOLOGIA:

Elegido un número compuesto cualquiera se le va descomponiendo en producto de factores cada vez más pequeños, pero, ¿hasta dónde se podrá continuar la descomposición?

Por este camino llegamos a que todo número se puede descomponer en producto de sus factores primos. A continuación se enseña la regla práctica de descomposición.

Pasemos ahora al m.c.d. (Máximo Común Divisor). A través de un ejemplo atrayente llevamos a los alumnos a calcular los divisores comunes a dos números y ver que el menor es siempre uno y que el mayor depende de los números. Se trabaja con el concepto antes de llegar a la formalización del nombre «Máximo Común Divisor» y su abreviatura m.c.d.

Como este concepto es sencillo se puede plantear como actividad interesante que los alumnos escriban su definición.

Análogamente para el mínimo común múltiplo (m.c.m.).

ACTIVIDADES:

Para alumnos aventajados: Dados los números *a* y *b,* donde *a* es divisor de *b,* reconocer que el m.c.d. de *a* y *b* es el número *a,* y el m.c.m. de *a* y *b* es *b.*

Para alumnos con dificultades: Ejercicios de descomposición de un número compuesto en factores primos mediante divisiones sucesivas.

OBJETIVO:

2.1.5. CALCULAR EL M.C.D. Y EL M.C.M. DE DOS O TRES NUMEROS

ANALISIS:

Se entiende que los números han de ser a lo sumo de tres cifras.

METODOLOGIA:

Cuando los niños han calculado varios m.c.d. y m.c.m. se cansan y empiezan a buscar procedimientos abreviados. Este es el momento de enseñarles el método habitual.

Como el m.c.d. divide a los dos números, todos sus factores primos estarán contenidos en el uno y en el otro. Luego al descomponer el m.c.d. en factores primos, aparecen todos los que están simultáneamente en los dos números, pero elevados al menor exponente con que aparezcan. A continuación se practica el método.

Con este razonamiento es inmediato el procedimiento para calcular el m.c.d. de tres números. En realidad, se trata de un nuevo concepto, aunque aparece de forma tan intuitiva que no es necesario hacerles la indicación, y aun podría ser contraproducente. Si se hubiese presentado el m.c.d. como una operación entre dos números, aquí aparecería la propiedad asociativa.

De forma análoga se explica el m.c.m.

Como ejercicio se puede comprobar que el producto de dos números es igual al producto de su m.c.d. por su m.c.m.

ACTIVIDADES:

Los alumnos aventajados pueden calcular el m.c.d. de números de más de tres cifras y de más de tres números.

Los alumnos con dificultades se limitarán a la obtención del m.c.d. y m.c.m. de dos números con tres cifras.

OBJETIVO:

2.1.6. PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS DE M.C.D. Y M.C.M.

ANALISIS:

Los alumnos deben saber resolver problemas numéricos y algunos de aplicación a modelos extra-aritméticos, como los que aparecen en las actividades de los niveles básicos.

METODOLOGIA:

Evidentemente, se empezará por problemas sencillos del tipo: calcular el m.c.d. y el m.c.m. de 46 y 120, para llegar luego a ejercicios con un enunciado que obligue a pensar para llegar a su planteamiento, como el siguiente: Se quiere embaldosar una habitación de 5,25 m. de ancho por 9,80 m. de largo con el menor número posible de baldosas cuadradas. ¿De qué dimensiones las tendremos que comprar y cuántas necesitaremos?

El interés de estos problemas estriba precisamente en que ejercitan la capacidad de razonamiento y no nos debe importar utilizar algún tiempo en practicarlos.

También se podrá proponer algún ejercicio creativo como el de pesar 220 Kg. de arena, utilizando todas las pesas que se desee, pero sólo de 100, 70, 30 y 20 Kg.

Este ejercicio se presta mucho para los ejercicios interdisciplinarios.

ACTIVIDADES:

A los más aventajados se les puede proponer algún ejercicio como el siguiente, que por estar tomado de la vida real no es difícil: El dueño de un supermercado quiere vender rápidamente 104 tabletas de chocolate, 156 pastillas de jabón y 250 paquetes de galletas, pero de manera que no le sobre nada de ningún producto. Para conseguirlo piensa hacer lotes de oferta. ¿De qué estará compuesto cada lote? ¿Cuántos lotes saldrán? ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

A los alumnos con dificultades conviene insistirles en calcular el m.c.d. y el m.c.m. de varios números.

3. GEOMETRIA PLANA
DURACION: 20 SEMANAS

Tema 1. FIGURAS GEOMETRICAS FUNDAMENTALES: CARACTERIZACION

OBJETIVO:

3.1.1. RECONOCER Y MANEJAR CONCEPTOS GEOMETRICOS FUNDAMENTALES: PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO, MEDIATRIZ, BISECTRIZ, ALTURA, MEDIANA

3.1.2. DEFINIR ALGUNOS CONCEPTOS GEOMETRICOS

ANALISIS:

Estos dos objetivos, íntimamente vinculados, se superan cuando el alumno:

1.° *Identifique, reconozca, distinga, represente* y *note* los elementos geométricos de plano, punto, rectas paralelas y perpendiculares, semiplano, semirrecta, segmento, ángulo y su bisectriz, polígono y sus elementos, circunferencia y sus elementos.

2.° *Caracterice, construya* y *note:* segmento y su sentido, segmentos concatenados, segmentos consecutivos y líneas poligonales. Rectas, semirrectas y segmentos paralelos, segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas y rectas secantes. Rectas perpendiculares, rectas oblicuas y mediatriz de un segmento. Angulos y orientación del mismo, bisectriz y ángulos formados por una secante a otras dos. Triángulo y sus elementos; alturas, mediatrices medianas y bisectrices de un triángulo. Polígono y elementos. Circunferencia y elementos, y posiciones relativas de una circunferencia y una recta.

3.° *Represente* correctamente los conceptos geométricos que se expresen y *traduzca* en los conceptos correspondientes una representación dada.

Al decir que el alumno reconozca y maneje los conceptos geométricos fundamentales, no nos referimos a la simple memorización o definición de ellos, sino a su caracterización. Pretendemos rebasar el nuevo intuicionismo hasta alcanzar el sentido de síntesis que poseen.

De esta forma, evitaremos errores conceptuales y apreciaremos las propiedades que los mismos poseen, aspecto que de no alcanzarse dificultará la interpretación de situaciones problemáticas.

Los dos objetivos deben superarse en el primer año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

De la observación de objetos reales, el alumno va logrando, mediante la abstracción, las nociones intuitivas de los conceptos geométricos fundamentales que, a nuestro nivel, bastará sean enunciados simplemente, estableciendo su existencia y atribuyéndoles, a continuación, determinadas propiedades para definir lógicamente la figura geométrica.

En una hoja de papel y mediante plegado, «veremos» el semiplano, puntos en el plano, semirrectas, ángulos, rectas paralelas, perpendiculares, oblicuas, etc., de forma que al trasladar estos elementos a «otro plano» —la pizarra— se acentúen y caractericen como tales.

En el estudio del paralelismo y perpendicularidad, será necesario acostumbrar al correcto manejo de escuadra, cartabón y compás, de forma que algunos axiomas o teoremas puedan intuirse, ya que otro nivel de demostración es imposible a estos niveles de conocimiento. Auxiliar fundamental de esta tarea será el plegado.

Igualmente, se tratará de fortalecer la correcta notación de lo representado y viceversa.

Son errores frecuentes en los alumnos, la inexactitud del término empleado al realizar una descripción geométrica y la deficiente interpretación de los conceptos a la hora de resolver una situación problemática. Estos tipos de deficiencias podrían superarse:

a) Mostrando el profesor la diferencia entre lo que se desea expresar y lo expresado, y

b) Fortaleciendo el llamado «dictado matemático», hasta alcanzar un automatismo que exige, por otro lado, la diferenciación por análisis de los conceptos expresados.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más avanzados:

Por el extremo B, se traza al $\overline{AB}$ una recta r, tal que $r \perp \overline{AB}$. Si O es un punto de r, origen de la semirrecta que contiene a A, señala un punto C que pertenezca a la bisectriz del $\widehat{OAB}$ y a la recta r.

B) Para los alumnos con dificultades:

Mediante plegado, trazar la mediatriz al segmento $\overline{AB}$, que previamente ha de dibujar.

OBJETIVO:

3.1.3. OBTENER RELACIONES ENTRE SEGMENTOS (RELACIONES DE IGUALDAD Y DESIGUALDAD)

ANALISIS:

Superada la fase conceptual a la que hace referencia el objetivo 3.1.2, entendemos es preciso iniciar una segunda fase en la que, sin entrar en la medida, se expresen las relaciones existentes entre los distintos elementos de un mismo conjunto; en nuestro caso, el de los segmentos como cantidades de magnitud.

Consideremos que el objetivo abarca:

1.° *Distinguir* entre segmento como cantidad de magnitud —longitud— y la medida de esa magnitud, que se expresa con un número.

2.° *Identificar* y *distinguir* dos o más segmentos.

3.° *Reconocer* e *identificar,* por superposición de uno sobre el otro:

- Dos segmentos iguales.
- Dos segmentos desiguales.

4.° Previa comparación de longitudes de segmentos, *reconocer* y *notar* las relaciones de igualdad o desigualdad.

5.° *Representar,* previa la notación correspondiente, segmentos iguales y desiguales.

6.° *Interpretar, representar* y *notar* la adición y sustracción —cuando sea posible— de segmentos.

7.° Previa la superposición consiguiente, *comprobar* que:

- Un segmento es igual a sí mismo.
- Si un segmento es igual a otro, éste es igual a aquél.
- Si un segmento es igual a un segundo y éste a un tercero, éste es igual al primero.

8.° *Clasificar* segmentos por su longitud.

9.° Con auxilio de papel milimetrado, *representar* el segmento doble, triple, mitad, tercera parte, etc., de un segmento dado, y *establecer* y *notar* la relación de desigualdad entre ellos.

10. *Establecer, interpretar* y *notar* la ordenación de segmentos por su longitud.

No hemos encontrado serias dificultades en el logro del presente objetivo salvo en la interpretación y lectura correcta de la simbología de «> ó <»; más tan pronto se familiariza el alumno con el significado de los mismos, se interpreta y automatiza lo que la intuición señala.

La mayor dificultad suele estribar en la distinción entre el segmento como cantidad de magnitud y su medida.

El objetivo se superará en el primer año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

Existen multitud de situaciones en la vida real para probar la igualdad de segmentos —reglas de distinta forma y color, metros de distinto uso, etcétera—. Mediante la superposición de los mismos, el alumno comprueba su igualdad o desigualdad.

La representación de distintos segmentos y la superposición de los mismos, utilizando papel transparente, reforzará las experiencias anteriores. La notación de estas experiencias será el paso subsiguiente para finalizar en representaciones, previa la notación correspondiente.

Estimamos que el presente objetivo debe aprovecharse para introducir al alumno en la comprobación y no dar como cierto lo que la intuición a veces falsea.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

Dibuja tres segmento a, b y c que cumplan la siguiente condición:

$$a < b < c$$

B) Para los alumnos con dificultades:

Dados los segmentos $\overset{a}{\longmapsto}$ y $\overset{b}{\longmapsto}$ establece y nota la relación de igualdad o desigualdad existente entre ellos.

OBJETIVO:

3.1.4. OBTENER RELACIONES ENTRE ANGULOS CONVEXOS (OPUESTOS POR EL VERTICE, ADYACENTES, ETC.)

ANALISIS:

El objetivo implica *reconocer, representar, identificar, definir* y *notar:*

1.° En los ángulos convexos: ángulos iguales, consecutivos, adyacentes, llano, recto, agudo y obtuso.

2.° Adición y sustracción de ángulos.

3.° Angulos complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice.

Igualmente, el objetivo comporta que el alumno reconozca, represente, identifique, defina y establezca las relaciones de igualdad, desigualdad, complementariedad y suplementariedad en los ángulos formados por dos paralelas al ser cortadas por una secante y en los ángulos de lados paralelos y lados perpendiculares.

Para que el alumno obtenga las relaciones deseadas es preciso advierta que en todo ángulo se distingue extensión —tamaño—, forma —elementos que lo limitan— y su posición.

De las relaciones a obtener, son fundamentales:

a) Las de igualdad y desigualdad, que permitirán en posteriores estadios entrar con seguridad en la demostración de algunos teoremas, y

b) Las de complementariedad y suplementariedad, básicas para el cálculo de medidas y determinados teoremas.

En muchos alumnos son frecuentes los errores en torno a las relaciones entre ángulos, dejándose llevar por la intuición, y definen cualquiera de ellas sin más. Será preciso, para evitarlos, señalar la razón de la relación establecida.

El objetivo es alcanzable en el primer año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

Previamente, el alumno dispondrá de los conocimientos y recursos para definir y reconocer región angular, ángulos cóncavos y convexos y sus elementos.

El proceso metodológico irá acompañado de cuantas construcciones sean necesarias, se podrían seguir los siguientes pasos:

- Identificar los elementos de ángulos convexos. En dos semirrectas con origen común, distinguir el ángulo cóncavo y convexo.
- Ejercicios de superposición de ángulos con ayuda de papel transparente y establecer las relaciones de igualdad o de desigualdad existentes.
- Trazar ángulos consecutivos, analizarlos y distinguirlos. Trazar ángulos mayores y menores que un recto.
- Realizar, por construcción, adición de ángulos, analizando las relaciones de complementariedad y suplementariedad.
- Realizar, por construcción, la diferencia de (1 recto $-\hat{a}$) y (2 rectos $-\hat{a}$). El ángulo diferencia es complemento o suplemento del dado.
- Construir ángulos opuestos por el vértice. Mediante plegado analizar relaciones.
- Identificar los distintos ángulos que se forman al cortar a dos rectas paralelas, una oblicua a ellas. Mediante la superposición o con papel transparente, establecer las relaciones existentes.
- Construir, con la ayuda de escuadra y cartabón, ángulos de lados paralelos o perpendiculares. Comprobar que son iguales o suplementarios con auxilio de papel transparente, etc.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

Dibuja dos ángulos a y b, de lados paralelos y suplementarios entre sí.

B) Para los alumnos con dificultades:

Dibuja un ángulo consecutivo y complementario a otro que previamente has de dibujar.

OBJETIVO:

3.1.5. CARACTERIZAR ARCOS Y ANGULOS CENTRALES Y ARCOS Y CUERDAS CORRESPONDIENTES

ANALISIS:

El objetivo estará superado cuando el alumno demuestre, mediante simetría, que en una misma circunferencia:

1.° A ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales y que a mayor ángulo central corresponde mayor arco.

2.° A arcos iguales corresponden cuerdas iguales y que a mayor arco corresponde mayor cuerda.

3.° Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y al arco correspondiente en partes iguales.

4.° Si dos cuerdas son iguales, equidistan del centro de la circunferencia y que si dos cuerdas son desiguales, la mayor dista menos del centro que la menor.

5.° Los arcos comprendidos entre paralelas son iguales.

Por otro lado, entendemos que el logro del objetivo exige que el alumno exprese correctamente la amplitud de un ángulo central respecto a su arco correspondiente.

En el ciclo superior de la E.G.B., es preciso introducir al alumno en las demostraciones que, por un lado, le permitan resolver sencillos problemas, y por otro, establecer las generalizaciones que de aquéllas se deducen. Por ello, basándonos en los conocimientos ya adquiridos sobre la igualdad de figuras, es el momento de que por simetría se establezcan las relaciones de igualdad o desigualdad que en una misma circunferencia existen entre ángulos centrales y arcos correspondientes y entre arcos y cuerdas.

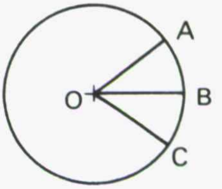
Las actividades necesarias para formular las relaciones propuestas son fácilmente asimilables por los alumnos que con el auxilio del compás, regla, escuadra, cartabón, etc., las realizan con placer, y superan en el primer año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

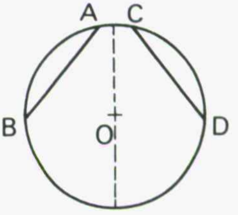
El alumno deberá manejar previamente los conceptos de arco y cuerda de una circunferencia, amplitud de arco, rectas notables en la circunferencia, etc.

Procederíamos:

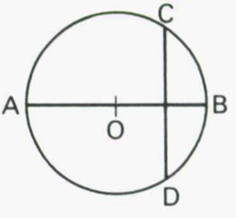
a) Demostrar, por simetría, que a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales.



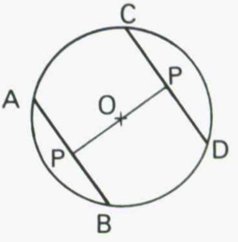
b) Demostrar, por simetría, que a cuerdas iguales corresponden arcos iguales.



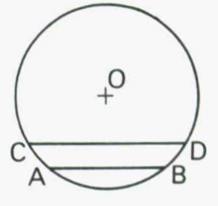
c) Demostrar, por simetría, que todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta en dos partes iguales y al arco correspondiente a la cuerda en otros dos arcos iguales.



d) Por simetría, demostrar que en una misma circunferencia cuerdas iguales equidistan del centro.



e) Por simetría, demostrar que en una misma circunferencia los arcos comprendidos entre cuerdas paralelas son iguales.



f) Construir ángulos centrales e identificar el arco correspondiente y viceversa.

Auxiliar básico en este objetivo será el plegado y papel transparente.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

En una circunferencia de centro O, existen los puntos A, B, C y D;

tales que $\overset{\frown}{AD}$ y $\overset{\frown}{BC}$ tienen el mismo punto medio. Construye la figura correspondiente y comprueba que:

a) $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

b) $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$.

B) Para los alumnos con dificultades:

Todos los alumnos deberán realizar ejercicios de aplicación inmediata de los teoremas enunciados, basándose en figuras dadas, así:

Dibuja en una circunferencia de centro O, dos diámetros perpendiculares y escribe la amplitud de los ángulos centrales formados respecto a los arcos que abarcan.

OBJETIVO:

3.1.6. DISTINGUIR POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS Y LAS DISTANCIAS ENTRE SUS CENTROS

ANALISIS:

El objetivo implica:

1.° *Distinguir* y *representar* las distintas posiciones que entre dos circunferencias desiguales pueden darse, y

2.° *Establecer* y *notar* la relación existente entre la distancia de los centros y los radios correspondientes.

El logro de este objetivo, que habrá de superarse en el primer año del ciclo superior, no presenta serias dificultades una vez adquiridos los conceptos formales que preceden al mismo; no obstante quisiéramos recordar que determinados razonamientos deductivos que pueden emplearse, se utilizarán sólo cuando la intuición no alcance o deje dudas. Consideramos que cuanto ha sido propuesto «se ve», por casi todos los alumnos.

METODOLOGIA:

Los alumnos necesitarán, previamente, manejar las relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo, es decir, todo lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Procederíamos:

a) Representando y analizando las posiciones entre dos circunferencias; enumerando situaciones de la vida real donde se den circunferencias desiguales exteriores, concéntricas, tangentes exteriores, etc.

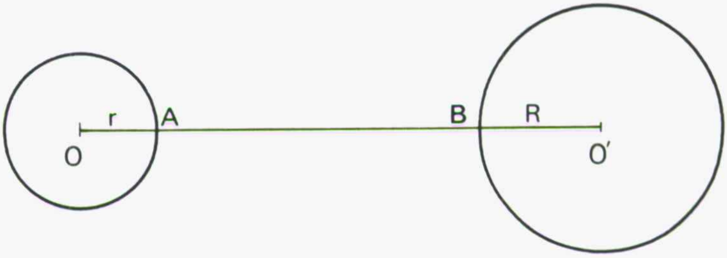
b) Realizando todas las experiencias que sean precisas para establecer y matematizar la relación existente entre la distancia de los centros de dos circunferencias desiguales y sus radios, en los casos:

b.1) Exteriores.

Por construcción: $\overline{OO'} > (\overline{OA} + \overline{O'B})$.

Se comprueba: $\overline{OO'} > (\overline{OA} + \overline{O'B})$.

Se matematiza: $d > (R + r)$.



b.2) Tangentes exteriores, siguiendo el mismo procedimiento y comprobando por superposición de las longitudes de los segmentos correspondientes que $d = R + r$.

Igual para los casos de:

b.3) Secantes, donde podríamos utilizar las relaciones de desigualdad existentes entre los lados de un triángulo.

b.4) Tangentes interiores.

b.5) Interiores, y

b.6) Concéntricas.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

¿Qué posiciones relativas toman dos circunferencias de igual radio cuando la distancia entre sus centros es?:

a) $d > r$; *b)* $d < 2r$; *c)* $2r$
(r = radio de una circunferencia).

B) Para los alumnos con dificultades:

Construye dos circunferencias tangentes exteriores de radios a y b, respectivamente, y representa el segmento que exprese la distancia entre sus centros.

Para $\underline{\quad a \quad}$ $\underline{\quad b \quad}$

OBJETIVO:

3.1.7. RECONOCER Y REPRESENTAR ANGULOS EN UNA CIRCUNFERENCIA (INSCRITOS, SEMIINSCRITOS, INTERIORES, ETC.)

ANALISIS:

El logro del objeto implica:

1.° *Idendificar, reconocer, distinguir* y *representar* ángulos inscritos, semiinscritos, exteriores e interiores a una circunferencia y arcos correspondientes.

2.° Previa la delimitación de los arcos correspondientes a los lados, inscribir en una circunferencia un cuadrado, un exágono regular y un triángulo equilátero, identificando los ángulos de éstos como inscritos en aquélla.

3.° *Interpretar* y *resolver* sencillos problemas gráficos de los aspectos enunciados anteriormente del objetivo.

No hemos encontrado serias dificultades en el logro de este objeto, que habrá de superarse en el primer año del ciclo superior, si los alumnos alcanzan el punto primero del análisis, para el que deberán multiplicarse, todo lo posible, ejercicios de representación y determinación de estos tipos de ángulos y arcos que abarcan.

METODOLOGIA:

Previamente habrá de comprobarse que el alumno posee los conceptos básicos de circunferencia y posiciones relativas de ésta y rectas, cuerdas y arcos correspondientes, etc.

Procederíamos:

a) Previa la representación consiguiente, identificar y distinguir en una circunferencia:

— Angulos inscritos y su arco correspondiente.
— Angulo semiinscrito y arco correspondiente.
— Angulo exterior y arcos correspondientes.
— Angulo interior y arcos correspondientes.

b) Representar en una circunferencia estos tipos de ángulos, determinando los arcos que abarcan.

c) Para la inscripción del cuadrado, exágono y triángulo equilátero, acostumbraremos al alumno al uso de escuadra, cartabón y compás en el trazado de los diámetros perpendiculares y delimitación de arcos iguales.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más avanzados:

En una circunferencia de radio $\overset{r}{\longmapsto}$, inscribir un triángulo equilátero y probar que los ángulos interiores de éste son inscritos a la circunferencia y abarcan arcos iguales.

B) Para los alumnos con dificultades:

Ejercicios de identificación y construcción de ángulos inscritos, semiinscritos, etc.

OBJETIVO:

3.1.8. DESCRIBIR Y CARACTERIZAR LOS POLIGONOS MAS UTILIZADOS

ANALISIS:

El objetivo estará alcanzado cuando el alumno:

1.° *Describa* los elementos de cualquier tipo de polígono —lados, ángulos, vértices y diagonales— y, en los regulares, radio y apotema.

2.° *Designe* y *represente* polígonos según número de lados (triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, eptágono, octógono, eneágono, decágono, endeágono y dodecágono).

3.° *Reconozca* y *caracterice:*

- Los triángulos por sus lados y ángulos.
- Los cuadriláteros, atendiendo a sus lados, ángulos y diagonales.

A raíz de las relaciones establecidas en objetivos anteriores, es el momento de reconocerlas en toda su dimensión, y de manera especial las referidas a triángulos y cuadriláteros, distinguiendo en éstos lados iguales comprendidos entre paralelas, ángulos adyacentes, suplementarios, etc.

Todos los aspectos señalados en el análisis del objetivo han de alcanzarse en el primer año del ciclo superior, y todos ellos servirán para fortalecer la capacidad de abstracción respecto a las propiedades de cada tipo de polígono, el manejo de conceptos geométricos, relaciones entre ángulos, criterios de igualdad de triángulos, etc.

No hemos encontrado dificultades en el logro del objetivo, salvo en la distinción y diferenciación de las propiedades específicas de los paralelogramos, fácilmente salvables con la construcción de los mismos y análisis consiguiente.

METODOLOGIA:

El presente objetivo está íntimamente ligado con las actividades de reconocimiento de forma y construcción, así como las de analogía y simetría, a partir de las cuales es interesante que el alumno descubra y defina las propiedades que tratamos de sistematizar.

El dibujo de las figuras deberá ser una traducción exacta de las propiedades inherentes a las mismas, así como la forma, se ajustará a los modelos estéticos correspondientes utilizando para ello todos los instrumentos precisos —escuadra, compás, etc.— y comprobar con ellos las propiedades de perpendicularidad, oblicuas, etc.; sin olvidar que aquéllas son independientes de la figura.

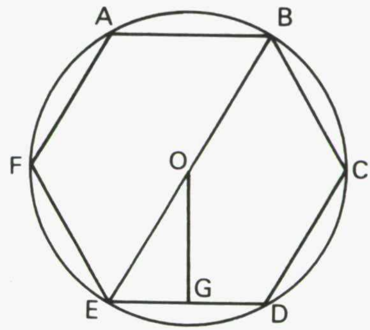
ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

Describe las analogías y diferencias entre un cuadrado y un rombo de igual lado.

B) Para los que tienen dificultades:

En el polígono se cumple:
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$.



Contesta:

1. ¿Cómo se llama por el número de lados? 2. ¿Qué es respecto al polígono el segmento $\overline{OG}$; y el $\overline{BC}$? 3. ¿Qué es respecto a polígono el punto 0?

OBJETIVO:

3.1.9. DEMOSTRAR ALGUNOS TEOREMAS DE LA GEOMETRIA ELEMENTAL (ANGULOS INTERIORES DE UN TRIANGULO, EXTERIORES A UN TRIANGULO, INTERIORES DE UN POLIGONO, ETC.)

ANALISIS:

El objetivo implica que el alumno:

1.° *Formule* correctamente, oral y por escrito, el enunciado correspondiente a cada uno de los teoremas:

— Medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera.

— Medida del ángulo exterior de un triángulo, respecto a los ángulos interiores de éste.

— Medida de la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo.

— Número de diagonales de un polígono convexo.

2.° *Distinga* en cada una de la proposiciones consiguientes, entre la hipótesis del teorema, demostración y conclusión del mismo.

3.° *Exprese* y *note* correctamente cada uno de los pasos de la demostración de cada teorema.

El presente objetivo, por su propia naturaleza, «ordenación del pensamiento para la demostración de una hipótesis», más que el propio conocimiento y expresión de los teoremas, busca la habituación de nuestros alumnos a la claridad y precisión de su pensamiento.

El razonamiento matemático es un ejercicio y método aplicable a múltiples y variadas situaciones que dejan de ser problemáticas apenas se proyecte sobre ellas un mínimo de lógica formal. Nuestro proyecto será, pues, fortalecer al máximo y dentro de las posibilidades mentales de cada alumno, su capacidad de abstracción a fin de que sea capaz de aplicar a casos concretos los principios generalizados.

En general, los teoremas enunciados pueden demostrarse en el primer año del ciclo que nos ocupa y las mayores dificultades que hemos encontrado es la facilidad con la que el alumno soslaya un razonamiento, dando como «bueno» lo que es meramente hipótesis. El profesor deberá ser en este punto un verdadero animador, estimulando «el porqué», favoreciendo el espíritu creador y, en general, el interés por el problema concreto.

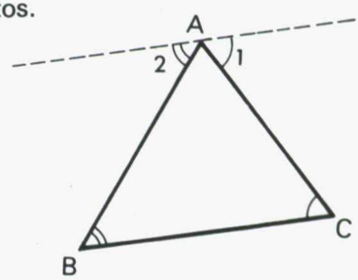
METODOLOGIA:

Los teoremas elegidos son la aplicación de conceptos aprendidos anteriormente (medición de amplitudes, ángulos que resultan al cortar a dos paralelas una secante, etc.). Con estos conocimientos el alumno estará en condiciones de demostrar los teoremas referidos a la medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y a la medida de un ángulo exterior de un triángulo.

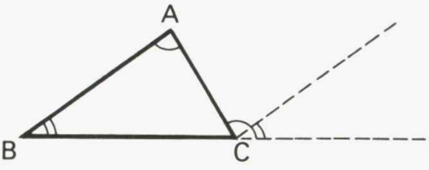
Con los conceptos de polígono convexo, diagonal, lado, ángulo, número de vértices, etc., estaremos en condiciones de iniciar la demostración del resto de los teoremas propuestos.

Procederíamos:

a) Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos, apoyándonos en la igualdad de los ángulos que resultan al trazar por uno de sus vértices una paralela al lado opuesto.



b) Demostrar que la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos interiores no adyacentes, apoyándonos en la igualdad de los ángulos correspondientes.



c) Número de diagonales de un polígono convexo de «n» lados, por observación del número de ellas que parten de un vértice y deducción de que este número es igual a $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

d) Medida de los ángulos interiores de un polígono convexo, por descomposición del polígono en triángulos, deduciendo que la suma de estos ángulos es 2 rectos $\cdot$ (n — 2).

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

Por tratarse de un objetivo que implica desarrollo de la capacidad de abstracción, sugerimos la aplicación a casos que impliquen la utilización del teorema demostrado; así:

Si ABCD es un trapecio isósceles, demuestra que $\widehat{A}$ es suplementario del $\widehat{C}$.

B) Para alumnos con dificultades:

La demostración de los teoremas propuestos puede significar dificultades insalvables, por lo que el nivel mínimo debe fijarse en la enunciación, notación y aplicación de los mismos, proponemos:

¿Cuál es la medida de la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo? Dibújalos.

Tema 2: MEDIDAS DE LONGITUDES, AMPLITUDES Y SUPERFICIES

OBJETIVO:

3.2.1. OPERAR CON MEDIDAS DE ANGULOS

ANALISIS:

El objetivo estará superado cuando el alumno:

1.° *Distinga* entre ángulo como amplitud y la medida de esa magnitud, que se expresa con un número.

2.° *Realice* medidas de ángulos con el transportador o con un ángulo que se establezca como unidad.

3.° *Distinga* las unidades de medida de ángulos y establezca dentro de cada sistema las relaciones entre ellas.

4.° *Calcule* la medida del ángulo $(\hat{a} + \hat{b})$; $(\hat{a} - \hat{b})$, para $\hat{a} > \hat{b}$; $m \cdot \hat{a}$ y $\hat{a} : m$, para $m \in N$ y divisor de la medida del $\hat{a}$, en unidades sexagesimales y centesimales.

5.° Dada la medida de un ángulo en unidades sexagesimales, *expresarla* en unidades centesimales y viceversa.

El presente objetivo, como lo prueba su propio enunciado, es esencialmente operatorio y, aunque en algunos aspectos cabe la interpretación y representación del resultado, priva el cálculo sobre otra actividad.

La relación práctica de las operaciones no tiene mayor dificultad, siempre que se gradúen, y por lo general los alumnos las realizan alcanzando una auténtica mecanización.

Las dificultades más frecuentes suelen hallarse en:

1.° No expresar el resultado de la adición de las medidas de dos o más ángulos, o el producto de un número natural por la medida de un ángulo, en los distintos órdenes.

2.° En la transformación en unidades equivalentes, otras de orden inferior o superior, y

3.° En la transformación de una medida, expresada en forma decimal, al orden que corresponda.

El presente objetivo posee dos fases totalmente delimitadas; la primera, básicamente operatoria, se sitúa en el primer año del ciclo superior y en la que el alumno superará los puntos 1.° al 4.° del análisis del objetivo.

En la segunda, punto 5.° del análisis, se aplicará a la medida de ángulos los conocimientos relativos a la proporcionalidad, momento que concidirá, normalmente, con el segundo año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

Consideramos como fundamental que se distinga por el alumno el ángulo como magnitud y la medida de esa amplitud. Debe darse prioridad, posteriormente, a ejercicios de medición de ángulos con las unidades «contenidas» en el transportador, cuidando el correcto uso del mismo, para pasar posteriormente a otras unidades arbitrarias: 1 recto, etcétera.

Sugerimos:

a) Presentación de los distintos órdenes de unidades del sistema sexagesimal y relaciones entre ellas. Idem del centesimal.

b) Dada la medida de un ángulo en algún orden del sistema sexagesimal, expresarla en otros órdenes. Idem del centesimal.

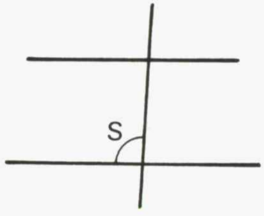
c) Calcular la medida del ángulo $(\hat{a} + \hat{b})$ y $(\hat{a} - \hat{b})$ en los casos que no sean preciso transformaciones. Idem en el que lo sean.

d) Calcular $n \cdot \hat{a}$ y $\hat{a} : n$, pasando directamente a ejercicios que impliquen transformaciones, etc.

Se incluirán ejercicios con unidades del sistema centesimal y actividades que impliquen conceptos ya adquiridos, como ángulos adyacentes complementarios, etc.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

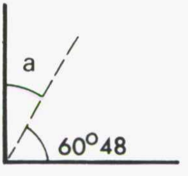


Si $\hat{S} = 92^\circ\ 13'\ 12''$, ¿cuál es la medida del resto de los ángulos de la figura?

B) Para alumnos con dificultades:

Tratándose de un objetivo que implica «operar», deben superarlo todos los alumnos. Para aquellos que presenten dificultades, procederemos más lentamente, ilustrando el ejercicio y evitando ejercicios que impliquen operaciones excesivamente prolijas; así:

¿Cuál es la medida del $\hat{a}$?:



OBJETIVO:

3.2.2. OPERAR CON MEDIDAS DE SEGMENTOS

ANALISIS:

El objetivo estará superado cuando el alumno:

1.° *Distinga* entre segmento como cantidad de longitud y la medida de esa magnitud, que se expresa con un número.

2.° *Calcule, interprete* y *represente:*

- La adición y sustracción de segmentos con cualquier tipo de unidad.
- El segmento producto de un número natural por la medida de un segmento.
- El segmento cociente, resultado de dividir la medida de un segmento en n partes iguales, para $n \in N$ y divisor de la medida de éste.

3.° Dada la medida de un segmento *a,* calcular la medida del segmento $q \cdot a$; para $q \in Q^+$.

4.° *Calcule* e *interprete* la división de un segmento de determinada medida en partes proporcionales.

Las operaciones aludidas se realizarán en su mayor parte con unidades del S.M.D., ya conocido por los alumnos, y que con el motivo que nos trae se fortalecerá.

Cuando decimos que el alumno opere con medidas de segmentos, nos referimos naturalmente a la medida de la longitud de ellos y a las operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división), en las que aplicaremos las propiedades estudiadas con anterioridad; teniendo presente que, respecto a la sustracción, se cumple $a - b = c$, cuando $a > b$.

Las dificultades más frecuentes suelen presentarse en:

No interpretar correctamente la medida de un segmento si en lugar de utilizar para ello un número decimal, se hace con un número racional.

El logro de este objetivo ha de realizarse en dos fases, que identificamos con los dos primeros años del ciclo que nos ocupa.

La primera exige el logro de los puntos 1.° y 3.° del análisis del objetivo. Es una fase eminentemente operativa y en lo que entendemos debería incluirse operar con un segmento *a,* tomado como unidad y con el que relacionaremos otros de forma que esta relación nos obligue al uso del número racional.

La segunda a realizar en el segundo año del ciclo superior conlleva el uso de la proporcionalidad y en donde el profesor cuidará el formalismo matemático.

METODOLOGIA:

Partiendo de situaciones problemáticas, sugerimos:

a) Realizar y notar medidas con distintos sistemas de unidades: m, cm, etc. Según la unidad utilizada varía el número que indica la medida del segmento, mas no éste.

b) Realizar operaciones (+, —) apoyándonos en situaciones problemáticas.

c) El cálculo del segmento de longitud $n \cdot a$ y $a : n$, para $n \in N$, lo realizamos primeramente auxiliándonos de papel cuadriculado, para pasar seguidamente a su medida.

d) Presentar sencillos problemas que impliquen la utilización de las operaciones estudiadas.

e) Dada la medida del segmento *a,* calcular la medida del segmento $q \cdot a$, para $q \in Q^+$.

f) Los cálculos requeridos a la proporcionalidad deberían basarse en situaciones problemáticas.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

Un edificio de 25 plantas tiene una altura de 102 m. Calcular la distancia entre las plantas 12.ª y la última si la distancia entre ellas y la altura del edificio está en la relación 3/5.

B) Para los alumnos con dificultades:

Con ayuda de una regla milimetrada dibuja tres segmentos, a, b y c, cuyas medidas sean 2, 5 y 7 cm., respectivamente, y representa y calcula la medida de los segmentos.

$$(c - a) \quad ; \quad (b + c) : 2 \quad y \quad (a + b) - c$$

OBJETIVO:

3.2.3. DETERMINAR LA MEDIDA DE LOS ANGULOS INSCRITO, SEMIINSCRITO, EXTERIOR E INTERIOR A UNA CIRCUNFERENCIA EN RELACION A LA MEDIDA DE LOS ARCOS QUE ABARCAN SUS LADOS RESPECTIVOS

ANALISIS:

Entendemos que el objetivo está alcanzado cuando el alumno:

1.° *Exprese* y *note* correctamente la relación existente entre la medida del ángulo central y el ángulo inscrito que abarca el mismo arco en una circunferencia.

2.° *Exprese* y *note* correctamente la relación existente entre la medida del:

- Angulo inscrito a una circunferencia y el arco que abarca.
- Angulo semiinscrito a una circunferencia y el arco que abarca.
- Angulo interior a una circunferencia y los arcos que abarca.
- Angulo exterior a una circunferencia y los arcos que abarca.

3.° Resuelva sencillos problemas que impliquen la utilización de las relaciones apuntadas anteriormente.

El presente objetivo es consecuencia de los anteriores en los que el alumno ha analizado las relaciones entre cuerdas y arcos, y ángulo central y arco correspondiente. Como la medida de los ángulos inscritos, semiinscritos, exteriores e interiores a una circunferencia ha de basarse en la medida del ángulo central respecto a su arco y la demostración de este teorema presenta dificultades para los alumnos, entendemos no ha de considerarse como básico. Bastará dar como axioma que la medida del ángulo central es la del arco correspondiente, para, basándonos en él, probar la medida del inscrito en función del arco que abarca.

Pretendemos, fundamentalmente, que el alumno reconozca y aplique las relaciones entre ángulos y arcos, que abarcan subsidiariamente la capacidad lógica de su demostración. La geometría que hemos de mostrar a nuestros alumnos ha de ser razonada, pero esto no quiere decir que «todo» ha de ser demostrado, puesto que en los niveles que nos movemos no es necesario para la penetración consciente de una realidad geométrica la revisión total del bagaje matemático adquirido por vía intuitiva.

El logro de este objetivo ha de iniciarse en el último año del ciclo superior.

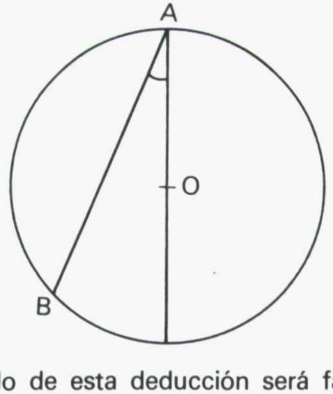
METODOLOGIA:

Previamente el alumno ha de conocer:

- Que a los arcos de una misma circunferencia son aplicables operaciones dadas para los segmentos rectilíneos.
- Que distinga entre las medidas de los ángulos y su amplitud.
- Que distinga entre las medidas del arco y su amplitud.

Con este bagaje de conocimientos sugerimos el siguiente proceso metodológico:

- En la determinación de la relación existente entre el ángulo central y el inscrito que abarca el mismo arco de una circunferencia, demostraríamos solo el caso en el que uno de sus lados pasa por el centro de la circunferencia, para llegar a determinar que «la medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central y por tanto la mitad del arco comprendido entre sus lados».

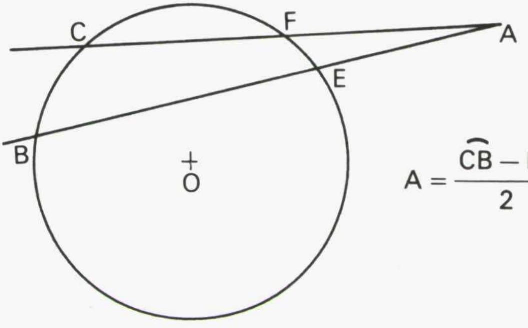


$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}.$$

- Partiendo de esta deducción será fácil llegar a la determinación de la medida de un ángulo inscrito en el caso de que ninguno de sus lados coincide con el diámetro, bastaría descomponerlo en suma de dos ángulos inscritos con vértice común y un lado común, que sería el diámetro que pasa por el vértice.
- Una vez adquirido este razonamiento, por generalización daríamos

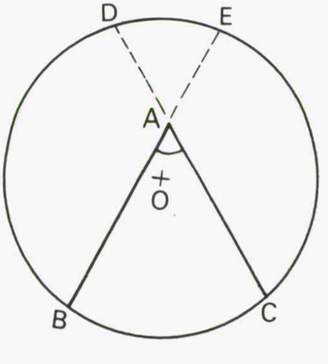
que la medida de un ángulo semiinscrito es también igual a la mitad de la medida del arco que abarcan sus lados.

— Aunque el objetivo no especifica que el alumno demuestre la medida de un ángulo exterior respecto a la medida de los arcos que abarcan sus lados, estimamos es interesante que lo conozca y verifiquen que dicha medida es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados.



$$A = \frac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{FE}}{2}$$

— Igualmente interesante será el demostrar la medida del ángulo interior a una circunferencia, por ser la síntesis de lo estudiado, para comprobar que su medida es igual a la semisuma de los arcos comprendidos por sus lados y las prolongaciones de éstos.

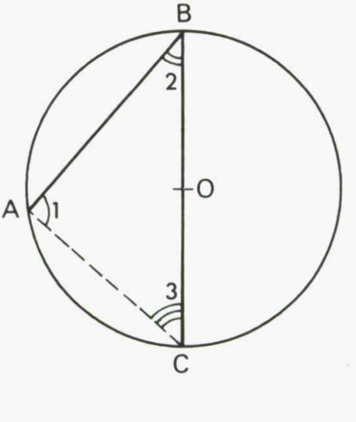


$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$$

ACTIVIDADES:

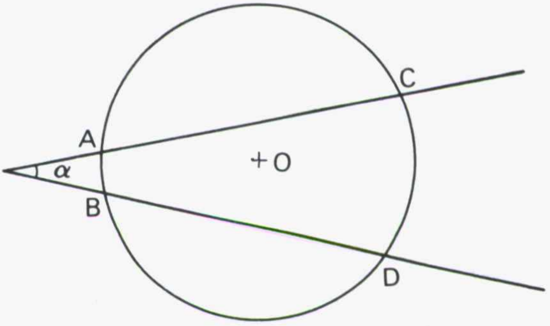
A) Para los alumnos más aventajados:

Si AB es el lado de un exágono regular inscrito en una circunferencia de centro O, halla la medida de los ángulos: $\hat{1}$, $\hat{2}$ y $\hat{3}$.



B) Para los alumnos con dificultades:

Ejercicios de aplicación de recta. Por ejemplo: Si $\widehat{AB} = 20°$ y $\widehat{CD} = 40°$. ¿Cuál es la medida del ángulo α?



OBJETIVO:

3.2.4. MEDIDA DE LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

ANALISIS:

El objetivo estará logrado cuando el alumno:

1.° *Exprese* y *note* la fórmula que:

a) Da la medida de la longitud de una circunferencia.

b) Da la medida de un arco de la misma de «n» grados.

2.° *Calcule:*

a) La medida de la longitud de una circunferencia conocido su radio.

b) La medida del diámetro o radio de una circunferencia de longitud conocida.

c) La medida de un arco de «n» grados perteneciente a una circunferencia de radio «r».

Las dificultades que pueden aparecer en el desarrollo de este objetivo son de tipo operativo, la introducción de «π» y su manejo con mayor o menor número de decimales —sería conveniente utilizar siempre un número fijo de cifras decimales, por ejemplo, 3,14— pueden dar lugar a falsos resultados; será pues imprescindible tener adquiridos los automatismos en el cálculo con números decimales e igualmente con la medida de arcos en grados.

El logro de este objetivo se deberá alcanzar en el primer año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

El proceso metodológico del objetivo implicará que el alumno tiene alcanzados todos los conocimientos que hacen referencia a la caracterización de la circunferencia y sus elementos.

Partiendo de esta base, en primer lugar se le dará al alumno la fórmula:

$$L = 2\pi r$$

que le permitirá calcular la medida de la longitud de cualquier circunferencia conocido su radio o diámetro; para seguidamente comprobar resultados con los obtenidos por vía experimental, siguiendo, por ejemplo, alguno de estos caminos:

1.° Ajustando a la circunferencia un hilo o una cinta métrica, obtendremos su longitud.

2.° Haciendo rodar la circunferencia, en la que se señalará previamente un punto de referencia sobre una recta. La longitud será la del segmento trayecto recorrido por la circunferencia desde el instante en que el punto marcado está en la recta hasta que vuelve a estar. La utilización de una regla graduada nos daría la medida aproximada de su longitud.

Consideramos que una vez el alumno haya alcanzado los objetivos sobre la proporcionalidad señalados en el bloque VI, sería interesante que el profesor, valiéndose de las experiencias anteriormente apuntadas, haga ver, al menos a aquellos alumnos aventajados, que la razón entre la longitud y el diámetro es constante y que este valor constante es el número «π».

Esta reflexión puede lograrse con la participación de los propios alumnos a los que pediremos realicen mediciones de la longitud de varias circunferencias y de sus correspondientes diámetros.

Los resultados se reflejarían en una tabla como la siguiente:

L	d	L/d
L_1	d_1	L_1/d_1
L_2	d_2	L_2/d_2
L_3	d_3	L_3/d_3
⋮	⋮	⋮

L = longitud.
d = diámetro.

Y completándola con el cálculo de $\frac{L}{d}$.

Observaremos que para el conjunto de la experiencia se podía escribir

$$\frac{L_1}{d_1} = \frac{L_2}{d_2} = \frac{L_3}{d_3} = \cdots\cdots$$

Y que estos cocientes, según la aproximación tomada, se acercan todos al número «π».

De aquí es ya fácil deducir que la longitud de la circunferencia es proporcional a su diámetro o radio y que la razón de sus respectivas medidas es π. Luego si

$$\frac{L}{d} = \pi \Rightarrow L = \pi d = 2\pi r$$

En todo momento deberemos tener en cuenta que las medidas obtenidas son aproximadas y que en la medición directa de la longitud de la circunferencia y del diámetro, los números obtenidos vienen afectados de errores, no obstante estos inconvenientes estimamos que el proceso es sugerente para los alumnos.

Como última consecuencia de lo expuesto, el profesor hará ver que la longitud de una circunferencia es inconmensurable con su radio.

Igualmente para calcular la medida de la longitud de un arco de circunferencia de «n» grados daríamos su fórmula:

$$L = \frac{2\pi r\, n^{\circ}}{360}$$

para seguidamente, empleando alguno de los procedimientos señalados para la circunferencia, comprobar los resultados obtenidos.

También en este caso, una vez adquiridos los conceptos de proporcionalidad y para alumnos aventajados, sería interesante la deducción de las fórmulas. Para ello, considerando la circunferencia como un arco de 360° y estableciendo la proporcionalidad entre la longitud de un arco y su medida en grados, la hallaríamos mediante una simple regla de tres.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

¿Cuántas vueltas por segundo dará la rueda de un camión que marcha a 60 Km/h., si el diámetro de la rueda es de 90 cm? (tomar $\pi = 3{,}14$).

B) Para los alumnos con dificultades:

Hallar en cm. la longitud de una circunferencia de diámetro $\frac{11}{3}$ m. (tomar $\pi = 3{,}14$).

OBJETIVO:

3.2.5. RESOLVER PROBLEMAS RELACIONADOS CON LA MEDIDA

ANALISIS:

El objetivo está alcanzado cuando el alumno resuelva sencillos problemas que impliquen la utilización de las propiedades, relaciones, principios y teoremas estudiados en los objetivos anteriores.

Al realizar el análisis de los anteriores, siempre se ha incluido la necesidad de que el alumno aplique los conceptos adquiridos a la resolución de problemas, y ello porque si bien la matemática tiene razón en sí misma en cuanto facilita por inducción o deducción la formulación de verdades universales, a los niveles en los que nos movemos la aplicación fundamental que ha de poseer es la de instrumentar la resolución de situaciones problemáticas.

Somos conscientes de que la formulación de problemas y ejercicios presenta una amplísima variedad y que son múltiples los textos que presentan esta variedad. Por ello, y a la hora de la verdad, es decir, en el momento de presentar el ejercicio al alumno, será el profesor quien, mejor que nadie, sepa seleccionar el que más corresponda a cada caso; no obstante deseamos recordar que cualquier tipo de problema debe poseer un número de propiedades, tales como *claridad* en la exposición o enunciado, *precisión* en los datos, *sencillez* y *graduación* de contenidos; conceptos que en sí mismos no precisan aclaración.

Las mayores dificultades en la resolución de problemas estarán en la comprensión del enunciado, planteamiento del mismo y obtención de la solución; por ello no debemos escatimar nuestra ayuda, siempre encaminada a potenciar la originalidad en las diversas formas de su resolución.

METODOLOGIA:

Uno de los más viejos problemas de la matemática es el de la utilidad o no de conocimientos previos para la resolución de ejercicios. Sin entrar en los valores de una u otra teoría, sí deseamos opinar que a nivel de E.G.B., el profesor debe pensar bien el problema que proponga, de forma que posea parte formativa y parte de aplicación a la vida real. Si admitimos que *poder* y *pensar* son instrumentos básicos para la resolución de ejercicios geométricos, no menos cierto que hacen falta instrumentos —conocimientos— para aquellas dos funciones mentales. Nada interesa que en alguna medida no sea conocido; por tanto, difícilmente podremos ilusionar a nuestros alumnos si no les facilitamos los instrumentos para resolver aquella situación.

Todo esto viene para reafirmarnos en la idea, sucesivamente expuesta en cada uno de los objetivos anteriores y en este mismo: «Es preciso ordenar las dificultades; es preciso establecer una relación de dificultad, de modo que el ascenso hacia metas superiores de razonamiento y hallazgo de relaciones se soporte en etapas más simples. ¿Cómo va a resolver un alumno problemas que impliquen el uso de la proporcionalidad si no se le han expuesto con anterioridad ejercicios previos e incluso casos prácticos o los principios de la misma?

Por consiguiente, la propia naturaleza del problema y la aplicación de los principios que exija determinarán en qué momento del primer año del ciclo superior han de presentarse.

Luego, supuestos alcanzados los conocimientos señalados en los objetivos del bloque III, tema 1, propondríamos escalonadamente ejercicios que impliquen:

a) Medida de segmentos en las operaciones de suma y deferencia.

b) Medida de ángulos en las relaciones de complementariedad y suplementariedad.

c) Medida de los ángulos interiores de un polígono.

d) Medida del ángulo exterior de un triángulo.

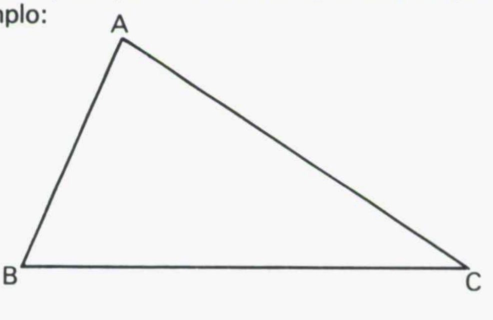
e) Número de diagonales de un polígono convexo.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

La variedad de ejercicios y problemas es múltiple. Sugerimos problemas que impliquen la aplicación de principios relacionados, de modo que se fuerce a la deducción. Ejemplo:

Probar que el ángulo que forman las bisectrices de los ángulos interiores con vértices en B y C, es igual a *un recto* más $\frac{\widehat{A}}{2}$.



B) Para los alumnos con dificultades:

¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles?

OBJETIVO:

3.2.6. CALCULAR AREAS DE FIGURAS PLANAS

ANALISIS:

Entenderemos que el objetivo está superado cuando el alumno:

1.° *Distinga, identifique* y *note* la fórmula que expresa el área de las figuras planas más usuales.

2.° Dadas las medidas precisas, *calcule* el área del:

- Cuadrado.
- Rectángulo.
- Rombo.
- Romboide.
- Trapecio.

— Triángulo.
— Polígonos regulares.
— Círculo.
— Sector circular.
— Segmento circular, y
— Corona circular.

3.° *Calcule,* por aproximación, el área de figuras planas irregulares.

— Como trasfondo de toda la *actividad* que presupone el logro del objetivo, existe la necesidad de que el alumno tenga claro el concepto de área, ya que si el cálculo de áreas es una mera mecanización formularia, en las figuras geométricas planas se requiere una buena dosis de ingenio intuitivo cuando las figuras son irregulares.

— Es preciso advertir que en el lenguaje vulgar suelen emplearse indistintamente las palabras área y superficie, cuando en realidad tienen significado diferente. Area se refiere exclusivamente a la medida de la extensión de figuras planas, superficie a la extensión y a la forma. El área de una figura plana es la medida de su superficie.

— El alumno fracasa a veces en el cálculo de áreas porque no ha sido aleccionado con anterioridad en algunos conceptos previos, como el de que *medir* un área es compararla con el área de la unidad, y que *unidad de área,* es el área del cuadrado cuyo lado es la unidad de longitud. Así, si tomamos el metro como unidad de longitud, la unidad de área será el m^2; si, por el contrario, consideramos el centímetro como unidad de longitud, será el cm^2 la unidad área.

— El alumno ha de «saber» que las superficies no se miden directamente, o sea, llevando sobre ellas una plantilla cuadrada igual a la unidad de área, sino que su área se calcula mediante relaciones numéricas que la ligan a determinadas medidas longitudinales más fáciles de obtener, quedando determinada toda área por el producto de dos dimensiones de la figura.

— El logro de este objetivo ha de iniciarse en el primer año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

El proceso metodológico en el desarrollo de este objetivo supone que el alumno tiene adquiridos los conocimientos que sobre polígonos regulares e irregulares, círculo y parte del círculo se han explicitado en los anteriores.

Normalmente, la enseñanza del cálculo de áreas de figuras planas se realiza de una forma intuitiva, dibujando la figura correspondiente sobre el papel cuadriculado y, efectivamente, la comprensión es inmediata; pero, muchas veces, el alumno cae en el error de que toda figura plana es un «compendio» de cuadrados, sin dar la debida importancia a lo anteriormente expuesto.

En el cálculo de áreas de figuras planas irregulares, es muy aconsejable acostumbrar al alumno a descomponerlas en el mayor número posible de figuras regulares o cuadricular la figura correspondiente, a fin de obtener el valor lo más aproximado posible de su área.

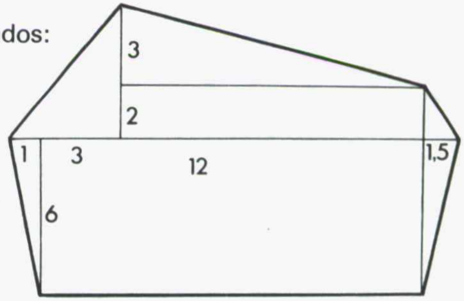
Por último, no olvidemos que en la resolución de problemas se advierte, a veces, que figuras de distinta forma tienen la misma área. Es en ese momento cuando hay que hacer ver a nuestros alumnos que se trata de superficies equivalentes.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

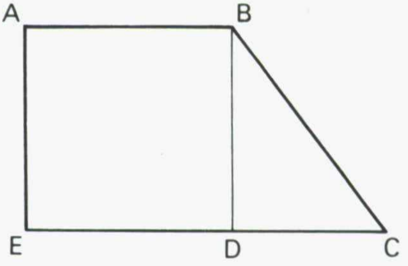
¿Cuál es el área de la siguiente figura?

Las medidas están dadas en cm



B) Para los alumnos con dificultades:

Si $\overline{AB} = \overline{BD} = 4$ cm. y $\overline{DC} = 3$ cm. ¿Cuál es el área del trapecio ABCE?



Tema 3: IGUALDAD Y SEMEJANZA EN EL PLANO

OBJETIVO:

3.3.1. RECONOCER Y MEMORIZAR LOS CRITERIOS DE IGUALDAD Y SEMEJANZA DE TRIANGULOS

ANALISIS:

Entendemos que el objetivo está superado cuando el alumno sea capaz de *identificar, reconocer, distinguir, notar* y *representar:*

— Triángulos iguales.

— Triángulos semejantes.

Y *expresar* y *determinar* la:

— Razón de los perímetros de dos triángulos semejantes.

— Razón de las áreas de dos triángulos semejantes.

El presente objetivo está de algún modo vinculado con la teoría de la proporcionalidad y medida de segmentos, en la falta de estos conocimientos es donde los alumnos pueden encontrar las mayores dificultades siempre y cuando no se utilicen medidas.

En cuanto a la igualdad de triángulos, el criterio que habrá de usarse no es otro que el ya enunciado en anteriores objetivos y que se reduce al movimiento; es decir, cuando dos figuras se superponen y coinciden, decimos son iguales, sin presuponer en ningún caso medida.

Por último, la índole del objetivo nos aconseja tratarlo en el año terminal de la E.G.B., procurando entremezclar en el proceso metodológico intuición y lógica, recordando que si aquélla convence, la segunda persuade cuando no es excesivamente formulista, pues de lo contrario sería rechazada por los alumnos.

METODOLOGIA:

Para el desarrollo de este objetivo es preciso que el alumno haya alcanzado los correspondientes a los puntos 6.3.1 y 6.3.2 del bloque VI.

Con este bagaje de conocimientos sugerimos el siguiente proceso metodológico:

En primer lugar, tratar que el alumno sepa expresar el algoritmo correspondiente a la igualdad de triángulos y a las condiciones que han de reunir para ella: «Angulos iguales y lados homólogos iguales».

Seguidamente pasar a describir los tres criterios de igualdad:

1.° Dos triángulos que tienen igual un lado y los dos ángulos adyacentes son iguales.

2.° Dos triángulos que tienen iguales dos lados y el ángulo que forman son iguales.

3.° Dos triángulos que tienen respectivamente iguales sus tres lados, son iguales.

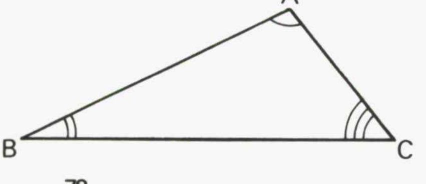
Consideramos que debe procurar «demostrar» la igualdad de los tres criterios, de forma que iniciemos al alumno en este tipo de razonamiento, aunque el objetivo sea tan sólo describir si dos triángulos son o no iguales según la proposición que se formule.

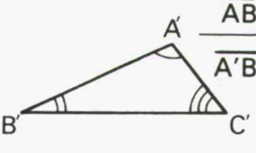
Pasaríamos a continuación a definir la semejanza de triángulos:

«Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales».

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad ; \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad ; \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$





Al cociente de dos lados homólogos lo llamamos «razón de semejanza».

Dicho esto expondríamos los criterios de semejanza de triángulos:

1.° Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.

2.° Dos triángulos que tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido por ellos, son semejantes.

3.° Dos triángulos que tienen los tres lados proporcionales, son semejantes.

Unos ejercicios muy convenientes con miras al posterior estudio de los teoremas del cateto y de la altura, serán:

a) Formulación de los criterios de semejanzas para un triángulo rectángulo, habida cuenta que ya tienen un ángulo igual, el recto, y

b) Que el alumno descomponga un triángulo rectángulo en triángulos semejantes.

Aquí puede ser interesante proponer a los alumnos más aventajados la demostración de los casos de semejanza, utilizando los movimientos necesarios para situar los triángulos en posición de Thales, y deducir de aquí la igualdad de sus ángulos y la proporcionalidad de sus lados homólogos.

Como consecuencia de la semejanza entre triángulos, será fácil determinar:

— «Que la razón de los perímetros de dos triángulos semejantes es igual a la razón de semejanza».

— «Que la razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza».

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

Dos triángulos, ABC y MNP, tienen el ángulo A igual al ángulo P. Escribir la condición mínima que han de reunir para que sean semejantes.

B) Para los alumnos con dificultades:

Identificar en figuras sencillas triángulos iguales y triángulos semejantes, especificando el criterio de igualdad o semejanzas en el que se basa.

OBJETIVO:

3.3.2. RESOLVER PROBLEMAS RELACIONADOS CON POLIGONOS SEMEJANTES

ANALISIS:

El objetivo está alcanzado cuando el alumno *interprete* y *resuelva* problemas de polígonos semejantes relacionados con:

a) Los elementos homólogos.

b) Los perímetros de los polígonos.

c) Las áreas de los polígonos.

Y todos aquellos que se derivan de la interrelación de los enumerados.

Las mayores dificultades están:

1.° En la falta de los conocimientos necesarios para situar el problema en su contexto teórico.

2.° En la aplicación adecuada de estos conocimientos.

3.° En los cálculos necesarios para llegar a la solución.

Consideramos que este objetivo debe desarrollarse en el último año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

El proceso metodológico exige que los alumnos posean los conocimientos que sobre semejanza de polígonos han sido desarrollados en anteriores objetivos.

Sugerimos:

1.° Comenzar por problemas sencillos del tipo:

a) Dados dos polígonos semejantes calcular su razón de semejanza.

b) Dados un elemento en uno de los polígonos y la razón de semejanza, hallar su homólogo.

2.° Comprobar con figuras semejantes (una cartulina triangular, cuadrangular, etc., proyectada sobre una pantalla o sobre la pared) que la razón de sus perímetros es la de semejanza y que la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

3.° Partiendo de la generalización de esta experiencia, resolver problemas relacionados con los perímetros y las áreas de polígonos semejantes.

4.° Resolver problemas tomados de la vida real. Por ejemplo, en el manejo de escalas:

a) Dada la distancia en la representación y la escala (razón de semejanza), hallar la distancia en el objeto real.

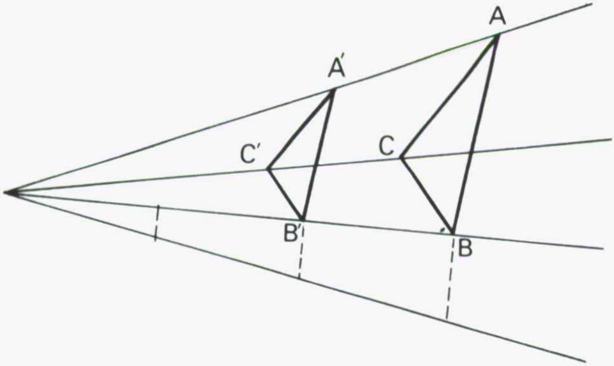
b) Dada la distancia en el objeto real y la escala (razón), hallar la distancia en la representación.

c) Dadas las distancias en la representación y en el objeto real, hallar la escala (razón).

Y otros tales como los que surgen de comparar una fotografía y su ampliación, los de determinación de la altura de un objeto cuyo pie es accesible, los de aplicación a la óptica, etc.

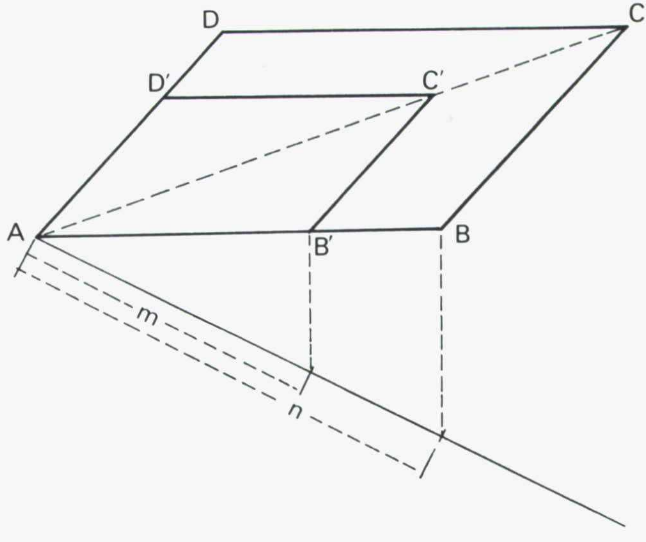
Para aquellos alumnos que superen con facilidad los aspectos anteriormente estudiados, sugerimos los problemas de construcción:

a) Construir un polígono semejante a otro, conocida la razón.



$$R = \frac{2}{3}.$$

b) Construir un polígono semejante a otro donde la razón sea la de dos segmentos dados.



ACTIVIDADES:

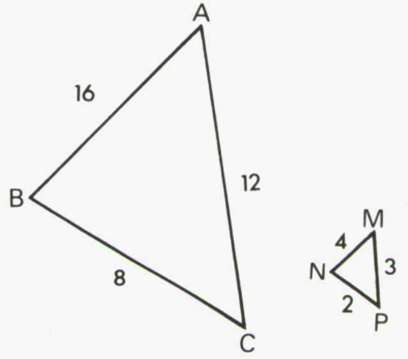
A) Para los alumnos más aventajados:

Construir un círculo cuya área sea la cuarta parte de otro de radio 9 cm.

B) Para los alumnos con dificultades:

Problemas sencillos de determinación de la razón. Ejemplo:

Los triángulos ABC y MNP tienen sus ángulos homólogos iguales.



¿Son semejantes?

¿Cuál es la razón de semejanza?

OBJETIVO:

3.3.3. DEMOSTRAR ALGUNOS TEOREMAS DE GEOMETRIA ELEMENTAL

ANALISIS:

Este objetivo estará alcanzado cuando el alumno, en triángulos rectángulos:

1.° *Formule* correctamente, oral y por escrito, el enunciado correspondiente a cada uno de los teoremas:

— Del cateto.

— De la altura.

— De Pitágoras.

2.° *Distinga,* en cada una de las proposiciones consiguientes, entre hipótesis del teorema, demostración y tesis.

3.° *Exprese* y *note* correctamente cada uno de los pasos de la demostración de cada teorema.

4.° *Generalice* la demostración de los teoremas, aplicando los mismos a la resolución de ejercicios.

En el desarrollo de este objetivo la experiencia ha hecho ver que el alumno formula inevitablemente los teoremas utilizando las medidas de la hipotenusa, catetos, etc., sin llegar a ver con claridad que las relaciones establecidas se refieren a la longitud de aquellos elementos.

Junto a esta dificultad de tipo conceptual, aparecen las que se derivan de:

a) Falta de destreza en la realización de una demostración y en las sucesivas fases que nos llevarán de la hipótesis a la tesis, y

b) Falta de ordenación en el razonamiento lógico, fruto de una sólida base de conocimiento.

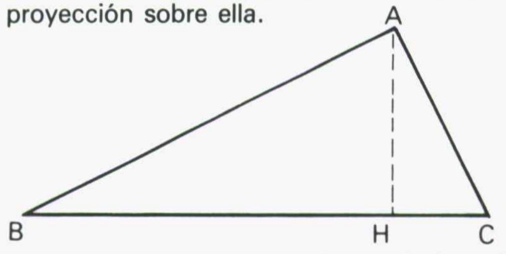
Este objetivo deberá alcanzarse en el último año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

El proceso metodológico exige como condición previa que el alumno tenga adquiridos los conocimientos sobre relaciones métricas entre segmentos, proyecciones ortogonales de segmentos y criterios de semejanza entre triángulos que han sido desarrollados en objetivos anteriores.

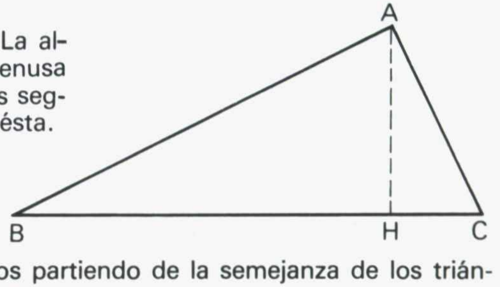
En orden a lo apuntado en el análisis, el proceso debe iniciarse comprobando intuitivamente el teorema de Pitágoras mediante reiteradas experiencias con números pitagóricos, para posteriormente generalizarlo a cualquier triángulo rectángulo, estableciendo seguidamente la relación entre hipotenusa y catetos. No obstante estas dificultades, como el objetivo es demostrar, sugerimos realizar las siguientes:

a) Teorema del cateto: Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.



Que demostraríamos partiendo de la semejanza de los triángulos ABC y ABH para el cateto AB y de la semejanza de los triángulos ABC y ACH para el cateto AC.

b) Teorema de la altura: La altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina sobre ésta.



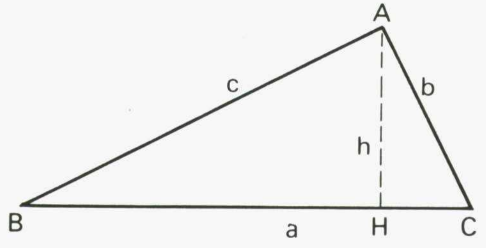
Que igualmente demostraríamos partiendo de la semejanza de los triángulos AHB y AHC.

c) Teorema de Pitágoras: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. El teorema se puede deducir partiendo del teorema del cateto aplicado a cada uno de los dos del triángulo.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

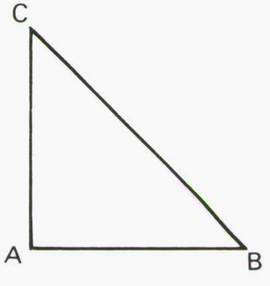
En el triángulo rectángulo ABC, aplicando el teorema del cateto y de la altura, deducir que



$$h = \frac{b \cdot c}{a}.$$

B) Para los alumnos con dificultades:

En el triángulo rectángulo isósceles ABC, deduce que



$$\overline{BC}^2 = 2\ \overline{AB}^2.$$

OBJETIVO:

3.3.4. APLICACION DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES ESTUDIADOS AL CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE LOS POLIGONOS REGULARES

ANALISIS:

El objetivo estará alcanzado cuando el alumno:

1.° *Aplique* los teoremas del cateto, de la altura y de Pitágoras para relacionar mediante fórmulas los elementos de:

a) Polígonos regulares, y

b) Polígonos regulares inscritos en una circunferencia.

2.° Partiendo de aquí, *calcule:*

a) La diagonal de un cuadrado en función del lado.

b) La apotema de un polígono regular en función de su lado.

c) El lado de un triángulo equilátero y de un cuadrado en función del radio de la circunferencia circunscrita.

En el desarrollo de este objetivo el alumno encontrará dificultades en:

1.° La identificación del teorema que debe aplicar a la situación planteada.

2.° La transcripción en fórmulas concretas de la aplicación de los teoremas, y

3.° El cálculo necesario para llegar a la solución y especialmente en la radicación.

Este objetivo deberá alcanzarse en el último año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

El proceso metodológico debe ir precedido del logro de los objetivos que dan:

1.° La generalización de los teoremas del cateto y de Pitágoras.

2.° La medida de los ángulos interiores de un polígono.

3.° La medida de los ángulos inscritos, y

4.° La forma de inscribir un polígono regular en una circunferencia.

Complementará este bagaje de conocimientos la deducción del lado de un exágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita.

Partiendo de aquí, sugerimos:

1.° Deducir en orden de menor a mayor dificultad las relaciones señaladas en el punto 1.° del análisis. Por ejemplo: las relaciones entre apotema y lado, antes de las de las de lado y radio de la circunferencia circunscrita.

2.° Calcular los elementos de los polígonos regulares a que se hace referencia en el punto 2.° del análisis, con ejemplos concretos, graduando su planteamiento de menor a mayor dificultad. Por ejemplo: el cálculo de la apotema de un polígono regular precederá a la del lado de un triángulo equilátero en función del radio de la circunferencia circunscrita.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia de radio 2 cm. Calcular su altura.

B) Para los alumnos con dificultades:

Calcular la apotema de un exágono inscrito en una circunferencia de radio 10 cm.

OBJETIVO:

3.3.5. UTILIZAR LA REGLA Y EL COMPAS PARA REALIZAR CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS DERIVADAS DE LOS TEOREMAS DE LA ALTURA Y EL CATETO

ANALISIS:

Toda cuestión geométrica que consiste en construir una figura que cumpla ciertas condiciones que la determinan, recibe el nombre de *problema gráfico,* por tanto:

El objetivo estará alcanzado cuando con ayuda de la regla y el compás el alumno *resuelva gráficamente* problemas de encontrar «un segmento media proporcional entre dos dados», aplicando los teoremas:

— Del cateto.

— De la altura.

En el logro de este objetivo pueden aparecer las siguientes dificultades:

a) Falta de conocimiento sobre proporcionalidad de segmentos.

b) No haber asimilado las proposiciones que dan los teoremas aplicados. Ser un cateto o la altura media proporcional entre otros segmentos del triángulo.

c) La falta de destreza en el manejo de la regla y el compás.

Este objetivo debe superarse en el último año del ciclo superior.

METODOLOGIA:

El proceso metodológico exigirá para su desarrollo la interpretación correcta de los teoremas del cateto y la altura.

Sugerimos:

1.° Como aplicación del teorema del cateto, construir un segmento media proporcional entre dos dados.

2.° Como aplicación del teorema de la altura, construir un segmento media proporcional entre dos dados.

Una vez adquirida la destreza en la resolución de estos tipos de problemas gráficos, el alumno aventajado estará capacitado para abordar otros, tales como:

a) Construir dos segmentos dada su suma y el segmento media proporcional.

b) Comprobar que en una circunferencia toda semicuerda es media proporcional entre los segmentos que determina en el diámetro perpendicular a ella.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

Dados el segmento $s = x + y$ y el segmento $p = x \cdot y$.
Construir los segmentos x e y.

B) Para los alumnos con dificultades:

Dados los segmentos

Construir un segmento media proporcional entre a y b aplicando el teorema del cateto o de la altura.

4. FUNCIONES
DURACION: 19 SEMANAS

Tema 4.1.: FUNCIONES

OBJETIVO:

4.1.1. ADQUIRIR EL CONCEPTO DE FUNCION DISTINGUIENDO DOMINIO Y RANGO

ANALISIS:

El objetivo estará cumplido cuando el alumno *identifique, note, represente* y *distinga* dominio y rango.

Entendemos por *identificar* cuando el alumno interprete que la función o ley de variación es una aplicación entre conjuntos:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) = y \end{aligned}$$

A es el conjunto dominio y B el conjunto rango.

Para la *notación* matemática de la función se podrá emplear, entre otras:

$$x \xrightarrow{f} y \quad , \quad y = f(x) \quad , \quad z = f(z) \quad \text{etc.}$$

Cuando *represente* la función en un plano tomando un sistema de ejes rectangulares x'ox e y'oy, el conjunto A —dominio— estará representado en el eje x'ox y el conjunto B —rango— en el eje y'oy.

En una función entendemos por *distinguir* el conjunto dominio o campo de existencia cuando se conozca y escriba el conjunto A, en el cual los valores de la función existen, y el conjunto rango o recorrido cuando se conozca y escriba el subconjunto de B, formado por todas las imágenes «y» de todos y cada uno de los elementos $x \in A$ mediante la aplicación correspondiente.

Es importante que el alumno sepa distinguir «a simple vista» en conjuntos de pares ordenados aquellos que constituyen función, pues bastará comprobar que no se repite ningún elemento del conjunto dominio en ninguna de las parejas de números para determinar que es función.

Este objetivo deberá superarse en el último año del ciclo superior, correspondiendo al segundo año del ciclo, sólo operando en Z y Q^+, para posteriormente en Q.

METODOLOGIA:

Antes de introducir a los alumnos en el concepto de función deberán tener claras las operaciones en Z y Q^+, distinguir entre correspondencia, relación y aplicación, y por supuesto saber representar pares de números ordenados en un sistema de ejes rectangulares.

Una función estará definida cuando conozcamos su campo de existencia —conjunto dominio—, la ley de variación y el conjunto imagen o rango de la función.

Las mayores dificultades que se encuentran los alumnos en el aprendizaje de la función suelen hallarse cuando dados elementos del rango y la ley de variación, ha de descubrir sus correspondientes en el conjunto dominio o campo de existencia de la función.

El proceso que aconsejaríamos sería:

a) Funciones de la forma $f(x) = K$ o $y = K$, llamada función constante, con $x \in Q$ y $K \in Q$.

b) Funciones de la forma $f(x) = ax + b$ o $y = ax + b$, que llamaríamos función afín (aplicación biyectiva de Q en Q), donde $a \neq o$ y $\forall a$, b, $x \in Q$.

c) Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $y = ax^2 + bx + c$, que llamaremos función cuadrática (aplicación de Q en Q), donde $a \neq o$ y $\forall a, b, c, x \in Q$.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Dado el conjunto dominio $\{2, 5, 6\}$ y el conjunto rango $\{5, 8, 9\}$. Escribe la función.

B) Para los alumnos con dificultades:

De los siguientes pares de números ordenados selecciona aquellos que representan funciones.

a) $\{ (2, 4)\ (3, 5)\ (-2, 1)\ (2, 3) \}$.

b) $\{ (-3, 0)\ (1, 1)\ (5, 3)\ (4, 7) \}$.

c) $\{ (-1, 4)\ (0, 3)\ (5, -2)\ (3, 0) \}$.

OBJETIVO:

4.1.2. REPRESENTAR FUNCIONES LINEALES

ANALISIS:

El objetivo estará cumplido cuando el alumno *exprese, distinga* e *interprete* la representación de una función lineal.

Entendemos por *expresar* el poseer los automatismos necesarios para la representación de la función de la forma $y = ax + b$.

Entendemos por *distinguir* cuando el alumno reconozca que la representación gráfica de la función $y = ax + b$ es una recta.

Entendemos por *interpretar* cuando el alumno detecte la ley de variación sobre la gráfica dibujada.

Este objetivo se dividirá en los dos últimos años del ciclo superior, correspondiendo al primero la representación de funciones lineales operando en los conjuntos Z y Q^+, para posteriormente operar en Q.

METODOLOGIA:

Antes de hacer representaciones de funciones lineales el alumno deberá conocer la operatividad en Z y Q^+ y saber representar pares de números ordenados en un sistema de ejes cartesianos.

Aconsejaríamos empezar por analizar:

a) Funciones de la forma $y = K$, $K \in Q$.

b) Funciones de la forma $y = ax$, $(a, x) \in Q$.

c) Funciones de la forma $y = ax + b$, $(a, x, b) \in Q$.

Para llegar a las conclusiones:

1.ª Que la representación gráfica de la función constante $y = K$ es una recta paralela al eje x'ox.

2.ª Que la representación gráfica de $y = ax$ es siempre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

3.ª Que la representación gráfica de $y = ax + b$ es siempre una recta que pasa por el punto (o, b).

4.ª Que la inclinación o pendiente se la recta respecto al eje x' o x será mayor cuanto mayor sea el valor de *a*.

5.ª Que es suficiente obtener dos puntos para que la recta quede determinada.

Es muy recomendable que los alumnos observen gráficas formadas por segmentos de rectas a fin de interpretarlas.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Representar la función $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

B) Para los alumnos con dificultades:

Representa la función: $y = 3x + 4$.

OBJETIVO:

4.1.3. IDENTIFICAR EN LA PARABOLA (COMO REPRESENTACION GRAFICA DE LA FUNCION CUADRATICA) SU EJE DE SIMETRIA Y VERTICE

ANALISIS:

El objetivo estará cumplido cuando el alumno *exprese, distinga* e *interprete* una representación de función cuadrática.

Entendemos por *expresar,* el poseer los automatismos necesarios para la representación de la función $y = ax^2 + bx + c$.

Entendemos por *distinguir* cuando el alumno conozca que la representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Que toda parábola tiene un eje de simetría del cual equidistan los puntos homólogos y que el vértice viene dado por la intersección del eje de simetría con la parábola.

Entendemos por *interpretar* cuando dada una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ $(a > o)$ o $(a < o)$ enjuicie si la curva está abierta hacia la región positiva o negativa del eje de ordenadas o viceversa.

Este objetivo se desarrollará en el último año del ciclo superior, con dominio en Q.

METODOLOGIA:

Antes de iniciar el estudio de la parábola, como representación gráfica, el alumno deberá tener ideas claras de simetría y operatividad en Q.

Aconsejamos hacer un estudio para la representación gráfica de la función cuadrática de la siguiente manera:

a) Función de la forma $y = ax^2$, cuando $a > o$ y $a < o$.

Los alumnos deberán, una vez representadas, sacar las siguientes conclusiones:

1.a. La representación gráfica de la función $y = ax^2$ es una curva llamada parábola y cuando $a > o$ la curva está abierta hacia la región positiva del eje de ordenadas.

2.a. La representación gráfica de la función $y = ax^2$ cuando $a < o$ es una curva llamada parábola y es simétrica respecto al eje x'ox de la $y = ax^2$ cuando $a > o$.

3.a. El origen de coordenadas (o, o) es el vértice de la parábola tanto si $a > o$ ó $a < o$.

4.a. El eje de ordenadas es el eje de simetría de la parábola en la forma $y = ax^2$ para $a > o$ ó $a < o$.

b) Función de la forma $y = ax^2 + c$ para $a > o$ y $a < o$.

Los alumnos procederán a su representación para hacerles observar las siguientes conclusiones:

1.b. La representación gráfica de la función $y = ax^2 + c$ es una curva llamada parábola y cuando $a > o$, la curva está abierta hacia la región positiva del eje de ordenadas.

2.b. Que cuando $a < o$, la parábola $y = ax^2 + c$ es simétrica de la $y = ax^2 + c$ con $a > o$ respecto del eje x'ox.

3.b. El punto de coordenadas (o, c) es el vértice de la parábola.

4.b. El eje de simetría de la parábola es el eje de ordenadas.

c) Función de la forma $y = ax^2 + bx$ para $a > o$ y $a < o$.

Una vez representada haremos observar a los alumnos lo siguiente:

1.c. La representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx$ para $a > o$ y $a < o$ son curvas llamadas parábolas, y cuando $a > o$, la curva está abierta hacia la región positiva del eje de ordenadas.

2.c. Que si $a < o$, la parábola es invertida con respecto a la función $y = ax^2 + bx$ para $a > o$.

3.c. La curva pasa por los puntos (o, o) y $\left(-\dfrac{b}{a}, o\right)$.

4.c. El eje de simetría de la parábola es una recta paralela al eje de ordenadas y pasa por el vértice.

5.c. El vértice es el punto de contacto de la curva con el eje de simetría.

d) Función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ para $a > o$ y $a < o$.

Después de su representación llegaríamos a las siguientes conclusiones:

1.d. La representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ para $a > o$ y $a < o$ son curvas llamadas parábolas.

2.d. Si $a < o$, la parábola está invertida con respecto a la función $y = ax^2 + bx + c$ para $a > o$.

3.d. El punto de intersección de la parábola con el eje de ordenadas es el (o, c).

4.d. El eje de simetría de la parábola es una recta paralela al eje y'oy que pasa por el vértice.

5.d. El vértice es el punto de contacto de la curva con el eje de simetría.

Para la determinación del eje de simetría en los casos c y d aconsejamos el uso de papel milimetrado y su localización es inmediata.

Para los alumnos aventajados puede realizarse mediante el cálculo numérico consiguiente.

Haremos observar con ejemplos adecuados que hay funciones cuadráticas que cortan en un solo punto al eje de abscisas y que por lo tanto el vértice de las curvas son puntos del eje x'ox.

Es interesante que los alumnos observen la orientación de las ramas parabólicas, ya que según sean ascendentes o descendentes señalarán la concavidad o convexidad, y podríamos aprovecharla para darles idea, de forma intuitiva, de los dos conceptos anteriormente expuestos.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Representa la función: $y = x\ (2-3x)$.
Hallar las coordenadas del vértice y trazar su eje de simetría.

B) Para los alumnos con dificultades:

En papel milimetrado representa la función: $y = x^2 - 4x + 3$, identifica el vértice y traza su eje de simetría.

OBJETIVO:

4.1.4. DEFINIR Y CARACTERIZAR ECUACIONES DIFERENCIANDOLAS DE IDENTIDADES E IGUALDADES

ANALISIS:

Entendemos que este objetivo estará alcanzado cuando el alumno sepa *definir, caracterizar* e *identificar* las ecuaciones diferenciandolas de identidades e igualdades.

Entendemos por *definir* cuando el alumno sepa que ecuación es una igualdad de expresiones algebraicas que sólo se cumple para algunos valores de su parte literal (incógnita o incógnitas):

Que identidad es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es cierta para cualquier valor que le demos a su parte literal (incógnita o incógnitas).

Entendemos por *caracterizar* e *identificar* cuando el alumno sea capaz de diferenciar las ecuaciones que son «igualdades» de las ecuaciones que son «identidades».

Este objetivo deberá superarse en el segundo año del ciclo superior.

Recomendamos utilizar ejercicios, ejemplos, etc., para evitar errores tan frecuentes como confundir una ecuación con una identidad.

METODOLOGIA:

Recomendamos seguir el siguiente proceso:

a) Escribir igualdades.

b) Escribir ecuaciones que sean identidades, comprobándolas.

c) Escribir ecuaciones que sean sólo igualdades, comprobándolas.

d) Dadas varias ecuaciones, reconocer las que son igualdades y las que son identidades.

e) Escribir sencillos ejemplos de ecuaciones que son igualdades y ecuaciones que son identidades.

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

En las siguientes expresiones señala:

a) Cuáles son identidades.

b) Cuáles son ecuaciones.

1. $x^3 - 1 = (x - 1)^3$.
2. $x - 1 = \dfrac{x - 1}{2}$.
3. $(3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2$.
4. $3y - 3x = 3\,(y - x)$.

B) Para los alumnos con dificultades:

Reconocer entre varias igualdades, cuáles son ecuaciones y cuáles identidades para casos sencillos.

OBJETIVO:

4.1.5. ENUMERAR E IDENTIFICAR LAS PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

ANALISIS:

Este objetivo estará alcanzado cuando el alumno *conozca, aplique* e *identifique* las propiedades de la igualdad.

Entendemos por *conocer:*

a) Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

b) Si se suma o se resta un mismo número a los miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente a la primera.

c) Si se multiplican o dividen los dos miembros de una igualdad por un mismo número —distinto de cero—, la ecuación obtenida es equivalente a la primera.

d) Al sacar factor común aplicando la propiedad distributiva obtenemos otra ecuación equivalente a la dada.

e) Si a los miembros de una ecuación se le suma una misma expresión en *x* (su incógnita), la ecuación obtenida es equivalente a la propuesta.

Entendemos por *aplicar,* cuando los alumnos particularicen los conocimientos adquiridos a casos prácticos.

Entendemos por *idendificar,* cuando los alumnos reconozcan las propiedades empleadas de la igualdad en ejercicios sencillos.

Todos los aspectos reseñados en este análisis consideramos deben incluirse en el segundo año del ciclo superior.

El logro de este objetivo es básico para la resolución de ecuaciones, pues permitirá al alumno la transformación de ecuaciones en sucesivas ecuaciones más sencillas hasta obtener la solución.

METODOLOGIA:

Aconsejamos seguir el siguiente proceso:

a) Ejercicios previos con números pertenecientes a Z y Q^+, comprobando las propiedades ya estudiadas para el logro del objetivo.

b) Aplicación de estos ejercicios y sus propiedades a igualdades de expresiones algebraicas.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados sugerimos:

Aplicando las propiedades que creas conveniente, escribe la ecuación más sencilla equivalente a la:

$$\frac{2-x}{12} - \frac{x-3}{9} = -1.$$

B) Para los alumnos con dificultades sugerimos:

1. Ejercicios sencillos de aplicación a las propiedades de la igualdad.

2. Obtención de ecuaciones equivalentes partiendo de ecuaciones sencillas con coeficientes enteros.

OBJETIVO:

4.1.6. ADQUIRIR LOS AUTOMATISMOS DE LA RESOLUCION DE ECUACIONES Y SISTEMAS EN Q CON COEFICIENTES EN Q

ANALISIS:

El objetivo estará alcanzado cuando el alumno resuelva las dificultades que impliquen hallar la solución de ecuaciones lineales con una incógnita, de segundo grado y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, justificando los procesos que lleven a la solución correcta.

Estos procesos son:

a) En ecuaciones de primer grado:

- Aplicar las propiedades de las operaciones en Q.
- Quitar paréntesis, si los hubiera.
- Quitar denominadores por el método del m.c.m.
- Transposición y reducción de términos.
- Despejar la incógnita y comprobar la validez de la solución en la ecuación original.
- Resolver gráficamente una ecuación de primer grado.

b) En ecuaciones de segundo grado:

- Completar un cuadrado perfecto.
- Aplicar directamente la fórmula general.
- Resolución gráfica.

c) Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas:

- Método de reducción.
- Método de igualación.
- Método de sustitución.
- Método gráfico.

El presente objetivo se tratará de cumplir en el segundo año del ciclo superior en lo que respecta al apartado *a)* con coeficientes en Z y Q^+ y en el curso terminal de la E.G.B. los apartados *a), b)* y *c)* con coeficientes en Q.

METODOLOGIA:

Si uno de los problemas más importantes que actualmente existen en el aprendizaje de la Matemática es la ausencia de conceptos claros y el de terminologías mal aprendidas, entendemos que previo al proceso metodológico debería cuidarse:

a) El significado y sentido de los conceptos: ecuación, incógnita, lineal, igualdad, identidad, miembros, expresión, parte literal, parte numérica, coeficiente, términos, factores literales, factores numéricos, etc.

b) La descripción y reconocimiento de los entes matemáticos anteriormente descritos, y

c) El reconocimiento y utilización de expresiones algebraicas que corresponden a las operaciones en Z.

Aconsejamos el siguiente proceso metodológico en:

a) Ecuaciones de primer grado.

Para la resolución numérica de una ecuación lineal con una incógnita, procederíamos partiendo de la forma más sencilla y con coeficientes en Z para seguir un proceso en dificultad creciente hasta llegar al tipo de ecuación con coeficientes en Z, donde el alumno tenga que aplicar todos los procesos aprendidos escalonadamente, usando todas y cada una de las propiedades estudiadas.

Para la resolución gráfica, una vez representada la ecuación asociada a su función correspondiente, los alumnos observarán que la intersección de la recta obtenida con el eje x' o x señalará el punto en que la ordenada *y* es igual a cero. El valor correspondiente de la abscisa en el punto donde $y = 0$ será la solución de la ecuación.

b) Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

Antes de iniciar los automatismos de la resolución de la ecuación de segundo grado, el alumno deberá transformar cualquier ecuación cuadrática a su forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$ e identificar los valores de a, b y c.

Para la resolución numérica de una ecuación de segundo grado por el método de completar un cuadrado perfecto, aconsejamos seguir los métodos clásicos que se encuentran en cualquier libro de texto.

El procedimiento de resolver una ecuación cuadrática por el método antes enunciado, es muy útil para el desarrollo de la mente lógica; no obstante, creemos, debe dejarse *exclusivamente* para alumnos destacados, así como la demostración de la fórmula general —consecuencia de los procesos que conlleva la resolución de la ecuación por el método anterior—, siendo obligatorio en el último año del ciclo superior la resolución de las ecuaciones por aplicación de la fórmula general.

Para la resolución gráfica de la ecuación de segundo grado (completa o incompleta) bastará asociar la ecuación a su función correspondiente, representarla, y observarán que esta curva cortará el eje de abscisas en un punto o en dos puntos —soluciones o raíces de la ecuación—, ya que en esos puntos $y = 0$.

c) Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Para la resolución numérica de un sistema lineal de dos incógnitas.

Para la resolución numérica de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, procederíamos inicialmente por el método de igualación y seguidamente por el método de reducción y por último el método de sustitución.

Por el método gráfico, bastará representar sobre los ejes de coordenadas cartesianas las rectas correspondientes a ambas ecuaciones, haciendo observar al alumno que el punto de intersección de las rectas es la solución del sistema y haciéndole deducir qué pasaría cuando las rectas no se corten o las dos coincidan.

Una vez resueltas las ecuaciones y sistemas, los alumnos comprobarán la validez de los resultados en las ecuaciones y sistemas propuestos.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que superen el nivel medio:

1. Resuelve la siguiente ecuación numérica y gráficamente:

$$-\frac{2x-5}{3} - \frac{3(x-1)}{2} = \frac{2}{3}.$$

2. Resuelve la siguiente ecuación numérica y gráficamente:

$$\frac{3x-1}{x-2} = \frac{3-x}{1-2x}.$$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones numérica y gráficamente:

$$\frac{y-2}{x+1} = \frac{5}{3} \quad ; \quad \frac{x+2}{y+1} = \frac{1}{2}.$$

B) Para los alumnos con dificultades:

1. Resuelve la siguiente ecuación numérica y gráficamente:

$$\frac{3x-2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{x}{2}.$$

2. Resuelve la siguiente ecuación numérica y gráficamente:

$$x^2-4x-5=0.$$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones numérica y gráfimente:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 4. \\ 5x-7 &= -6y. \end{aligned}$$

OBJETIVO:

4.1.7. PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS QUE DEN LUGAR A ECUACIONES Y SISTEMAS Y PLANTEAR PROBLEMAS CONOCIENDO LA ECUACION

ANALISIS:

El objetivo estará cumplido cuando el alumno *traduzca* las proposiciones verbales a algebraicas y las expresiones gramaticales por la ecuación o ecuaciones asociadas o viceversa.

Aplique las técnicas necesarias a la resolución de ecuaciones y sistemas.

Compruebe en el problema la validez del resultado obtenido.

Los tres conceptos enunciados, traducir, aplicar y comprobar, están íntimamente ligados a la comprensión, planteo y resolución de problemas que dan lugar a ecuaciones y sistemas; por ello creemos conveniente hacer el análisis del objetivo junto a la metodología.

La aplicación de estos problemas en el ciclo superior serán consecuencia de las necesidades operativas.

METODOLOGIA:

Reconocemos que cada profesor, como resultado de la práctica diaria y conocimiento de los alumnos, dispone de procedimientos aptos y suficientes para el logro de este complejo objetivo; no obstante estimamos prudente sugerir:

a) El alumno ha de saber que en álgebra se emplean normalmente palabras que significan adición y para ello seleccionaríamos algunas de las más usuales en los problemas: aumentar, poner, incrementar, etc., y el símbolo que las define es (+), o palabras que significan sustracción, multiplicación, división, etc.; disminuir, perder, menos, doble, triple, razón, etc., cuyos símbolos que las definen matemáticamente son: (—), (× ó ·), (: ó /), etc.

Muchas veces estas palabras les fueron familiares en ciclos precedentes, pero no se les dio la debida importancia y por esta razón hemos de comenzar el aprendizaje de los problemas introduciéndolos con sencillas proposiciones verbales para que los alumnos las expresen algebraicamente o viceversa, para en creciente dificultad lleguen hasta el problema propiamente dicho.

Es preciso tener presente que el alumno conoce, por ejemplo, $x - 1$ como expresión algebraica, traducible a varias significaciones gramaticales, pero cuando dicha expresión se expresa entre paréntesis en álgebra señala un solo número; así, si este número lo deseamos dividir, multiplicar, etc., habrá de acostumbrarse a que se ha de expresar:

$$\frac{(x-1)}{3}, \quad 2\,(x-1) \,\ldots\ldots\ldots, \text{ etc.}$$

Como último paso de aprendizaje podría ser escribir proposiciones verbales, aplicadas a la vida real, como compras, edades, ventas, cambios, etc., cuya incógnita esté relacionada con pesetas, años, metros, etcétera, proposiciones que darán lugar a problemas formales.

Así:

El número de metros de una pieza disminuida en 12, cuya expresión algebraica sería: $x - 12$, etc.

b) Una vez que el alumno haya adquirido la destreza en la traslación del lenguaje oral al matemático o viceversa, se podrían clasificar los problemas para su resolución en: «numéricos», de «edades», de la «vida corriente», de «herencias», «grifos», movimientos uniformes, geométricos, etc.

Procedimientos de aprendizaje similares a los ya señalados se seguirían para resolver problemas que den lugar a sistemas de ecuaciones, ya que la generalización subsiguiente a cualquier tipo de problemas es consecuencia de la diversidad y multiplicidad de ellos.

Son numerosas y variadas las dificultades que el profesor ha de encontrarse para alcanzar el objetivo propuesto, por la naturaleza del mismo, por la variedad de alumnos y de manera especial por el no uniforme desarrollo mental de ellos.

No obstante a título de ejemplo señalamos algunas:

a) La interpretación de problemas referidos a «edades».

b) El planteo de problemas de números enteros consecutivos.

c) Los derivados de la descomposición polinómica de números, etc.

Para obviarlas el profesor ejemplificará y razonará los pasos seguidos en el modelo utilizado.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

1. Un padre tiene 34 años y su hijo 12, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será igual al duplo de la de su hijo?

2. Redacta un problema basándote en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{x+2}{y+1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{x+1}{y-2} = \frac{3}{5}.$$

B) Para los alumnos con dificultades:

1. ¿Cuál es el número cuya tercera parte aumentada en 15 es igual a 18?
2. Dadas ecuaciones sencillas que redacte un problema.

5. POLINOMIOS
DURACION: 4 SEMANAS

Tema 5.1: POLINOMIOS: ELEMENTOS QUE LOS CARACTERIZAN

OBJETIVO:

5.1.1. DEFINIR, RECONOCER Y ESCRIBIR POLINOMIOS CON COEFICIENTES EN Q

ANALISIS:

Es obvio que este objetivo se habrá conseguido cuando el alumno sepa *definir, distinguir, identificar, reconocer* y *escribir* todo tipo de polinomios de *una* indeterminada con coeficientes en Q.

METODOLOGIA:

El estudio de polinomios puede efectuarse partiendo de las «funciones polinómicas» previamente estudiadas, de tal manera que el polinomio queda definido como «la expresión algebraica determinada por una función polinómica».

Una segunda forma, clásica, es denominar «monomio sobre el cuerpo Q» a la expresión ax^n con $a \in Q$ y $n \in N$.

A partir del concepto de monomio ya se pueden definir «monomios semejantes y no semejantes».

Y de aquí surgirá el concepto de «polinomio» como adición de monomios y «grado de un polinomio», el «grado del monomio que tienen mayor grado».

DIFICULTADES:

Con frecuencia nos encontramos con que el alumno no reconoce como polinomio los números *natural, entero* o *racional,* por ejemplo, 5, +7, −3/5, etc., mientras que sí considera como polinomios expresiones algebraicas de la forma $\frac{2x+3}{3x+1}$, $\frac{5}{x^3}$, etc., cuando en realidad no lo son.

Por otra parte, el alumno está acostumbrado a manejar los polinomios tomando como indeterminada la letra *x.* En el momento en que se representa el polinomio con otra indeterminada, por ejemplo la letra *z,* el alumno encuentra dificultades o inconvenientes. Està es la razón por la que, en las actividades, conviene poner cualquier letra, generalmente las últimas del vocabulario, por indeterminada.

ACTIVIDADES:

Para los alumnos que hayan superado con facilidad el nivel medio sugerimos escribir polinomios con dos indeterminadas, partiendo del monomio. Intuir su grado hasta que le defina, y como consecuencia reconocer monomios (polinomios) semejantes y no semejantes.

Para los alumnos con dificultades, insistir con ejercicios lo más sencillos posibles hasta que capte perfectamente, dada su importancia, los conceptos expuestos en el objetivo.

OBJETIVO:

5.1.2. ORDENAR Y COMPLETAR POLINOMIOS Y RECONOCER SU GRADO

ANALISIS:

Por distintas razones, entre ellas la de multiplicación y división de polinomios, la aplicación de la regla de Ruffini, etc., es imprescindible que el alumno sepa ordenar un polinomio de menor a mayor grado, y viceversa, así como saber cuándo un polinomio es completo o no, en cuyo caso debe aprender a completarlo.

Las definiciones de grado de un monomio y de un polinomio han sido dadas en el objetivo anterior, a través del exponente, por lo que aquí no han de existir dificultades para reconocer su grado respectivo.

En consecuencia, el proceso *metodológico-didáctico,* expuesto en forma de *progresión,* puede ser éste:

a) Escribir polinomios (y monomios) completos, ordenados, no completos, no ordenados, y la combinación de éstos, es decir, polinomios ordenados y completos, ordenados pero no completos, completos sin ordenar, y polinomios que no sean ni ordenados ni completos. El alumno en todos los casos debe reconocer a qué tipo pertenecen, y en los casos que sea necesario ordenarlos y completarlos.

b) Reconocer el grado de los polinomios de cada uno de los ejercicios expuestos anteriormente.

c) Hacer ejercicios en sentido contrario, es decir, que sea el alumno el que escriba polinomios de todos los tipos expuestos, incluso condicionados por el grado que se les indique.

DIFICULTADES:

Con frecuencia el alumno olvida completar y ordenar polinomios, totalmente necesario en la multiplicación, división y regla de Ruffini, por lo que es conveniente insistir cada cierto tiempo en ello.

LIMITES:

De forma implícita vienen dados por el enunciado del objetivo.

ACTIVIDADES:

Siguiendo las indicadas en el objetivo anterior, que el alumno más aventajado ordene polinomios de dos indeterminadas respecto a la primera y a la segunda y de menor a mayor y mayor a menor grado.

OBJETIVO:

5.1.3. HALLAR EL VALOR NUMERICO DE UN POLINOMIO Y RECONOCER SUS CEROS Y RAICES

ANALISIS:

Es de fundamental importancia este objetivo, entre otras cuestiones para comprobar si cualquier ecuación o sistema está bien resuelto. Igualmente para comprobar si la factorización de un polinomio está bien llevada a cabo.

METODOLOGIA:

a) Dado un polinomio en *x,* hallar su valor numérico para $x = 10$ y para otros valores.

Para $x = 10$, es interesante, ya que puede verse la llamada descomposición factorial de un número en base decimal. Sirva el siguiente ejemplo:

«Valor numérico del polinomio $2x^2 + 7x + 6$ para $x = 10$».

Será $2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 6 = 200 + 70 + 6 = 276$.

b) Dado un polinomio y distintos números racionales, hallar su valor numérico en estos casos, para, seguidamente, preguntar cuáles de tales números son ceros o raíces.

c) Saber escribir un polinomio de un grado determinado, cuyo valor numérico sea un número dado, para un valor de la indeterminada expresado previamente.

d) Dado un polinomio factorizado, preguntar cuáles son sus ceros, lo que se evidencia, ya que basta con que un factor (que ha de ser un binomio de primer grado) sea nulo. De esta manera ya va viendo el alumno la forma de expresar un polinomio en descomposición factorial, lo cual se estudiará en el objetivo 5.2.9.

e) Escribir polinomios de raíces previamente dadas.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados sugerimos:

1. Dados diversos pares de números $(x_i, y_i) \in Q \times Q$, saber reconocer si son ceros o raíces de un polinomio de dos indeterminadas.

2. Para cualquier polinomio en dos indeterminadas *x, y,* dadas varios valores de *x,* hallar los correspondientes de *y* que lo anulan. De esta forma resolverá, de forma indirecta, ecuaciones de primer grado, puesto que se habrá definido el polinomio con la indeterminada «y» de ese grado.

B) Para los que tengan dificultades sugerimos:

Que el alumno averigüe el valor de un monomio para números naturales y enteros, con el fin de sucesivamente irlo generalizando, pasando de monomios a polinomios y de números enteros a racionales.

Tema 5.2: OPERACIONES CON POLINOMIOS

OBJETIVO:

5.2.1. ADQUIRIR EL CONCEPTO DE LA OPERACION ADICION DE POLINOMIOS EN Q

ANALISIS:

Conocido ya el concepto de polinomio se estudia la adición de polinomios, que habrá de ser comprendida como operación.

En nuestro caso, la operación, para ser tal, ha de cumplir los tres requisitos siguientes:

a) Ser *binaria.*

b) Ser *cerrada* o *interna.*

c) Ser *aplicación.*

Simbolizando el conjunto de polinomios en la indeterminada *x* por P [x] (o si se prefiere por Q [x]), y cualquier polinomio por p(x), q(x), etcétera, sin confundirlo con funciones polinómicas, se definirá dicha operación en la forma:

$$P[x] \times P[x] \xrightarrow{\quad + \quad} P[x]$$

$$[p(x), q(x)] \xrightarrow{\quad + \quad} p(x) + q(x) = r(x)$$

De esta forma se indica que a *cada par* de elementos (polinomios) corresponde por la operación *otro* polinomio, lo que equivale a que es *binaria* e *interna.*

La comprensión de la operación-adición es básica para entender bien el significado de la propiedad asociativa, tal y como explicaremos en el objetivo 5.2.2.

La *diferencia* de polinomios no ha de ser considerada operación, sino un caso particular de la adición, consistente en la suma del polinomio-minuendo con el opuesto del polinomio-sustraendo, como se expondrá en el objetivo 5.2.2.

METODOLOGIA:

Por lo expuesto anteriormente, la progresión puede ser ésta:

a) Recordar lo que es una operación y las condiciones requeridas, si bien ya lo han estudiado en los conjuntos *N, Z* y *Q,* tanto en la adición como en la multiplicación.

b) Hacer ejercicios donde puedan comprender claramente las tres condiciones indicadas.

DIFICULTADES:

Generalmente, el alumno memoriza la operacion a través del simbolismo $P[x] \times P[x] \xrightarrow{+} P[x]$, así como las tres condiciones que caracterizan a una operación. En las actividades de retroacción indicaremos la forma en que ha de procederse para aclarar tales condiciones.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más avanzados:

1. Definirle al alumno operaciones, y que compruebe si cumple todos los requisitos indicados.

2. Por el contrario, que sea el alumno quien intente imaginar alguna correspondencia o aplicación y después comprobar si es o no operación en el conjunto dado.

B) Para los que tienen dificultades:

Como indicábamos antes, hay alumnos que memorizan tal operación (así como otras y en conjuntos), pero no han llegado a comprender qué es una operación.

Para ello es conveniente que no utilice simbolismos, pero que a través de ejercicios, comenzando por sencillos, vea qué significa ser *binaria,* ser *interna* y poseer *la propiedad uniforme.*

OBJETIVO:

5.2.2. RECONOCER LAS PROPIEDADES DE LA ADICION DE POLINOMIOS EN Q Y AUTOMATIZACION DE CALCULOS

ANALISIS:

Se pretende con este objetivo que el alumno domine todas las propiedades de la operación-adición de polinomios.

Las fundamentales son las siguientes:

Asociativa, conmutativa, elemento neutro (o polinomio cero), elemento simétrico (lo que equivale a decir que todo polinomio tiene un opuesto y solo uno), con las que el par (P [x] , +), tendrá estructura de *grupo abeliano o conmutativo,* si bien no se indicará al alumno, ya que no se estudian estructuras, pero con lo dicho queda abierto el tema para su estudio en 1.° de B.U.P.

Otras propiedades serán las siguientes:

Opuesto del opuesto, o sea op [op (p(x))] = p(x).

Opuesto de la adición, o sea op [p(x) + q(x)] = op [p(x)] + op [q(x)].

El polinomio opuesto tiene fundamental importancia porque sirve para expresar la *diferencia o sustracción* como caso particular de la adición, consistente en la suma del polinomio-minuendo con el opuesto del polinomio-sustraendo, como ya indicamos en el objetivo 5.2.1.

Tendremos así:

$$p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)] = p(x) + \text{op}\,[q(x)].$$

Por otra parte, no debe confundirse *automatización* en el cálculo con *mecanización* en el mismo

La *automatización* consiste en que el alumno efectúe la operación u operaciones y dé los pasos sucesivos a través del signo igual cuantas veces sea necesario, de tal manera que sepa explicar las propiedades que va utilizando.

Por ello, es conveniente que en los signos igual exponga, sobre todo al principio, la propiedad en que se basa para efectuar el paso, sólo así conseguirá la automatización.

Adquirido este objetivo, el alumno no utilizará frases convencionales como «quitar paréntesis», «quitar denominadores», etc., sin que previamente razone qué propiedad aplica.

METODOLOGIA:

A base de ejemplos se comprobará (no demostrará) todas y cada una de las propiedades dichas.

Seguidamente se hará la siguiente *progresión:*

a) *Adición de dos monomios semejantes.* —El resultado ha de ser otro monomio semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

b) *Adición de dos monomios no semejantes.* —Debe quedar claro que el resultado *no* es otro monomio sejemante a ellos, sino un polinomio (binomio), de grado igual al monomio de mayor grado.

c) *Adición de polinomios.* —Se obtiene otro polinomio de grado igual al grado del polinomio que tiene mayor grado, salvo en el caso de que los monomios de grado mayor de cada polinomio sean opuestos. Se debe insistir en que los casos a) y b) no son sino casos particulares del c), ya que todo monomio, conforme se ha aclarado, es un tipo particular de polinomio.

También se deberán comprobar, aunque sean casos particulares de la adición, los siguientes:

d) *Sustracción de monomios semejantes.* —Es otro monomio semejante a los dados, de coeficiente diferencia de los coeficientes de los monomios minuendo y sustraendo.

e) *Sustracción de dos monomios no semejantes.* —A través de ejemplos deberá notar el alumno que *no* da como resultado otro monomio semejante, sino un polinomio (binomio), de grado el del monomio que tiene mayor grado.

f) *Sustracción de polinomios.* —El resultado es otro polinomio, de grado el del polinomio que tenga mayor grado, salvo en aquellos casos en que ambos sean del mismo grado y los monomios de mayor grado iguales.

DIFICULTADES

a) El alumno, en general, está acostumbrado a simbolizar la propiedad asociativa en cualquier conjunto ya estudiado (N, Z, Q) en la forma $(a + b) + c = a + (b + c)$.

¿Pero en realidad ha comprendido su significado? La experiencia nos ha demostrado que no. Basta con indicarle que efectúe la siguiente suma $3 + 4 + 8$, para que responda como resultado 15. Preguntándole seguidamente qué le ha permitido sumar *tres* números, no sabrá responder, ya que no relaciona esta suma con la definición, previamente estudiada, de la operación-adición, que solo está definida para *dos* elementos del conjunto, sea el que fuera.

Por ello, se cree conveniente simbolizar tal propiedad, si es que cumple, en la forma siguiente:

$$a + b + c = \begin{matrix} \nearrow (a + b) + c \\ \searrow a + (b + c) \end{matrix}$$

De esta forma, lo que es adición de *tres* elementos, y que no se ha definido, sí podrá llevarse a efecto con cualquiera de las expresiones del segundo miembro, ya que al asociarse *dos* elementos de los *tres,* los sumandos son tan sólo *dos,* y en consecuencia se podrá aplicar la operación-adición, que quedará así perfectamente comprendida.

En nuestro caso pondremos:

$$p(x) + q(x) + r(x) = \begin{matrix} \nearrow [p(x) + q(x)] + r(x) \\ \searrow p(x) + [q(x) + r(x)] \end{matrix}$$

o en la forma corriente $[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$.

b) En cuanto al elemento neutro, que puede ser cualquiera de los de la forma Ox^0, Ox^1, Ox^2, ..., e incluso la suma de estas expresiones, debe quedar constancia, según indicamos anteriormente, que *carece de grado,* o lo que es lo mismo, que *el grado del polinomio cero carece de sentido matemático,* ya que en caso contrario no podríamos precisar el grado de un polinomio, pues se le podría sumar cualquier monomio de la forma Ox^n, $n \in N$, quedando así la indeterminación ya indicada.

Por otra parte, debe aclarársele al alumno que si bien el polinomio neutro se simboliza por el número 0, no debe confundírsele con los elementos neutros, y que también se simbolizan por 0 de los conjuntos N, Z, Q.

c) Opuesto del opuesto de un polinomio:

O sea: $op\ [op(p(x))] = p(x)$, lo que equivale a decir que *el polinomio opuesto* del *opuesto de un polinomio* es el polinomio dado, que también se simboliza:

$$-[-p(x)] = p(x).$$

Sin embargo, se ha acostumbrado mal al alumno en muchos casos a decir «menos por menos = más», lo que no es cierto aquí, si bien el resultado es el mismo.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos mejor dotados:

1. Para éstos es conveniente que las propiedades no sólo las comprueben, sino que las demuestren.

2. Que realicen un cuadro-resumen del conjunto P[x] con todas las propiedades respecto a la adición, de tal manera que se vaya creando en el alumno la capacidad de síntesis.

B) Para los alumnos con dificultades:

Es conveniente que vayan estudiando las propiedades a través de los monomios con coeficientes en Z, para después irlo ampliando a polinomios, hasta que todas las propiedades queden perfectamente captadas.

OBJETIVO:

5.2.3. RECONOCER POLINOMIOS IGUALES, Y HALLAR LA FORMA REDUCIDA DE UN POLINOMIO

ANALISIS:

Se trata de captar el concepto de polinomios iguales, reconocer polinomios iguales y saber hallar la forma reducida de un polinomio.

Es imprescindible para la operación-adición de polinomios reconocer la forma reducida de un polinomio, ya que en ella se ha de hacer la «reducción de términos o monomios semejantes» hasta llegar al polinomio reducido, suma de los polinomios-sumandos y en consecuencia iguales.

METODOLOGIA:

a) Escribir dos polinomios iguales, y que el alumno compruebe si así es.

b) Escribir *tres* polinomios iguales y que a través de ellos *compruebe* el alumno las tres propiedades de la relación de equivalencia (igualdad).

c) Dar varios polinomios, y que el alumno escriba cada uno en forma reducida.

d) Dado un polinomio, escribir otro igual a él, pero compuesto por distintos monomios (de forma intuitiva el alumno irá sumando monomios y polinomios sin la definición previa de tal operación).

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que superen con facilidad el nivel medio:

1. *Demostrar* (no comprobar) las *tres* propiedades de la relación de igualdad de polinomios, previa definición de la relación binaria, y establecer cuáles son sus clases de equivalencia.

2. *Comprobar* la igualdad de dos polinomios, ambos definidos con *dos* indeterminadas.

B) Para los alumnos con dificultades:

Comenzar con monomios iguales (o equivalentes), que sólo difieran en la expresión del coeficiente, por ejemplo, $+2x^3$ y $+4/2x^3$, para sucesivamente pasarlo a tres monomios y después a polinomios, comenzando por sencillos, hasta generalizarlo a otros más complicados.
Otro tanto puede decirse de la forma reducida de un polinomio.

OBJETIVO:

5.2.4. ADQUIRIR EL CONCEPTO DE LA OPERACION MULTIPLICACION DE POLINOMIOS EN Q

ANALISIS:

La adición y la multiplicación de polinomios guardan un gran paralelismo, con algunas excepciones que se expondrán en el objetivo 5.2.5, al estudiar sus propiedades.
La operación deberá ser, por tanto, binaria, cerrada o interna, y poseer la propiedad uniforme.

Se definirá la multiplicación como una *aplicación,* en la forma siguiente:

$$P\,[x] \times P\,[x] \xrightarrow{\cdot} P\,[x]$$

$$[p(x),\, q(x)] \xrightarrow{\cdot} p(x) \cdot q(x) = r(x).$$

De esta forma queda definida la operación como binaria e interna.

Al igual que en la adición, la comprensión de la multiplicación es fundamental para después entender bien la propiedad asociativa.

METODOLOGIA:

Es similar a la de la adición, es decir:

a) Recordar lo que es una operación, y las condiciones requeridas, aunque ya deberá estar bien comprendido por haberlo estudiado en otros conjuntos y en $(P\,[x]\,,\,+)$.

b) Hacer ejercicios de todos los tipos en esta operación, que demuestren la plena comprensión de las tres condiciones requeridas.

c) Intensificar el estudio de la propiedad uniforme a través de múltiples ejercicios, hasta que se vea que el alumno ha comprendido a fondo esta propiedad.

DIFICULTADES:

Generalmente, el alumno memoriza la operación a través del simbolismo $P[x] \times P[x] \xrightarrow{\cdot} P[x]$, así como las *tres* condiciones que caracterizan a una operación. En las actividades de retroacción indicaremos la forma en que ha de procederse para aclarar tales condiciones.

ACTIVIDADES:

Para los alumnos más avanzados sugerimos:

a) Definirles alguna operación, o relación binaria que no sea operación, en P[x], y que comprueben si cumplen todos las tres condiciones indicadas.

b) Que intenten definir alguna relación binaria en P[x], y después comprueben qué requisitos de los tres fundamentales cumple.

Por otra parte hay alumnos que memorizan simbólicamente tal operación (así como otras y en otros conjuntos), pero no han llegado a comprender qué es una operación.

Para ello es conveniente que no utilicen simbolismos, pero que, a través de ejercicios, comenzando por sencillos, vea qué significa ser *binaria,* ser *interna* y poseer la *propiedad uniforme.*

OBJETIVO:

5.2.5. RECONOCER LAS PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION DE POLINOMIOS EN Q, SACAR FACTOR COMUN Y AUTOMATIZAR LOS CALCULOS

ANALISIS:

Se pretende aquí que todas las propiedades de la multiplicación sean bien comprendidas.

En primer lugar se estudia la propiedad asociativa. Puede decirse otro tanto de lo indicado respecto a esta propiedad en la adición por la importancia allí apuntada.

El elemento neutro es el $1x^{o}$, que se simboliza por el 1. El alumno no debe confundir este elemento con el 1 perteneciente a N, Z ó Q, ya que pertenecen a conjuntos distintos.

Si a cualquier alumno se le pregunta cuál es el polinomio simétrico (inverso) del monomio-polinomio $5x^4$, su respuesta es, frecuentemente, $1/5x^4$ Si seguidamente se le indica que lo compruebe, opera de la forma siguiente:

$$5x^4 \cdot \frac{1}{5x^4} = \frac{5x^4}{5x^4} = 1x^{o} = 1,$$

quedando plenamente convencido de que tal comprobación está perfectamente hecha. Sin embargo, no se ha dado cuenta de que su error ha estribado en que la expresión algebraica $1/5x^4$ *no* es un polinomio, a pesar de haber insistido en ello con anterioridad. Por tanto, en general, no todo elemento tiene su inverso, es decir, *no existe polinomio simétrico* para cada polinomio de una indeterminada, definido en Q. Esta es la razón por la que *no podemos hablar,* en todos los casos, o mejor en general, de la *división* de polinomios, ya que es el producto de un polinomio por el inverso de otro polinomio.

Pero ello no quiere decir que ningún polinomio tenga inverso. Cualquier número racional (salvo el cero), considerando como polinomio, sí lo tiene, es decir, por ejemplo:

$$5 = 5x^{o} \text{ tiene por simétrico } \frac{1}{5x^{o}} = \frac{1}{5},$$

que también es un polinomio.

Vemos, pues, que mientras en la adición todo polinomio tenía simétrico, razón por la que el par (P[x], +) era grupo conmutativo, respecto a la multiplicación no existen elementos simétricos. Por ello la estructura del par (P[x], ·) es de *semigrupo conmutativo con elemento unidad,* ya que la *propiedad conmutativa* también existe en la multiplicación.

Queda, por último, el estudio de la *propiedad distributiva* de la multiplicación respecto a la adición.

Es importante esta propiedad por varios motivos:

a) Enlaza la segunda operación con la primera.

b) Con ella, la terna (P[x], +, ·) adquiere estructura de *anillo conmutativo con elemento unidad,* sin hacer mención al alumno que tal estructura cuyo estudio efectuará en B.U.P.

METODOLOGIA:

Será similar al ya indicado para la operación adición de polinomios, es decir que el alumno *compruebe* (y no que demuestre) a través de ejemplos, sencillos en principio, y más complicados después, que las propiedades enunciadas se verifican.

Pero previamente debe seguirse este orden:

a) *Producto de dos monomios semejantes.* —El resultado será otro monomio *no semejante* a los factores, que tiene por coeficiente el producto de dos coeficientes y por *grado* la suma de grados.

b) *Producto de dos monomios no semejantes.* —El polinomio-monomio será similar al del caso anterior, es decir *un monomio, no dos,* con coeficiente y grado ya indicados en a).

c) *Producto de un polinomio por un monomio.* —No es sino la propiedad distributiva, previamente estudiada.

d) *Producto de dos polinomios cualesquiera.* —El resultado será otro polinomio que surge de aplicar la propiedad distributiva de cada monomio del segundo polinomio por el primero. Después se sumarán monomios o términos semejantes. El *grado* será igual a la suma de los grados de los respectivos polinomios factores.

e) Comenzar con ejercicios sencillos, pero en los que, en el signo igual, el alumno exprese la propiedad en que se basa y la operación a que pertenece. Se comenzará con monomios, entre los que estará el elemento neutro o elemento unidad 1.

f) Una vez hechos ejercicios de todos los tipos en los que intervengan solamente la multiplicación, se utilizará la propiedad distributiva de ésta respecto a la adición. Conviene utilizar polinomios no canónicos, al objeto de que así el alumno pueda proceder de las dos formas y comprobar después la igualdad de los resultados.

g) Exponer polinomios procedentes de la propiedad distributiva, y hacer que el alumno exprese tal polinomio como producto de un polinomio por un monomio.

h) Similar al anterior pero que el polinomio dado proceda del producto de dos polinomios. Tanto en el caso e) como en el f) no es conveniente que el alumno utilice la frase «quitar paréntesis» al menos al principio, al igual que en g) y h) no hablen de «sacar factor común». Es imprescindible que «vean» y expliquen la propiedad utilizada para conseguir la *automatización operativa.*

Las clases de operaciones y propiedades que han de utilizar y los tipos de ejercicios resultantes quedan expuestos anteriormente.

Es conveniente que en los casos a) y b) se efectúe el producto haciendo uso de la propiedad asociativa en la forma siguiente:

$$\left(\frac{3x^2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2x^3}{5}\right) = \left[\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)\right] (x^2 \cdot x^3) = -\frac{6x^5}{20}.$$

DIFICULTADES:

a) Las ya indicadas, tanto en el polinomio unidad como la no existencia del elemento simétrico.

b) Acostumbrado el alumno a que se le mencione la frase «sacar factor común» no relaciona esta propiedad con la distributiva, cuando en realidad hablamos de la misma, tomada en ambos sentidos.

$$a\,(b + c) \rightleftarrows ab + ac, \text{ en nuestro caso}$$

$$p(x) \cdot [q(x) + r(x)] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sacar} \\ \text{factor común}}}{\overset{\substack{\text{propiedad} \\ \text{distributiva} \\ \uparrow}}{\rightleftarrows}} p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x).$$

c) El alumno comete frecuentemente el error de confundir la propiedad asociativa con la distributiva, ya desde el cálculo con números, es decir, opera así: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$, cuando en realidad no es cierto. También ocurre a la inversa, es decir, confundir la 2.ª con la 1.ª, $a\ (b + c) = a \cdot b + c$, que tampoco es verdadero.

Todo ello ocurre porque el alumno opera *mecánicamente,* es decir, no comprendiendo bien en qué propiedad se basa para operar, la cual debe mencionar, y no utilizar frases como «quitar paréntesis», etc.

ACTIVIDADES:

Para los alumnos que superen con facilidad el nivel medio:

a) Para éstos es conveniente que las propiedades no sólo las comprueben a través de ejemplos, sino que las *demuestren.*

b) Que realicen un cuadro-resumen del conjunto P[x] con todas las propiedades respecto a la multiplicación, con la finalidad de que se vaya formando en el alumno la capacidad de síntesis, y otro cuadro resumen con las propiedades distributivas.

Por otra parte, conviene que el alumno menos dotado vaya estudiando las propiedades a través de los ejercicios más sencillos, comenzando con monomios de coeficientes en Z, para después irlo ampliando a polinomios, hasta que todas las propiedades queden perfectamente captadas.

OBJETIVOS:

5.2.6. DESARROLLAR, RECONOCER Y COMPLETAR EL CUADRADO DE UN BINOMIO; SUMA DE DOS MONOMIOS POR LA DIFERENCIA DE LOS MISMOS; CUADRADO DE UN POLINOMIO

ANALISIS:

a) En cuanto al desarrollo del cuadrado de un binomio, suma por diferencia de dos monomios, y cuadrado de un polinomio, no son sino casos particulares de las operaciones estudiadas en objetivos anteriores, pero que por presentarse con frecuencia en *comprobaciones* y *demostraciones,* es conveniente que se manejen con soltura.

b) Inversamente, el alumno debe recordar trinomios, que son desarrollos de los tres casos a estudiar.

c) En consecuencia, el alumno debe saber completar tales desarrollos, a los que les falte algún monomio, e incluso saber buscar expresiones con las que operar para llegar a cuadrados perfectos, y que servirán para resolver ecuaciones como es hallar la *fórmula* para la ecuación de segundo grado, o para encontrar el *vértice* de la parábola representativa de la función parabólica $y = ax^2 + bx + c$.

METODOLOGIA:

a) Comenzar poniendo ejercicios sencillos, como pueden ser $(x + 3)^2$, cuyo valor hallará teniendo en cuenta que $(x + 3)^2 = (x + 3)\ (x + 3)$.

Igualmente hará otros de la forma $(x^2 + 2x)\ (x^2 - 2x)$, $(3x^2 + 2x - 7)^2$.

Una vez realizados los ejercicios suficientes, y analizados los resultados de todos ellos, habrá descubierto las fórmulas respectivas, y que ha de memorizar.

b) Tales fórmulas las puede *comprobar* el alumno a través de los desarrollos $(x + y)^2$, $(x + y)\ (x - y)$ y $(x + y + z)^2$, pero, a pesar de su sencillez, tiene el inconveniente de ser polinomios con 2 ó 3 indeterminadas. No obstane, creemos que debe efectuarse.

c) En el proceso inverso, el alumno debe comenzar por reconocer trinomios, que ya son cuadrados perfectos.

Seguidamente, poner igualdades, unas ciertas y otras falsas, hasta saber distinguirlas.

d) Por último, se pondrán igualdades incompletas, para añadir los términos que falten.

e) Entre estos ejercicios, es conveniente que algunos no se «vean» inmediatamente, sino que se hayan de multiplicar por ciertas expresiones, hasta que el desarrollo sea completo, incluso sumando y restando los monomios necesarios.

Con estos pasos se habrá conseguido el objetivo previsto.

DIFICULTADES:

a) Las expresiones similares a las siguientes:

$$(x^2 - 2x)^2 \quad , \quad (-x^3 + 5)^2 \quad , \quad (-x^2 - 5x)^2,$$

$$(2x + 3) \cdot (2x - 3) \quad , \quad (2x^2 - 3x^3 + 5x)^2,$$

son, generalmente, mal desarrolladas por lo siguiente:

La 1.ª es considerada como cuadrado de una diferencia.

La 2.ª es considerada como cuadrado de una suma.

En la 3.ª, al decir «cuadrado del 1.° menos cuadrado del 2.°, se interpreta como cuadrado del 1.er binomio menos cuadrado del 2.° binomio.

En el cuadrado del polinomio todos los monomios son considerados como positivos. En realidad, el alumno debe acostumbrarse a hablar de cuadrado de un binomio, y no cuadrado de una suma o cuadrado de una diferencia. Por ello, deben ser las expresiones 1.ª, 2.ª, 3.ª y 5.ª de la forma siguiente:

$$[(+x^2) + (-2x)]^2 \quad , \quad [(-x^3) + (+5)]^2 \quad , \quad [(-x^2) + (-5x)]^2 \text{ y}$$

$$[(+2x^2) + (-3x^3) \underline{\underline{\pm}} (\underline{\underline{\pm}} 5x)]^2,$$

donde hemos subrayado en este último el signo MÁS dos veces por tener DOS significados bien diferentes. En la primera es el símbolo de la operación suma, como podía haberse utilizado otro. En la segunda significa que el monomio es positivo. Esta aclaración debe ser hecha al alumno desde el estudio de los números enteros.

b) Otra dificultad es confundir suma de cuadrados de binomios con el cuadrado de un binomio.

c) Una tercera dificultad está cuando un monomio es un número racional, y el otro de cierta complejidad; tal puede ser el caso de

$$\left(-\frac{3x^3}{4} + 2\right) \cdot \left(-\frac{3x^3}{4} - 2\right).$$

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

Efectuar ejercicios de todos estos tipos pero con binomios y polinomios de dos indeterminadas.

B) Para los alumnos con dificultades:

Comenzar por ejercicios de los más sencillos, previa memorización de las reglas del desarrollo en todos los casos. Debe habituarse a tales desarrollos con soltura para intentar después efectuar otros más complejos.

Es conveniente que no utilice el cuadrado de un polinomio, pero sí que calcule tal ejercicio basándose en la noción de potencia y propiedad distributiva.

OBJETIVO:

5.2.7. CALCULAR COCIENTES DE POLINOMIOS ENTRE MONOMIOS Y ENTRE EL BINOMIO x−a

ANALISIS:

Ya se ha visto que, en la multiplicación de polinomios, no siempre existe elemento inverso. En consecuencia, la división de polinomios no es operación, ya que dados dos polinomios, no siempre existe el polinomio-cociente, y por tanto no es aplicación y no es cerrada.

Puesto que la terna (P[x], +, ·) tiene estructura de anillo conmutativo con elemento unidad (el polinomio 1), y además es *dominio de integridad* (ya que no tiene *divisores de cero,* lo que equivale a decir que el producto de dos polinomios distintos de cero nunca da este polinomio), pueden dársenos dos casos:

a) Que el resto sea cero: *división exacta.*

b) Que el resto sea distinto de cero: *División entera.*

Entonces sí existirá el *polinomio-cociente,* con la condición de que el grado del polinomio-dividendo sea mayor o igual que el grado del polinomio-divisor.

El estudio que haremos no será el de polinomio entre polinomio, por el exceso operativo que ello requiere, sino el de polinomio entre monomio, éste de menor grado que aquél, y el de polinomio entre el binomio (x − a), esta división de gran importancia por lo siguiente:

a) Se debe utilizar para que el alumno, a través de ejemplos, pueda *comprobar* que el valor numérico de un polinomio para x = a, coincide con el resto de la división de dicho polinomio entre (x − a).

De esta forma el alumno habrá captado el *«teorema»* del *resto,* sin haberle obligado a demostrarlo.

b) Sirve para comenzar a aprender la división de polinomio entre polinomio, que si bien aquí no efectuaremos, sin embargo no es más que una generalización de la división indicada.

c) Sirve para hallar los *ceros* o *raíces* de un polinomio.

d) Es útil para hallar las *soluciones* o *raíces* de una ecuación de grado superior al primero.

e) Sirve para *comprobar* que las *soluciones enteras* de una ecuación son divisiones del término independiente de dicha ecuación.

f) Para factorizar polinomios, como explicaremos en el objetivo 5.2.9.

g) Para obtener los criterios de divisibilidad de las divisiones $(x^n \pm b^n) : (x \pm b)$.

METODOLOGIA:

Puede ser ésta:

a) *División de un monomio entre otro monomio.*—El grado del monomio-cociente será igual a la diferencia entre los grados de los monomios dados.

El coeficiente del monomio-cociente será igual a la división de los coeficientes de los monomios dividendo y divisor.

b) *División de un polinomio entre un monomio.*—Se completará y ordenará el polinomio dividendo (de no estarlo) de mayor a menor potencia. Se dividirá el primer monomio del polinomio dividendo entre el monomio divisor y así sucesivamente hasta que el grado del resto (que será un monomio del polinomio dividendo) sea de grado menor que el del divisor.

Conviene que la división se compruebe si está bien a través de la conocida regla $D = dc + r$, que en nuestro caso será:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x).$$

c) Seguidamente se explica cómo se efectúa la división de un polinomio ordenado en x por el binomio $(x - a)$, comenzando como siempre por los ejercicios más sencillos. El cociente será de grado una unidad menor que el grado del dividendo, mientras que el grado del resto será *cero.* Consecuentemente, el resto será un número racional distinto de *cero* (división entera) o cero (división exacta).

d) Una vez dominada la división anterior, es conveniente que el alumno calcule el valor numérico del polinomio-dividendo de los ejercicios anteriores, para el valor $x = a$ respectivo del binomio-divisor. Así *observará* que los valores obtenidos coinciden con los restos de las divisiones respectivas.

En consecuencia, ha llegado al *teorema del resto,* como ya antes apuntábamos, *sin efectuar demostración alguna.*

DIFICULTADES:

Dada la sencillez del objetivo, en la primera parte no han de encontrarse. La división entre $(x - a)$ y $(x + a)$ tampoco, a base de actividades. Observen que $x + a = x - (-a)$ para cuestiones posteriores.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos más aventajados:

a) Efectuar divisiones en las que el divisor sea de la forma $mx \pm n$, $m, n, \in Q$. Esto obligará al alumno a transformar el divisor en la forma

$\left(x \pm \frac{n}{m}\right)$ para que el coeficiente sea 1. Por tanto, la división primitiva: $p(x) = (mx \pm n) \cdot c(x) + r$, adoptará la forma:

$$\frac{p(x)}{m} = \left(x \pm \frac{n}{m}\right) \cdot c(x) + \frac{r}{m}.$$

Se verá que el resto ha quedado dividido por *m* sin haber alterado el cociente de la división pedida. A la vista de ellos, ya podrá expresar el alumno la división primitiva.

b) Indicar al alumno que en la expresión simbólica de la división efectuada, es decir $p(x) = (x - a) \cdot c(x) + r$, $r \in Q$, sustituya *x* por *a* en ambos miembros, lo que equivale a calcular el valor numérico de p(x), o sea p(a), quedando:

$$p(a) = (a - a) \cdot c(a) + r \Rightarrow \boxed{p(a) = r}$$

Habrá *demostrado* así el *teorema del resto.*

Por último, si r = o, habrá obtenido la condición necesaria y suficiente para que p(x) sea divisible por (x — a) sin efectuar división.

c) Hallar los criterios de divisibilidad de las divisiones $(x^n \pm b^n) : (x \pm b)$, para lo que habrá de utilizar el teorema del resto sin efectuar la división.

d) Pedir la exactitud o no de divisiones, de divisor $(x \pm a)$, sin efectuarlas.

e) Que compruebe si son *ceros* o no ciertos valores dados de *x* en algunos polinomios.

B) Para los alumnos con dificultades:

Hacer ejercicios desde los más elementales hasta que el alumno domine *exclusivamente* las partes pedidas en el objetivo.

OBJETIVO:

5.2.8. APLICAR LA REGLA DE RUFFINI

ANALISIS:

La regla de Ruffini es importante por la rapidez que aporta a las divisiones del tipo p(x) : (x — a), también porque la obtención de tal regla obliga al alumno a ir tomando soltura en la demostración de fórmulas, ya que de aquí, partiendo de la división ordinaria mencionada, obtiene el método por el que se van obteniendo los distintos coeficientes del cociente buscado, así como el resto.

METODOLOGIA:

La progresión conveniente puede ser ésta:

a) Efectuar de forma ordinaria la división de un polinomio p(x) por el binomio (x — a).

b) El alumno debe obtener, a ser posible, la ley de formación de los coeficientes.

- El grado del cociente es una unidad inferior al del dividendo, si bien ya lo conocía de antes.
- El primer coeficiente del cociente coincide con el primero del polinomio-dividendo.
- Cualquiera de los coeficientes siguientes se obtienen multiplicando por *a* el coeficiente anterior del cociente, y sumándole el correspondiente del polinomio-dividendo.
- El resto es igual al último coeficiente del cociente, multiplicándole por *a* y sumándole el término independiente o último coeficiente del polinomio-dividendo.
- El resto ha de ser un número racional, ya que su grado será inferior (como ya sabe del estudio previo) al del polinomio-divisor, y el de éste es 1.

c) Explicar al alumno el planteamiento práctico o esquema que se utiliza para realizar dicha división, en el que el dividendo debe estar ordenado y completo (sustituyendo por *ceros* los coeficientes de los monomios que faltan).

Efectuado esto, explicar cómo debe expresarse el resultado obtenido, es decir, en la forma,

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x) + r.$$

d) Cuando el divisor es de la forma x + a, basta hacer observar al alumno que x + a = x — (— a). Así comprende el alumno fácilmente el signo que ha de dar a *a,* particularmente cuando ha de aplicar el teorema del resto.

DIFICULTADES:

Suelen surgir cuando el divisor es x + a en vez de x — a, cosa que ya quedó aclarada anteriormente.

ACTIVIDADES:

Para los alumnos mejor dotados, que hagan divisiones por este procedimiento, similares a las que apuntábamos en el objetivo anterior, es decir, que el divisor sea de la forma mx ± n.

Para los alumnos menos capacitados, creemos que basta con que memoricen la regla dada, si no llegan a comprender fácilmente la obtención de los coeficientes del cociente, así como el resto.

OBJETIVO:

5.2.9. FACTORIZACION DE POLINOMIOS

ANALISIS:

De gran importancia es también este objetivo, ya que, entre otras aplicaciones, tiene la resolución de ecuaciones de grado superior al primero, para hallar los *ceros* o *raíces* de un polinomio, etc., si bien aún no lo podemos aplicar al caso de ecuaciones por no haber sido aún estudiadas éstas.

Aquí podemos ver lo fundamental que es el haber obtenido, aún *sin demostracion,* el *teorema del resto,* que indicábamos en el objetivo 5.2.7, donde se llegaba a dos conclusiones:

a) El enunciado del teorema $p(a) = r$ para $x = a$, y por tanto:

b) Si $p(a) = o \Leftrightarrow p(x)$ es divisible por $(x - a)$, lo que equivale a decir que tal polinomio puede expresarse en la forma, ya varias veces repetida:

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x),$$

donde $p(x)$ ha quedado descompuesto en el producto de dos polinomios, donde $c(x)$ será de grado inferior al de $p(x)$ en una unidad.

Por otra parte, si el polinomio se anula para $x = b$, lo que el alumno puede hallar teniendo en cuenta lo dicho en el objetivo 5.2.7:

«Las *raíces* o *soluciones enteras* de una ecuación (y en consecuencia, las *raíces* o *ceros* del polinomio que la define), son divisores del término independiente, podrá hallar éstos, positivos y negativos, y comprobar cuáles anulan al polinomio».

Por tanto, si $x = b$ anula a $p(x)$, también anula a $c(x)$, y la expresión será $c(x) = (x - b) \cdot c'(x)$, y el polinomio quedará de esta forma:

$$p(x) = (x - a)\ (x - b)\ c'(x).$$

Así podrá seguirse. Pero tendremos en cuenta lo siguiente:

Sabemos que el número de factores en que puede descomponerse un polinomio, coincide con el grado que tenga. Pero ocurre que, a veces, las raíces pueden ser números complejos o reales irracionales, aún no estudiados.

Por tanto, las primeras y segundas raíces (números reales y complejos) hay que desecharlos. En cuanto a los números racionales habrán de ser dados previamente al alumno.

En consecuencia, habrá que indicar que todo polinomio tiene, *«a lo más»,* tantas raíces como indica el grado del polinomio, y por ello éste, en su factorización, aparecerá *«a lo más»* con tantos binomios como valga el grado del polinomio. Si es de grado *n* tendrá como mucho *n* factores binomios.

METODOLOGIA:

a) Comenzar por sencillos ejemplos, como pueden ser diferencias de cuadrados, y cuadrados de binomios desarrollados, que ya está acostumbrado a reconocer.

b) Dar polinomios de grado 2, y una de sus raíces, y pedir que se halle la otra, que conseguirá por la regla de Ruffini.

c) Seguir con polinomios de tercer grado, y dar dos de sus raíces, para que halle la tercera, que puede ser un número racional.

d) Continuar con polinomios de grado igual o mayor que el tercero, que tengan todas sus raíces enteras, o todas menos una (racional), y sin darle ninguna pedir que los factorice.

Así habrá de hacer uso de los divisores del término independiente.

e) Por último, pedir la descomposición de polinomios que tengan raíces complejas.

Aclaración.—Hay polinomios que tienen raíces dobles, triples, etc., por lo que *toda raíz* ha de volverse a comprobar sobre el nuevo cociente, viendo si le anula.

6. PROPORCIONALIDAD DE MAGNITUDES
DURACION: 12 SEMANAS

Tema 1: APLICACIONES LINEALES. MAGNITUDES PROPORCIONALES

OBJETIVO:

6.1.1. RECONOCER SERIES DE NUMEROS PROPORCIONALES

ANALISIS:

Consideramos que está conseguido el objetivo, cuando los alumnos sepan distinguir, entre dos conjuntos numéricos finitos, si existe entre ellos una proporcionalidad; determinar la «razón» en caso afirmativo; expresar matemáticamente aplicaciones de $Q^+ \rightarrow Q^+$ que sean proporcionalidades, y observar que estas proporcionalidades son aplicaciones biyectivas.

METODOLOGIA:

Una manera que nos parece sencilla de iniciar este estudio es proponer, por ejemplo, dos conjuntos de cuatro números cada uno, de manera que uno de ellos se obtenga multiplicando cada elemento del otro por el mismo número.

Observar que los elementos del segundo conjunto no son arbitrarios.

Pasar a series de más de cuatro elementos.

Finalmente establecer la aplicación:

$$\begin{array}{ll} Q^+ \rightarrow Q^+ & \\ x \rightarrow ax & a \in Q^+. \end{array}$$

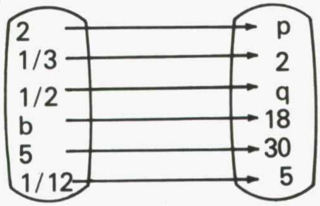
— La falta de agilidad en el cálculo con elementos de Q^+ será el obstáculo mayor a superar.

ACTIVIDADES:

Como mínimo hemos de conseguir que sepan establecer proporcionalidades sencillas y calcular imágenes y antiimágenes de los elementos.

Por ejemplo:

Dados los conjuntos



Se pide:

a) Coeficiente de proporcionalidad.

b) p, q, r.

c) b.

Para los más aventajados ejercicios del mismo tipo en los que el coeficiente de proporcionalidad sea un número racional.

OBJETIVO:

6.1.2. COMPRENDER Y APRENDER LAS CONDICIONES CARACTERISTICAS DE LAS APLICACIONES LINEALES

ANALISIS:

Este objetivo desarrollará fundamentalmente la capacidad operativa en los alumnos y será el instrumento imprescindible para el desarrollo del tema 2 (Aplicación a los problemas clásicos de la aritmética).

Consideraremos alcanzado el objetivo, cuando sepan calcular las imágenes de la suma y producto por un número de elementos en una proporcionalidad, así como enunciar gramatical y matemáticamente las dos propiedades fundamentales de las aplicaciones lineales.

METODOLOGIA:

Partiremos de la aplicación:

$$\begin{array}{lll} Q^+ & \rightarrow Q^+ & \\ x & \rightarrow ax & a \in Q^+. \end{array}$$

Para un *a* fijo y conocido calculamos las imágenes de dos elementos cualesquiera y comparamos con la imagen de la suma de esos elementos. Después de varios ejercicios de este tipo hemos de llegar a la formulación de la propiedad $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Seguiríamos multiplicando un elemento por el número b, calculamos su imagen y la comparamos con el elemento originario, observando que la imagen también queda multiplicada por b. Es decir: $f(b \cdot x) = b \cdot f(x)$.

Representaríamos las aplicaciones gráficamente y observaríamos que todas las gráficas pasan por el origen.

— Es posible que algunos alumnos extrapolen la propiedad de la suma al producto por un número:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(b \cdot x) \neq f(b) \cdot f(b).$$

Se verá más claro cuando trabajemos con la magnitud número de obreros, por ejemplo, y vean que los números b y x representan cosas distintas y que no se pueden multiplicar obreros por obreros.

ACTIVIDADES:

Hemos de conseguir como mínimo que dada una aplicación sepan distinguir si es o no lineal.

Para los alumnos aventajados se les pueden proponer distintas maneras de construir una proporcionalidad.

OBJETIVO:

6.1.3. RECONOCER DOS MAGNITUDES PROPORCIONALES

ANALISIS:

En realidad este objetivo está conseguido en los anteriores. Le consideramos conseguido, cuando dadas dos magnitudes y una aplicación entre ellas el alumno sepa decir si se trata de una proporcionalidad.

Está separado de los anteriores con el fin de repasar el concepto de magnitud, visto en el ciclo medio, y para insistir en ejemplos de magnitudes distintas de Q^+, que son las que con mayor frecuencia aparecen en la vida real.

METODOLOGIA:

De cursos anteriores los alumnos deben tener captados los conceptos de magnitud, cantidad de magnitud y medida de una magnitud; bien entendido que no tendrán formulación matemática de estos conceptos. No obstante, debemos repasarlos con el fin de que puedan alcanzar un mayor nivel de abstracción. Así, por ejemplo, se puede llegar a distinguir entre magnitud absoluta y relativa e iniciar, con algún ejemplo, magnitudes escalares.

En cuanto al problema de la medida, hemos de insistir en que depende de la unidad elegida y dejar abierto el problema de la medida real.

Partiremos de dos conjuntos de magnitudes distintas para que el alumno establezca entre ellos diversas proporcionalidades, comprobando que cumplen las dos propiedades que vimos en las aplicaciones lineales.

Llegaremos a la caracterización de las proporcionalidades.

Dos magnitudes son proporcionales, cuando si a la cantidad x le corresponde la y, a la $b \cdot x$ le corresponde $b \cdot y$.

Esta propiedad incluye la de la suma: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Conviene remarcar que para concluir que dos magnitudes son proporcionales, no basta con observar que al crecer o disminuir una crece o disminuye la otra.

— El gran problema de la medida aparece en este objetivo con la proporcionalidad en magnitudes geométricas, que sabemos es imposible abordar rigurosamente en este nivel, por lo que nos parece conveniente hacer hincapié en que el número que representa la magnitud depende de la unidad elegida.

ACTIVIDADES:

Hemos de conseguir que todos los alumnos reconozcan en ejemplos concretos las magnitudes y entre éstas si son o no proporcionales.

OBJETIVO:

6.1.4. PASAR DE UNA PROPORCIONALIDAD DE MAGNITUDES A UNA NUMERICA Y OBSERVAR LAS PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

ANALISIS:

Lo más normal y probablemente lo más conveniente es que manejen magnitudes del tipo: número de obreros, pesetas, etc., en las que automáticamente se trabaja con la medida de la magnitud y prácticamente confunden este objetivo con el anterior. Sin embargo existen ejemplos sencillos de magnitudes en geometría, donde se construye la proporcionalidad sin usar para nada la medida: como la magnitud segmentos (tema 3), ángulos, etc.

Entenderemos que han alcanzado el objetivo, cuando dadas dos magnitudes proporcionales sepan escribir numéricamente la relación que existe entre la medida de las cantidades de una y las correspondientes en la otra. Cuando sepan qué se entiende por «razón», «proporción» y sepan establecerlas.

METODOLOGIA:

Si desde el principio habíamos trabajado con medidas de magnitudes, prácticamente tenemos vista la mayor parte del objetivo.

Fijándonos, en una proporción concreta, la escribiremos de las ocho formas distintas y equivalentes posibles. Calculemos medios y extremos para continuar con el estudio de las propiedades más importantes:

1. $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{c+d}{c}$.

2. $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$.

3. $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

....

....

Si hemos construido la proporcionalidad de magnitudes sin recurrir a la medida, se puede pasar a ésta e integrarse en el proceso anterior o bien seguir el camino que se expone en la proporcionalidad geométrica. Conviene insistir realizando muchos ejercicios.

— Las únicas dificultades que deben aparecer son las derivadas del cálculo.

ACTIVIDADES:

Hemos de conseguir como mínimo que toda la clase maneje correctamente las proporciones numéricas y todas las propiedades.

Para los más aventajados se les incitaría a la demostración de las propiedades.

Tema 2: APLICACION A PROBLEMAS CLASICOS DE LA ARITMETICA

OBJETIVO:

6.2.1. PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS DE REGLA DE TRES SIMPLE

ANALISIS:

Nos referiremos siempre a la regla de tres simple y directa como se dice en la introducción de los objetivos del tema.

Consideraremos conseguido el objetivo, cuando el alumno sepa leer correctamente los ejercicios, interprete los datos y los sepa expresar en el lenguaje de proporcionalidades.

Como caso particular importante aparecen los problemas de «tanto por ciento».

METODOLOGIA:

Es la que se desprende directamente del análisis del objetivo. Es decir:

1. Leer correctamente el enunciado.
2. Encontrar las magnitudes.
3. Establecer la proporcionalidad.
4. Calcular el dato desconocido.

En los problemas de «tantos por ciento» será conveniente introducir algunas notaciones propias.

Si el objetivo 6.1.4 está bien conseguido no deben encontrar ningún tipo de dificultades.

ACTIVIDADES:

Como mínimo hemos de conseguir que resuelvan con soltura problemas cuyo enunciado no tenga excesivas complicaciones.

Para los más aventajados se les pueden proponer problemas en los que antes de establecer la proporcionalidad se necesite realizar alguna operación.

OBJETIVO:

6.2.2. PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS DE REPARTOS PROPORCIONALES

ANALISIS:

Este objetivo resulta ser una aplicación directa de las propiedades de las proporciones estudiadas en el 6.1.4.

Por tanto consideraremos conseguido el objetivo, cuando el alumno plantee y resuelva con soltura estos problemas aplicando las propiedades correspondientes.

Sepan resolver problemas de repartos proporcionales inversos.

Como ejercicio importante aparece la conocida «Regla de compañía».

METODOLOGIA:

Empezaremos recordando que una de las propiedades obtenidas al estudiar las proporciones, era que dada la proporcionalidad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}$ se obtiene $\frac{a+c+f}{b+d+g} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}$.

Dado un ejercicio de repartos proporcionales estudiamos la proporcionalidad entre sus magnitudes, para terminar aplicando la propiedad anterior.

El reparto proporcional inverso lo introducimos definiéndolo como un reparto que es proporcional a los inversos de los números.

Terminaremos proponiendo ejercicios de repartos proporcionales en los que las magnitudes que intervienen sean los capitales de una sociedad o compañía.

— Nos parece oportuno insistir en que el alumno distinga claramente entre «repartir» y «repartir proporcionalmente», expresiones que causan bastantes errores.

ACTIVIDADES:

a) Problemas de enunciado más complejo.

b) Problemas de enunciado sencillo.

OBJETIVO:

6.2.3. PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS DE REGLA DE TRES COMPUESTA

ANALISIS:

Siendo este objetivo de tanta aplicación en la vida real, hemos de tener mucho cuidado en la presentación que hacemos de la *proporcionalidad compuesta,* fundamento de este objetivo.

La regla de tres simple inversa aparece sencillamente como caso particular de ésta.

Comprenderá además el «Interés simple», «Descuento comercial» y «Letras de cambio».

Consideraremos conseguido el objetivo cuando los alumnos adquieran soltura en la resolución de problemas de estos tipos.

METODOLOGIA:

De los distintos caminos que se pueden seguir para conseguir este objetivo resaltaremos:

a) El clásico, consistente en dar reglas de actuación sin justificar y aplicarlas (No recomendado).

b) Utilizando propiedades de las proporcionalidades. Nos parece más conveniente este segundo y daremos una leve pauta para su desarrollo con un ejemplo.

Pensemos en el problema:

5 obreros tardan tres días en hacer una pared de 24 m.

¿Cuántos metros harán 7 obreros durante 10 días?

Observamos que hay una «especie» de aplicación de obreros y días en metros de pared. Además la magnitud obreros es proporcional a la magnitud metros de pared y la magnitud días es también proporcional a la magnitud metros de pared.

Podemos expresar $f(5 \text{ ob.} \otimes 3 \text{ d.}) = 24$ m., y si en ella son válidas las propiedades de las proporciones

$$f(5 \text{ ob.} \otimes 3 \text{ d.}) = 5\, f(1 \text{ ob.} \otimes 3 \text{ d.}) = 5 \cdot 3\, f(1 \text{ ob.} \otimes 1 \text{ d.}) = 24 \text{ m.}$$

Por tanto, $f(1 \text{ ob.} \otimes 1 \text{ d.}) = \dfrac{24}{5 \cdot 3}$.

Por la misma razón:

$$f(7 \text{ ob.} \otimes 10 \text{ d.}) = 7 \cdot 10\, f(1 \text{ ob.} \otimes 1 \text{ d.}) = x;$$

luego,

$$\boxed{7 \cdot 10 \cdot \frac{24}{5 \cdot 3} = x} \qquad \boxed{x = 112 \text{ m.}}$$

Si proponemos un problema del mismo tipo del anterior en el que en las dos proporciones el número de metros sea el mismo y la cantidad desconocida son los días, con una resolución totalmente análoga resolveremos la regla de tres simple inversa.

Si en el enunciado del problema la cantidad desconocida es el número de días, tendremos un problema de regla de tres compuesta y combinada de directa e inversa.

A continuación trataremos del interés simple, descuentos comerciales y letras de cambio, dando los nombres característicos de estos problemas.

Las dificultades propias de cálculo habrán de subsanarse a base de realizar innumerables problemas.

ACTIVIDADES:

a) Problemas de enunciado complejo.

b) Problemas de enunciado más simple.

Tema 3: PROPORCIONALIDAD GEOMETRICA Y SU RELACION CON LA MEDIDA

OBJETIVO:

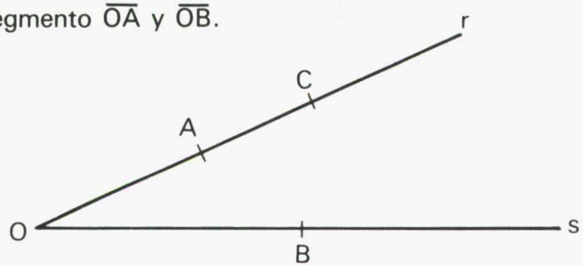
6.3.1. ENUNCIAR Y APLICAR EL TEOREMA DE THALES

ANALISIS:

Consideramos que está cubierto el objetivo, cuando sepan calcular las imágenes de segmentos con origen en la intersección de las dos semirrectas y también calcular los originales. Cuando mediante la experimentación observan que las medidas de esos segmentos son proporcionales y enuncian el teorema de Thales.

METODOLOGIA:

Una manera de llegar al teorema de Thales, sería pidiendo a los alumnos que dibujen dos rectas concurrentes r y s y en cada una de ellas un segmento $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.



Luego establecemos una aplicación de los segmentos de la primera en la segunda, así: para calcular la imagen de $\overline{OC}$, trazamos por C la paralela a la recta AB y en el punto que corte a s es el extremo del segmento imagen.

Fácilmente verán que es una aplicación y una proporcionalidad.

Podemos repetir la experiencia midiendo esos segmentos y observando que forman una proporción numérica.

DIFICULTADES:

Nos aparecen dos dificultades de fondo:

1.ª En realidad estamos trabajando con segmentos generales, pero no sería posible abordar la construcción correcta, no por su dificultad (que la tiene), sino por la extensión de ella.

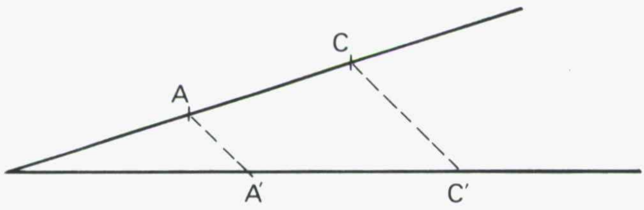
2.ª La medida de esos segmentos, que necesita el número real y por tanto inaccesible.

Al usar el procedimiento indicado no se debe eludir si en la mente de algún alumno surgen estos problemas.

ACTIVIDADES:

Como mínimo hemos de conseguir que sepan calcular las imágenes de un segmento cualquiera y comprobar que las medidas son proporcionales.

Los más aventajados pueden traducir a la proporcionalidad de segmentos las propiedades que se vieron en las proporciones numéricas (6.1.4), concretamente al segmento $\overline{AC}$ le corresponde el $\overline{A'C'}$, aunque ni A ni C sean el origen.



OBJETIVO:

6.3.2. DESARROLLAR LA CAPACIDAD DE CONSTRUCCION GRAFICA QUE SE DERIVA DEL TEOREMA DE THALES

ANALISIS:

En este objetivo trabajaremos con los segmentos de la proporcionalidad geométrica prescindiendo de la medida, aunque en algunos casos nos ayudemos de ellas para comprobar resultados.

Consideraremos conseguido el objetivo, cuando los alumnos sepan:

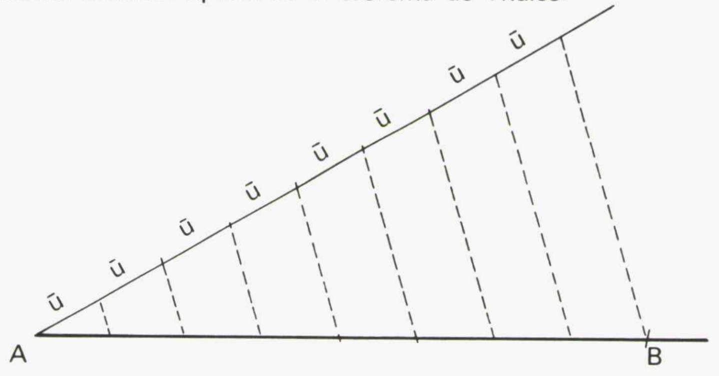
a) Dividir un segmento en cierto número de partes iguales.

b) Dividir un segmento en partes proporcionales a otros dados.

c) Construir el cuarto proporcional a tres segmentos.

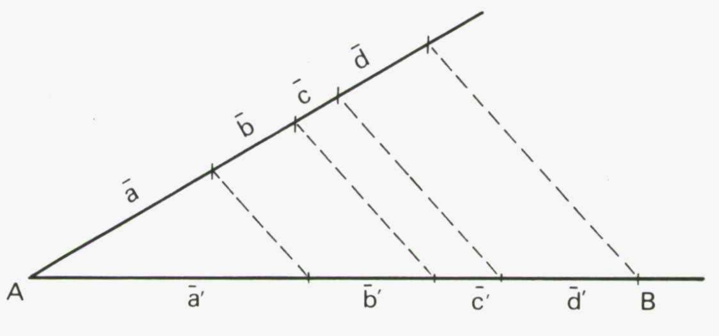
METODOLOGIA:

Partimos de dos semirrectas con el mismo origen y no pertenecientes ambas a la misma recta. Sobre una de ellas llevamos el segmento $\overline{AB}$, que queremos dividir en partes iguales, y sobre la otra, elegido un segmento unidad $\bar{u}$, le representamos consecutivamente tantas veces como partes iguales queramos dividir $\overline{AB}$, en la figura 8, y mediante el trazado de paralelas estamos aplicando el teorema de Thales.



Hemos de destacar que tanto las semirrectas como la unidad que usemos no influyen en el resultado.

Para el apartado *b),* sobre una de las semirrectas ponemos el segmento a dividir proporcionalmente y sobre la otra los segmentos $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, etc., consecutivamente, como vemos en la figura, y mediante el trazado de paralelas obtenemos los segmentos $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$, $\bar{d}'$, que por el teorema de Thales son proporcionales a los dados y cuya suma es el segmento $\overline{AB}$.



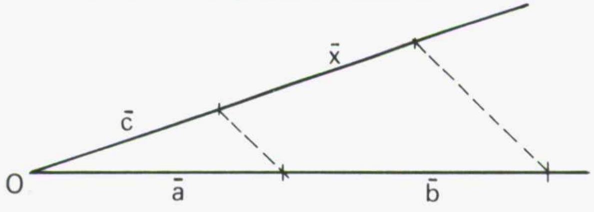
Observemos que los segmentos a, b, c, d, etc., los podemos representar en la semirrecta en cualquier orden.

Para el apartado *c),* hemos de tener muy presente la definición de cuarta proporcional:

$\bar{x}$ es cuarta proporcional a los segmentos $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, cuando se verifique $\dfrac{\bar{a}}{\bar{b}} = \dfrac{\bar{c}}{\bar{x}}$.

Es, pues, imprescindible que demos tres segmentos solamente y además en un orden.

Sobre una de las semirrectas llevamos consecutivamente las dos primeras y sobre la otra el tercero (ver figura). Uniendo los extremos del 1.° ($\bar{a}$) y el 3.° ($\bar{c}$) y trazando la paralela por b obtenemos $\bar{x}$, que por el teorema de Thales se obtiene la proporcionalidad.



— Las dificultades pueden surgir si el alumno previamente no ha trabajado con segmentos generales.

ACTIVIDADES:

Como mínimo hemos de conseguir que los alumnos manejen con soltura la escuadra y el cartabón. Vean que con la ayuda del compás trabajan con segmentos sin necesidad de saber su medida y que cuando usan ésta es como mera comprobación de lo realizado.

Para los más aventajados se les puede añadir la construcción de la tercera proporcional y que apliquen en los segmentos las propiedades de las proporciones.

OBJETIVO:

6.3.3. ESTABLECER LAS PROPORCIONES QUE SE DAN ENTRE LOS LADOS DE DOS TRIANGULOS EN POSICION DE THALES

ANALISIS:

Este objetivo resolverá los problemas relativos al cálculo de medidas de lados en ciertos triángulos.

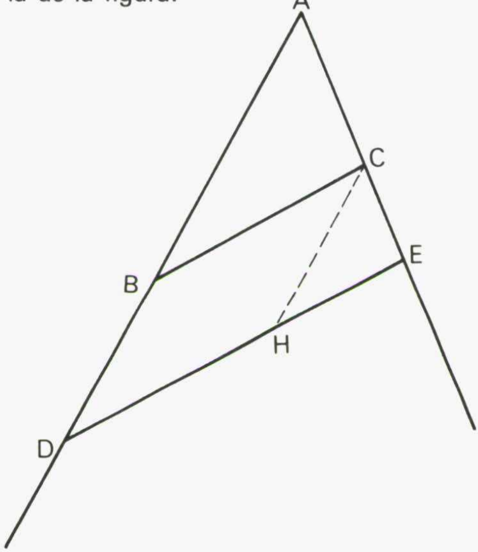
Consideraremos conseguido el objetivo cuando se sepa:

a) Distinguir si dos triángulos están en posición de Thales.

b) Calcular medidas de lados de triángulos en esta posición conocidos algunos de ellos.

METODOLOGIA:

Partiremos definiendo cuándo dos triángulos están en posición de Thales. Mediante regla y compás haremos sobre la cuartilla los movimientos necesarios para que los triángulos ocupen una posición como la de la figura:



$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.

La proporcionalidad de los lados en los dos triángulos, exceptuando $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$, está conseguida en los objetivos anteriores. Si trazamos por C una paralela a $\overline{AD}$, considerando los triángulos $\widehat{CEH}$ y $\widehat{AED}$ están también en posición de Thales, que BCHD es un paralelogramo y las propiedades de las proporciones (6.1.4), llegaremos a establecer la proporcionalidad entre los tres lados de los triángulos.

— Nos aparece una nueva dificultad al estar trabajando con ángulos generales y la doble aplicación del teorema de Thales referida a los vértices A y E de la figura; hemos de aplicar cuidadosamente las propiedades de las proporciones para llegar al resultado que pretendemos.

ACTIVIDADES:

Hemos de conseguir como mínimo que resuelvan con soltura ejercicios como el propuesto en el análisis.

Para los más aventajados se les pueden poner ejercicios que relacionan perímetros y áreas de triángulos en posición de Thales.

7. GEOMETRIA DEL ESPACIO
DURACION: 10 SEMANAS

Tema 1: RELACION DE PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO ENTRE RECTAS, RECTAS Y PLANOS Y ENTRE PLANOS. DESCRIPCION, CONSTRUCCION Y RECONOCIMIENTO DE LOS CUERPOS GEOMETRICOS

OBJETIVO:

7.1.1. RECONOCER Y MANEJAR LAS RELACIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD EN EL ESPACIO

ANALISIS:

Entendemos que el objetivo está alcanzado, cuando el alumno *reconozca, represente, note* e identifique:

1.° La determinación de un plano, por una recta y un punto, por dos rectas secantes o por tres puntos no alineados.

2.° Las relaciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas en el espacio, las posiciones relativas de dos rectas, de recta y plano y de dos planos en el espacio.

3.° La condición de perpendicularidad de recta y plano.

4.° Angulos de lados paralelos en el espacio y de dos rectas que se cruzan en el espacio, rectas ortogonales, ángulos diedros y poliedros, y

5.° Establezca las relaciones de igualdad o suplementariedad en los ángulos de lados paralelos.

Todos los aspectos señalados, que básicamente pretenden el desarrollo de la intuición espacial, deben incluirse en el segundo año del ciclo superior.

Al hacerse el estudio y representación de la recta y el plano debe aclararse que, siendo ambos ilimitados, no podemos realizar su representación gráfica de un modo completo; esto, nos limitará para la recta, dibujar una parte de ella, y para el plano, una porción del mismo, representado, por ejemplo, con un paralelogramo.

Las dificultades parten de la ausencia de intuición espacial, de no ver en perspectiva los elementos y cuerpos geométricos y de la falta de conocimientos sobre paralelismo y perpendicularidad en el plano. Es frecuente que los alumnos confundan las rectas que se cortan con las que se cruzan. Por tanto, es evidente que el objetivo se verá facilitado al contar con elementos materiales —geoespacio de P. Adam y de F. Troconiz— que permitan materializar las cuestiones planteadas.

De los puntos señalados en el análisis, consideramos como fundamentales:

a) Los de paralelismo, que facilitará el reconocimiento de los cuerpos geométricos, y

b) Los de perpendicularidad, que ayudarán a la comprensión de los problemas de distancia entre puntos y planos, etc.

METODOLOGIA:

Sugerimos:

1.° Identificación de un plano mediante imágenes tomadas de la realidad y determinación del mismo utilizando una recta y un punto, dos rectas secantes y tres puntos no alineados.

2.° Representación y notación de planos en perspectiva e identificación en modelos geométricos y reales, de rectas parelelas, rectas que se cruzan y rectas que se cortan; de rectas y plano que se cortan, de recta paralela a un plano y de recta contenida en un plano.

3.° Idem de planos paralelos, planos que se cortan y planos superpuestos, de recta y plano perpendiculares.

4.° Notación de las diferentes posiciones relativas de dos rectas en el espacio, de recta y plano y su dibujo en perspectiva.

5.° Observación y determinación de la recta común a dos planos secantes; de que una recta perpendicular a un plano lo es a toda recta del plano que pasa por su pie; de que el ángulo formado por una recta perpendicular a un plano y cualquier recta del plano que pase por su pie, es recto; etc...

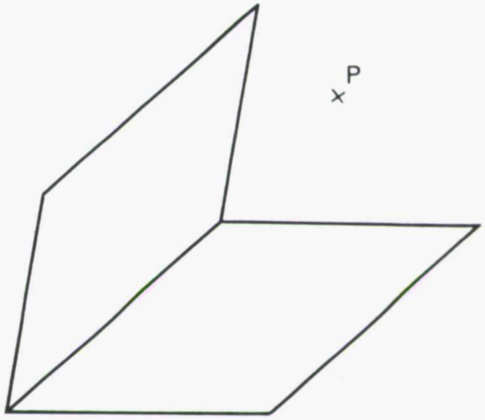
6.° Identificación de que rectas ortogonales, son rectas que se cruzan y forman un ángulo recto, distiguiendo este concepto del de rectas secantes perpendiculares.

7.° Identificación, representación y notación de un ángulo diedro y de un ángulo poliedro, enumerando sus elementos.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

En la figura, traza desde P las perpendiculares a los dos planos. ¿Cómo es el plano determinado por éstas respecto a la recta intersección de los dos dados?



B) Para los alumnos con dificultades:

Análisis y observación de planos, rectas, vértices, etc... en cuerpos de la vida real, y determinación del paralelismo, perpendicularidad, etc.

OBJETIVO:

7.1.2. CONOCER, DIBUJAR Y CONSTRUIR EN CARTULINA LOS PRINCIPALES CUERPOS GEOMETRICOS, SABIENDO DESCRIBIRLOS Y CARACTERIZARLOS

ANALISIS:

El objetivo estará logrado cuando el alumno:

Reconozca, represente, construya, note, describe, caracterice y *enumere* los elementos de:

a) Los poliedros: prisma-cubo; pirámide-tetraedro y tronco de pirámides, y

b) Los cuerpos geométricos de revolución: cilindro, cono, esfera y tronco de cono.

Todos los aspectos señalados anteriormente deberán incluirse en el segundo año del ciclo superior.

Recomendamos para alumnos aventajados la deducción de la relación entre la diagonal del cubo y su arista, la de la diagonal de un ortoedro y sus tres aristas, la de la proporcionalidad entre los segmentos determinados en las aristas laterales y las propias aristas, al trazar un plano paralelo a la base en las pirámides, etc., al final del ciclo superior.

Las mayores dificultades en el logro del objetivo suelen encontrarse en el reconocimiento de la perpendicularidad y paralelismo entre las caras, caras y aristas y arista de los cuerpos dibujados en perspectiva y el trazado en ellos de diagonales de caras o del cuerpo.

METODOLOGIA:

Sugerimos:

a) Construcción en cartulina de un cubo, un tetraedro y observación de su desarrollo.

b) Reconocimiento y descripción de prismas, del ortoedro como prisma cuadrangular y de pirámides.

c) Determinación de secciones paralelas en pirámides.

d) Reconocimiento y descripción de un tronco de pirámide y de un cilindro recto, enumerando sus elementos.

e) Observación de que un cilindro de revolución se engendra por la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

f) Reconocimiento y descripción de un cono y enumeración de sus elementos.

g) Observación de que un cono de revolución viene engendrado por un triángulo rectángulo al girar alrededor de uno cualquiera de sus catetos.

h) Determinación de secciones paralelas en conos.

i) Reconocimiento y descripción de un tronco de cono como resultado de truncar un cono por un plano paralelo a la base y enumeración de sus elementos.

j) Reconocimiento y descripción de la esfera y de la superficie esférica, enumerando sus elementos.

k) Determinación de la superficie esférica por la rotación de una semicircunferencia al girar alrededor de su diámetro.

l) Reconcimiento y descripción de las figuras esféricas: casquete, segmento de una base, zona, segmento de dos bases, huso y cuña.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

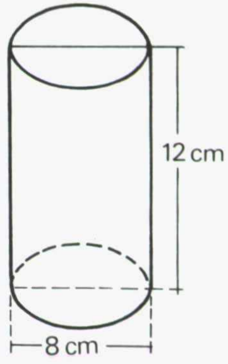
Dibujar en un cubo sus diagonales (diagonales de las caras y del cubo). Escribir las posiciones relativas entre:

a) Las diagonales del cubo.

b) Las diagonales correspondientes a las dos caras opuestas.

B) Para los alumnos con dificultades:

Construir en cartulina el cuerpo aquí representado.



Tema 2: MEDIDA DE SUPERFICIES Y VOLUMENES

OBJETIVO:

7.2.1. JUSTIFICAR LAS FORMULAS QUE DAN LUGAR AL AREA DE LOS CUERPOS ESTUDIADOS

ANALISIS:

El objetivo implica que el alumno:

1.° *Justifique,* mediante su desarrollo, el área lateral y total de: prismas rectos, pirámides regulares, troncos de pirámides regulares, cilindro de revolución, cono de revolución y tronco de cono de revolución, y

2.° *Identifique* la fórmula que da lugar al área de la superficie esférica, el casquete esférico, la zona esférica y el huso esférico.

El logro de este objetivo, que habrá de superarse en el segundo año del ciclo superior, exige el desarrollo de los cuerpos enumerados, y de éste, la deducción de las fórmulas de sus áreas laterales y totales.

Las dificultades que aparecen son las derivadas de la falta de conocimientos en cuanto a las áreas de las figuras planas y la visión en perspectiva de los cuerpos; requisito necesario para la justificación de las fórmulas que den sus áreas.

METODOLOGIA:

Todo el proceso metodológico debe ir precedido de la identificación de la figura, del desarrollo y descripción del cuerpo, de la experimentación a través de las medidas de sus áreas para, posteriormente, generalizar en las fórmulas correspondientes.

Sugerimos:

a) Desarrollo de prismas rectos y cálculo y justificación de sus áreas laterales y totales.

b) Desarrollo de pirámides regulares y cálculo y justificación de sus áreas laterales y totales.

c) Desarrollo de troncos de pirámides regulares y cálculo y justificación de sus áreas laterales y totales.

d) Idem del cilindro.

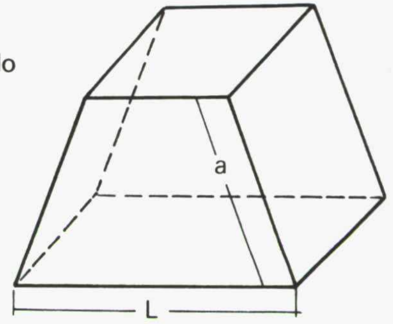
e) Idem del cono y tronco de cono.

f) Identificación de las fórmulas de las áreas de la esfera y figuras esféricas.

ACTIVIDADES:

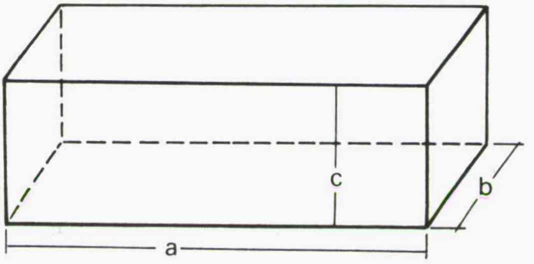
A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Determina, partiendo del desarrollo del tronco de pirámide cuadrangular regular, aquí dibujado, su área lateral.



B) Para los alumnos con dificultades:

Desarrolla la figura aquí dibujada y justifica que su área lateral es igual a $(2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c)$.



OBJETIVO:

7.2.2. JUSTIFICAR LAS FORMULAS QUE DAN EL VOLUMEN DE LOS CUERPOS ESTUDIADOS

ANALISIS:

Este objetivo estará alcanzado, cuando el alumno *justifique* las fórmulas que dan lugar al volumen de:

- El cubo.
- El ortoedro.
- El prisma.
- La pirámide.
- El cilindro.
- El cono.

Y cuando *identifique* las fórmulas del volumen de:

- Una esfera.
- Una cuña esférica.

Al decir justificar las fórmulas que dan el volumen no se nos oculta la dificultad que a nivel de E.G.B. implica este concepto.

Considerar el volumen de un cuerpo como la medida de su extensión espacial, tomando la de otro como unidad y comprobar experimentalmente la existencia de cuerpos —cuerpos equivalentes— que tienen la misma extensión, o sea, el mismo volumen, serán las bases de partida para el logro del presente objetivo.

Como el proceso de averiguar el volumen de un cuerpo observando las veces que su extensión contiene a la de otro que tomemos por unidad no es fácil, y a veces complicado, es conveniente introducir ciertas reglas o principios —principio de Cavalieri— que resuelvan la justificación de la fórmula empleada. Nuestra meta final estará en la justificación de estas fórmulas y en los automatismos de su aplicación.

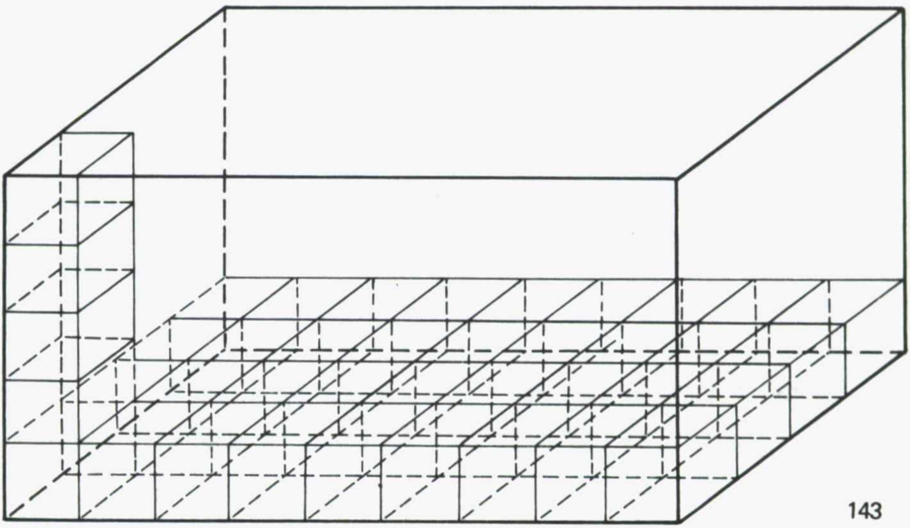
Las dificultades en el desarrollo de este objetivo son análogas a las enumeradas para el cálculo de áreas, falta de conocimientos sobre áreas de figuras planas y de visión de las figuras geométricas en perspectiva y junto a ellas la falta de aplicabilidad de los teoremas del triángulo rectángulo.

METODOLOGIA:

Sugerimos:

1.° Verificación experimental de la «equivalencia de cuerpos» utilizando recipientes de capacidad un litro y distintas formas.

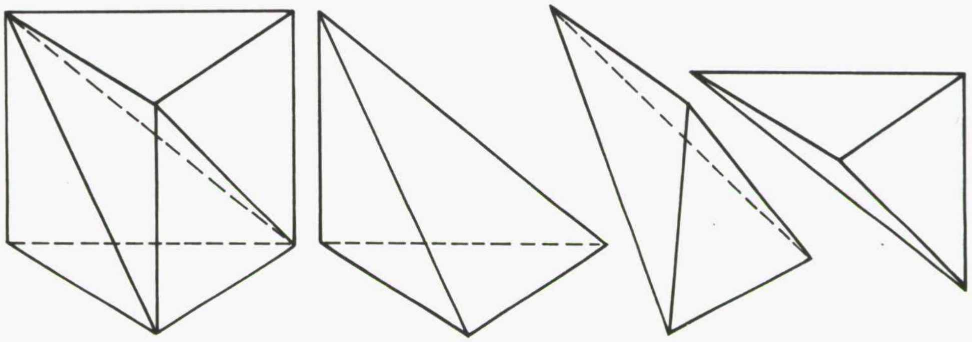
2.° Justificación sobre un modelo geométrico, del volumen de un ortoedro, como el número que resulta de multiplicar las longitudes de sus tres aristas, medidas con la misma unidad; o bien del producto del área de su base por la altura.



3.° Justificación del volumen de un cubo, considerando el cubo como un ortoedro en el que sus tres aristas tienen igual longitud.

4.° Justificación de los volúmenes de un prisma y un cilindro por comparación con un ortoedro de base equivalente a las de los cuerpos —prisma y cilindro— y la misma altura (principio de Cavalieri).

5.° Justificación del volumen de una pirámide triangular por equivalencia a la tercera parte de un prisma triangular, de base equivalente e igual altura.



6.° Justificación de los volúmenes de una pirámide y un cono por comparación con el de una pirámide triangular, de base equivalente a la de la pirámide y la del cono, e igual altura (principio de Cavalieri).

7.° Justificación de los volúmenes del tronco de pirámide y del tronco de cono por la diferencia de volúmenes de dos pirámides o de dos conos y la proporcionalidad resultante de trazar planos paralelos a las bases.

8.° Identificación de la fórmula del volumen de la esfera como igual a un tercio del producto del área de su superficie esférica por el radio.

9.° Justificación de la fórmula de la cuña esférica, por la proporcionalidad directa, entre el volumen de las cuñas de una esfera y la medida de su amplitud.

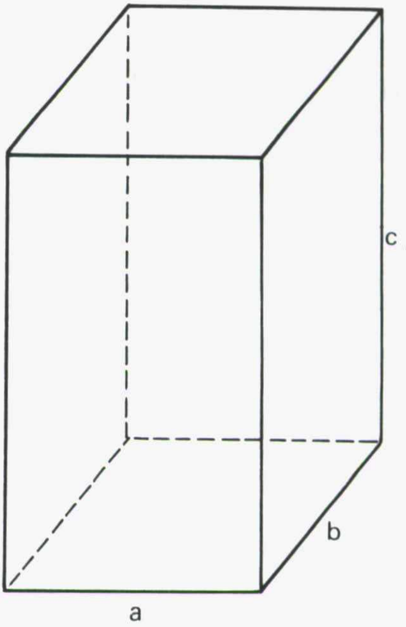
ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Justificación de la fórmula que da el volumen de un tetraedro regular de arista «a».

B) Para los alumnos con dificultades:

Justificación de la fórmula que da el volumen de un ortoedro del que conocemos sus tres aristas.



OBJETIVO:

7.2.3. RESOLVER PROBLEMAS DE AREAS Y VOLUMENES DE LOS CUERPOS ESTUDIADOS

ANALISIS:

Este objetivo estará alcanzado, cuando el alumno *plantee, resuelva* y *discuta* las soluciones de:

- Problemas que impliquen el conocimiento de las áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos.
- Problemas deducidos de la vida cotidiana: capacidad de un recipiente, litros de un depósito, volumen de un recinto, etc...
- Problemas relacionados con la dimensión que debe tener un determinado cuerpo en función de los restantes, de su área o de su volumen.
- Problemas que nos sugiere el estudio de otras disciplinas: Física, Geografía, Química, etc...
- Problemas que exijan para su solución un razonamiento basado en las propiedades geométricas.

El desarrollo de este objetivo se iniciará en el segundo año del ciclo superior para áreas en problemas sencillos y se completará en el último año de dicho ciclo para toda clase de ejercicios.

Bien sabemos las dificultades que encuentran los alumnos a la hora de resolver un problema. Los siguientes consejos pueden ser útiles para el logro del objetivo:

A. *Comprender el problema,* es decir, deducir de su lectura estas preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál o cuáles son las condiciones establecidas? ¿Son suficientes las condiciones impuestas para hallar la incógnita?

B. *Concebir un plan,* que basado en nuestros conocimientos, relacione los datos y la incógnita. Para ello será necesario recordar si en otra ocasión se ha presentado un problema semejante y si el plan escogido nos permite emplear todos los datos contenidos en el enunciado.

C. *Ejecución del plan,* que nos llevará al planteo del problema. Recomendamos la comprobación de cada uno de sus pasos para estar seguros de encontrarnos en el camino correcto.

D. *Examen de la solución o soluciones,* que nos exigirá verificar el resultado y analizar qué solución o soluciones son válidas y si debemos eliminar algunas.

METODOLOGIA:

En orden a las consideraciones formuladas en el análisis y supuestos alcanzados los objetivos sobre cuerpos geométricos, el proceso metodológico conducente a la resolución de los problemas constará:

1.° Lectura detenida del enunciado, encaminada a la determinación de la incógnita.

2.° Dibujo de la figura geométrica a la que hace referencia el enunciado, observando y señalando en ella los datos aportados.

3.° Reflexión sobre las relaciones geométricas existentes en datos e incógnita y formalización de estas relaciones mediante las correspondientes ecuaciones, o bien en problemas de construcciones, el dibujo de aquellos elementos geométricos necesarios, deducidos de las relaciones encontradas.

4.° Resolución de las ecuaciones planteadas, verificando todos sus pasos y deducción de la solución.

5.° Discusión de las soluciones, despreciando aquellas que no tengan sentido.

ACTIVIDADES:

A) Para alumnos que han superado el nivel medio:

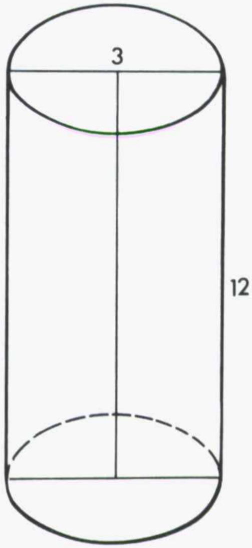
La variedad de ejercicios es múltiple. Un ejemplo puede ser:

En un depósito de forma cúbica de 5 m. de lado, el espesor de la capa de agua que contiene es de 3,12 m. Calcular el área de la superficie mojada.

B) Para alumnos con dificultades:

Sugerimos ejercicios basados en un gráfico. Ejemplo:

Si la altura y diámetro de un depósito cilíndrico es 12 y 3 m., respectivamente. ¿Cuál es su volumen en litros?



8. ESTADISTICA
DURACION: 5 SEMANAS

OBJETIVO:

8.1. ORDENAR, AGRUPAR Y CLASIFICAR DATOS ESTADISTICOS PARA CONFECCIONAR TABLAS DE FENOMENOS ESTADISTICOS DE UNA VARIABLE

ANALISIS:

El objetivo propuesto estará logrado, si *el alumno es capaz de:*

— *Definir* la terminología estadística empleada en la consecución de este objetivo: Estadística y fenómeno estadístico; fenómeno estadístico de una variable; variables cuantitativas y cualitativas; la operación de tabular.

— *Diferenciar* entre fenómenos estadísticos de una variable de otros de dos o más variables, con el fin de conocer el campo propio de su cometido: fenómenos estadísticos de una variable.

— *Recopilar,* por sí solo o en equipo, fenómenos estadísticos de una variable, rechazando los que no ofrezcan garantía.

— *Ordenar* datos estadísticos, dada una serie de valores desordenados.

— *Agrupar* datos estadísticos, entregados al alumno de forma desordenada, así como agrupar los datos recogidos por el mismo alumno.

— *Confeccionar* tablas estadísticas muy simples, a partir de los datos recogidos por el alumno, o de una serie de valores dados previamente. No será necesario utilizar la terminología de frecuencia absoluta y relativa, terminología propia del siguiente objetivo.

— *Diferenciar* entre variable estadística cuantitativa y cualitativa, dada una serie de variables, al menos de 6 ejemplos.

— *Distinguir* variable discreta y variable continua entre 6 ejemplos propuestos por el profesor.

— *Escribir* tres ejemplos de variable discreta y de variable continua, razonando su distinta denominación.

— *Diferenciar* entre variable estadística y unidad estadística entre varios ejemplos, al menos 3, propuestos por el profesor.

METODOLOGIA:

Se comenzará por familiarizar y motivar al alumno en la recopilación de datos estadísticos de fácil obtención, como pueden ser: dimensión de los zapatos de los alumnos; colores que más agradan a los niños; clase de carne favorita a los alumnos; número de coches que pasan por delante del colegio en un período de tiempo determinado, etc.

Con el fin de motivar más al alumno, se procurará buscar una finalidad práctiva a las cuestiones que se proponen; en nuestros ejemplo propuestos, sería: al carnicero le interesa saber cuál es la carne favorita de los niños/as, pues será la que más le van a comprar; igualmente, al fabricante de juguetes le conviene saber el color qué más agrada a los niños para que, pintando su mercancía de ese color, sus ventas se vean incrementadas; por la misma razón, al zapatero le interesa conocer la dimensión del pie que más se repite; al peatón, la hora que ofrece menos peligro de accidente al pasar frente al colegio.

Una vez recogidos los datos, el paso siguiente será procurar que el alumno sienta la necesidad de organizarlos, de algún modo, con el fin de que proporcionen una información útil. En primer lugar, procede que se ordenen los valores de los datos obtenidos de mayor a menor o a la inversa.

Después de ordenar los valores, el alumno agrupará los de un mismo valor, indicando a su lado «número de veces que se repite cada valor».

Con la ordenación y agrupación de los datos por el alumno, éste se encuentra en situación de aprendizaje para que el profesor le inicie en la confección de tablas estadísticas, cuyas tablas constituyen un primer paso, medio útil y necesario para cualquier trabajo estadístico.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

A los alumnos aventajados, al recoger datos estadísticos de variable continua, como puede ser el peso o la estatura, se les puede orientar a tabular por intervalos, razonando la utilidad de dicho procedimiento.

Ejercicio: Se ha tallado a 100 alumnos de un colegio y se han obtenido valores que van de 136 cm. a 155 cm. Tabular dichos datos por intervalos de 5 cm.; las tallas fueron las siguientes:

Tallas (x):	136,	137,	141,	143,	144,	147,	151,	155.
Múmero de veces que se repite (fr):	5,	10,	13,	20,	20,	15,	15,	2.

B) Para los alumnos con dificultades:

En este primer objetivo propuesto no suele existir dificultad alguna, no obstante, si la hubiese, se podrían proponer ejercicios muy fáciles, como serían ordenar y agrupar las calificaciones obtenidas por todos los alumnos de la clase en la última evaluación, o las finales del curso anterior.

OBJETIVO:

8.2. DISTINGUIR LA FRECUENCIA ABSOLUTA DE LA FRECUENCIA RELATIVA

ANALISIS:

El objetivo propuesto estará logrado, si *el alumno es capaz de:*

- *Definir* la terminología estadística empleada en la consecución de este objetivo: frecuencia absoluta y frecuencia relativa, así como *escribir y reconocer* las notaciones correspondientes.
- *Calcular* la frecuencia relativa de un determinado valor, en una serie de datos estadísticos.
- *Reconocer* las ventajas del uso de la frecuencia relativa sobre la absoluta, por ejemplo, al comparar experiencias por superposición de gráficas.
- *Comprobar* que la suma de las frecuencias relativas de una serie de valores estadísticos tiene que ser igual a la unidad.
- *Comparar y establecer* la relación correspondiente entre frecuencia relativa y frecuencia de porcentaje.
- *Calcular* la suma de frecuencias absolutas de una serie de datos estadísticos.
- *Comprobar,* mediante una serie de ejemplos propuestos por el profesor, que la suma de frecuencias absolutas es igual al número de casos.
- *Confeccionar* una tabla estadística, con datos recopilados por el mismo alumno, en la que aparezcan los valores con sus correspondientes frecuencias absolutas, relativas y de porcentaje. Podrá también aparecer la frecuencia acumulativa.

METODOLOGIA:

Es conveniente lograr, a partir de los primeros ejercicios, que el alumno observe la equivalencia y la ventaja de sustituir la expresión «número de veces que un valor se repite» por la palabra «frecuencia». La expresión «número de veces que un valor se repite» fue utilizada en la confección de tablas estadísticas en el objetivo anterior.

Mediante sencillos ejemplos de dos tablas estadísticas en las que un mismo valor tenga, en ambas tablas, la misma frecuencia, que el alumno advierta la necesidad de encontrar una palabra que exprese la relación existente entre el valor o dato estadístico y el número de individuos sobre el que se ha obtenido dicho dato; pues no es lo mismo ocupar el décimo lugar en una clase de 10 alumnos, que ocupar el décimo lugar en una clase de 40.

De esta forma se logrará que el alumno acepte, como necesario, el utilizar una terminología que distinga ambas frecuencias: frecuencia absoluta y frecuencia relativa.

Con el fin de que el alumno se ejercite en distinguir la frecuencia absoluta de la relativa, se procurará que las tablas estadísticas, confeccionadas por el alumno, sean entre poblaciones de muy distinto número de elementos, como, por ejemplo, las referentes a las calificaciones de clases numerosas y clases reducidas.

Con estos ejercicios el alumno comprobará que varias frecuencias absolutas con el mismo valor, en tablas distintas, pueden tener, respectivamente, distinta frecuencia relativa.

Una vez familiarizado el alumno con los términos de frecuencia absoluta y relativa, se introducirá el concepto de frecuencia acumulativa.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Los ejercicios sobre frecuencias absolutas y relativas, los alumnos aventajados los realizarán en tablas confeccionadas por intervalos.

Ejercicio: Hallar las frecuencias absolutas y relativas del ejercicio de proacción indicado en el objetivo 8.1.

B) Para los alumnos con dificultades:

Los ejercicios serán prácticos, utilizando siempre datos muy concretos con los cuales esté el alumno familiarizado, pudiendo ser, por ejemplo, los referentes a calificaciones escolares.

Ejercicio: Hallar la frecuencia absoluta y relativa de las calificaciones obtenidas por los 40 alumnos, que hay, en la clase de Ciencias Sociales. Se presentará en forma de tabla estadística.

x:	4,	5,	6,	4,	8,	7,	8,	9,	10.
fr:	1,	3,	8,	2,	10,	9,	4,	3,	0.

(No ordenamos los valores con el fin de que el alumno se ejercite en la consecución del objetivo anterior.)

OBJETIVO:

8.3. DISTINGUIR LOS CONCEPTOS DE POBLACION O COLECTIVO Y MUESTRA REPRESENTATIVA

ANALISIS:

El objetivo propuesto estará logrado, si *el alumno es capaz de:*

- *Definir* conceptos tales como población estadística o colectivo y muestra estadística.
- *Diferenciar* población o colectivo de muestra estadística.
- *Descubrir* la necesidad de emplear muestras representativas al elaborar un trabajo estadístico, a la vista de ejemplos en los que sería imposible o muy dificultoso emplear el colectivo.
- *Reconocer* cuándo un proyecto de muestra es aleatorio.
- *Elegir* un verdadero proyecto de muestra representativa de entre otros que no lo son, a la vista de tres proyectos distintos propuestos por el profesor, en los que sólo uno es correcto.
- *Emplear* una verdadera muestra representativa en un trabajo estadístico, previamente propuesto por el profesor, en el que es necesario utilizar una muestra de la población.
- *Escribir* las principales características que ponen de manifiesto el que un proyecto de muestra es representativo.
- *Establecer,* en una muestra, la misma distribución, en estratos, que la presentada por la población.

METODOLOGIA:

El alumno asociará el término «población o colectivo», como el conjunto de objetos o individuos sobre los que anteriormente ha elaborado tablas estadísticas.

El alumno advertirá la necesidad de emplear una muestra de la población, pues obtener datos de todos los elementos que componen un colectivo es, a veces, imposible o prácticamente imposible, como, por ejemplo, averiguar la talla de todas las personas que habitan la tierra. Es en este momento cuando surgirá la necesidad de emplear un nuevo concepto: «muestra» de la población o colectivo.

Se procurará hacer reflexionar al alumno de que no basta cualquier muestra de la población, sino que la muestra tiene que ser representativa; en caso contrario podría llevarnos a conclusiones erróneas. Se pondrán ejemplos.

Realmente escapa a la E.G.B. la parte de la Estadística llamada Teoría de Muestras, cuyo estudio sí será indispensable al investigador, con el fin de evitar conclusiones falsas. Al alumno de E.G.B. sólo se le exigirá que reflexione sobre la necesidad de que la muestra sea representativa, aunque no sepa averiguar todos los factores que influyen en la misma; basta que señale dos o tres razones lógicas por las que estime que determinada muestra es representativa.

Al trabajar con datos estadísticos de cualquier índole, el alumno deberá indicar si los datos se refieren a la población o a una muestra representativa de la misma, reforzando, así, la meta del objetivo: la distinción de ambos conceptos.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Se propondrán cuestiones como las siguientes:

Se quiere buscar una muestra representativa de las tallas de los alumnos del colegio. ¿Cuántos y qué cursos se seleccionarían?

¿Cuál sería la muestra representativa para hallar las tallas del colectivo: alumno de E.G.B. de toda España?

Similares preguntas sobre otras variables.

B) Para alumnos con dificultades:

Dado que la conducta que se espera del alumno sobre este objetivo es de reflexión y no de cálculo, las cuestiones se plantearán de igual forma que para los ejercicios de proacción.

OBJETIVO:

8.4. REPRESENTAR GRAFICAMENTE LOS DATOS RECOGIDOS EN UNA TABLA ESTADISTICA

ANALISIS:

El objetivo propuesto estará logrado, si *el alumno es capaz de:*

— *Definir* la terminología estadística empleada en la consecución de este objetivo:

a) Variables cualitativas: diagrama de sectores y pictogramas.

b) Variables cuantitativas: diagrama de barras; histograma y su polígono de frecuencias.

— *Indicar* qué tipo de gráfica representa mejor a cada una de 3 series de fenómenos estadísticos distintos, propuestas por el profesor.

— *Construir,* dada una serie de datos estadísticos, la gráfica que represente mejor dichos valores.

— *Trasladar* a una tabla estadística una determinada gráfica.

— Dadas varias tablas estadísticas de variables diferentes, *seleccionar* las que pueden ser representadas mediante diagrama de sectores y pictogramas.

— Dadas varias tablas estadísticas de variables diferentes, *seleccionar* las que pueden ser representadas mediante histogramas y polígono de frecuencias.

— Dadas varias tablas estadísticas de variables diferentes, *seleccionar* las que pueden ser representadas mediante histogramas y barras.

— *Recopilar* los datos estadísticos correspondientes a la matrícula del colegio, por niveles, en los últimos 10 años, y *representar* dichos datos mediante la gráfica correspondiente.

METODOLOGIA:

«Hacer ver» al alumno la ventaja de que los valores obtenidos en la recogida y recopilación de datos estadísticos sean representados mediante gráficas, pues permiten, de una simple ojeada, dar una impresión global y exacta de su significado. El alumno comprobará esta ventaja, como puede ser, observando las gráficas de temperatura, colocadas en la cabecera de la cama de los enfermos. En este primer momento no se pide que el alumno interprete las gráficas, sino solamente que compruebe que se trata de un medio útil y muy empleado en la práctica.

El alumno repasará las lecciones estudiadas sobre el sistema de ejes de coordenadas cartesianas, situándose, así, en condiciones óptimas para el aprendizaje de pasar a determinadas gráficas las tablas estadísticas confeccionadas en objetivos anteriores.

El alumno aprenderá la técnica de representar gráficamente los datos estadísticos recopilados, construyendo: diagrama de barras, histogramas, polígono de frecuencias, diagrama de sectores y pictogramas.

Los ejemplos propuestos para las representaciones gráficas versarán unos sobre variables estadísticas de carácter cuantitativo, otros sobre variables cualitativas, destacando qué tipo de gráficas representan mejor unas y otras variables.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Los alumnos aventajados harán representaciones gráficas de tablas estadísticas confeccionadas por intervalos.

Ejercicio: Representar por histogramas y polígono de frecuencias los datos indicados en el ejercicio de proacción del objetivo 8.1.

B) Para los alumnos con dificultades:

Versarán sobre calificaciones obtenidas por los alumnos en exámenes recientes. El trabajar sobre estos datos concretos y fáciles de obtener no restringe, en nada, la generalidad de los razonamientos ni el procedimiento operatorio empleado.

Tal vez, a los alumnos que requieren ejercicios de retroacción, lo que les falta es una verdadera motivación, por lo que se aconseja utilizar sus trabajos, exponiéndolos en el aula o dirección del centro, pero no como premio, sino como algo útil y necesario que el colegio debe tener, que puede y debe ser realizado por sus mismos alumnos.

La representación gráfica de las calificaciones, unas serán por niveles o cursos, otras por grupos, por áreas o asignaturas, así como por la totalidad del colegio. Basta que el alumno sepa que hace algo útil para que se encuentre motivado.

OBJETIVO:

8.5. INTERPRETAR GRAFICOS

ANALISIS:

El objetivo propuesto estará logrado, si *el alumno es capaz de:*

— *Trasladar* a lenguaje escrito lo observado en una gráfica de sectores.

— *Trasladar* a un tipo de gráfica diferente el mensaje de una determinada gráfica.

— *Reconocer* de qué forma una determinada gráfica puede haber sido falseada.

— *Clasificar* las gráficas haciéndoles corresponder con el tipo de variables estadísticas que mejor interpretan.

— *Trasladar* a lenguaje escrito el mensaje de una gráfica de frecuencias relativas.

— *Interpretar* una gráfica, del texto de Ciencias Sociales o de cualquier otro libro, referente al movimiento del turismo en España. (Cualquier otra variable.)

— *Interpretar* una gráfica referente al clima de una región española, cuya fuente puede ser el mismo libro de texto de Ciencias Sociales o cualquier otro. (Cualquier otra variable.)

— *Interpretar* un gráfico que represente el movimiento de la población española a partir de 1900. El profesor puede escoger la fuente de algún manual o anuario estadístico. (Cualquier otra variable.)

METODOLOGIA:

Utilidad y necesidad de saber interpretar gráficas.

El alumno debe sentir la necesidad de saber interpretar gráficas con ocasión, por ejemplo, de la lectura del artículo de un periódico que ha empleado una gráfica, o con ocasión de un simple anuncio en la vía pública que, igualmente, ha utilizado una expresión gráfica. Esta interpretación será para el alumno tanto más fácil cuanto mejor haya realizado, anteriormente, las representaciones gráficas de los datos recopilados por él mismo.

Conexión de la Estadística con otras Ciencias.

Util y necesario, también, interpretar gráficas, si se quiere comprender las otras materias de la enseñanza, como son, por ejemplo, las Ciencias Sociales, que, con frecuencia, utilizan el lenguaje estadístico.

Interpretación de gráficas que deberán ser, en primer lugar, las mismas que el alumno haya empleado al representar gráficamente los datos recopilados por él mismo, o en ejercicios propuestos por el profesor.

A continuación, se propondrán nuevas gráficas para interpretación de las mismas; gráficas que versarán sobre variables tanto de carácter cuantitativo como cualitativo: diagrama de barras, histogramas, polígono de frecuencias, diagrama de sectores y pictogramas.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Interpretación de gráficos que representen fenómenos estadísticos de una variable ordenados por intervalos.

B) Para los alumnos con dificultades:

Con el fin de facilitar y habituar la interpretación de gráficas a los alumnos menos aventajados, se les ofrecerá a su interpretación gráficas que, de antemano, ya conoce su mensaje, obtenido por otros procedimientos. De esta forma, asociará lo que el alumno ya sabe con el mensaje que le ofrece la gráfica, aficionándose y acostumbrándose a la recta interpretación de las mismas.

La interpretación de las gráficas que aparecen en los textos de Ciencias Sociales encuadran perfectamente en este tipo de ejercicios.

OBJETIVO:

8.6. CALCULAR LAS MEDIDAS DE POSICION CENTRAL: MEDIA, MEDIANA Y MODA

ANALISIS:

El objetivo propuesto estará logrado, si *el alumno es capaz de:*

- *Definir* cada una de las medidas: media, mediana y moda, así como *escribir y reconocer* las fórmulas correspondientes.
- *Calcular* la media, mediana y moda, dada una serie de valores desordenados.

— *Averiguar* la media, mediana y moda de una serie de datos estadísticos, cuyos valores estén representados mediante una tabla estadística de frecuencias.

— *Averiguar* la media, mediana y moda de una serie de datos estadísticos, cuyos valores estén representados por una determinada gráfica.

— *Calcular* la mediana de una serie de valores, tanto si el número de éstos es par como si es impar.

— *Escribir,* al menos, tres ejemplos de series estadísticas que sean unimodales, bimodales y multimodales.

— *Escribir* y razonar la fórmula para calcular la media de la combinación de dos muestras.

— *Calcular* la media de la combinación de dos muestras conociendo la media y el número de observaciones de cada una de dichas muestras.

METODOLOGIA:

Importancia de utilizar valores representativos de una serie.

Se procurará buscar situaciones de aprendizaje en las que el alumno advierta la ventaja de emplear valores representativos o valores medios de una serie, es decir, que representen o reúnan, en uno, una serie de ellos, con el fin de no tener la necesidad de manejar muchos números a la hora de operar. Será el momento de que el alumno se dé cuenta de que la Estadística es una Ciencia de valores medios.

Calcular la media de una serie de valores.

El alumno ya conoce esta medida de tendencia central, pues, desde hace tiempo, ha calculado la media de las calificaciones que ha ido obteniendo. Ahora tendrá que calcular la media de otros valores que ha obtenido en la recopilación de datos, a través de los ejercicios que ha ido realizando en la consecución de los objetivos anteriores. Los ejercicios a realizar, para calcular la media, se referirán tanto a una serie de valores sin agrupar como a los agrupados por frecuencias.

Calcular la moda de una serie de valores.

También será un concepto fácil, pues el vocablo ha sido utilizado por el alumno en el lenguaje corriente, aunque no empleado hasta ahora, en Matemáticas. El alumno, fácilmente, aceptará este vocablo para designar el valor que tiene la frecuencia más alta, es decir, el valor que más se repite en una serie.

Calcular la mediana en una serie de valores.

Los ejercicios a realizar, para calcular la mediana, habrán de referirise tanto a valores sin agrupar como a los agrupados por frecuencias. El profesor procurará que el alumno se dé cuenta de que el valor de la mediana no se haya afectado por la magnitud de los casos extremos y que, por tanto, a veces, es mejor emplear este valor medio.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Los alumnos aventajados harán ejercicios para calcular la media, mediana y moda de las series de valores agrupados por intervalos.

Ejercicio: Hallar la media, mediana y moda de una serie de valores dados en la gráfica del ejercicio de proacción del objetivo 8.5.

B) Para los alumnos con dificultades:

Hallar la media, mediana y moda de los ejercicios de retroacción de los objetivos 8.1 y 8.2.

OBJETIVO:

8.7. DIFERENCIAR EL DISTINTO MATIZ SIGNIFICATIVO DE DICHOS VALORES CENTRALES (MEDIA, MEDIANA Y MODA)

ANALISIS:

El objetivo propuesto estará logrado, si *el alumno es capaz de:*

— *Expresar y comprobar* mediante, al menos, dos ejemplos, la desventaja que presenta la media como medida numérica para descubrir el «centro» de una distribución, cuando dicha distribución se ve afectada por valores extremos de una serie.

— *Expresar y comprobar* mediante, al menos, dos ejemplos, que la mediana se ve menos afectada que la media por los valores extremos de una serie.

— *Comprobar* y razonar que tanto la mediana como la moda de dos muestras comparables no pueden combinarse para obtener la mediana de la muestra compuesta.

— *Comprobar* y razonar que la media de dos muestras comparables pueden combinarse para obtener la media de la muestra compuesta.

— *Comprobar* mediante, al menos, dos ejemplos prácticos, que la medida de tendencia central «la moda» es la de menos precisión para caracterizar una serie estadística.

— *Comprobar,* mediante ejemplos, que la media siempre es única, mientras que la moda y la mediana pueden no serlo.

— *Escribir* tres series estadísticas, sacadas de la vida práctica, por ejemplo: calificaciones del alumno, en las que, bajo el punto de vista de determinado alumno, sea mejor o peor utilizar la media, mediana o moda.

— *Inventar* dos series de datos estadísticos referentes a la misma variable, con características manifiestamente diferentes, y que, no obstante, tengan la misma media y mediana.

METODOLOGIA:

La media como medida de tendencia central más empleada.

El alumno acepta, sin lugar a dudas, que es la medida más empleada, porque así lo ha venido observando en sus calificaciones y en el lenguaje usual. Es la más empleada por ser la más exacta, si hay seguridad de la exactitud de los valores de la serie.

La moda como valor dominante o que más se repite en una serie.

El alumno advierte, muy pronto, que su obtención es muy fácil, pues basta observar el valor que más se repite. Pero también advierte que tiene menos precisión para caracterizar una serie de valores. El profesor podrá plantear la cuestion con las calificaciones de sus mismos alumnos: habrá alumnos a quienes interese que el profesor califique teniendo en cuenta la «moda», otros, por el contrario, la «media»; será prácticamente imposible llegar a un acuerdo, terminando la discusión, probablemente, admitiendo que la «moda» no refleja, con exactitud, un valor de tendencia central. Por ello, este valor central es el que menos se utiliza en Estadística.

La mediana como valor central no afectado por los casos extremos.

El profesor podrá poner a los alumnos en la misma situación de aprendizaje que en el apartado anterior, partiendo de las calificaciones obtenidas por sus alumnos. Posiblemente el diálogo entre profesor y alumnos sea más sereno que en el caso antes citado. Será el momento de hacer observar que, verdaderamente, la mediana tiene la ventaja de que dicho valor no está afectado por los casos extremos.

Finalmente, los alumnos inventarán diferentes ejemplos en los que se manifieste el diferente matiz que les hemos dado a las distintas medidas de tendencia central.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Diferenciar, emitiendo un juicio valorativo, la media, mediana y moda de las calificaciones obtenidas por un determinado alumno, como, por ejemplo:

x:	0,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
fr:	10,	5,	1,	1,	2,	1,	1,	9.

El alumno inventará una serie de valores, agrupados por frecuencias; hallará la media, mediana y moda de dicha serie, emitiendo un juicio valorativo-comparativo sobre cada uno de los resultados.

B) Para los alumnos con dificultades:

Diferenciar, emitiendo un juicio valorativo, la media, mediana y moda de califiacaciones obtenidas por algunos alumnos. Tan sólo se diferenciará de los de proacción en la dificultad de su realización.

EJEMPLOS:

a)	x:	1,	10,	10,	0.
	fr:	1,	1,	1,	1.
b)	x:	0,	5,	7,	8.
	fr:	3,	7,	8,	1.

OBJETIVO:

8.8. CALCULAR LAS MEDIDAS DE DISPERSION O VARIABILIDAD DE LA SERIE: RECORRIDO, VARIANZA Y DESVIACION TIPICA

ANALISIS:

El objetivo propuesto estará logrado, si *el alumno es capaz de:*

— *Inferir,* con variados ejemplos propuestos por el profesor, la necesidad de que existan medidas que pongan de manifiesto el grado de fiabilidad de las medidas centrales: media, mediana y moda.

— *Definir* la terminología empleada en este objetivo: dispersión de una serie, recorrido, varianza y desviación típica, así como *escribir y reconocer* las fórmulas correspondientes.

— *Calcular* el rango o recorrido de una determinada serie, propuesta por el profesor.

— *Escribir* la fórmula para calcular la varianza. Dada una serie de valores, *calcular* la varianza.

— *Escribir* la fórmula para hallar la desviación típica. Dada una serie de valores, *calcular* la desviación típica.

— *Inventar* dos series estadísticas distintas, referentes a la misma variable, que, teniendo la misma media, la desviación típica ponga de manifiesto que dichas series poseen características diferentes.

— *Expresar* verbalmente cada una de las fórmulas a que se refiere este objetivo.

— Propuesto por el profesor el estudio real de un fenómeno estadístico de una variable, el alumno *recopilará* los datos necesarios, *confeccionando* la tabla estadística correspondiente, *calculando,* a continuación: el rango de la serie y su desviación típica.

METODOLOGIA:

Medidas de dispersión o variabilidad de la serie: el porqué de dichas medidas.

Se procurará poner al alumno en situación de aprendizaje, y nada mejor que proponer un ejemplo de dos series de datos en los que el valor de la media, mediana y moda sea el mismo, no obstante, se observe, a simple vista, que son series muy distintas; consecuentemente, el alumno se dará cuenta de que, en el ejemplo propuesto, las medidas de tendencia central le dicen bien poco respecto a las series en cuestión, por lo que será necesario de que exista alguna fórmula o procedimiento que ponga de manifiesto la variabilidad de cada serie, es decir, que exprese las diferencias que tienen respecto al valor central.

Recorrido o rango de la serie.

Motivado el alumno por la reflexión que se ha hecho en el apartado anterior, se le explicará la técnica para hallar el rango o recorrido de una serie, debiendo partir del mismo ejemplo que se haya propuesto en el apartado anterior. La técnica para averiguar el rango de la serie no ofrecerá dificultad alguna para los alumnos, pero éstos no quedarán satisfechos de que el problema, para conocer la variabilidad de la serie, queda totalmente resuelto, lo que dará pie a introducir la siguiente medida de variabilidad: la desviación media.

Desviación a la media. Varianza.

Partiendo siempre del mismo ejemplo, con el fin de no dispersar la atención, se explicará la técnica para calcular la varianza, haciendo especial hincapié en la forma de hallar las desviaciones de cada valor respecto a la media. La media de los cuadrados de las desviaciones nos dará la varianza, medida de gran importancia en el estudio de las distribuciones estadísticas.

Desviación típica.

Si el dato de la varianza es muy importante en el estudio de las distribuciones estadísticas, lo es mucho más la desviación típica: raíz cuadrada positiva de la varianza. Obtenida la varianza de una serie, calcular la desviación típica no ofrecerá dificultad alguna para el alumno.

Los alumnos se ejercitarán en escribir series de valores, cuya variabilidad sea bien manifiesta, comprobando, después, al hallar la desviación típica, si, lo que a simple vista observaron, lo corrobora, con precisión, la técnica operatoria realizada.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Calcular el rango o recorrido de la serie propuesta para el ejercicio de proacción del objetivo 8.1.

Hallar la varianza y la desviación típica de una serie.

EJEMPLO:

x:	8,	7,	6,	5.
fr:	1,	1,	3,	2.

Inventar una serie de valores cuya varianza y desviación típica sean cero.

B) Para los alumnos con dificultades:

Serán ejercicios de casos muy concretos, como pueden ser sobre sus mismas calificaciones. Así, aquellos alumnos que, casi siempre, obtienen las mismas notas, buenas o malas, comprobarán que la desviación típica de su serie de calificaciones es muy pequeña. Los alumnos con grandes altibajos en sus calificaciones, al calcular la desviación típica de su serie de notas, comprobarán que ésta es mayor. Al ser ejercicios destinados a alumnos poco brillantes, se procurará que exijan poca abstracción y que siempre se puedan comprobar con la realidad circundante.

OBJETIVO:

8.9. RESOLVER SENCILLOS PROBLEMAS RELACIONADOS CON DATOS ESTADISTICOS, DE ACUERDO CON LOS OBJETIVOS PROPUESTOS

ANALISIS:

El objetivo propuesto estará logrado, si *el alumno es capaz de:*

- *Averiguar* lo que quieren decir las gráficas que, con frecuencia, aparecen en los periódicos, haciendo una breve crítica sobre las mismas.
- *Descubrir* qué tipo de gráfica es la más apropiada para representar ciertos datos propuestos por el profesor, confeccionando la misma.
- *Descubrir* si en un problema estadístico determinado se ha aplicado una buena muestra representativa; igualmente, si ha sido posible el alterar una gráfica cambiando la escala. *Buscar* problemas semejantes a uno dado.
- *Confeccionar* gráficas referentes a datos estadísticos de su colegio: matrícula, suspensos, etc., comparándolas con otros colegios.
- *Calcular* la desviación típica de una determinada serie estadística. Por ejemplo, en las calificaciones obtenidas en cada uno de los cursos, comparándolas entre sí.
- *Interpretar* las gráficas que habrán de encontrarse en los diferentes textos de estudio, como en los de Ciencias Sociales.
- *Proponer* problemas reales de Estadística y su realización, en los que se haya de empezar desde la elección de una muestra representativa, recopilación de datos, etc., hasta su representación gráfica.
- *Confeccionar* la gráfica correspondiente a una determinada cuestión; como, por ejemplo: producción de la energía eléctrica en España durante los últimos 20 años.

METODOLOGIA:

Se procurará habituar al alumno a que ante un problema, sea del tipo que fuese, es necesario una lectura atenta y reflexiva del mismo, anterior a cualquier operación.

El alumno debe ser consciente de las dificultades que presentan los problemas estadísticos, como son, principalmente, el que la muestra sea representativa y el medir fenómenos de tipo cualitativo.

En el planteamiento de los problemas estadísticos se debe comenzar por averiguar si los datos recopilados son los apropiados y están suficientemente comprobados. A continuación, se pasará a la ordenación y agrupamiento de los datos, reducción de éstos a medidas de tendencia central, calculando, finalmente, la medida que indique la variabilidad de la serie.

Casi la mayoría de los problemas presentados a nuestros alumnos de E.G.B. deberían ser sobre interpretación de gráficas usuales en la vida ordinaria de cualquier ciudadano, así como las que surgen en el estudio de otras materias, como pueden ser las Ciencias Sociales. Igualmente, saber representar, mediante gráficas, no problemas rebuscados, sino aquellos otros que nos ofrece la realidad, o que los mismos alumnos, motivados por sugerencias del hábil profesor, los requieran: recogida de datos sobre nacimientos, venta de coches, de juguetes, carreras que más se eligen, etc.

ACTIVIDADES:

A) Para los alumnos que han superado el nivel medio:

Sean, por ejemplo, los siguientes datos:

4,	4,	4,	7,	7,	7,	7,	7,	7,	7,
8,	8,	8,	8,	8,	8,	8,	8,	8,	8,
9,	9,	9,	9,	9,	9,	9,	9,	9,	9,
10,	10,	10,	10,	10,	10,	10,	13,	13,	13.

Se pregunta:

1.° Tabular los datos indicados.

2.° Hallar la media.

3.° Calcular la varianza.

4.° Calcular la desviación típica.

Sean, por ejemplo, los siguientes datos:

64,	66,	87,	94,	40,	99,	80,	92,	75,	87,
53,	55,	59,	78,	52,	80,	54,	97,	71,	85,
62,	84,	54,	83,	52,	63,	53,	75,	62,	82,
51,	75,	65,	85.						

Se pregunta:

1.° Tabular los datos indicados, agrupándolos por intervalos:

40-49, 50-59, 60-69, 70-79, 80-89, 90-99.

2.° Construir un histograma y el polígono de frecuencias, de acuerdo con los referidos datos.

B) Para los alumnos con dificultades:

EJEMPLOS:

Sea la siguiente serie de datos: 4, 3, 3, 4, 4, 6.

Se pregunta:

1.° Hacer la tabulación correspondiente.
2.° Hallar la media, mediana y moda.
3.° Calcular el rango de la serie.
4.° Hallar la desviación típica.

Adviértase que, aunque a simple vista el ejercicio es muy parecido al de proacción, no obstante la sencillez de los datos ofrecidos lo convierte en muy fácil.

En un colegio hay 360 alumnos, distribuidos de la siguiente forma: 1.°: 90; 2.°: 25; 3.°: 25; 4.°: 25; 5.°: 15. En toda la Segunda Etapa hay 180.

Se pide la construcción de una gráfica por sectores que muestre la distribución de los alumnos, antes mencionada.

COLECCION

ESTUDIOS Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

Esta colección está dirigida por la Dirección General de Educación Básica y en ella colaboran profesores de E.G.B. y especialistas en las distintas áreas.

Serie E.G.B.:

N.° 1. La enseñanza de las ciencias y sus relaciones interdisciplinarias en la 2.ª etapa de E.G.B.
N.° 2. Didáctica de la Lengua Inglesa en E.G.B. (I).
N.° 3. Educación vial. Documento de apoyo para la educación vial en Preescolar y E.G.B.
N.° 4. El Area Social en la E.G.B.
N.° 5. Ciencias de la Naturaleza (I). Guía para el desarrollo de actividades y experiencias.
N.° 6. Ciencias Sociales. Documento de apoyo para el Profesorado.
N.° 7. Educación y Medio Ambiente. Actividades y experiencias.
N.° 8. Matemáticas.

En preparación:

- Didáctica de la Lengua Inglesa en E.G.B. (II).
- Ciencias de la Naturaleza (II).
- Educación Sanitaria (I). La dependencia de las drogas. Exposición para educadores.

Serie PREESCOLAR:

N.° 1. La matemática en la educación preescolar y 1.° y 2.° de E.G.B.
N.° 2. Area de expresión dinámica: educación psicomotriz.
N.° 3. Area de expresión plástica.
N.° 4. El lenguaje en la educación preescolar y Ciclo preparatorio (1.° y 2.° de E.G.B.).
N.° 5. El lenguaje en la educación preescolar y Ciclo preparatorio Catalán-Castellano.
N.° 6. El lenguaje en la educación preescolar y Ciclo preparatorio Vasco-Castellano.
N.° 7. El lenguaje en la educación preescolar y Ciclo preparatorio Gallego-Castellano.
N.° 8. La formación religiosa en la educación preescolar y Ciclo preparatorio (1.° y 2.° de E.G.B.).
N.° 9. Colección de textos para valorar el dominio lector del alumno y reforzar su aprendizaje.
N.° 10. Desarrollo psicológico del niño (de los 18 meses a los 8 años).

En preparación:

- Teoría y práctica de la educación preescolar.

Serie ORIENTACION ESCOLAR Y VOCACIONAL:

N.° 1. Vademecum de pruebas psicopedagógicas.
N.° 2. Requisitos y perspectivas del campo profesional Administrativo y Comercial.

N.° 3. Requisitos y perspectivas de los campos profesionales de: Electricidad y Electrónica, Construcción y Obras y Artes Gráficas e Industria del Papel.

N.° 4. Requisitos y perspectivas de los campos profesionales: Marítimo-Pesquero, Hostelería y Turismo y Agrario.

En preparación:

— Requisitos y perspectivas de los campos profesionales del: Metal, Automoción y Estética y Peluquería.

Serie EVALUACION:

N.° 1. Elaboración de instrumentos para la evaluación de aspectos básicos del rendimiento escolar en 8.° de E.G.B.

Servicio de Publicaciones
del Ministerio de Educación y Ciencia