APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS POR DESCUBRIMIENTO. ESTUDIO COMPARADO DE DOS METODOLOGIAS

JOSE DEL RIO SANCHEZ

C·I·D·E·

APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS POR DESCUBRIMIENTO. ESTUDIO COMPARADO DE DOS METODOLOGIAS

José del Río Sánchez

ESTUDIO FINANCIADO CON CARGO A LA CONVOCATORIA DE AYUDAS A LA INVESTIGACION DEL C.I.D.E.

Número 64
Colección: INVESTIGACION

RIO SANCHEZ, José del

Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento : estudio comparado de dos metodologias / José del Rio Sánchez. – Madrid : Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia : C.I.D.E., 1991.

1. Matemáticas 2. Enseñanza 3. Aprendizaje mediante descubrimiento 4. Metodología

C.I.D.E. Dirección General de Renovación Pedagógica.
Secretaría de Estado de Educación.
EDITA: CENTRO DE PUBLICACIONES - Secretaría General Técnica.
Tirada: 1.000 ej.
Depósito Legal: M-44008-1991
NIPO: 176-91-151-5
I.S.B.N.: 84-369-2032-5
Imprime: GRAFICAS JUMA
Plaza de Ribadeo, 7-I. 28029 MADRID

Para mi mujer y mis hijas, por su oasis

PROLOGO

En cualquier sistema educativo, es necesario disponer de modelos de enseñanza debidamente evaluados y contrastados con experiencias realizadas en ambientes escolares ordinarios del propio sistema. Y esto es aún más importante, en unas circunstancias como las de nuestro país donde se está promoviendo una reforma educativa que propugna, al menos desde la norma, una renovación de los métodos tradicionales de enseñanza. Este trabajo, tras una revisión de las principales investigaciones en educación matemática sobre la eficacia de los métodos de enseñanza por descubrimiento, presenta el diseño general de dos modelos metodológicos que fueron experimentados, con sus materiales didácticos correspondientes, por dos grupos de estudiantes de enseñanza secundaria mientras otro grupo utilizaba la metodología expositiva tradicional. Controladas las principales variables intervinientes, se compararon los aprendizajes a corto y a largo plazo en los campos conceptual, algorítmico, heurístico y actitudinal. Se comparó también el nivel de cambio conceptual (superación de ideas previas erróneas) y se estudiaron las interacciones con distintas características de los sujetos (sexo, actitud, estilo cognitivo, nivel de instrucción previa e inteligencia general). Los resultados obtenidos, además de su indudable interés teórico, sirven para avalar el diseño de estas dos metodologías y para orientar su uso como alternativas eficaces entre los distintos modelos que se le ofrecen al profesorado, alternativas, eso sí, sobre cuyas posibilidades tendrán algunos datos suficientemente contrastados.

La realización de este trabajo no hubiera sido posible sin el impulso y el apoyo constante de los profesores Joaquín García Carrasco y Jaime Muñoz Masqué, sin la ayuda económica del C.I.D.E. y sin el generoso esfuerzo de los profesores M.ª I. Gar-

mendia, C. Pérez, J.Mª Verde y J. Casaseca que experimentaron en sus clases los materiales didácticos. A todos ellos y a quienes en el futuro sigan explorando o experimentando estos modelos metodológicos, les expreso mi sincero agradecimiento.

Salamanca, 1 junio de 1991.

El AUTOR

INDICE

PRIMERA PARTE: DISEÑO DE LA INVESTIGACION

CAP. 1. Planteamiento del problema y revisión de la literatura

Introducción: Planteamiento inicial del problema 11
- 1.1. Eficacia relativa de las metodologías para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento ... 13
- 1.2. Interacción entre características de los alumnos y metodologías para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento 18
- 1.3. Concepciones erróneas en matemáticas y su superación con metodologías didácticas para el aprendizaje por descubrimiento 22
- 1.4. Conclusiones 36
- 1.5. Formulación de los objetivos de la investigación . 40

CAP. 2. Construcción de dos metodologías didácticas para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento

Introducción 43
- 2.1. Modelo de la primera metodología 44
- 2.2. Modelo de la segunda metodología 57

CAP. 3. Diseño de la investigación

Introducción 63
- 3.1. Formulación de hipótesis 63
- 3.2. Selección de variables 65
- 3.3. Elección y análisis de la muestra 68
- 3.4. Control de las variables intervinientes 80

3.5. Instrumentos de medida de las variables dependientes 81
3.6. Instrumentos para el análisis estadístico de los datos 82

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO DE LA INVESTIGACION

CAP. 4. Análisis de los conocimientos previos y concepciones erróneas
Introducción 87
4.1. Conocimientos necesarios para iniciar el estudio de las cónicas 88
4.2. Ideas previas sobre las cónicas 101
4.3. Implicaciones didácticas 121

CAP. 5. Elaboración de los materiales didácticos
Introducción 125
5.1. Formulación de los objetivos didácticos 125
5.2. Selección de contenidos instructivos 130
5.3. Elaboración de los materiales didácticos 132

CAP. 6. Experimentación de las metodologías y aplicación de pruebas
Introducción 165
6.1. Elección de la muestra 165
6.2. Experimentación de las metodologías 167
6.3. Aplicación de las pruebas al acabar la experiencia 168
6.4. Aplicación de las pruebas a los dos meses de acabar la experiencia 185

TERCERA PARTE: RESULTADOS DE LA INVESTIGACION

CAP. 7. Análisis de los datos y elaboración de las conclusiones
Introducción 189

7.1. Estadística descriptiva, normalidad y homogeneidad de varianzas 189
7.2. Comparación de rendimientos y actitud al acabar el período instructivo 199
7.3. Comparación de rendimientos y actitud dos meses después de acabar el período instructivo 204
7.4. Comparación del nivel de cambio conceptual . . . 208
7.5. Interacción entre las metodologías y las características de los alumnos 212
7.6. Conclusiones generales 221

BIBLIOGRAFIA GENERAL 225

BIBLIOGRAFIA ESPECIFICA DE LA UNIDAD DIDACTICA ELABORADA 235

ANEXO: LIBRO DEL ALUMNO CORESPONDIENTE A LA SEGUNDA METODOLOGIA 241

PRIMERA PARTE

DISEÑO DE LA INVESTIGACION

CAPITULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y REVISION DE LA LITERATURA

Introducción: Planteamiento inicial del problema

El deseo de mejorar el aprendizaje de las matemáticas, y de las ciencias en general, ha hecho que surgieran, como alternativa a la enseñanza tradicional, diversos modelos didácticos de enseñanza por descubrimiento. Estos modelos se apoyan explícita o implícitamente en una idea, defendida por autores como Dewey, Bruner, Wertheimer o Piaget, según la cual el sujeto es capaz de encontrar por sí mismo una regla o una estructura conceptual desconocida para él a partir de un conjunto de materiales suministrados desde el exterior. Por lo tanto, estos métodos de enseñanza pretenden que los estudiantes produzcan su propio conocimiento en lugar de recibirlo ya elaborado. Como consecuencia, se espera también que mejoren su capacidad de investigar, de resolver problemas y de razonar, lo que generaría actitudes positivas hacia las matemáticas.

Estas metodologías reciben nombres distintos según el investigador o el profesor que diseña o practica el modelo y también según el aspecto sobre el cual enfatizan sus objetivos y sus estrategias instructivas. Simplificando el panorama, podemos agruparlas en dos categorías:

1. *Enseñanza por investigación o por resolución de problemas:* Estos modelos se centran en los procesos de la matemática y persiguen fundamentalmente incrementar la capacidad heurística de los estudiantes (habilidad en la resolución de problemas, en la formu-

lación y evaluación de conjeturas, descubrimiento de relaciones, métodos demostrativos, etc); como herramientas instructivas emplean, sobre todo, los problemas y las investigaciones.

2. *Enseñanza por descubrimiento o redescubrimiento:* Estas metodologías se centran más en el propio contenido de la matemática como algo culturalmente valioso que debe ser conocido por los estudiantes. Estos contenidos son descubiertos (o redescubiertos) por ellos mediante diferentes técnicas instructivas: diálogo socrático con el profesor en pequeño o gran grupo, razonamientos dirigidos mediante una serie de actividades explícitamente programadas, resolución de una situación abierta de aprendizaje, inducción a partir de ejemplos, etc.

Se han realizado bastantes investigaciones y experimentaciones para comparar la eficacia de estos métodos frente a la enseñanza expositiva tradicional y ha surgido una viva polémica, que todavía perdura hasta hoy, entre detractores y defensores de unos y otros. Se añadieron además otros problemas,como la relación entre memorización y descubrimiento, aprendizaje inductivo y deductivo, secuenciación óptima de contenidos, control en el grado de orientación externa del proceso de descubrimiento, presentaciones verbales y no verbales, poder de transferencia, etc. Esto ha contribuido a esclarecer los principios del aprendizaje por descubrimiento y a mejorar los correspondientes modelos de enseñanza. En consecuencia, surge la necesidad de compararlos entre sí buscando, no la eficacia absoluta y universal de alguno de ellos, sino la relativa a determinados aspectos educativos. En concreto, parece pertinente plantearse el siguiente problema:

Entre las distintas metodologías didácticas para el aprendizaje por descubrimiento de las matemáticas,

- ¿cuáles producen mejores *rendimientos* al experimentarlas en clases reales?
- ¿qué diferencias se observan al *actuar* sobre distintos tipos de estudiantes?
- ¿cuáles favorecen más el *cambio conceptual* en los alumnos?

Este problema es el origen de nuestra investigación y encontrar alguna respuesta es nuestro objetivo. Para ello, comenzaremos revisando la literatura relacionada con los tres dominios que abarca su enunciado:

1. Eficacia relativa de las metodologías didácticas para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento.

2. Interacción de estas metodologías con diferentes características de los alumnos.

3. Concepciones erróneas en matemáticas y su superación mediante el uso de estas metodologías.

Los resultados de esta revisión nos permitirán concretar el enunciado del problema y, en consecuencia, formular con precisión el objetivo de nuestro estudio.

1.1. Eficacia relativa de las metodologías para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento

A continuación exponemos *cronológicamente* un conjunto de trabajos que, a nuestro juicio, constituyen una muestra significativa de esta línea de investigación.

Las primeras investigaciones sobre este tema se realizaron a finales de los años 50 y principios de los 60. Son clásicas las de Kersh y la de Gagné y Brown, citadas ya en las revisiones de Kersh y Wittrock (1962) y Shulman y Keislar (1966). En 1958, de una muestra de 60 alumnos de enseñanza secundaria, Kersh seleccionó tres subgrupos homogéneos y, tras un proceso de instrucción común sobre suma de progresiones aritméticas, les planteó una serie de problemas. Al primer grupo se le pidió que tratara de descubrir las reglas sin ayuda; al segundo se le dieron algunas indicaciones acerca de ellas y al tercero se le explicaron las reglas. En un mismo período de 90 minutos, los alumnos de los dos primeros grupos resolvieron un número de problemas sensiblemente inferior a los que resolvieron los del tercer grupo. A los tres grupos se les aplicó un test al acabar la experiencia y otro un mes después para medir su capacidad en recordar las reglas y aplicarlas en la solución de ejercicios adecuados. Al acabar la experiencia, el tercer grupo (método expositivo) fue superior a los otros dos, pero al cabo de un mes, el grupo primero (descubrimiento) obtuvo el mejor rendimiento.

En su segundo estudio, Kersh (1962) repartió 90 alumnos de una escuela preparatoria en tres grupos homogéneos, instruyéndolos en el mismo tema anterior mediante folletos programados. Se les pidió que descubrieran una explicación de las reglas. Al primer grupo se le dio una cierta orientación individual, al segundo se le explicaron las reglas en un folleto programado y al tercero no se le dio ninguna ayuda. Los resultados de las pruebas de retención y transferencia fueron favorables a los dos primeros grupos (descubrimiento dirigido y memorización)

Gagné y Brown, en 1961, experimentaron con 33 niños de sexo masculino de 9º y 10º grado tres metodologías análogas a las descritas anteriormente sobre algunos aspectos de series numéricas. El test aplicado al final del período instructivo (2 clases) medía sólo la capacidad para descubrir nuevas reglas a partir de distintas series de problemas; por tanto, era una prueba de transferencia y no de recuerdo. Los resultados indican que el grupo de descubrimiento dirigido fue ligeramente superior al del descubrimiento abierto y ambos fueron superiores al que siguió una metodología expositiva.

El experimento de Worthen (1968) confirma los resultados de Kersh sobre el rendimiento a largo plazo aunque tuvo en cuenta otras variables como la adquisición de estrategias heurísticas y la variación actitudinal. Escogió dos grandes grupos homogéneos con estudiantes de 11 años, cada uno de los cuales estaba formado por 8 clases completas, de manera que un mismo profesor atendía dos clases de distinto grupo. El primer grupo utilizó un método expositivo en el cual el profesor establecía los principios al comienzo de cada lección y, a continuación, se resolvían ejemplos y ejercicios con referencia siempre a las reglas establecidas. En el método de descubrimiento practicado por el segundo grupo, los alumnos se enfrentaron inicialmente a una secuencia estructurada de ejemplos; el profesor ayudaba a aquellos alumnos que se lo pedían sin mostrar nunca el principio buscado; sólo lo hizo cuando todos o casi todos lo habían descubierto. La experiencia duró 6 semanas y la tarea se centró en temas de aritmética elemental. Los alumnos fueron evaluados al finalizar, a las 5 semanas y a las 11 semanas. Los resultados obtenidos indican que el grupo de descubrimiento obtuvo puntuaciones inferiores en el test de conocimientos al acabar la experiencia pero superiores en el test de transferencia, en el test de adquisición de estrategias heurísticas y también en los dos tests de retención. No se encontraron diferencias significativas en cuanto a la variación de la actitud hacia las matemáticas.

En contra de alguna de las conclusiones mostradas hasta aquí, Roughead y Scandura (1968) obtuvieron en su breve experimento (un solo período lectivo) que el grupo con metodología expositiva alcanzó mejores puntuaciones tanto en el test de aplicación como en el de transferencia.

En la década de los 70 la mayoría de las investigaciones de este tipo siguen tomando como referencia comparativa la metodología expositiva tradicional. Se observa, no obstante, una mayor riqueza y precisión en las variables dependientes.

Scott (1972), además de investigar los efectos sobre la retención conceptual de los métodos de descubrimiento y exposición, estudió si el aprendizaje de un conjunto de conceptos por uno de los dos métodos influye en el aprendizaje de un segundo conjunto de conceptos. Escogió, para el primer conjunto, los conceptos relacionados con los triángulos y, para el segundo, con los cuadriláteros. En la enseñanza por descubrimiento, el concepto es introducido mediante un enunciado general donde se da sólo el nombre del concepto y se explica a los estudiantes que una colección de figuras colocadas a continuación le van a ayudar a descubrir su significado. Respondiendo a preguntas sobre esas figuras, los alumnos descubren los atributos críticos del concepto. En la metodología expositiva se da el nombre de concepto seguido de una definición que recoge los atributos críticos. Se muestran, a continuación, una serie de figuras en las cuales se indica si son o no ejemplos del concepto. No se requieren respuestas por parte de los alumnos. Confirmando otras investigaciones, los resultados muestran que el método de descubrimiento produce una mejor retención a largo plazo que el método expositivo. En cambio, el grado de conocimiento del segundo conjunto de conceptos no difiere según la secuencia del tratamiento instructivo (descubrimiento-exposición; descubrimiento-descubrimiento; exposición-exposición; exposición-descubrimiento); por tanto, la práctica en un método instructivo particular no facilita el aprendizaje posterior.

El experimento de Olander y Robertson (1973) incorpora en su diseño la medición de actitudes y el estudio de la interacción entre aptitudes y tratamiento. La muestra está formada por 374 alumnos de 4º grado (16 clases) atendidos por 13 profesores cuyo comportamiento fue supervisado para que se ajustara a los modelos de enseñanza prefijados: descubrimiento y expositivo. En el método de descubrimiento, el profesor, a partir del planteamiento de una situación problemática y mediante el uso de modelos materiales, animó a los alumnos a buscar soluciones y respuestas a sus propias preguntas, procurando que localizaran y corrigieran sus propios errores e impidiendo que unos proporcionaran respuestas correctas a otros para que todos llegaran al descubrimiento por sí mismos. El proceso instructivo duró siete meses con una clase diaria de 50 minutos y se trabajaron todos los temas habituales del programa. Los resultados de rendimiento no demuestran una clara superioridad de uno u otro método ya que los alumnos enseñados con la metodología expositiva aventajan en la prueba de cálculo rutinario pero son inferiores en la habilidad para aplicar los conocimientos al cabo de cinco semanas. En cambio, las medidas de la actitud mostraron que el método de descubrimiento eleva el nivel de la misma más que el método expositivo. En cuanto a la interacción de aptitudes con tratamiento, estos investigadores encontraron que los alumnos con baja puntuación en los pretests de cálculo y de aplicaciones mejoraron más con el procedimiento expositivo mientras que los de más alta puntuación mejoraron con el método de descubrimiento. Por el contrario, este método favoreció más a quienes tuvieron resultados más bajos en el pretest de conceptos, mientras que el expositivo favoreció más a quienes obtuvieron puntuaciones más altas.

La investigación de Hirsh (1977) retoma, de nuevo, el diseño de los tres grupos (enseñanza por descubrimiento dirigido, enseñanza expositiva individualizada y enseñanza programada individualizada) y pretende comparar el rendimiento en cuanto al aprendizaje inicial, a la transferencia (vertical y lateral) y a la retención. El método de descubrimiento dirigido se caracteriza por la búsqueda de los conceptos, de los principios y de los procedimientos algorítmicos a través del diálogo dialéctico grupal profesor-alumnos, implicando a la vez procesos deductivos e inductivos. El método expositivo empleaba materiales escritos dirigidos de forma personal al alumno incorporando objetivos comportamentales y ejercicios de autoevaluación. El tercer método es semejante al anterior pero difiere en el estilo ramificado propio de la enseñanza programada. La muestra total estaba formada por 213 alumnos de enseñanza scundaria y el proceso instructivo, que trató sobre el cuerpo de los números complejos desde el punto de vista de las extensiones, duró 6 periodos de 55 minutos cada uno. Se aplicaron después 4 pruebas específicas. Para evaluar el aprendizaje inicial se utilizó un test de 25 items sobre conceptos y habilidades desarrolladas durante la experiencia. La transferencia vertical se midió con una prueba que constaba de 11 problemas cuya resolución no requería más conocimiento que los tratados en la instrucción. La transferencia lateral fue evaluada mediante una prueba de 7 items que medían la habilidad de los estudiantes para generalizar a otros sistemas matemáticos con similares características estructurales. Finalmente la retención se midió con un test de 25 items análogo al primero pero aplicado 6 semanas después de finalizar la experiencia. Los resultados obtenidos muestran que el grupo que siguió la metodología del descubrimiento dirigido se comportó significativamente mejor en las pruebas de aprendizaje inicial y transferencia que los otros. No se encontraron diferencias entre los tres grupos en el test de retención y tampoco entre los dos de enseñanza individualizada. Concluye el autor que, en la enseñanza de estructuras conceptuales complejas, la metodología del descubrimiento mediante diálogo grupal dialéctico puede ser más eficaz que la instrucción convencional individualizada.

Durante los años 80 disminuye considerablemente el número de estudios que investigan la eficacia relativa de las metodologías por descubrimiento frente a las expositivas. Surgen otras líneas de investigación, como la resolución de problemas o los errores conceptuales, que acaparan el interés de una gran parte de los trabajos. Siguen produciéndose, no obstante, análisis de la interacción aptitudes-tratamientos como veremos en el siguiente apartado y alguna esporádica evaluación comparativa de metodologías como la de Williams (1983). Este autor seleccionó dos grupos, de 18 y 25 alumnos respectivamente, a los que él mismo instruyó con dos diferentes tratamientos de aprendizaje por descubrimiento dirigido. En el primer tratamiento proponía a los alumnos tres ejemplos y tres no-ejemplos del concepto o procedimiento que deseaba enseñar. Los alumnos escribían la regla y, si no era correcta, el profesor formulaba preguntas o ponía contraejemplos hasta que cada alumno la descubia (generalización escrita). El segundo tratamiento comenzaba igual pero cada alumno seleccionaba la regla entre cuatro opciones que le eran presentadas (generalización por elección). El profesor ayudaba con preguntas a quien no acertaba en la elección. Los alumnos pertenecían a un *college* y cursaban una asignatura de repaso de las matemáticas secundarias. En los 30 períodos de clase que duró la experiencia trataron temas como fracciones aritméticas, números enteros, potencias, polinomios, ecuaciones lineales y sistemas, fracciones algebraicas, ecuaciones cuadráticas, funciones trigonométricas y resolución de triángulos. Los tratamientos anteriormente descritos sólo se utilizaron en la enseñanza de los conceptos fundamentales y debe tenerse en cuenta que muchos ya eran "conocidos" por los alumnos pues se trataba de una asignatura de repaso. Se aplicó, al finalizar, un test de elección múltiple diseñado *ad hoc* para evaluar el aprendizaje inmediato y un test estandarizado para medir la actitud. No se encontraron diferencias ni en rendimiento ni en cambio actitudinal entre los dos grupos.

A continuación revisamos las investigaciones sobre interacción entre tratamientos y características de los sujetos.

1.2. Interacción entre características de los alumnos y metodologías para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento

Partiendo de una postura escéptica ante la posibilidad de hallar una metodología didáctica absolutamente eficaz, surge una corriente de investigación que intenta analizar la interacción entre los distintos tratamientos instructivos y las distintas características de los alumnos (razonamiento general, estilo cognitivo, actitud, ansiedad, introversión, etc.). Alcanza su auge en los años 70 y 80 y suele concentrarse en la interacción tratamientos-aptitudes (CRonbach y Snow, 1977). A continuación revisamos una muestra representativa de aquellas investigaciones en las que alguna de las metodologías implicadas se basa en el aprendizaje por descubrimiento de las matemáticas.

Los estudios de Trown (1970) y de Trown y Leith (1975) han investigado la eficacia del método explorativo y del método expositivo en relación con ciertas dimensiones de la personalidad como la introversión o la ansiedad. Aparece una interacción significativa en la enseñanza primaria entre tratamiento y ansiedad mientras que, en la enseñanza secundaria, esta interacción ocurre entre tratamiento e introversión. Se deduce de estos estudios que, en el nivel primario, el método explorativo es menos eficaz en los niños con alto nivel de ansiedad pero, en el nivel secundario, es más eficaz con los niños extrovertidos.

Egan y Greeno (1973) estudiaron la interacción entre la habilidad intelectual general (resolución de problemas, generalización, etc.) y dos tratamientos metodológicos para un mismo programa instructivo sobre conceptos y algoritmos relacionados con las probabilidades binomiales. En el primer tratamiento (aprendizaje por descubrimiento) el profesor presentaba un problema y los alumnos debían descubrir el procedimiento algorítmico para resolverlo. En el segundo tratamiento (aprendizaje reglado) los sujetos recibían el problema junto con la fórmula y la explicación de las variables que intervenían; sólo debían aplicarla para resolver el problema. Al acabar la experiencia, se aplicaron dos tests, uno sobre conceptos (de 14 items) y otro sobre algoritmos (de 8 items) además del test MSAT para medir la habilidad intelectual. Los resultados indican que hay interacción entre esta variable y los tratamientos: los sujetos de capacidad alta obtuvieron resultados parecidos a través de ambos procedimientos de enseñanza; los de capacidad baja se vieron favorecidos por la enseñanza reglada y los de capacidad media obtuvieron mejores resultados si habían utilizado el método de descubrimiento. Concluyen también los autores que las habilidades en resolución de problemas y generalización son más importantes para el éxito en el aprendizaje por descubrimiento que en el aprendizaje reglado.

La interacción de los tratamientos con el estilo cognitivo ha producido bastantes estudios. Destacan los relativos a la dependencia/independencia de campo (DIC), llevados a cabo por McLeod y Adams (1977, 1979, 1980a), McLeod y Briggs (1980) y McLeod y otros (1978).

Continuando y complementando una investigación anterior, McLeod y Adams (1977) estudiaron la interacción entre DIC y dos tratamientos instructivos basados en el aprendizaje por descubrimiento que diferían en el nivel de orientación y en el nivel de abstracción. Seleccionaron dos grupos en una escuela de formación de profesores para la Educación Primaria, uno con 21 alumnos y otro con 25. Durante un período de 50 minutos ambos grupos trabajaron el tema de los sistemas de numeración con bases distintas de diez. El primer grupo utilizó modelos materiales (bloques multi-base) y tuvo muchas posibilidades para el descubrimiento (orientación mínima y manipulación de modelos concretos). El segundo grupo utilizó un material escrito con una gran orientación y un tratamiento simbólico, no manipulativo (orientación máxima y presentación simbólica). Los resultados indican que los estudiantes independientes de campo aprenden más si tienen una mínima orientación y una máxima oportunidad para el descubrimiento mediante el uso de materiales manipulativos; en cambio, los dependientes de campo aprenden más con una orientación máxima y con un tratamiento simbólico.

En otra de sus investigaciones, McLeod y Adams (1980a) analizaron la interacción entre DIC, razonamiento general y dos tratamientos instructivos. Seleccionaron dos grupos, con 24 y 23 estudiantes respectivamente, de la misma población que antes y durante 90 minutos ambos grupos estudiaron los errores en las medidas y sus efectos sobre los cálculos con datos aproximados. En el primer grupo, los estudiantes trabajaban individualmente varios ejemplos con calculadora y eran animados a producir las reglas que, más tarde, eran explicitadas a quien no lograba encontrarlas (descubrimiento dirigido). Los alumnos del segundo grupo recibían directamente las definiciones y las reglas con las cuales resolvían luego los ejemplos (método expositivo). En ambos casos, los alumnos disponían de un material escrito adecuadamente. Para medir la dependencia/independencia de campo se empleó el GEFT (Group Embedded Figures Test) y para medir el razonamiento general el NAO (Necessary Arithmetic Operations). Se aplicaron sendos tests diseñados *ad hoc,* uno al acabar la experiencia y otro un mes después. Se encontró interacción entre el razonamiento general y los tratamientos con respecto a la retención. En cambio, no se encontró ninguna interacción entre DIC y tratamientos a pesar de que, teóricamente, éstos diferían en el nivel de guía externa y, por lo tanto, su influencia podría ser notoria. Ese último resultado también coincide con el obtenido por Threadgill (1979).

En otro estudio, estos mismos autores (McLeod y Adams, 1980b) investigaron la interacción entre distintas dimensiones del tratamiento instructivo y el *lugar de control* (Lefcourt, 1976). En concreto, diseñaron tres experimentos con alumnos de la misma población que antes:

Primer experimento:
- Grupo 1: Tratamiento con baja orientación (n= 14)
- Grupo 2: Tratamiento con alta orientación (n = 15)

Segundo experimento:
- Grupo 1: Tratamiento inductivo (n=17)
- Grupo 2: Tratamiento deductivo (n=14)

Tercer experimento:
- Grupo 1: Trabajo en pequeños grupos (n=33)
- Grupo 2: Trabajo individual (n=34)

En el primer y tercer experimento se trató el tema de las redes (concepto, equivalencia, transversalidad y fórmula de Euler) durante 150 minutos de clase. En el primer caso los métodos diferían en el nivel de orientación externa; en el segundo, los materiales empleados seguían un método de descubrimiento dirigido y eran iguales para ambos grupos pero uno trabajaba individualmente y otro en pequeños grupos. El tema desarrollado durante 75 minutos en el segundo experimento versaba sobre medidas, dígitos significativos y sus efectos en los cálculos con datos aproximados. Los métodos empleados diferían en que uno era inductivo y otro deductivo. Al acabar los períodos instructivos se pasó un test de rendimiento y, al cabo de uno o dos meses, se pasó un test de retención. Los resultados obtenidos pueden resumirse de la siguiente manera:

– No hay interacción entre lugar de control y el grado de orientación externa del tratamiento instructivo.

– No hay interacción entre lugar de control y la dimensión inductiva-deductiva de la metodología instructiva.

– Los alumnos con control interno obtienen mejores resultados con el método de trabajo en pequeños grupos y los alumnos con control externo aprenden mejor con el método individual cuando reciben ayuda del profesor.

Finalmente, reseñamos un reciente estudio de Clute (1984) que se ocupa de investigar la interacción entre ansiedad y método de enseñanza. Durante 30 clases, dos grupos de 44 y 37 alumnos universitarios estudiaron diversos temas de una asignatura de matemáticas generales con dos metodologías distintas y con un profesor común. En un grupo, el profesor empleó un método de descubrimiento: comenzaba formulando preguntas fáciles a la clase entera; a partir de las respuestas planteaba problemas más difíciles; se iba ampliando gradualmente el número de alumnos que conocía la solución y, finalmente, se resolvían problemas análogos exigiendo explicación en la respuesta. Con el otro grupo utilizó un método expositivo: comenzaba resumiendo las lecciones anteriores y explicando cómo la presente lección se relacionaba con ellas; luego exponía los conceptos y los algoritmos con sus ejemplos correspondientes y, finalmente, se resolvían ejercicios y problemas de aplicación. Se aplicó el test MARS (Mathematics Anxiety Ratting Scale) para medir el nivel de ansiedad y el MAT (Mathematics Achievement Test) para medir los conocimientos adquiridos. El autor encontró una interacción significativa entre el método instructivo y el nivel de ansiedad. Los estudiantes con un nivel bajo tienden a obtener un rendimiento mejor con el método de descubrimiento mientras que los estudiantes con un alto nivel de ansiedad tienden a rendir más con el tratamiento expositivo.

A continuación revisamos la tercera línea de investigación que nos interesa: las concepciones erróneas y su superación mediante metodologías para el aprendizaje por descubrimiento.

1.3. Concepciones erróneas en matemáticas y su superación con metodologías didácticas para el aprendizaje por descubrimiento

Los errores que cometen los estudiantes al realizar ciertas tareas escolares (contestación a preguntas, formulación de conjeturas, resolución de problemas o ejercicios, discusiones grupales, etc.) han dejado de ser exclusivamente sancionados para convertirse en el centro de interés de una línea de investigación muy importante tanto en el campo de la educación matemática como en el de otras materias, desarrollada, sobre todo, desde hace 15 años. Estos errores son consecuencia de ciertas *ideas* o *concepciones erróneas* que normalmente se generan durante el propio proceso de aprendizaje.

Sin embargo, algunas de estas ideas existen ya en los estudiantes antes de que comience el proceso instructivo específico del tema afectado, por ejemplo:

– "No tiene *sentido* sumar letras y números para obtener expresiones como n + 3 ó 2 + a" (Booth, 1982).

– "Rectángulos con igual perímetro encierran la misma área" (Woodward, 1982; Woodward y Byrd, 1983; Castelnuovo, 1970).

– "Una definición matemática de un objeto geométrico es una colección de atributos que lo describen; no es necesario que determinen de modo unívoco al objeto ni que la colección sea mínima" (Vinner y Zur, 1987).

– "Para decidir si la expresión A – B = 0 es verdadera, no basta con saber que A es igual a B, sino que es necesario conocer los valores concretos de A y de B" (Oppenheim, 1987).

– "Los óvalos construidos con regla y compás son elipses" (ver apartado 4.2. de esta memoria).

La detección de ideas erróneas preinstruccionales y el análisis de sus características han sido objeto de numerosas investigaciones, sobre todo, en el campo de la enseñanza de las ciencias, donde es más frecuente que los niños y los jóvenes desarrollen *explicaciones* sobre los fenómenos reales antes de que se inicie su estudio específico en el currículum escolar.

Las ideas previas poseen varias características comunes que definen su naturaleza. Siguiendo a Pozo y Carretero (1987), señalamos las siguientes:

1. Son ideas personales y espontáneas, es decir, surgen de modo natural en la mente del alumno, sin que exista ninguna instrucción educativa *específicamente* diseñada para producirlas, aunque sí pueden generarse como consecuencia de su actividad escolar.

2. Suelen ser ideas implícitas, en el sentido de que, muchas veces, el alumno ni siquiera es plenamente consciente de ellas y, por lo tanto, es incapaz de verbalizarlas correctamente.

3. Suelen ser científicamente incorrectas y contradictorias entre sí.

4. Son prácticamente ubicuas, es decir, rara es el área de conocimiento en el que las personas no tenemos ideas de este tipo.

5. Algunas de ellas son compartidas por alumnos de distintas edades e, incluso, por personas adultas que no las han *cambiado*.

6. En algunos casos, tienen un carácter histórico ya que reproducen fielmente etapas pasadas en la evolución del conocimiento científico.

7. Las ideas previas, dentro de un mismo dominio, suelen estar relacionadas entre sí y se organizan en forma de teorías, generalmente implícitas.

8. En general, las ideas previas son resistentes al cambio.

Esta última característica es, sin duda, la más importante desde el punto de vista didáctico. En efecto, muchos estudios han demostrado la persistencia de ideas previas erróneas en gran parte de los alumnos a pesar de haber seguido uno o varios cursos de instrucción escolar sobre el tema afectado. Ahora bien, ¿todos los procedimientos instructivos producen el mismo "fracaso" en el *cambio conceptual* de los alumnos?

Cabe conjeturar que no; sin embargo, en el campo de la educación matemática son muy escasas las investigaciones que se han ocupado de analizar el grado de éxito o fracaso en el cambio conceptual de los alumnos. Como veremos a continuación, la mayoría de los estudios se limitan a detectar las ideas erróneas sin indicar:

a) si son pre y/o post-instruccionales,

b) qué metodología didáctica se ha seguido durante el proceso instructivo,

c) en qué curso exacto de escolarización se han detectado o cuál es su evolución dentro del ciclo donde se han detectado.

A pesar de estos inconvenientes, creemos que es necesario repasar los estudios sobre este tema porque, sin duda, pueden clarificar la formulación precisa de los objetivos de nuestra investigación. Los siguientes párrafos resumen los principales resultados referidos a las distintas áreas de las matemáticas: Aritmética, Algebra, Geometría y Análisis.

1.3.1. Concepciones erróneas en aritmética

Destacamos una investigación sobre números enteros y dos sobre fracciones.

Bell (1986b) se propuso identificar las concepciones erróneas sobre los números enteros en una muestra de 400 niños de 8-9 años y utilizó para ello varias entrevistas y una prueba escrita de 20 items que cubría todos los tipos básicos de problemas con una operación (suma o resta). Detectó las siguientes ideas erróneas:

1. *Subir es aumentar:* Los niños confunden "ir hacia arriba" en una escala con "aumentar el número", sin darse cuenta de que en algunos contextos (listas de discos más vendidos, números negativos, etc.) una "subida" implica una "disminución" del (valor absoluto del) número.

2. *Ignorancia del signo negativo:* Sucede con frecuencia en la respuesta a preguntas como ésta: "Un día en Moscú la temperatura descendió 6º entre la salida del sol y el mediodía. A la salida del sol era de -7º. ¿Cuál era al mediodía?".

3. *Signo denota región:* Se refiere al hecho de que las variaciones en la región negativa de una escala son afectadas siempre con el signo menos; por ejemplo, respuestas como "bajó -7º" cuando se pregunta por la variación entre -9º y -2º.

4. *Fracaso en la inversión:* En los problemas donde es desconocido el estado inicial, los alumnos realizan una inversión del sentido del cambio expresado en el enunciado; por ejemplo: "El disco favorito de Sandra está 5 lugares más abajo de lo que estaba hace dos semanas. Durante la primera de estas dos semanas subió 3 lugares. ¿Subió o bajó la segunda semana? ¿Cuántos lugares?" Casi la mitad de los alumnos respondió que bajó o subió dos lugares.

Clements y Del Campo (1987) se interesaron en estudiar el lenguaje que usan los niños para expresar sus ideas sobre fracciones y las relaciones con su habilidad para comprender el lenguaje formal tal como aparece en los libros de texto. Intentaron explorar las ideas sobre las fracciones originadas intuitivamente por el uso de las palabras del lenguaje coloquial o de la propia instrucción formal. En concreto, investigaron la concepción que poseen los niños de enseñanza primaria acerca de las fracciones 1/2, 1/4 y 1/3. Utilizaron 240 entrevistas y un test de lápiz y papel con 36 items que fue contestado por 1024 alumnos. Entre sus conclusiones, destacamos las siguientes:

1. La mayoría de los niños tiene una buena comprensión receptiva de 1/2 si por esto entendemos la habilidad para reconocer-

lo como la mitad de las figuras geométricas sencillas. No obstante, cuando el eje de simetría de la figura no es ni vertical ni horizontal, algunos alumnos de 2º no reconocieron la representación gráfica de 1/2.

2. La mayoría de los niños tuvo dificultades para contestar a las preguntas sobre 1/4 a pesar del "conocimiento" de la noción "mitad de la mitad" debido a la escolarización. Por ejemplo, cuando se les presentó una figura dividida en cuatro partes y sólo se coloreó una de ellas, muchos alumnos pensaron que el diagrama representaba 1/3 porque asociaron la palabra "tercio" con "tres" ya que eran tres las zonas no coloreadas. Sólo en 5º curso algunos niños parecen haber desarrollado una idea correcta de la representación de 1/4 en figuras sencillas como círculos, por ejemplo.

3. Aunque los niños saben cómo repartir equitativamente un pequeño número de objetos entre tres personas cuando el reparto es exacto, sin embargo, en contextos continuos, no identifican correctamente la unidad entera y, por lo tanto, son incapaces de hacer las particiones correspondientes a 1/3.

4. En cuanto al orden en que los niños adquieren los conceptos de 1/2, 1/4 y 1/3, éste depende de los contextos (discreto y continuo) y del tipo de comprensión (receptiva o expresiva).

Complementando el estudio anterior, Tatsuoka (1984) se ocupó de examinar los errores cometidos en los algoritmos de suma y resta de fracciones por 600 estudiantes de enseñanza secundaria. He aquí algunos de sus resultados más interesantes:

1. Ignorancia de la fracción en las operaciones con números mixtos; por ejemplo:

$$4\ 7/12 - 2\ 4/12 = 2$$

2. Consideración de que el numerador y el denominador son elementos independientes en una fracción y, por lo tanto, puede operarse con ellos aisladamente, por ejemplo:

$$5/4 + 3/2 = 8/6 \quad \text{ó} \quad 3/5 - 1/10 = 2/5$$

3. Aprendizaje memorístico de las reglas lo que produce fallos frecuentes; por ejemplo, en una suma de fracciones con denominadores distintos, multiplican los denominadores y suman los numeradores.

4. Incomprensión del significado "racional" del cero y del uno que se manifiesta en errores como los siguientes:

$$2/3 - 2/3 = 1; 3/4 - 3/8 = 0/4 = 4; \quad 6/7 - 4/7 = 2/0 = 2$$

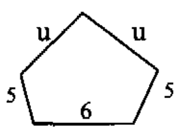
1.3.2. Concepciones erróneas en álgebra

Reseñamos en este párrafo tres investigaciones, hasta cierto punto complementarias, que configuran una buena panorámica del trabajo en este campo. La primera (Booth, 1982) utiliza los errores en álgebra previamente detectados por el programa CSMS ("Concepts in Secondary Mathematics and Science"; Hart, 1981). Mediante 72 entrevistas y un test de lápiz y papel pasado a 1000 alumnos de enseñanza secundaria, el autor identifica cuatro áreas de dificultad:

1. *Interpretación de letras:* los estudiantes frecuentemente no comprenden que las letras representan números y que el número representado puede tener un único valor (como en $x + 2 = 5$) o infinitos valores (como en $x + y = y + x$ ó $x + y + 1 = 0$).

2. *Formalización y simbolización del método algebraico de resolución de problemas:* Los alumnos no utilizan o no comprenden o cometen errores en la resolución algebraica de problemas porque no simbolizan ni formalizan los métodos usados al resolver problemas aritméticos.

3. *Conjunción en la suma algebraica:* Los estudiantes no reconocen expresiones aditivas del tipo $n + 3$ ó $2 + a$ como resultados y tienden a fusionarlas en las formas 3n ó 2a; por ejemplo, para muchos el perímetro de la figura



es 2u556 ó 2u16 y el resultado de sumar 4 con 3n es 3n4 ó 7n.

4. *Uso de paréntesis:* Los alumnos piensan que no es necesario utilizar los paréntesis pues las operaciones deben realizarse en el mismo orden en que se escriben y, en todo caso, el resultado siempre es el mismo.

Un grupo de autores españoles (Grupo Azarquiel, 1987) pasaron un aprueba escrita a 182 alumnos de 1º de BUP para hacer un catálogo ordenado de los errores en temas como operaciones con números y letras, ecuaciones, sistemas y problemas de posible resolución algebraica. Los errores detectados caen, en general, dentro de las cuatro áreas de dificultad indicadas antes por Booth. Posteriormente realizaron entrevistas clínicas a algunos alumnos con el fin de profundizar en las conductas erróneas y buscar las posibles hipótesis que las expliquen. Para estos autores, los procesos mentales que conducen a este tipo de errores serían los siguientes:

1. *Memorización de reglas:* Tendencia a funcionar utilizando siempre una regla establecida.

2. *Generalización abusiva:* Utilización de reglas conocidas fuera de su contexto de validez.

3. *Uso indebido del signo igual:* Los estudiantes conciben el signo igual como una acción que debe llevar a un resultado en vez de considerarlo como un equilibrio manipulable en ambos sentidos.

4. *Reducción de campo:* Los alumnos prescinden de algunas condiciones y se quedan sólo con las que son relevantes para el sujeto.

5. *Necesidad de clausurar:* Reducción de las situaciones a términos más simples y conocidos.

6. *Traducción literal de enunciados:* Elaboración de la expresión simbólica en el mismo orden en que aparece en el enunciado coloquial.

Completamos estos dos trabajos exponiendo algunos de los resultados obtenidos por Oppenheim (1987) al estudiar los errores en "aritmética generalizada" mediante un test de 135 items contestado por 140 jóvenes de enseñanza secundaria. En el área de la *interpretación de letras,* encontró que, aunque muchos estudiantes reconocían que las letras representaban números, sin embargo valoraban las expresiones en términos de números particulares; por ejemplo:

1. Para decidir si $A - B = 0$ es una expresión verdadera no basta con saber que A es igual a B sino que es necesario conocer los valores concretos de A y de B.

2. Dados dos números enteros positivos A y B, su producto A.B no es siempre mayor que ambos, sino que depende de los valores concretos de A y de B.

3. N (1/N) no es 1 sino que depende del valor de N.

En el área de la *simbolización de problemas,* encontró que muchos alumnos escogen la expresión x > y para representar la cantidad en que x excede a y, y 2N/3N ó N:2/3 ó 2/3:N para representar 2/3 de un número N. Asimismo, casi la mitad de los alumnos infiere de C > D y E > F la expresión C/E > D/F (en lugar de C + E > D + F).

1.3.3. Concepciones erróneas en geometría

Seleccionamos de nuevo tres investigaciones representativas de los estudios que se han realizado en este campo.

Hershkowitz (1987) investigó el "grado" de asimilación de algunos conceptos básicos de geometría en alumnos de enseñanza primaria y secundaria (572), estudiantes de una escuela de profesorado (142) y profesores de enseñanza primaria en ejercicio (25). En la identificación y construcción de elementos geométricos constató errores como los siguientes:

1. No reconocimiento de triángulos rectángulos en figuras como:

2. No reconocimiento de las figuras siguientes como cuadriláteros:

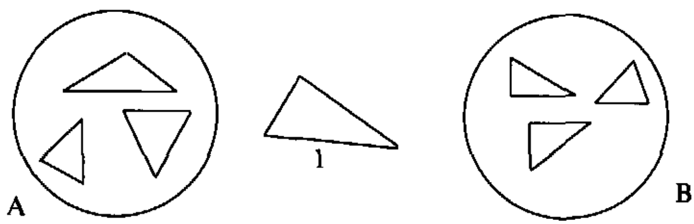
3. Concepción de las alturas como segmentos "interiores" al triángulo.

El autor constató que algunos de estos errores, como el referido a los cuadriláteros, disminuyen con el nivel de escolarización. Otros, como en el relativo al triángulo rectángulo, son compartidos de modo paralelo por los tres grupos que formaban la muestra. Atribuye estos comportamientos a que los estudiantes se dejan llevar en las tareas de identificación y construcción por los *prototipos*, es decir, por aquellos super-ejemplos que son los más populares de un concepto dado, y estas representaciones empobrecen el concepto porque, con frecuencia, ocultan alguno de sus atributos críticos.

En relación también con la formación y adquisición de conceptos geométricos, Medeci, Speranza y Vighi (1986) indagaron qué características geométricas son elegidas preferentemente para efectuar los procedimientos de abstracción y cuál es el papel del léxico geométrico. Sobre una muestra de 388 estudiantes de 9-10 años, mediante un cuestionario de 11 items, obtuvieron los siguientes resultados:

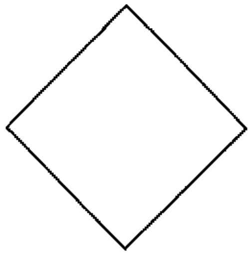
1. El número de lados de un polígono es un criterio de clasificación más intuitivo que el paralelismo de sus lados, el número de ángulos rectos o la equisuperficialidad.
2. Sin embargo, cuando se trata de triángulos, la existencia de un ángulo recto es un criterio de clasificación determinante; por ejemplo, a la pregunta:

¿Pondrías la figura 1 en A o en B?



el 83% de los alumnos responde que en B. Este resultado contrasta con el obtenido por Hershkowitz (1987) pues supone un reconocimiento generalizado del triángulo rectángulo en posición no prototípica. Los mismos autores se sorprenden de este resultado que atribuyen a la actividad específica desarrollada en clase para reconocer un ángulo recto incluso cuando no está dibujado con los lados paralelos a los bordes de la hoja.

3. Como contraste, sólo la tercera parte de los alumnos reconoce que esta figura



es un cuadrado; la mitad lo llama *rombo,* aunque las respuestas varían notablemente de clase en clase según que, en ellas, los alumnos hubieran trabajado o no con las transformaciones geométricas.

4. La presencia de un "nombre propio oficial" que se puede atribuir a una figura geométrica influye a menudo en el criterio con el que los niños agrupan o asocian figuras. Sin embargo, se notan dificultades al describir las figuras cuando no se pueden denotar con nombres conocidos.

5. El hecho de que muchos libros de texto, para cada tipo de figura, presenten un solo ejemplo gráfico conduce a que *esa* figura concreta acabe por tomarse como *modelo estándar* del concepto. Los niños suelen ampliar el modelo estándar sólo con traslaciones u homotecias, lo que es fuente de numerosos errores. Estas ideas corroboran las anteriormente mencionadas de Herhkowitz (1987) sobre los *prototipos.*

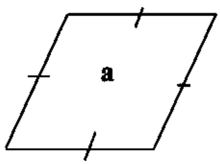
Otros trabajos investigan las ideas que tienen los estudiantes sobre el "método" matemático y su naturaleza. Destacamos el trabajo de Vinner y Zur (1987) que examina si los estudiantes de los cuatro últimos cursos de la enseñanza secundaria han apreciado el aspecto de la geometría como un sistema deductivo y si han adquirido algunas habilidades específicas para el aprendizaje de la geometría como tal sistema deductivo. Utilizaron un cuestionario respondido por 201 alumnos que constaba de 6 partes, cada una de las cuales analizaba un aspecto particular de este aprendizaje:

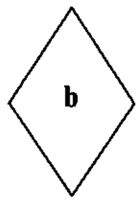
– Habilidad para identificar figuras y explicarlas analíticamente.

- Habilidad para dibujar figuras y definirlas.
- Naturaleza de la definición matemática.
- Diferencias entre definiciones y teoremas.
- Esquema básico de la presentación matemática.
- Descomposición de una proposición en hipótesis y tesis.

Entre las conclusiones a que llegaron los autores, destacamos las siguientes:

1. La habilidad para reconocer y dibujar figuras geométricas sencillas es alta; no obstante, casi la cuarta parte de los alumnos no reconocen que la figura **a** es un rombo a pesar de señalarles mediante un segmento la igualdad de sus lados; en cambio, prácticcamente todos reconocen la figura **b** (de nuevo estamos ante un abuso de los modelos prototípicos).





2. Un número variable de estudiantes (entre 1/3 y 2/3, dependiendo del curso) comprenden la naturaleza minimalista de la definición matemática, esto es, que el conjunto de atributos críticos del concepto que se recogen en la definición debe ser mínimo. El resto de los estudiantes incrementa este conjunto con propiedades que son deducibles o que no son atributos del concepto. Así, por ejemplo, aceptan como definiciones matemáticas las siguientes:

a) Un triángulo isósceles es un triángulo con dos lados y dos ángulos congruentes.

b) Los paralelogramos son cuadriláteros con lados opuestos paralelos e iguales.

c) Angulos adyacentes son aquéllos que tienen el vértice y un lado común y además suman 180°.

3. En una lista de frases sobre geometría elemental, más de la mitad de los alumnos reconocen cuáles deben ser probadas y cuáles no. En este último caso, la mayoría argumenta que son definiciones o axiomas. Se observa, sin embargo, que algunos consi-

deran la definición de líneas paralelas ("aquéllas que no se cortan") como un axioma.

4. La habilidad para descomponer proposiciones en "hipótesis" y "tesis" depende del contenido, es decir, varía según la experiencia previa con los conceptos implicados o con proposiciones similares.

Los autores señalan que encontraron diferencias entre los cuatro niveles de escolaridad, en el sentido de que el porcentaje de respuestas correctas aumentaba con el grado, pero estas diferencias no fueron drásticas.

1.3.4. Concepciones erróneas en análisis

Revisamos algunos estudios sobre gráficas de funciones y sobre cálculo diferencial e integral. Entre los primeros destaca el realizado por un grupo de investigadores ingleses (Bell, Brekke y Swan, 1987; Swan, 1989) que se propusieron identificar las concepciones erróneas que tienen los alumnos de enseñanza primaria sobre las gráficas de funciones (interpretación y construcción). Las principales ideas erróneas que encontraron son las siguientes:

1. Identificación de una gráfica con el dibujo de una situación.
2. Incomprensión de que las gráficas muestran una relación entre *dos* variables.
3. Confusión de intervalos y gradientes con *puntos* particulares.
4. Fijación en uno o dos factores y exclusión de los restantes al construir una gráfica.

Clement y otros (1985) volvieron a encontrar en la enseñanza secundaria el primero de estos errores y una variante del tercero: confusión de la pendiente (rapidez de variación) con *puntos* más altos o puntos más bajos de la gráfica. Al menos en el primer caso nos encontramos ante una idea previa errónea (gráfica = dibujo de una situación) resistente al cambio tras el proceso instructivo habitual.

En el campo del cálculo elemental, destaca la investigación de Orton (1983 a y b) realizada con dos grupos de estudiantes: uno de enseñanza secundaria (n = 60) y otro de enseñanza universitaria (n = 50). Entrevistó dos veces a cada alumno durante una hora aproximadamente empleando un test de 38 items. En lo referente a concepciones erróneas, he aquí los resultados más interesantes:

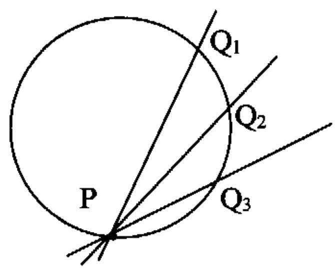
1. Tratamiento del símbolo del infinito como un símbolo algebraico.

2. Las sucesiones crecientes (como 3n/n + 1) tienden a infinito.

3. Incapacidad para apreciar cuándo el cálculo de un límite resuelve un problema como, por ejemplo, el calculo del área bajo una curva mediante el límite de las aproximaciones rectangulares.

4. Predominio del algoritmo sobre la comprensión conceptual al calcular por integrales el área bajo una curva; por ejemplo, ignoran la condición de que la función debe estar acotada.

5. En la siguiente figura, cuando los puntos Q_n se aproximan indefinidamente a P, las secantes llegan a convertirse en el punto P.



6. Confusión de la derivada en un punto x con la tasa de variación media en un intervalo (x, x+ h).

7. Fracaso en la interpretación de una derivada nula o negativa en un punto.

La extensión de estas ideas erróneas es diferente en los dos grupos pero no siempre a favor de los estudiantes de enseñanza secundaria. Artigue y Viennot (1987) confirman con estudiantes universitarios de matemáticas el error cuarto: prevalecen los procedimientos algorítmicos sobre la comprensión del concepto que está en juego.

1.3.5. Superación de concepciones erróneas con metodologías para el aprendizaje por descubrimiento

En los párrafos anteriores hemos revisado los trabajos que se ocupan de identificar y analizar las ideas erróneas que estudiantes de distintos niveles educativos poseen acerca de las matemáticas. Aunque la mayoría dan orientaciones generales para una enseñanza eficaz, muy pocos son los que diseñan unos materiales didácticos concretos o se interesan por estudiar el efecto que tienen sobre su *superación* los diferentes métodos instructivos. Citamos dos ejemplos excepcionales y suficientemente representativos: el proyecto "Strategies and Errors in Secondary Mathematics" y la Enseñanza por Diagnóstico.

El proyecto "Strategies and Errors in Secondary Mathematics" (SESM), consolidado por el Social Science Research Council y con sede en el Chelsea College de la Universidad de Londres, se ha preocupado tanto de identificar errores como de diseñar estrategias instructivas capaces de superarlos (Booth, 1982). Su método de enseñanza del álgebra se basa en una "máquina matemática" que debe ser programada para resolver problemas dados. Una experiencia con tres grupos de alumnos que duró seis clases arroja un notable incremento del aprendizaje medido por diferencias de puntuaciones en el test CSMS (Hart, 1981) antes y después del período instructivo.

El método instructivo con más repercusión que utiliza de un modo sistemático las ideas erróneas de los estudiantes para modificarlas ha sido desarrollado en el Shell Center for Mathematical Education (Universidad de Nottingham) y recibe el nombre de *Enseñanza por diagnóstico* o *Enseñanza diagnóstica* (Bell, 1982, 1986a, 1986c, 1987). Este método implica, en primer lugar, la identificación de las concepciones erróneas que tienen los estudiantes y, en segundo lugar, el diseño de actividades en las cuales estas ideas sean expuestas, provoquen un conflicto que estimule discusiones y conduzca a los estudiantes a reorganizar sus ideas, incorporando sus interiorizaciones nuevas o corregidas. Entre estas actividades destacan:

Problemas críticos
Empleo de diagramas
Sustitución de números fáciles
Juegos

Invención de preguntas
Calificación de deberes
Tareas colectivas

"La lección diagnóstica típica utiliza uno o unos cuantos problemas críticos (casi siempre desarrollados originalmente como items de tests) para descubrir concepciones erróneas y así provocar discusiones conducentes a una resolución; a continuación siguen problemas similares que se dan con alguna forma de *feed back* inmediato en cuanto a la corrección, para consoldiar la conciencia acabada de adquirir. El valor de este método general quedó de manifiesto en nuestros primeros experimentos. Sin embargo, su viabilidad para todos los maestros y todas las clases era un tema de investigación y, en consecuencia, se realizaron observaciones para identificar las condiciones de éxito en el conflicto- discusión. Los resultados de estas observaciones se incluyen en las propuestas para maestros que se encuentran en las notas de cada una de nuestras unidades de enseñanza" (Bell, 1987, p. 80). Han publicado materiales sobre decimales, razones, elección de operaciones, álgebra y gráficas de funciones (este último material ha sido traducido y publicado recientemente en nuestro país: Swan, 1989)

1.4. Conclusiones

En los tres apartados anteriores hemos revisado las investigaciones que podrían arrojar luz sobre los tres interrogantes formulados en el problema que origina nuestro trabajo:

"Entre las metodologías didácticas para el aprendizaje por descubrimiento,

- ¿cuáles producen mejores *rendimientos* al experimentarlas en clases reales?
- ¿qué diferencias se observan al *actuar* sobre distintos tipos de estudiantes?
- ¿cuáles favorecen más el *cambio conceptual* en los alumnos?".

Antes de resumir las conclusiones que se deducen de esta revisión en relación con estas tres preguntas, vamos a enumerar algunas dificultades, algunas objeciones, acerca de los trabajos revisados que, sin duda, matizan y mediatizan estas conclusiones:

a) En las investigaciones que comparan metodologías didácticas, no suelen describirse los principios teóricos psico-pedagógicos en los que se asientan los métodos de descubrimiento, lo que acarrea una gran ambigüedad en los términos "aprendizaje por descubrimiento" y "enseñanza por descubrimiento". Lo único que parecen tener en común todas estas metodologías es su participación en una secuencia de aprendizaje que no empieza con la explicación por parte del maestro de reglas o generalizaciones.

b) En algunas de estas investigaciones, el período instructivo es demasiado corto y no siempre se han controlado suficientemente las variables intervinientes (por ejemplo, no suele describirse con detalle la intervención del profesor).

c) Además, en general, no se diferencian los rendimientos en los distintos campos de aprendizaje que, según el Informe Cockcroft (1985, párrafo 240), son los siguientes: hechos, destrezas, estructuras conceptuales, estrategias generales y apreciación. Los *hechos* son unidades de información esencialmente inconexas o arbitrarias. Comprenden las convenciones en materia de notación, los factores de conversión y los nombres asignados a *conceptos* determinados. Las *destrezas* comprenden todo tipo de procedimientos establecidos que puedan desarrollarse mediante una rutina. Las *estructuras conceptuales* son conjuntos de conocimientos ampliamente interconectados que sostienen el ejercicio de las destrezas o permiten adaptar un procedimiento a una nueva situación. Las *estrategias generales* son procedimientos que guían la elección de la destreza que debe emplearse o de los conocimientos a que se debe recurrir en cada etapa de la resolución de un problema. La *apreciación* implica una percepción de la naturaleza de las matemáticas y la adopción de ciertas *actitudes* positivas ante ellas. Comparando estos elementos con los clásicos campos de aprendizaje de Gagné, se observa una correspondencia inmediata:

– Hechos, conceptos y estructuras conceptuales constituirían el campo de la información.

– Las destrezas constituirían los campos de las habilidades intelectuales y psicomotrices que, en el caso de las matemáticas, podemos llamar, con más precisión, procedimientos algorítmicos.

– Las estrategias generales formarían el campo de las estrategias cognitivas, que, en el caso de las matemáticas, son fundamentalmente de tipo heurístico.

– La apreciación pertenecería al campo de las actitudes.

d) En las investigaciones sobre concepciones erróneas, no se precisa si son pre o post-instruccionales ni el tipo de currículum seguido. Tampoco suelen precisar la evolución de su extensión a lo largo del nivel educativo en que son detectadas.

Con la relatividad que resulta al considerar todas estas observaciones, enumeramos, a continuación, las principales conclusiones que se derivan de la revisión realizada:

1. Cuando se comparan metodologías didácticas para el aprendizaje por descubrimiento con metodologías expositivas, parece que el aprendizaje inicial en tareas que no implican transferencia es superior con las últimas, mientras que tanto en transferencia como en retención producen mejores resultados las primeras. Cuando se comparan dos metodologías para el descubrimiento, las pocas investigaciones realizadas no arrojan resultados unánimes: algunos autores no encuentran diferencias entre dos tratamientos dirigidos (Williams, 1983); otros, como Gagné y Brown (1961), detectan mayor poder de transferencia en el descubrimiento dirigido que en el abierto, y otros, como Kersh (1962), obtienen resultados contrarios. En cuanto a la actitud hacia las matemáticas, también los datos son contradictorios: unos autores no encuentran variaciones actitudinales en alumnos sometidos a diferentes tratamientos de descubrimiento y/o exposición (Worthen, 1968; Aiken, 1976; Williams, 1983) y otros, en cambio, indican que el método de descubrimiento eleva el nivel de actitud positiva en los estudiantes (Olander y Robertson, 1973).

2. Sobre la interacción de las metodologías didácticas para el aprendizaje por descubrimiento con las características de los alumnos, podemos enunciar las siguientes conclusiones:

– Los métodos de descubrimiento son más eficaces con alumnos que tienen un bajo nivel de *ansiedad* que los métodos expositivos.

– Los métodos de descubrimiento son más eficaces con estudiantes *extravertidos* que los métodos expositivos.

– No se han encontrado interacciones del *lugar de control* con el grado de orientación externa del tratamiento instructivo.

– Los métodos de descubrimiento y los métodos expositivos favorecen por igual a los alumnos con una *habilidad intelectual* alta; en cambio, los métodos expositivos favorecen más a los alumnos con una habilidad intelectual baja.

– Los métodos de descubrimiento abierto son más eficaces con estudiantes independientes de campo que los métodos de descubrimiento dirigido (McLeod y Adams, 1977 ; McLeod y otros, 1978); en cambio, no se ha encontrado interacción entre este estilo cognitivo y los tratamientos expositivo y por descubrimiento (McLeod y Adams, 1980 a; Threadgill, 1979).

3. En el campo de las concepciones erróneas, la inmensa mayoría de las investigaciones se preocupa sólo de identificarlas sin especificar si son pre y/o post- instruccionales ni qué tratamiento instructivo han seguido los alumnos de las muestras. Resumimos aquí las más representativas:

Aritmética:

– "Subir en una escala" implica "aumentar el número".

– Las variaciones en la región negativa de una escala son afectadas con el signo menos.

– El numerador y el denominador son elementos conceptual y algorítmicamente independientes.

Algebra:

– El resultado de un problema o de una pregunta no puede ser la suma de números y letras (3 + n, a + 1, etc.).

– Los paréntesis no son necesarios ya que las operaciones deben realizarse en el orden en que se escriben y, en todo caso, el resultado es el mismo.

– El signo igual indica una "acción" que debe llevar a un resultado, no un equilibio manipulable en ambos sentidos.

Geometría:

– Un objeto geométrico (triángulo, rombo, altura...) pertenece a una determinada clase si coincide con el "ejemplo prototipo" de la misma (o sus transformados por una traslación y/o una homotecia).

– Una definición matemática de un objeto geométrico es una colección de atributos que lo describen; no es necesario que lo determinen unívocamente ni que la colección sea mínima.

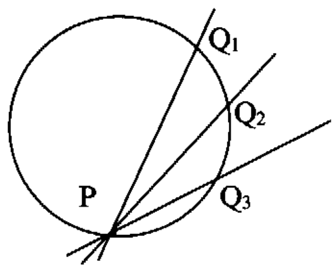
Análisis:

– Una gráfica funcional es un dibujo de una situación.

– La máxima rapidez de variación de una función se alcanza en los puntos más altos o más bajos de su gráfica.

– Las sucesiones crecientes tienden a infinito.

– En la siguiente figura, cuando los puntos Q_n se aproximan indefinidamente a P, las secantes llegan a convertirse en el punto P.



Muy escasos son los trabajos que investigan el nivel de superación de este tipo de ideas mediante tratamientos instructivos adecuados. Destacan los trabajos surgidos en el *Shell Center for Mathematical Education* (Universidad de Nottinghan) sobre la *Enseñanza por diagnóstico,* método que demuestra ser eficaz en esta superación provocando el conflicto cognitivo con actividades instructivas adecuadas. No se han encontrado investigaciones importantes sobre la superación de errores (cambio conceptual) mediante metodologías basadas en el aprendizaje por descubrimiento.

1.5. Formulación de los objetivos de la investigación

Las conclusiones anteriores obtenidas de la revisión literaria acerca de los tres campos en los que incide el problema que origina esta investigación nos permiten ajustar los objetivos de la misma.

En primer lugar, las escasas investigaciones realizadas sobre la comparación de la eficacia de las metodologías didácticas para el aprendizaje por descubrimiento, la imprecisión del soporte teórico que las sustenta, la indiferenciación de los campos de aprendizaje en los que se mide el rendimiento y la obtención de algunos resultados contradictorios obligan a seguir investigando en este terreno tratando de superar algunos de estos inconventientes. Y, aunque las investigaciones de comparación entre metodologías por descubrimiento y expositivas son más abundantes, las objeciones anteriores también sugieren que ese campo debe todavía ser explorado.

En segundo lugar, las mismas consideraciones anteriores junto con la existencia de variables importantes que no han sido suficientemente estudiadas, nos inducen a considerar que la investigación de las interacciones entre tratamientos y características de los sujetos es una cuestión que permanece todavía abierta.

En tercer lugar, la inexistencia de trabajos sobre la eficacia de las metodologías para el aprendizaje por descubrimiento en la superación de errores conceptuales nos indica que para nuestra tercera pregunta no hay ningún indicio de respuesta y, en consecuencia, debe ser investigada.

Por lo tanto, los *objetivos* de nuestra investigación son los siguientes:

1. Construir dos metodologías didácticas para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento.
2. Comparar los rendimientos producidos por dichas metodologías y por la expositiva habitual en distintos campos de aprendizaje (estructuras conceptuales, procedimientos algorítmicos, resolución de problemas y actitudes) a corto plazo y a largo plazo.
3. Comparar el nivel de cambio conceptual producido por las tres metodologías (superación de concepciones erróneas previas).
4. Analizar si existe interacción con ciertas características de los alumnos (sexo, inteligencia general, nivel de instrucción previa, estilo cognitivo, actitud hacia las matemáticas) respecto a todos los rendimientos.

CAPITULO 2

CONSTRUCCION DE DOS METODOLOGIAS DIDACTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS POR DESCUBRIMIENTO

Introducción

En el capítulo anterior, tras la revisión de la literatura relacionada con el problema que origina esta investigación, formulamos los objetivos de la misma. El primero consiste en construir dos metodologías didácticas para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Dedicamos los párrafos siguientes a esta tarea. Para ello, utilizaremos el modelo formal de Joyce y Weil (1985) que consta de cuatro grandes descriptores:

Introducción al modelo: Objetivos, hipótesis teóricas, principios y conceptos fundamentales.

Análisis del modelo: Sintaxis de las fases, sistema social, principios de reacción y sistema de apoyo.

Aplicación: Uso en el aula.

Efectos didácticos y educativos.

2.1. Modelo de la primera metodología

2.1.1. Introducción al modelo: Objetivos, hipótesis teóricas, principios y conceptos fundamentales

Como hemos expuesto en el capítulo anterior, durante los últimos 30 años tuvieron lugar muchas innovaciones y experimentaciones didácticas que se apoyaban en el modelo del aprendizaje por descubrimiento. La ausencia de un significado preciso y de una teoría coherente para este paradigma educativo contribuyó, no sólo a la proliferación de términos afines (como aprendizaje por investigación, por resolución de problemas, por redescubrimiento, método científico, etc.) sino a que muchas de estas innovaciones se ejecutasen desde posturas vagas e, incluso, inconsistentes. Esta indefinición generó, a la vez, éxitos y fracasos que condujeron a una amplia polémica sobre la validez del paradigma (o hipótesis) del aprendizaje por descubrimiento (Ausubel, 1976). Como consecuencia, algunos autores dedicaron sus esfuerzos en desarrollar nuevos paradigmas que constituyeran alternativas aceptables mientras otros se dedicaron a fundamentar y precisar una teoría del aprendizaje por descubrimiento que pudiera corregir la dispersión observada y sirviera para su utilización en el escuela. Una revisión crítica de estos resultados y una acertada reconstrucción teórica puede verse en Barrón (1988) quien señala que los *principios teóricos* del aprendizaje por descubrimiento, entendido como "una construcción intrapersonal derivada de un procedimiento heurístico dirigido por el propio sujeto" (p. 571), son los siguientes:

1. El sujeto está dotado de potencialidad natural para descubrir conocimiento.

2. El resultado del descubrimiento es una construcción intrapsíquica novedosa.

3. El aprendizaje por descubrimiento encuentra su punto de partida en la identificación de problemas.

4. El aprendizaje por descubrimiento se desarrolla a través de un proceso investigador de resolución significativa de problemas.

5. El acto de descubrimiento encuentra su centro lógico en la comprobación de conjetura.

6. Para que la actividad resolutiva pueda ser caracterizada de descubrimiento ha de ser autorregulada y productiva.

7. El aprendizaje por descubrimiento va asociado a la producción de errores.

8. Al aprendizaje por descubrimiento le es consustancial la *mediación de la orientación sociocultural.*

9. El grado de descubrimiento es inversamente proporcional al grado de determinación externa del proceso resolutivo.

10. El aprendizaje por descubrimiento responde a ciertas regularidades en función de las cuales puede ser pedagógicamente promovido.

En resumen, podemos concebir el aprendizaje por descubrimiento como un proceso cognoscitivo que parte de la identificación de un problema y, mediante un procedimiento resolutivo al que es consustancial la evaluación de hipótesis, autorregulado por el propio sujeto con la necesaria orientación sociocultural, produce una construcción intrasíquica novedosa.

Como asegura el principio décimo, el aprendizaje por descubrimiento constituye una base importante para el desarrollo de metodologías instructivas. Nuestro modelo, como consecuencia de esta conceptualización, participa de los siguientes *principios didácticos generales:*

1. Concebir el aprendizaje como una construcción intrapersonal obliga al profesor a diseñar actividades didácticas estructuradas de manera que emerjan los conceptos previos y se generen conflictos cognitivos que desencadenen los subsiguientes procesos de equilibración, lo cual contribuye a que el aprendizaje sea significativo.

2. Aunque en la fase inicial del descubrimiento se produzcan errores y se emitan falsas conjeturas, como el proceso no concluye ahí pues el centro lógico de este aprendizaje se encuentra en la evaluación de estas conjeturas (demostración o refutación), es imprescindible la realización de esta tarea por parte de los estudiantes.

3. Puesto que al aprendizaje por descubrimiento le es consustancial la mediación de la orientación sociocultural, la metodo-

logía didáctica favorecerá el diálogo y la discusión de los alumnos entre sí y de éstos con el profesor, actividad que es muy recomendada, entre otros, por el Informe Cockcroft (1985).

4. Son actividades intrínsecas de esta metodología la resolución de problemas, el desarrollo de investigaciones y la realización de trabajos experimentales, tareas todas ellas muy importantes en el aprendizaje, no sólo de los contenidos de las matemáticas, sino de su naturaleza y de sus métodos (Krulik y Reys, 1980; Shufelt y Smart, 1983).

5. En el aprendizaje por descubrimiento es necesario que los alumnos utilicen y desarrollen constantemente las estrategias heurísticas generales para que puedan llegar a tomar conciencia de su valor como herramientas metacognitivas (Bell, 1987) y aumentar, de este modo, su capacidad intelectual (Kersh y Wittrock, 1962).

6. El aprendizaje por descubrimiento usa el razonamiento empírico-inductivo en paralelo con el razonamiento axiomático-deductivo, tanto en lo que concierne a la adquisición de conceptos, estructuras conceptuales y procedimientos, como a sus aplicaciones en un contexto de resolución de problemas.

7. Como este aprendizaje requiere la participación activa del estudiante, es necesaria una componente de individualización de la enseñanza que proporcione al alumno una adecuada motivación intrínseca (Bruner, 1961; Hendrix, 1961).

8. La mediación sociocultural implica que la situación de aprendizaje esté bien estructurada, simplificada y expertamente programada para no discriminar a aquellos estudiantes que, por sus características personales, podrían obtener rendimientos más bajos o acumular inseguridad en la resolución de problemas (Kagan, 1974).

9. Esta misma orientación sociocultural debe garantizar una cierta aceleración del proceso de descubrimiento (Gagné, 1974) lo cual es muy importante para desarrollar currículos con una gran cantidad de contenidos.

10. Las tareas instructivas deben permitir a los alumnos utilizar activamente sus propios conocimientos y habilidades para producir, no sólo un aprendizaje significativo, sino un desarrollo de su autoestima y de sus formas de pensamiento originales.

Los *objetivos* fundamentales de este modelo de enseñanza son los siguientes:

1. Asimilación y transferencia de estructuras conceptuales y procedimientos algorítmicos novedosos en un contexto de resolución de problemas.
2. Desarrollo de estrategias heurísticas.
3. Generación de actitudes positivas hacia las matemáticas.

Puede observarse, en el primer objetivo, una preocupación primordial por los contenidos específicos de las matemáticas, en contra de la irrelevancia que este aspecto suele tener en otras metodologías de este tipo. En segundo lugar, se coloca el desarrollo de las estrategias heurísticas que son técnicas que tienen una alta probabilidad de conducir a la resolución de muchos tipos de problemas. Han sido identificadas mediante el análisis de la actuación de expertos o mediante la programación de ordenadores que efectúen tareas intelectualmente exigentes. Polya (1965), Schoenfeld (1983, 1985), Newel y Simon (1972) y otros autores han seleccionado heurísticas como las siguientes:

– Representación gráfica o simbólica: Trazar un dibujo o un diagrama que resuma la información del enunciado, representar con números o letras las variables, etc.

– Problema análogo: Buscar un problema con una estructura similar o equivalente que ya haya sido resuelto o que sea más sencillo.

– Casos especiales: Simplificar el problema fijándose en casos especiales (dando valores a las variables, etc.).

– Subproblemas: Descomponer el problema en partes (considerando, por ejemplo, condiciones u objetivos parciales) de modo que la solución progresiva de ellos conduzca a la solución completa del problema.

– Registro de alternativas y exploración sistemática: Buscar todas las posibilidades y analizarlas sistemáticamente.

– Vuelta atrás: Suponer resuelto el problema y empezar desde el final.

– Relaciones intermedias: Buscar relaciones entre los datos y la incógnita (o entre la hipótesis y la tesis) que permitan transformarlos o acercarlos.

Las heurísticas, como estrategias cognitivas que son, ocupan un papel importante en la educación y, por su gran versatilidad y aplicabilidad, su desarrollo se incluye como objetivo en nuestro modelo de enseñanza.

Las actitudes son instancias que predisponen y dirigen sobre los hechos de la realidad y representan una síntesis personal que filtra las percepciones y orienta el pensamiento, facilitando la adaptación de la persona al contexto. Por ello, la atención pedagógica a las actitudes se constituye en un proceso de interés central para la educación siempre que aspire a transformaciones permanentes en la persona. Las actitudes negativas en los estudiantes obstaculizan su aprendizaje y, a la vez, estas actitudes pueden ser generadas por una enseñanza mal suministrada. En consecuencia, nos parece de capital importancia incluir la generación de actitudes positivas como el tercer objetivo para nuesta metodología.

2.1.2. Análisis del modelo: sintaxis de las fases

Los modelos de enseñanza por descubrimiento tienen distintas fases según los autores que los progongan. Así, Joyce y Weil (1985, p. 80-82) distinguen cinco fases:

Fase primera: Contacto con el problema (confrontación del alumno con una situación problemática normalmente sorprendente).

Segunda fase: Verificación de datos (recogida de información sobre los sucesos que se ven o experimentan).

Tercera fase: Experimentación (introducción de nuevos elementos en la situación problemática y estudiar su efecto).

Cuarta fase: Formulación de una explicación (a partir de la información recogida, se elabora una teoría).

Quinta fase: Reflexión sobre el proceso (análisis del método seguido en la investigación).

Por su parte, Barrón (1988, p. 543-551) distingue cuatro fases:

Fase primera: Identificación de la problemática a investigar.

Fase segunda: Conceptualización y formulación de una propuesta de resolución.

Fase tercera: Comprobación de la propuesta de resolución.

Fase cuarta: Síntesis, valoración e integración del descubrimiento realizado.

Ya en el campo de la educación matemática, Marks (1980) sugiere la secuencia siguiente para la enseñanza de conceptos:

Fase primera: Propuesta de varios ejemplos para que los alumnos identifiquen atributos críticos.

Fase segunda: Propuesta de varios contraejemplos para que los alumnos identifiquen atributos no críticos.

Fase tercera: Formulación de una definición (regla o principio) por parte de los alumnos.

Fase cuarta: Verificación de esa definición en diferentes situaciones.

Adaptando todas estas propuestas, hemos elaborado la nuestra. La enseñanza de un concepto, de una estructura conceptual o de un procedimiento algorítmico se desarrolla, según esta metodología, siguiendo tres fases que se articulan de la siguiente manera:

Primera fase: Contextualización

El profesor identifica las ideas previas, las concepciones intuitivas, que poseen ya los alumnos sobre el tema de estudio así como su nivel de competencia en las estructuras conceptuales sobre las que se asientan los nuevos conceptos o procedimientos algorítmicos. Para ello, puede emplear cuestionarios adecuados, discusiones en grupo, trabajos prácticos, o bien, si existe ya alguna investigación, utilizar sus resultados. A continuación, diseña una o varias situaciones problemáticas con arreglo a los siguientes criterios:

– Su exploración debe permitir que afloren y actúen las ideas previas generando conflictos cognitivos tanto personales como grupales (Driver, 1988, p. 116).

– Deben ser sorprendentes, novedosas, desafiantes y guardar relación con el mundo del alumno para que estimulen suficientemente su pensamiento (Nickerson, Perkins y Smith, 1987, p. 381).

– Han de calibrarse según la capacidad y los conocimientos de los alumnos de modo que todos puedan explorarlas, “a fin de que sus posibles pequeños logros les proporcionen estímulos y ánimos para tareas más importantes” (Guzmán, 1987, p. 69).

Con esto se pretende motivar fuertemente al alumno en su proceso de aprendizaje.

Tras una exploración individual de estas situaciones problemáticas y una discusión grupal suficientemente amplia y contrastada, cada alumno formula sus propias conjeturas o propuestas de resolución.

Segunda fase: Construcción

En esta etapa, los alumnos deben demostrar o refutar sus conjeturas. Es una etapa conflictiva pues muchas veces las demostraciones (sobre todo, si se requiere un cierto nivel de formalización) emplean estrategias difíciles de descubrir de un modo completamente autónomo. Por lo tanto, en la secuencia de actividades desarrolladas en esta fase, la orientación externa juega un papel decisivo y delicado pues tiene que alcanzar un punto de equilibrio que, sin anular el proceso constructivo autorregulado, garantice que la evaluación de conjeturas se realiza eficazmente, lo que constituye realmente el centro lógico del aprendizaje por descubrimiento. Es el momento de la intervención del pensamiento vertical frente al lateral que generó la hipótesis (De Bono, 1968).

Obviamente, la evaluación de las conjeturas puede facilitarse si los alumnos poseen más información que la suministrada en el enunciado de la situación problemática. En esta metodología, los estudiantes adquieren esa información realizando una secuencia de actividades expertamente planificadas por el profesor. Las más indicadas serían de los siguientes tipos:

– Elaboración de definiciones: Como consecuencia de observaciones o sugerencias anteriores, se propone a los alumnos que elaboren la definición matemática de un determinado concepto.

– Razonamientos dirigidos: Dada la dificultad intrínseca de ciertos argumentos que conducen a propiedades importantes (teoremas), éstos se presentan de modo inacabado, con numerosas lagunas que el alumno debe rellenar, o desordenados para que los ordene.

– Corrección y/o complementación de cálculos: se presentan a los alumnos cálculos incompletos, desordenados o con errores para que los escriban correctamente.

– Generalizaciones y analogías: A partir de casos o situaciones estudiadas anteriormente, se pide encontrar una ley o un procedimiento.

Con este método, los alumnos deben obtener la cantidad de información adicional necesaria para afrontar con garantía de éxito la evaluación de las conjeturas pero sin que esta actividad pierda su carácter de verdadero problema.

Al final de este proceso, deben quedar construidos los nuevos conceptos, estructuras conceptuales o procedimientos algorítmicos. En este punto, es imprescindible también la intervención externa para explicar lo que, en el párrafo 1.4, hemos denominado hechos (notaciones, nombres asignados a ciertos conceptos, etc.).

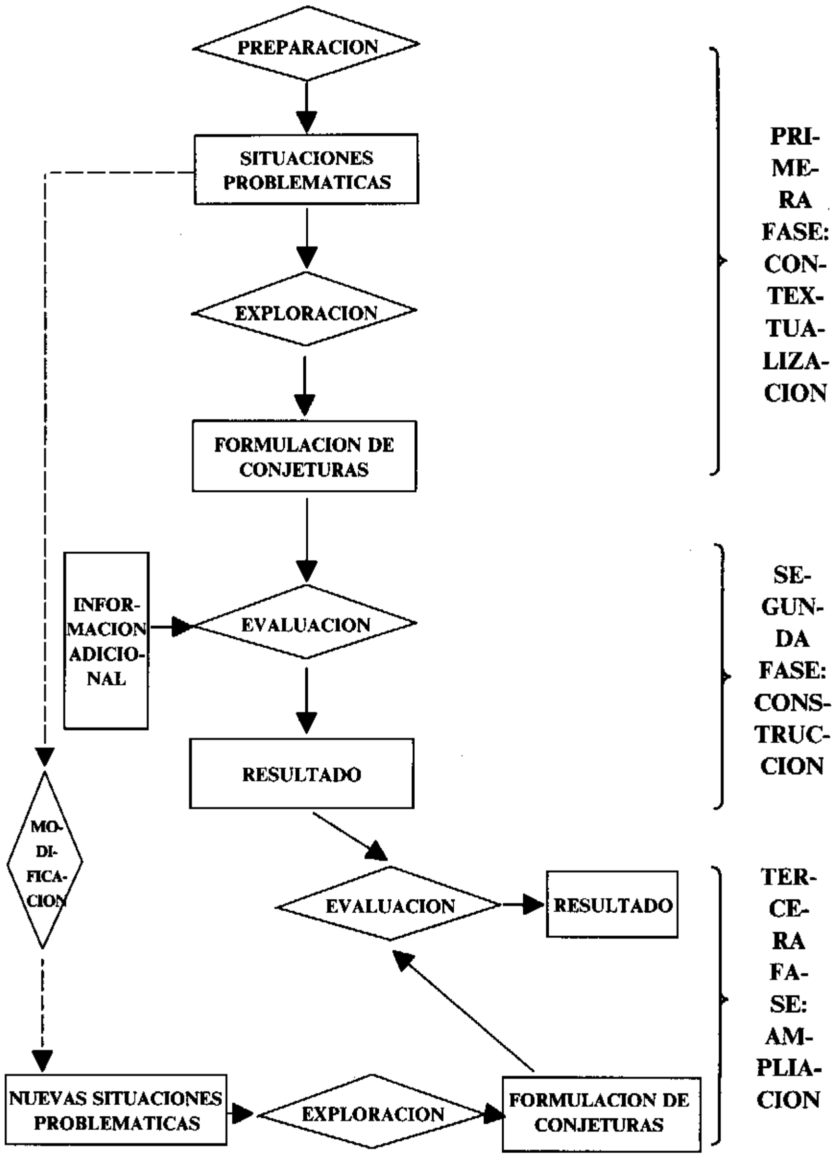
Tercera fase: Ampliación

Con el fin de reforzar los conocimientos, habilidades y actitudes que se van generando con este aprendizaje, se proponen una serie de actividades algorítmicas, problemas o investigaciones cuya resolución permita al alumno incrementar la significación y la red de relaciones de los nuevos conceptos o procedimientos algorítmicos al mismo tiempo que ponga en juego su poder de transferencia. Algunos de estos problemas pueden obtenerse modificando las condiciones, los datos o los objetivos de alguna de las situaciones problemáticas planteadas inicialmente. La discusión de este tipo de problemas puede servir de actividad exploratoria para el descubrimiento de otros conceptos, estructuras conceptuales o procedimientos algorítmicos, reiniciándose de nuevo el ciclo del aprendizaje por descubrimiento. Podemos representar la sintaxis de las fases mediante el diagrama de la página siguiente.

2.1.3. Análisis del modelo: sistema social

Ya hemos indicado antes que, en el inicio de la fase de contextualización, el profesor identifica las ideas previas de los alumnos y diseña consecuentemente una situación problemática cuyo análisis será el punto de partida del aprendizaje. El profesor, por lo tanto, prepara las condiciones intrapersonales de los alumnos potenciando su motivación epistémica y promoviendo la adquisición de una actitud investigadora que predisponga a la actuación resolutiva (Barrón, 1988. p. 539). En la fase de construcción, al estructurar una secuencia lógica de actividades conducentes a facilitar la evaluación de las conjeturas, el profesor potencia la adquisi-

PRIMERA METODOLOGIA: SINTAXIS DE LAS FASES



ción significativa de los conocimientos operativos necesarios con lo cual favorece un ambiente segurizante y estimulante para el descubrimiento. En este entorno intelectual no amenazador, los alumnnos se sentirán libres para expresar sus ideas y opiniones con el convencimiento de que los verdaderos esfuerzos para pensar serán respetados. Como muchos autores han indicado (Perret- Clermont, 1980; Forman y Cazden, 1984), es conveniente que trabajen en grupos pequeños (tres es buen número) para que pueden dialogar entre ellos y colaborar en la realización de las actividades propuestas. Ahora bien, debe advertírseles que, antes de discutir con los compañeros de grupo o con el profesor, cada miembro debe intentar resolver las tareas por su cuenta, de modo que ese trabajo personal, ese ejercicio de búsqueda, ese esfuerzo, sea la base de sus discusiones posteriores. El profesor debe estar atento para que la actividad del grupo no anule la actividad de los sujetos. Actuará como animador, colaborador y facilitador del aprendizaje, manifestando de un modo natural y espontáneo su entusiasmo hacia las matemáticas y su gozo por trabajar en ellas

Al acabar cada una de las fases o cuando lo crea conveniente, el profesor coordinará una puesta en común con el fin de asegurar que los resultados son conocidos y compartidos por todos los alumnos puesto que algunos conducen a estructuras conceptuales que es necesario utilizar en actividades posteriores. Sólo debe insistir en aquellas actividades en las que previamente detectó deficiencias generales. En las demás, se pedirá a un grupo que "exponga" su solución, la cual debe ser aprobada o desaprobada por el resto de la clase. Conviene que, en cada puesta en común, intervengan diferentes grupos (uno para cada actividad) con el fin de que el diálogo sea lo más global y eficaz posible, tanto de los alumnos entre sí como de éstos con el profesor. Si hay diferentes soluciones a un mismo problema, conviene que salgan todas a la luz. Aquí es donde todos pueden ver los diferentes modos para resolver un problema y estudiar con detalle las distintas estrategias heurísticas.

2.1.4. Análisis del modelo: principios de reacción

Cuando los alumnos estén realizando las actividades, el profesor pasará por los distintos grupos de trabajo, no como un inspector, sino como una persona que procura atender y ayudar individualmente a todos los alumnos sin discriminaciones. De este modo, generará en ellos la suficiente confianza y admiración como para que surja el diálogo. En ese diálogo personal o de pequeño grupo, el profesor no debe facilitar información a los alumnos, sino que debe conseguir que éstos sientan curiosidad y piensen por sí mismos, pero sin abocarlos al desaliento o a la desesperación porque no encuentren las soluciones; por el contrario, intentará que los alumnos obtengan éxitos (aunque sean parciales) con el fin de aumentarles la confianza y la seguridad en su quehacer matemático. Al mismo tiempo, procurará convencer a los alumnos de que, también en matemáticas, el trabajo y el esfuerzo conducen al éxito; para ello, detectará los logros conseguidos de esta forma y los elogiará explícitamente.

Un interés sincero y evidente por parte del profesor en lo que piensan sus alumnos ayudará, sin duda, a aumentar su disposición a compartir sus pensamientos. Algunos autores (Costa, 1981) han estudiado algunos mecanismos de respuesta de los profesores que parecen facilitar la actividad intelectual de los alumnos: el silencio después de una pregunta o después de que un alumno conteste; aceptar, fomentar, integrar y ampliar las ideas del alumno; aclarar; proporcionar información adicional; etc. En todo caso, "las funciones que han de desempeñar las orientaciones o indicaciones proporcionadas por el profesor son:

– Motivar y estimular el mantenimiento del esfuerzo resolutivo.

– Orientar la atención hacia las características esenciales del espacio del problema (objetivo, conceptos, principios subyacentes...).

– Facilitar la actualización de conocimientos y operaciones pertinentes.

– Orientar la búsqueda hacia el campo adecuado de conocimiento.

– Potenciar la autorregulación del procedimiento de resolución, alentando la secuencia de estrategias más adecuadas, y limitando el rango de las direcciones erróneas.

– Ayudar a tomar conciencia de los caminos errados y a hacerlos productivos.

– Fortalecer la resistencia a la frustación y el esfuerzo por mantener el proceso resolutivo hasta la comprobación y valoración final de los descubrimientos realizados.

– Organizar, estimular y encauzar la dinámica investigadora de la clase en el marco de unas adecuadas condiciones ambientales...” (Barrón, 1988, p. 542).

2.1.5. Análisis del modelo: Sistema de apoyo

El principal sistema de apoyo que proponemos para desarrollar esta metodología es un guión de actividades cuidadosamente planificadas y estructuradas según las ideas que venimos expresando, de manera que pueda ser utilizado de modo individual por todos los alumnos. Si este material no es elaborado por el propio profesor, también será necesaria una guía para orientar su intervención en la clase. Durante las puestas en común, es conveniente que utilice transpariencias u otros medios audiovisuales que le permitan conducir cómoda y ágilmente los debates. Los alumnos, por su parte, deben manejar la mayor variedad posible de modelos y materiales didácticos pues esta actividad contribuye al desarrollo y al reforzamiento de muchas ideas. El ambiente de la clase también tiene su importancia. Se debe tratar de convertir la clase en un lugar interesente e intelectualmente estimulante. “Una clave para ello es la variedad: los frecuentes cambios en la ordenación de los asientos, en las reproducciones de las paredes, en los libros, en los objetos de interés, en los productos que la clase ha realizado” (Nickerson, Perkins y Smith, 1987, p. 380).

2.1.6. Aplicación del modelo

Es el profesor, manteniendo respecto a su tarea la misma actitud indagadora que desea para sus alumnos, quien debe realizar las oportunas concreciones y adaptaciones de esta metodología a sus circunstancias reales, así como el diseño de los materiales adecuados. No obstante, podemos hacer algunas recomendaciones generales sobre su aplicación.

En primer lugar, el nivel educativo de los estudiantes debe influir fundamentalmente en el grado de formalización del proceso de evaluación de las conjeturas. En los niveles inferiores una *comprobación* de las mismas (por experientación, ejemplificación, visualización, etc.) puede sustituir a una *demostración* formal. Por el contrario, la *refutación* de una conjetura falsa debe practicarse desde los primeros cursos pues es una técnica sencilla que va generando en los alumnos la conciencia del universo de aplicación de los conceptos y de los procedimientos algorítmicos. También en los primeros niveles, conviene que todo el ciclo de la enseñanza y aprendizaje de un determinado concepto o algoritmo se realice en el mismo periodo de clase para no frustar las expectativas de los niños lo que les generaría ansiedad o inseguridad. A medida que asciende el nivel de escolarización, este ciclo puede durar varias clases durante las cuales los alumnos ya serán capaces de mantener su tensión epistémica.

La presentación de las sucesivas situaciones problemáticas debe implicar un uso variado de medios: transparencias, vídeo, manipulación de materiales (geoplano, multicubos, papel vegetal, material plot, modelos de superficies, tiras de cartón, dados, dominós, etc.), diapositivas, fotografías, texto escrito, etc. De este modo la misma novedad del medio servirá para incrementar la motivación de los alumnos. Y esta tendencia es conveniente mantenerla en todos los niveles.

Somos conscientes de que no todos los contenidos curriculares se pueden tratar fácilmente con esta metodología. Su empleo, por otra parte, es compatible a lo largo de un curso con metodologías expositivas; el profesor debe decidir y escoger para cada unidad didáctica el tratamiento que estime más conveniente.

2.1.7. Efectos didácticos y educativos

Los autores del modelo formal que estamos utilizando para describir nuestra primera metodología de enseñanza (Joyce y Weil, 1985) distinguen entre los efectos didácticos, esto es, los directos, los previstos, los programados, y los educativos, esto es, aquéllos que provienen implícitamente de la propia experiencia del medio trabajado por el modelo.

Los efectos didácticos que se producen con la aplicación de esta metodología dependen de los objetivos escogidos por el profesor en su programación y, desde luego, pueden referirse a cualquier campo de aprendizaje y a cualquier contendido. "La implicación activa del sistema cognitivo comprensivo y actuacional [de los estudiantes] en la búsqueda, formulación y comprobación de propuestas resolutorias permite afirmar que el conocimiento derivado quedará sustancialmente integrado con sus esquemas asimilativos; de lo que puede derivarse que el grado de retención y transferencia del mismo será alto" (Barrón, 1988, p. 552).

Los efectos educativos están relacionados con los valores y las actitudes propias de una mente investigadora, entre ellos:

- Habilidad analítica (observación, comprensión y estructuración de una situación problemática).
- Habilidad heurística (formulación de hipótesis, manejo de estrategias heurísticas, control del proceso resolutivo).
- Pensamiento lógico (inducción y deducción).
- Precisión en el lenguaje.
- Tendencia a revisar y comprobar los procesos.
- Tenacidad en la búsqueda.
- Curiosidad y, al mismo tiempo, actitud crítica.
- Autoestima y confianza en las propias capacidades.
- Independencia y autonomía en el aprendizaje.

Estos efectos son implícitos en el sentido de que se producen por el mero hecho de aplicar la metodología, aunque el profesor no los escoja como objetivos de aprendizaje en su programación, y poseen un gran valor intrínseco como ya señalamos al formular los objetivos y los principios de este modelo. Cabe indicar, sin embargo, que el desarrollo de la habilidad heurística no se propicia de modo directo (por ejemplo, enseñando explícitamente las estrategias heurísticas y su uso) sino de modo *indirecto,* como resultado de la reflexión grupal en las puestas en común. Lo mismo sucede con la generación de actitudes positivas, que se consigue con la propia dinámica del modelo instructivo y con una adecuada selección de actividades tanto en su contenido como en su tipo de tarea (por ejemplo, actividades cercanas al contexto del alumno o que necesiten una cierta manipulación propician actitudes positivas; actividades sobre aplicación de algoritmos en un medio abstracto favorecen las actitudes negativas).

2.2. Modelo de la segunda metodología

Nos proponemos ahora construir una segunda metodología para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento siguiendo el mismo modelo formal utilizado en la primera y detallando solamente aquellos elementos que las diferencian. Obviamente los objetivos, hipótesis teóricas, principios y conceptos fundamentales son los mismos que en la primera metodología. Veamos los demás elementos.

2.2.1. Análisis del modelo

La metodología didáctica que aquí se propone utiliza como instrumento exclusivo aquello que, como hemos dicho antes, constituye lo específico del aprendizaje por descubrimiento: la resolución de problemas. Un problema se caracteriza porque quien se enfrenta a su resolución no conoce un algoritmo o rutina cuya aplicación inmediata conduzca al objetivo. Es evidente que la resolución de problemas ocupa el núcleo de la ciencia matemática y constituye el motor de su desarrollo. Por ello, a comienzos de los años 80 se produce un llamamiento para que también la resolución de problemas sea el centro de atención de la educación matemática. El National Council of Teachers of Mathematics, en su lista de recomendaciones para la década de los 80, afirma en primer lugar: "La resolución de problemas debe ser el núcleo de las matemáticas escolares en los ochenta", y dedica el libro del año 1980 a dicho tema (Krulik y Reys, 1980). A partir de entonces, se han producido otras manifestaciones en el mismo sentido, se han desarrollado numerosísimas investigaciones y se han diseñado algunos proyectos curriculares centrados en la resolución de problemas. Nuestra propuesta metodológica se inscribe en esta corriente y se caracteriza porque la resolución de problemas se utiliza como única estrategia instructiva en el aprendizaje de un concepto, de una estructura conceptual o de un procedimiento algorítmico, siguiendo una línea semejante a la planteada, entre otros, por Libeskind (1977), Grupo Zero (1982), Simon (1986), Bautista (1987) y Guzmán (1987).

En concreto, el método que ahora proponemos emplea, como el anterior, tres fases articuladas de la siguiente manera:

Primera fase: Contextualización

Se desarrolla exactamente igual que en la primera metodología.

Segunda fase: Construcción

En esta etapa se da la mayor diferencia con el otro modelo: para la evaluación de las conjeturas, aquí no se facilita a los alumnos ninguna información adicional salvo, quizá, la definición de algún concepto básico y, en algunos casos, también podría plantearse su obtención en forma de problema pues, como asegura Bautista (1987, p. 154), "no es necesario que estos contenidos objeto de aprendizaje estén contenidos en el enunciado del problema, sino que pueden figurar en los procesos de solución o, también, en los resultados obtenidos". De este modo, los alumnos han de buscar toda la información necesaria en el propio proceso resolutivo que, naturalmente, se vuelve más duro y, a la vez, más desafiante por la distancia mayor que existe entre datos y objetivo. Por ello, es recomendable, como luego explicaremos, entregar a los alumnos una guía heurística que les ayude en este proceso.

Tercera fase: Ampliación

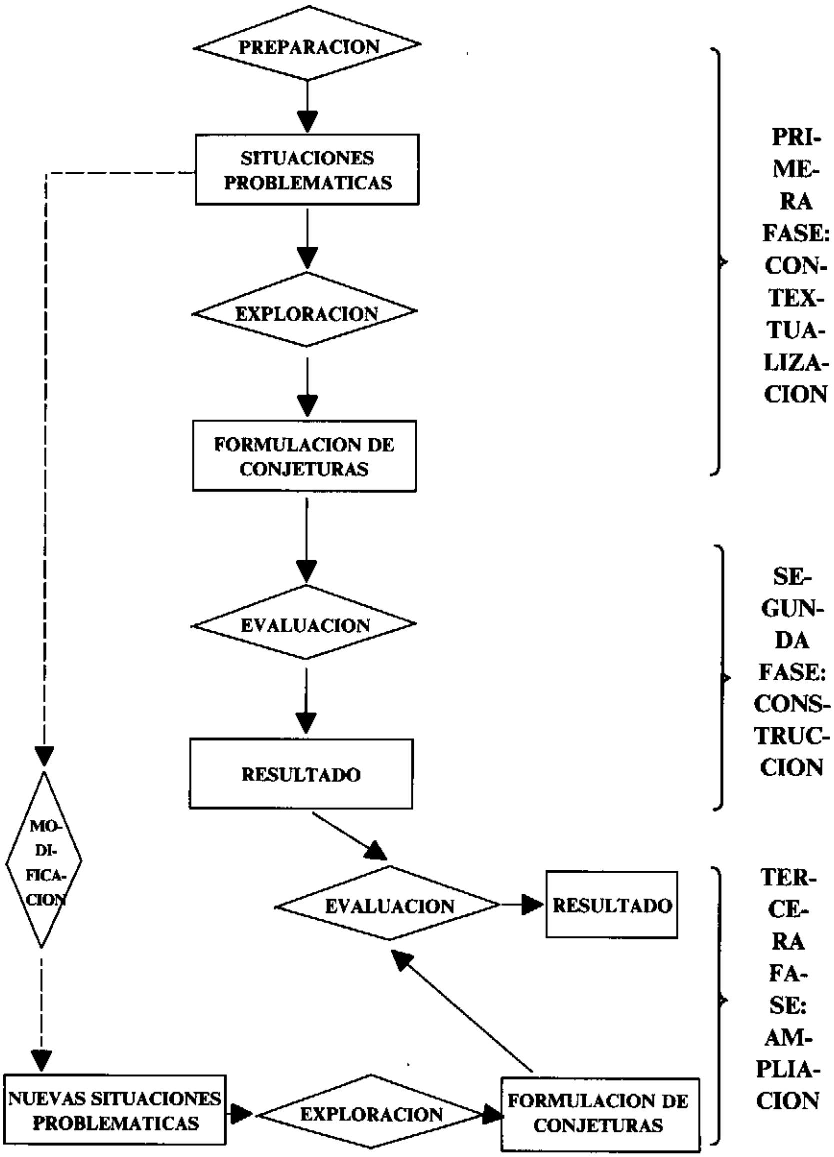
Se desarrolla igual que en la primera metodología sustituyendo las actividades algorítmicas por problemas de determinación, de demostración o de descubrimiento de propiedades.

Podemos representar la sintaxis de las fases mediante el diagrama de la página siguiente.

El sistema social de este modelo y los principios de reacción son análogos a los del otro, si bien, ahora la tarea estimulante del profesor ha de ser más eficiente. Krulik y Rudnik (1981) hacen, entre otras, las siguientes recomendaciones:

- Crear una atmósfera de éxito en la resolución de problemas.
- Animar a los estudiantes a resolver problemas.
- Enseñar a los estudiantes a leer el problema.
- Meter a los alumnos dentro del problema.
- Pedir a los estudiantes que creen sus propios problemas.

SEGUNDAMETODOLOGIA: SINTAXIS DE LAS FASES



– Dejar que los alumnos trabajen por parejas o en grupos pequeños.

– Sugerir alternativas cuando el enfoque utilizado ha producido aparentemente toda la información posible.

– Formular preguntas creativas y constructivas.

– Enfatizar la creatividad de pensamiento y de imaginación.

En cuanto al sistema de apoyo, además de las indicaciones dadas para el otro modelo y válidas también en este caso, debemos recomendar el diseño de una guía heurística o estrategia directiva parecida a la de Polya (1965) que pueda ser utilizada por los alumnos de forma sistemática en su tarea resolutiva. De este modo, al mismo tiempo que sistematizan sus procesos de resolución, usan de modo consciente las estrategias heurísticas, reconocen su validez en problemas de contenidos diversos y las interiorizan. No obstante, queremos señalar que existen dificultades en la enseñanza de hurísticas. Como afirman Nickerson, Perkins y Smith (1987, p. 108), existe, en primer lugar, el problema de saber *cuándo* aplicar una heurística determinada y, en segundo lugar, existe el hecho de que, aunque las heurísticas son suficientemente generales, pueden no decir nada en campos donde el resolutor no tiene suficientes conocimientos. Concluyen, sin embargo: "Aunque estas dos dificultades son reales, creemos que se las puede superar mediante técnicas de enseñanza específicas y que las heurísticas de resolución de problemas deben estar situadas muy arriba de cualquier lista de aspectos de la enseñanza que se puedan enseñar". Pensamos que la secuenciación conceptual de los problemas elegidos, el comportamiento del profesor y la guía de resolución que actúa con una función metacognitiva contribuyen a disminuir la dificultad de esta enseñanza.

2.2.2. Aplicación del modelo

Mantenemos aquí las mismas consideraciones que hicimos respecto a la primera metodología. Debemos añadir, además, que la aplicación del modelo que ahora nos ocupa exige un entrenamiento por parte de los profesores y por parte de los alumnos. Guzmán (1987) ha propuesto un interesante esquema para esta preparación que, en el caso de los profesores, se basa en pequeñas reuniones de grupos de trabajo donde se experimenta y se reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas. La iniciación de la práctica con los alumnos debe hacerse gradualmente: el profesor selecciona cuidadosamente algunos problemas en cuyo proceso resolutivo intervengan pocos conocimientos matemáticos y los reparte a los pequeños grupos; después de un tiempo razonable de trabajo que incluye la reflexión sobre la forma en que se han abordado los problemas, se realiza una puesta en común para analizar, estructurar y sintetizar las diferentes estrategias resolutivas. Los problemas deben ser sencillos para garantizar la implicación y el éxito de la mayoría de los alumnos. "Cuando los estudiantes se han familiarizado y hecho suyos los procesos mentales adecuados, viene la etapa de trabajo hacia la transferencia de estos procesos al campo más especificamente matemático" (p. 69). A pesar de estas exigencias iniciales, pensamos que, después, el método funciona sin ninguna dificultad y, desde luego, sus efectos educativos son realmente notables.

2.2.3. Efectos didácticos y educativos.

Son análogos a los de la primera metología, aunque debe esperarse un incremento mayor en la habilidad heurística, dado que la enseñanza de las estrategias solucionadoras de problemas se realiza, tal como hemos indicado, de un modo explícito.

CAPITULO 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACION

Introducción

En el primer capítulo revisamos la literatura referida a los aspectos de la enseñanza por descubrimiento donde inciden las preguntas formuladas en el problema que originó esta investigación y, como consecuencia, formulamos los objetivos de la misma. El primero de dichos objetivos (la construcción de dos metodologías didácticas para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento) ha sido alcanzado en el segundo capítulo. Para lograr los demás (evaluación comparada de las mismas) necesitamos diseñar un modelo de investigación educativa acorde con ellos; a esta tarea dedicamos el presente capítulo.

3.1. Formulación de hipótesis

De cara a la evaluación de las metodologías didácticas construidas en el capítulo anterior y antes de formular las hipótesis correspondientes, es conveniente precisar algunas circunstancias contextuales muy importantes como el nivel educativo en que van a desarrollarse y la duración del período instruccional. Como nuestra experiencia, tanto docente como investigadora, se refiere, sobre todo, al Bachillerato, hemos creído conveniente elegir este nivel como el apropiado para realizar la experimentación y, concretamente, el tercer curso, en el que los programas poseen una gran riqueza conceptual y algorítmica. En cuanto a la duración del período instructivo experimental, lo fijamos en cinco semanas, a cuatro clases semanales; es un tiempo algo superior al empleado por las investigaciones de este tipo revisadas en el capítulo primero. El *Grupo 1* seguirá la primera metodología experimental, el *Grupo 2* seguirá la segunda metodología experimental y el *Grupo 3* seguirá la metodología expositiva tradicional, basada en la secuencia: "exposición del contenido matemático, ejemplos, ejercicios sencillos, ejercicios más complicados, ¿problemas?" (Guzmán, 1987, p. 54). Después de este período, todos los estudiantes seguirán la metodología expositiva tradicional durante dos meses; en ese momento se procederá a la evaluación del rendimiento a largo plazo (retención).

Es de esperar, por las investigaciones realizadas hasta ahora y por los propios fundamentos teóricos, que, al acabar la experiencia, las dos metodologías experimentales produzcan los mismos rendimientos en el aprendizaje global, conceptual y actitudinal, pero la primera aventaje en procedimientos algorítmicos a la segunda y ésta en resolución de problemas, por ser su actividad predominante; ambas aventajarán a la metodología expositiva salvo, quizá, en procedimientos algorítmicos pues, en este tratamiento, se ofrecen más posibilidades de práctica con rutinas. Los resultados a los dos meses deben ser similares a éstos, desapareciendo probablemente la ventaja del método expositivo en los procedimientos algorítmicos ya que su aprendizaje tiende a ser memorístico y el paso del tiempo ejercerá una notable influencia sobre él. En cuanto al cambio conceptual, conjeturamos que será mayor el producido por las metodologías experimentales pues exigen más participación de los alumnos y de sus ideas previas en la resolución de los problemas con el consiguiente beneficio posterior. No deben esperarse interacciones de los tratamientos con las variables sexo e inteligencia general; en cambio, probablemente surjan interacciones, respecto de los rendimientos a corto plazo, con el nivel de conocimientos previos debido a las expectativas que generan en los alumnos; como sugieren algunas investigaciones anteriores, las variables estilo cognitivo y actitud seguramente interactuarán tanto a corto plazo como a largo plazo.

En resumen, formulamos las siguientes hipótesis:

HIPOTESIS 1: Al acabar el período instructivo, entre los tres grupos de alumnos existen diferencias respecto a las siguientes variables en el sentido que se indica:

– Rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales:

Grupo 1 = Grupo 2 > Grupo 3
– Rendimiento en procedimientos algorítmicos:
Grupo 3 > Grupo 1 > Grupo 2
– Rendimiento en resolución de problemas:
Grupo 2 > Grupo 1 > Grupo 3
– Rendimiento global:
Grupo 1 = Grupo 2 > Grupo 3
– Actitud hacia las matemáticas:
Grupo 1 = Grupo 2 > Grupo 3

HIPOTESIS 2: Transcurridos dos meses después del período instructivo, entre los tres grupos de alumnos, se mantienen las diferencias enumeradas en la hipótesis anterior excepto la siguiente:
– Rendimiento en procedimientos algorítmicos:
Grupo 1 = Grupo 2 > Grupo 3

HIPOTESIS 3: En los Grupos 1 y 2 se produce un nivel de cambio conceptual análogo, que es superior al producido en el Grupo 3 tanto al acabar el período instructivo como a los dos meses.

HIPOTESIS 4: No existen interacciones entre las tres metodologías y las variables sexo e inteligencia general; en cambio se producen interacciones con el nivel de instrucción previa respecto de los rendimientos a corto plazo y con el estilo cognitivo y la actitud respecto de todos los rendimientos.

3.2. Selección de variables

3.2.1. Variable independiente

La variable independiente es la metodología didáctica que se identifica con los tres grupos de alumnos:

Grupo 1: Sigue la primera de las metodologías experimentales.

Grupo 2: Sigue la segunda de las metodologías experimentales.

Grupo 3: Sigue la metodología expositiva tradicional.

3.2.2. Variables dependientes

Las variables dependientes aparecen ya determinadas en las hipótesis formuladas anteriormente y, en consecuencia, las agrupamos en cuatro bloques:

Primer bloque:

– Rendimiento en el aprendizaje de conceptos y estructuras conceptuales al acabar la experimentación.

– Rendimiento en el aprendizaje de procedimientos algorítmicos al acabar la experimentación.

– Rendimiento en resolución de problemas al acabar la experimentación.

– Rendimiento global al acabar la experimentación.

– Actitud hacia las matemáticas al acabar la experimentación.

Segundo bloque:

– Rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales a los dos meses de acabar la experimentación.

– Rendimiento en procedimientos algorítmicos a los dos meses de acabar la experimentación.

– Rendimiento en resolución de problemas a los dos meses de acabar la experimentación.

– Rendimiento global a los dos meses de acabar la experimentación.

– Actitud hacia las matemáticas a los dos meses de acabar la experimentación.

Tercer bloque:

– Cambio conceptual al acabar la experimentación.

– Cambio conceptual a los dos meses de acabar la experimentación.

Las variables del tercer bloque requieren una cierta explicación. Como hemos visto en el primer capítulo, los alumnos poseen una determinada cantidad de concepciones previas erróneas, algunas de las cuales, tras un proceso instructivo, permanecen todavía mientras otras se cambian por concepciones correctas. La variable *cambio conceptual* se refiere a la cantidad de concepciones previas erróneas superadas positivamente.

3.2.3. Variables intervinientes

Estas son, a nuestro juicio, las variables intervinientes, extrañas o contextuales más importantes que podrían influir sobre las variables dependientes:

– Duración del período instructivo y postinstructivo.

– Edad de los alumnos.

– Sexo de los estudiantes.

– Características familiares de los sujetos: estudios del padre y profesión del padre.

– Nivel de conocimientos previos de los alumnos.

– Capacidad intelectual de los estudiantes: aptitud numérica, aptitud espacial y factor "g".

– Estilo cognitivo de los sujetos: dependencia/independencia de campo.

– Actitud hacia las matemáticas de los alumnos.

– Unidad temática objeto de estudio.

– Características de los profesores: preparación científica y didáctica, personalidad, actitud hacia las matemáticas y hacia su enseñanza, etc.

– Práctica o entrenamiento con las metodologías experimentales por parte de los profesores y de los alumnos.

– Influjo de la aplicación de pruebas.

– Mortaldad experimental.

La justificación de esta elección es obvia en todos los casos, excepto, tal vez, en las variables elegidas para representar la capacidad intelectual y el estilo cognitivo. Pensamos que, tratándose de una experiencia de aprendizaje de las matemáticas, además del factor "g", tendría especial relevancia la aptitud numérica en el área de la aritmética y la aptitud espacial y la dimensión DIC del estilo cognitivo en el área de la geometría, ya que "en un modo de percibir 'dependiente de campo', la percepción está influida claramente por toda la organización del campo circundante y los componentes de ese campo son percibidos como algo difuso; en un modo de percibir 'independiente de campo', se perciben las partes del campo como componentes discretos, dentro de un campo organizado" (Witkin y otros, 1987, p. 6-7). Por lo tanto, la influencia de estas variables puede ser importante y, en consecuencia, deben tenerse en cuenta.

3.3. Elección y análisis de la muestra

En una investigación educativa como la que estamos planteando, no es posible el muestreo aleatorio ya que la distribución de los alumnos de 3er. curso de BUP viene dada administrativamente por centros y la distribución por grupos, dentro de un mismo centro, se establece en función de criterios organizativos como asignaturas optativas, horarios, etc. Por otra parte, tampoco podemos elegir por sorteo entre todo los grupos de 3ºde BUP de España (ni siquiera de una de sus provincias) una muestra representativa porque la experimentación requiere, entre otras condiciones, que los profesores acepten una metodología nueva y ajena (con la cual pueden no estar de acuerdo), la asuman como algo propio, la experimenten de forma natural y, finalmente, evalúen el rendimiento con una gran cantidad de pruebas preparadas por los investigadores. Evidentemente, no todos los profesores están dispuestos a prestar este alto nivel de colaboración. De manera que la elección de la muestra estuvo condicionada por el profesorado disponible (ver apartado 6.1.) y quedó establecida de la siguiente manera:

GRUPO 1 (Primera metodología experimental): 90 estudiantes pertenecientes a tres grupos de dos Institutos de Salamanca a cargo de los profesores A, B y C.

GRUPO 2 (Segunda metodología experimental): 58 estudiantes pertenecientes a dos grupos de un Instituto de Zamora a cargo del profesor D.

GRUPO 3 (Metodología expositiva tradicional): 82 estudiantes pertenecientes a tres grupos de dos Institutos de Salamanca a cargo de los profesores A, B y C.

El tamaño total de la muestra es, por tanto, de 230 alumnos. Puesto que la muestra no ha sido escogida al azar, no tenemos la certeza de que los tres grupos sean homogéneos y, como consecuencia, debemos evaluar su grado de homogeneidad respecto de las principales variables que podrían influir en el rendimiento del proceso instructivo: sexo, profesión del padre, estudios del padre, aptitud espacial y numérica, factor "g", estilo cognitivo, actitud hacia las matemáticas y nivel de conocimientos previos. La siguiente tabla nos muestra los instrumentos elegidos para la obtención de datos:

VARIABLES	INSTRUMENTO DE MEDIDA
Sexo	Cuestionario
Estudios del padre	Cuestionario
Profesión del padre	Cuestionario
Estilo cognitivo: dependencia/independendencia de campo	Test GEFT
Aptitud espacial	Batería DAT
Aptitud numérica	Batería DAT
Factor "g"	Test de Cattell (escala3, forma A)
Actitud hacia las matemáticas	Test de Gairín
Nivel de conocimientos previos	Pruebas elaboradas *ad hoc*

A continuación comentamos cada uno de estos instrumentos.

El cuestionario sobre los estudios y la profesión del padre fue obtenido de los impresos oficiales para matricularse en los estudios universitarios y comprende las siguientes categorías:

Estudios del padre:

1. Analfabetos.
2. Primarios sin terminar.
3. Primarios completos.
4. Bachillerato elemental o asimilados.
5. Bachillerato superior o asimilados.
6. Diplomado Universitario o asimilado (estudios profesionales de grado medio, peritajes, magisterios, aparejadores).
7. Licenciado, Ingeniero, Arquitecto, E. Superior Militar o asimilado.

Profesión del padre:

1. Empresarios agrarios con asalariados.
2. Empresarios agrarios sin asalariados y miembros de cooperativas agrícolas.
3. Directores, gerentes y personal titulado de explotaciones agrarias.
4. Resto de trabajadores agrarios.
5. Empresarios, no agrarios, con asalariados.

6. Empresarios, no agrarios, sin asalariados y trabajadores independientes.
7. Profesiones liberales con o sin asalariados.
8. Directores y Gerentes de empresas no agrarias.
9. Alto personal administrativo, comercial y técnico de empresas no agrarias y de la Administración Pública.
10. Personal intermedio administrativo, comercial y técnico de empresas no agrarias y de la Administración Pública.
11. Resto del personal administrativo, comercial y técnico, de empresas no agrarias y de la Administración Pública.
12. Contramaestres y capataces no agrarios.
13. Obreros cualificados y especialistas no agrarios.
14. Obreros no agrarios sin especialización.
15. Jefes de grupo del sector servicios.
16. Resto de los trabajadores del sector servicios.
17. Gerentes, Jefes y Oficiales de las Fuerzas Armadas o de Seguridad.
18. Suboficiales y otros profesionales de las Fuerzas Armadas o de Seguridad.
19. Personas económicamente activas no clasificables en las rúbricas anteriores.
20. Amas de casa.
21. En situación de desempleo.
22. No activos.

El Test de las Figuras Enmarcadas, forma colectiva, GEFT, es una adaptación del EFT (Witkin y otros, 1987) con el que pueden obtenerse resultados de muchos sujetos en una sola sesión de 20 minutos de duración. Se trata de un test perceptivo no verbal en el que se evalúa, sobre todo, la capacidad de romper un campo visual organizado para quedarse con una parte de él y separarla del todo. Este test ya ha sido experimentado y contrastado en España.

Los tests de Aptitud Espacial y Aptitud Numérica han sido extraídos de la clásica batería *Tests de Aptitudes Diferenciales* (DAT) (Bennett y otros, 1972) adaptada al español por el Departamento de Psicología de T.E.A.

El test de factor "g" de Cattell (Cattell y Cattell, 1977) es un instrumento psicométrico adecuado para medir la inteligencia individual por medio de cuatro subtests no verbales que reducen al máximo la influencia de otros factores como la fluidez verbal, nivel cultural, clima educacional, etc. Su fiabilidad y validez han sido ampliamente contrastadas en España.

El test de actitud (Gairín, 1987) consiste en una escala tipo Likert que, a través de 22 items, evalúa la actitud hacia las matemáticas y es la única que ha sido contrastada en España, ya que otros instrumentos clásicos (como la escala de Aiken) no han sido adaptados al español.

Finalmente, las pruebas elaboradas para medir el *Nivel de conocimientos previos* se recogen en el apartado 4.1.2. donde se describe también su proceso de construcción y se discute su validez y fiabilidad.

Antes de comenzar el período instructivo, se pasaron a todos los estudiantes las pruebas y cuestionarios que acabamos de citar. Con los datos obtenidos se construyó una base informática y se procedió a su análisis estadístico mediante los programas Statview, Statworks, Systat y Datadesk, empezando con las variables cualitativas que fueron sometidas a la prueba "ji-cuadrado" para decidir si había diferencias entre los grupos. La variable *Profesión del padre* fue reagrupada en cuatro categorías para evitar una dispersión de las frecuencias utilizando el siguiente criterio:

Profesión alta:
- Directores, gerentes, personal titulado.
- Empresarios no agrarios con asalariados.
- Profesiones liberales con o sin asalariados.
- Directores y gerentes de empresas no agrarias.
- Alto personal administrativo, comercial y técnico.
- Generales, jefes y oficiales de Fuerzas Armadas.

Profesión media/alta:
- Empresarios agrarios con asalariados.
- Empresarios no agrarios sin asalariados.
- Personal intermedio administrativo, comercial y técnico.
- Suboficiales y profesionales de las Fuerzas Armadas.

Profesión media/baja:
- Empresarios agrarios sin asalariados.
- Resto del personal administrativo, comercial y técnico.
- Contramaestres y capataces no agrarios.
- Obreros cualificados y especialistas no agrarios.
- Jefes de grupo del sector servicios.

Profesión baja:

Resto de trabajadores agrarios.

Obreros no agrarios sin especialización.

Resto de trabajadores del sector servicios.

Personal activo no clasificado anteriormente.

Amas de casa

Desempleados.

No activos.

A continuación se muestran los resultados de la prueba "ji-cuadrado":

Ji-Cuadrado Codificado X_1: Grupo Y_1: Sexo		
Sumario de Estadísticos		
GL:	2	
Ji-Cuadrado Total:	2.528	p = .2826
Estadístico G:	2.536	
Coeficiente de Contingencia	.104	
V de Cramer:	.105	

Ji-Cuadrado Codificado X_1: Grupo Y_1: Est. Padre		
Sumario de Estadísticos		
GL:	10	
Ji-Cuadrado Total:	6.972	p = .7281
Estadístico G:	7.124	
Coeficiente de Contingencia	.172	
V de Cramer:	.123	

Ji-Cuadrado Codificado X_1: Grupo Y_1: Prof. Padre		
Sumario de Estadísticos		
GL:	6	
Ji-Cuadrado Total:	3.691	p = .7184
Estadístico G:	3.678	
Coeficiente de Contingencia	.126	
V de Cramer:	.09	

Como se observa, no se aprecian diferencias significativas al 95% entre los grupos y puede asegurarse que los tres grupos, respecto de las variables sexo, estudios del padre y profesión del padre, son homogéneos.

Para comparar los grupos respecto de las seis variables cuantitativas, realizamos, en primer lugar, una estadística descriptiva por grupos, cuyos resultados se muestran en las siguientes tablas:

ESTADISTICA DESCRIPTIVA POR GRUPOS PARA LAS VARIABLES CUANTITATIVAS

Grupo 1

X_1: Est. Cogn.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
14.589	3.451	.364	11.908	23.653	90
Mínimo:	**Máximo:**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**#Perdidos:**
4	18	14	1313	20215	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Curtosis:**	**Asimetría:**		
17	14.005	1.438	-1.423		

X_2: Espac.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
34.3	9.611	1.013	92.37	28.02	90
Mínimo:	**Máximo:**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**#Perdidos:**
16	59	43	3087	114105	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Curtosis:**	**Asimetría:**		
29	32.892	-.332	.154		

X_3: Num.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
22.133	6.567	.692	43.128	29.671	90
Minimo:	**Máximo:**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**#Perdidos:**
7	37	30	1992	47928	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Curtosis:**	**Asimetría:**		
22	21.03	-.289	-.043		

X_4: Intel. Gral.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
22.933	5.054	.533	25.546	22.039	90
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
8	36	28	2064	49608	0
Moda:	Med. Geom.:	Curtosis:	Asimetría:		
22	22.32	.303	-.133		

X_5: Inst. Prev.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.54	1.24	.131	1.538	35.028	90
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
.43	6.98	6.55	318.61	1264.765	0
Moda:	Med. Geom.:	Curtosis:	Asimetría:		
.	3.281	-.095	.094		

X6: Act. Inicial

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.284	.383	.04	.146	11.779	90
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
2.357	4.476	2.119	292.364	962.772	0
Moda:	Med. Geom.:	Curtosis:	Asimetría:		
.	3.227	1.241	.86		

Grupo 2

X_1: Est. Cogn.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
14.121	3.608	.474	13.02	25.554	58
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
3	18	15	819	12307	0
Moda:	Curtosis:	Asimetría:			
.	-.484	-.193			

X_2: Espac.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
36.172	9.278	1.218	86.075	25.648	58
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
16	57	41	2098	80796	0
Moda:	Med. Geom.:	Curtosis:	Asimetría:		
.	-.484	-.193			

X_3: Num..

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
24.034	6.537	.858	42.736	27.199	58
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
9	36	27	1394	35940	0
Moda:	Curtosis:	Asimetría:			
.	-.692	1.267E-3			

X4: Intel. Gral.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
23.345	4.379	.575	19.177	18.759	58
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
14	32	18	1354	32702	0
Moda:	Curtosis:	Asimetría:			
25	-.748	-.083			

X_5: Instr. Prev.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.902	1.363	.179	1.857	34.921	58
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
1.5	7.99	6.49	226.32	988.954	0
Moda:	Curtosis:	Asimetría:			
.	.09	.416			

X_6: Act. Inicial

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.052	.26	.034	.068	8535	58
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
2.5	3.591	1.091	177.001	544.028	0
Moda:	Curtosis:	Asimetría:			
.	-.224	-.069			

Grupo 3

X_1: Est. Cogn.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
14.171	3.647	.403	13.304	25.739	82
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
6	18	12	1162	17544	0
Moda:	Curtosis:	Asimetría:			
17	-.638	-.817			

X_2: Espac.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
35.659	9.98	1.102	99.61	27.989	82
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
12	56	44	2924	112334	0
Moda:	Curtosis:	Asimetría:			
35	-.352	-.011			

X_3: Num.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
22.012	6.06	.669	36.728	27.532	82
Mínimo:	Máximo:	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	#Perdidos:
7	34	27	1805	42707	0
Moda:	Curtosis:	Asimetría:			
20	--.606	.078			

X_4: Intel. Gral.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
23.244	4.227	.467	17.866	18.184	82
Mínimo:	**Máximo:**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**#Perdidos:**
13	33	20	1906	45750	0
Moda:	**Curtosis:**	**Asimetría:**			
22	-.275	-.191			

X_5: Inst. Prev.

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.626	1.32	.146	1.741	36.389	82
Mínimo:	**Máximo:**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**#Perdidos:**
.75	6.6	5.85	297.34	1219.215	0
Moda:	**Curtosis:**	**Asimetría:**			
.	-.623	-.146			

X_6: Act. Inicial

Media	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.182	.491	.054	.241	15.43	82
Mínimo:	**Máximo:**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**#Perdidos:**
1.786	4.5	2.714	260.955	849.989	0
Moda:	**Curtosis:**	**Asimetría:**			
3.182	1.388	-.177			

Aplicamos el contraste de Kolmogorov-Smirnov para estudiar la normalidad de las variables en cada uno de los grupos y, como puede apreciarse en la tabla de la página siguiente, todas son normales con un nivel de significación del 95% excepto el estilo cognitivo en el Grupo 1 (este resultado era previsible dado el carácter de las mismas, el tamaño de la muestra y los instrumentos utilizados).

Aplicamos después el test de Bartlett para contrastar la homogeneidad de las varianzas entre los grupos, obteniéndose dicha homogeneidad para todas las variables exccepto para la *actitud inicial* en que la diferencia es significativa al 99%. Decidimos, en consecuencia, utilizar una técnica paramétrica, como el análisis de la varianza, para comparar las medias de los grupos respecto de cada una de estas variables, teniendo en cuenta que el nivel de sig-

TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV						
	GRUPO 1		GRUPO 2		GRUPO 3	
VARIABLES	**Esta dístico**	**P**	**Esta dístico**	**P**	**Esta dístico**	**P**
Estilo cognitivo	2.252	0.016	0.194	0.070	0.20	0.035
Aptitud espacial	0.062	0.279	0.095	0.234	0.052	0.319
Aptitud numérica	0.075	0.239	0.095	0.234	0.093	0.199
Inteligencia general	0.070	0.254	0.130	0.161	0.092	0.203
Nivel de instrucción previa	0.043	0.343	0.073	0.289	0.079	0.236
Actitud hacia las matemáticas	0.117	0.134	0.114	0.192	0.127	0.125

nificación real en el caso de la actitud disminuye ya que la muestra menor fue extraída de la población con menor varianza (Tejedor, 1984, p. 281). Los resultados de ambas pruebas se muestran en las tablas siguientes:

VARIABLE: ESTILO COGNITIVO

TEST DE BARTLETT PARA LA HOMOGENEIDAD DE LAS VARIANZAS DE GRUPO

"Ji" Cuadrado = .285 GL = 2 Probabl = .867

"ANALISIS DE VARIANZA"

Fuente	SC	GL	MC	F	Probabl.
Intergrupos	10.637	2	5.319	.419	.658
Intragrupos	2879.554	227	12.685		

VARIABLE: APTITUD NUMERICA

TEST DE BARTLETT PARA LA HOMOGENEIDAD DE LAS VARIANZAS DE GRUPO

"Ji" Cuadrado = .630 GL = 2 Probabl = .730

"ANALISIS DE VARIANZA"

Fuente	SC	GL	MC	F	Probabl.
Intergrupos	167.068	2	83.534	2.050	0.131
Intragrupos	9249.319	227	70.746		

VARIABLE: APTITUD ESPACIAL

TEST DE BARTLETT PARA LA HOMOGENEIDAD DE LAS VARIANZAS DE GRUPO

"Ji" Cuadrado = .360 GL = 2 Probabl = .835

"ANALISIS DE VARIANZA"

Fuente	SC	GL	MC	F	Probabl.
Intergrupos	144.250	2	72.125	.772	.463
Intragrupos	21195.615	227	93.373		

VARIABLE: INTELIGENCIA GENERAL

TEST DE BARTLETT PARA LA HOMOGENEIDAD DE LAS VARIANZAS DE GRUPO

"Ji" Cuadrado = 3.028 GL = 2 Probabl = .220

"ANALISIS DE VARIANZA"

Fuente	SC	GL	MC	F	Probabl.
Intergrupos	7.149	2	3.547	.169	.845
Intragrupos	4813.825	227	21.206		

VARIABLE: INSTRUCCION PREVIA

TEST DE BARTLETT PARA LA HOMOGENEIDAD DE LAS VARIANZAS DE GRUPO

"Ji" Cuadrado = .678 GL = 2 Probabl = .713

"ANALISIS DE VARIANZA"

Fuente	SC	GL	MC	F	Probabl.
Intergrupos	4.786	2	2.393	1.416	.245
Intragrupos	383.719	227	1.690		

VARIABLE: ACTITUD INICIAL

TEST DE BARTLETT PARA LA HOMOGENEIDAD DE LAS VARIANZAS DE GRUPO

"Ji" Cuadrado = 24.115 GL = 2 Probabl = 0.000

"ANALISIS DE VARIANZA"

Fuente	SC	GL	MC	F	Probabl.
Intergrupos	1.372	2	0.686	4.274	0.151
Intragrupos	36.429	227	1.690		

Estos resultados indican que no se aprecian diferencias significativas entre los grupos excepto en la actitud inicial. Decidimos, por lo tanto, incorporar esta variable como variable independiente (covariable) en el diseño de nuestra investigación.

3.4. Control de las variables intervinientes

Exponemos a continuación de qué modo controlamos las variables intervinientes (párrafo 3.2.3.).

Como ya señalamos antes, para todos los grupos la duración del período instructivo experimental será de 20 clases, después de las cuales cada grupo seguirá la metodología expositiva habitual durante dos meses, momento en el que se pasarán las pruebas de retención.

El control de la edad de los sujetos está asegurado por tratarse de alumnos de un mismo curso escolar, 3º de BUP, y, por lo tanto, con oscilaciones mínimas. El sexo, las características familiares, la capacidad intelectual y el estilo cognitivo también están controlados por el análisis de homogeneidad de los grupos que describimos en el apartado anterior. La actitud hacia las matemáticas, variable en la que los grupos no eran homogéneos, se incorpora al diseño como una covariable independiente.

La elección de la unidad temática objeto de estudio común para todos los grupos ha de someterse a los siguientes criterios:

– debe poseer una gran riqueza en todos los campos de aprendizaje: estructuras conceptuales, procedimientos algorítmicos, estrategias heurísticas y actitudes;

– su desarrollo normal debe ocupar aproximadamente 20 clases;

– ha de tener una cierta independencia dentro del programa del curso para que, durante los dos meses siguientes, en la clase se haga el menor número posible de referencias a ella, con lo cual la medida del aprendizaje a largo plazo será más nítida; y

– debe ser potencialmente rica en ideas previas.

Aplicando estos criterios, elegimos como unidad temática *Las cónicas (elipses, hipérbolas y parábolas)*. La variable *Características de los profesores* queda bastante controlada ya que son comunes los profesores de la primera metodología experimental y de la metodología expositiva tradicional. Por otra parte, dos de ellos, uno de cada una de las nuevas metodologías, se entrenaron durante una experiencia piloto (ver apartado 6.2.); los otros dos fueron instruidos con detalle en el uso de los materiales didácticos de la primera metodología cuya práctica resulta, en general, más sencilla que la segunda. En cuanto a los alumnos, ninguno de los grupos experimentales había practicado previamente con metodologías didácticas semejantes a éstas. El *influjo de la aplicación de pruebas* se corrige variando la colección de problemas que forman la prueba sobre resolución de problemas en las dos aplicaciones, prueba en la que el influjo del aprendizaje adicional podría ser significativo.

La mortaldad experimental queda controlada porque el análisis de la homogeneidad de la muestra se realizó utilizando sólo aquellos sujetos que poseían datos en todas las variables que aparecen en la investigación.

Creemos que los controles que acabamos de describir garantizan suficientemente la validez interna de la experimentación; en cuanto a la validez externa, el análisis de la muestra que hemos realizado, así como la descripción de las condiciones contextuales, proporcionan, como opina Snow (1974), un buen juicio sobre la población a que pueden ser generalizados los resultados que obtengamos.

3.5. Instrumentos de medida de las variables dependientes

Los instrumentos de medida de las variables dependientes son, salvo el test de actitud (Gairín, 1987), pruebas diseñadas *ad hoc* relativas a los tres dominios evaluados:

PEC: Prueba sobre conceptos y estructuras conceptuales.

PPA: Prueba sobre procedimientos algorítmicos.

PRP1: Prueba sobre resolución de problemas, 1ª versión.

PRP2: Prueba sobre resolución de problemas, 2ª versión.

En el apartado 6.3. presentamos estas pruebas, describimos su proceso de elaboración y analizamos su validez de contenido y su fiabilidad. Mostramos ahora cómo se utilizan para obtener los datos de las variables dependientes:

VARIABLES DEPENDIENTES	INSTRUMENTOS DE MEDIDA
Rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales al acabar la experimentación	PEC
Rendimiento en procedimientos algorítmicos al acabar la experimentación	PPA
Rendimiento en resolución de problemas al acabar la experimentación	PRP1
Rendimiento global al acabar la experimentación	PEC + PPA + PRP1
Actitud al acabar la experimentación	Test de Gairín
Rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales a los dos meses	PEC
Rendimiento en procedimientos algorítmicos a los dos meses	PPA
Rendimiento en resolución de problemas a los dos meses	PRP2
Rendimiento global a los dos meses	PEC + PPA + PRP2
Actitud a los dos meses	Test de Gairín
Cambio conceptual al acabar la experiencia	Frecuencia de aciertos en los items de PEC (1ª aplicación) que contienen ideas previas erróneas.
Cambio conceptual a los dos meses	Idem, 2ª aplicación

3.6. Instrumentos para el análisis estadístico de los datos

Como es previsible que los datos obtenidos en las diez primeras variables dependientes (rendimientos y actitudes) permitan un tratamiento paramétrico, utilizaremos el análisis de la covarianza con un factor (grupo = metodología) y una covariable (actitud inicial) para contrastar las hipótesis 1 y 2.

La hipótesis 3 será contrastada mediante pruebas "ji- cuadrado", pues se trata de comparar los grupos respecto de las frecuencias de aciertos a determinados items de la prueba PEC.

Finalmente, la hipótesis 4 será contrastada utilizando varios análisis de la varianza con dos factores: la metodología y la variable sobre la que, presumiblemente, pueda interactuar.

SEGUNDA PARTE

DESARROLLO DE LA INVESTIGACION

CAPITULO 4

ANALISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS Y CONCEPCIONES ERRONEAS

Introducción

Establecimos, en la primera parte, el diseño de esta investigación, cuyo objetivo general es la evaluación comparativa de las dos metodologías didácticas que hemos construido. Su desarrollo requiere, en primer lugar, la elaboración de materiales didácticos acordes con cada una de ellas; en segundo lugar, su experimentación en centros escolares; y, en tercer lugar, la evaluación de los resultados. En este capítulo nos ocuparemos de la primera etapa.

Tal como señalamos anteriormente, el punto de partida del proceso instructivo, para las dos metodologías que estamos valorando, es el análisis de los conocimientos previos y de las concepciones erróneas más frecuentes sobre el tema objeto del aprendizaje. De este análisis depende el diseño de todas las estrategias instructivas y, por lo tanto, constituye la primera fase en el desarrollo de esta investigación. A continuación exponemos el procedimiento y los resultados de este análisis para la unidad didáctica que hemos elegido diferenciando dos dominios:

- Conocimientos necesarios para iniciar el estudio de las cónicas.
- Ideas previas sobre las cónicas.

Dedicamos un apartado a cada uno de estos dominios y otro a las implicaciones didácticas que se derivan de todo este análisis.

4.1. Conocimientos necesarios para iniciar el estudio de las cónicas

A pesar de que, en teoría, todos los alumnos han seguido el mismo programa de matemáticas antes de llegar al punto en que inician el estudio sistemático de las cónicas, la realidad demuestra que existen diferencias entre lo programado desde la legislación vigente, lo desarrollado en los libros de texto o en las clases y lo realmente aprendido por los estudiantes. Por lo tanto, nos interesa saber cuál es la competencia real en los conocimientos necesarios para iniciar el estudio de las cónicas. Esto nos servirá para ajustar y equilibrar los materiales didácticos que pretendemos diseñar y experimentar posteriormente.

4.1.1. Catálogo de los conocimientos previos directamente relacionados con las cónicas

Comenzamos esta prospección elaborando una lista de aquellos conocimientos sobre los cuales, desde un punto de vista teórico, se apoyan directamente las estructuras conceptuales y los algoritmos de las cónicas.

Distinguiremos tres campos fundamentales: el conceptual, el de los procedimientos algorítmicos y el de las estrategias heurísticas.

Conceptos y estructuras conceptuales:

C_1: Concepto de superficie cónica.

C_2: Concepto de lugar geométrico.

C_3: Propiedad de los segmentos de tangentes a una esfera desde un mismo punto exterior.

C_4: Teorema de Pitágoras.

C_5: Relaciones entre los lados de un triángulo ($a < b + c$; $a > b - c$).

C_6: Variabilidad de la ecuación de un objeto geométrico (recta, curva, etc.) respecto del sistema de referencia adoptado.

C_7: Condición analítica para que un punto pertenezca a una curva.

C_8: Condiciones analíticas de paralelismo y perpendicularidad de rectas.

C_9: Conceptos de mediatriz y bisectriz.

Procedimientos algorítmicos:

PA_1: Cálculo de la distancia entre dos puntos conocidas sus coordenadas.

PA_2: Cálculo de la distancia de un punto a una recta conocidas las coordenadas del punto y la ecuación de la recta.

PA_3: Eliminación de raíces cuadradas en ecuaciones del tipo

$$\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = K \text{ ó } \sqrt{A} = K\sqrt{B}$$

donde A y B son polinomios de segundo grado en dos variables.

PA_4: Trazado de la mediatriz de un segmento.

PA_5: Trazado de la bisectriz de un ángulo.

PA_6: Determinación de la ecuación de una recta conocidas las coordenadas de dos puntos por los que pasa.

PA_7: Cálculo de las ecuaciones de las bisectrices de dos rectas secantes a partir de sus ecuaciones.

PA_8:Transformación de coordenadas de puntos y de ecuaciones de rectas al realizar una traslación o un giro de los ejes coordenados.

PA_9: Determinación de las coordenadas del punto medio de un segmento conocidas las de sus extremos.

Estrategias heurísticas:

E_1: Representar y organizar la información mediante un dibujo o mediante símbolos.

E_2: Elegir un sistema de referencia.

E_3: Formular una conjetura plausible y después someterla a una evaluación: prueba o refutación (buscar contraejemplos).

E_4: Buscar un problema análogo ya resuelto (o más fácil) o una propiedad análoga ya conocida.

E_5: Analizar casos particulares y luego generalizar; reconocer y generalizar patrones o tendencias.

E_6: Subdividir el problema:
- restringiendo o ampliando las condiciones,
- reduciendo las variables o la dimensión.

E_7: Suponer resuelto el problema; empezar desde el final.
E_8: Buscar los datos que harían falta para resolver el problema.
E_9: Analizar si puede haber otras soluciones.

4.1.2. Instrumentos, muestra y desarrollo de la investigación

A partir del catálogo de conocimientos enumerado anteriormente, se elaboraron tres pruebas, una para cada campo:

Prueba sobre conocimientos en conceptos y estructuras conceptuales: Consiste en un cuestionario de 20 items de verdadero-falso que evalúa, esencialmente, la competencia en los contenidos inventariados antes bajo ese mismo epígrafe.

Prueba sobre procedimientos algorítmicos: Consiste en una secuencia de 10 ejercicios que requieren el uso de los procedimientos algorítmicos anteriormente catalogados.

Prueba sobre resolución de problemas: Consiste en una colección de 3 problemas con cuya resolución se pretende evaluar el grado de utilización de las estrategias heurísticas.

A continuación, se muestran estas tres pruebas:

CONOCIMIENTOS PREVIOS: PRIMERA PRUEBA

1. La recta $x - y + 1 = 0$ pasa por el punto (3,5).

2. El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas secantes está constituido por las bisectrices de los ángulos que forman dichas rectas.

3. La recta $y = 2x - 1$ es perpendicular a la recta $x - 2y - 1 = 0$.

4. Si a, b y c representan las longitudes de los lados de un triángulo, entonces se verifica siempre: $a > b + c$.

5. Desde un punto P exterior a una esfera se trazan tangentes a ella; entonces las distancias entre el punto P y los puntos de contacto son todas iguales.

6. Si la recta $y = mx + n$ es paralela a la recta $Ax + Bx + C = 0$, entonces se verifica: $m = -A/B$ y $n \neq -C/B$.

7. La ecuación de una recta depende del sistema de referencia adoptado.

8. La mediatriz de un segmento AB es una recta formada por todos los puntos que equidistan de A y de B.

9. Las superficies cónicas tienen alturas pero no generatrices.

10. El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta está formado por dos rectas paralelas a la dada.

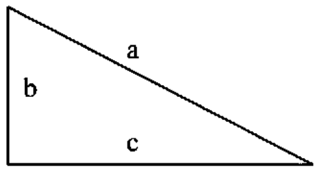
11. La recta $y = -B/Ax - C/A$ es perpendicular a la recta $Ax + By + C = 0$.

12. Aunque el punto P(a,b) verifique $3a - 4b + 5 = 0$, no tiene que pertenecer necesariamente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

13. La recta perpendicular a un segmento en su punto medio se llama mediana.

14. El triángulo de la figura es rectángulo y las letras representan las medidas de sus lados; entonces se verifica:

$a^2 = b^2 + c^2$



15. La recta $y = 2x - 1$ es paralela a la recta $x - 2y - 1 = 0$.

16. Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las dos tangentes a ella; entonces las distancias entre el punto P y los puntos de contacto son iguales.

17. Una recta tiene infinitas ecuaciones que no son equivalentes entre sí.

18. El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas paralelas es un segmento paralelo a ellas.

19. Una superficie cónica se obtiene al hacer girar una recta alrededor de otra secante a ella manteniendo constante siempre el ángulo que forman.

20. Si a, b y c representan las longitudes de los lados de un triángulo, entonces se verifica siempre: $a > b - c$.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: SEGUNDA PRUEBA

1. Calcula la distancia entre los puntos A(1,–2) y B(4,2).

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1,2) y B(3,4).

3. Calcula la distancia entre el punto (1,2) y la recta $3x - 4y + 1 = 0$.

4. Halla las coordenadas del punto medio del segmento AB siendo A(–1,2) y B(3,–4).

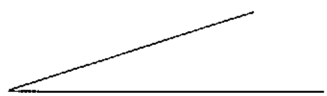
5. Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas $3x - 4y + 1 = 0$ y $4x - 3y - 5 = 0$.

6. Halla la nueva ecuación de la recta $2x - y - 1 = 0$ cuando se ha efectuado una traslación de los ejes coordenados al punto (1,2).

7. Resuelve la ecuación: $\sqrt{2x} - \sqrt{x+1} = 1$.

8. Dibuja la mediatriz de un segmento de 5 cm de longitud y explica con detalle cómo lo haces.

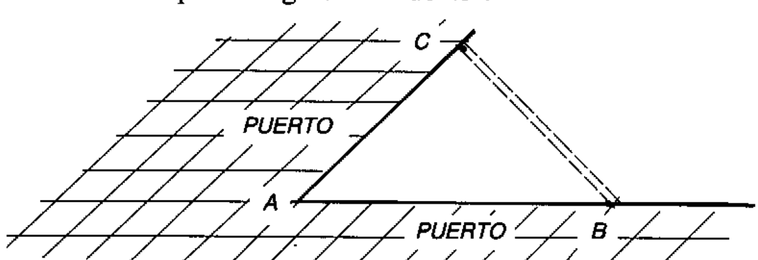
9. Dibuja la bisectriz de un ángulo parecido al de la siguiente figura y explica con detalle cómo lo haces.



10. Dibuja un triángulo cuyos tres lados sean distintos; después dibuja una circunferencia tangente a los tres lados de ese triángulo. Explica con detalle cómo lo haces.

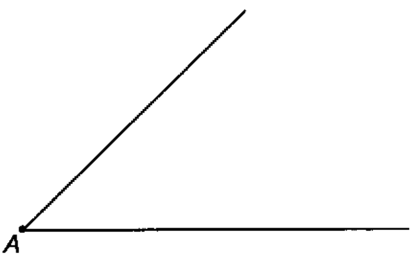
CONOCIMIENTOS PREVIOS: TERCERA PRUEBA

1. El siguiente dibujo representa el muelle de un puerto de mar en el que el ángulo A mide 45°:



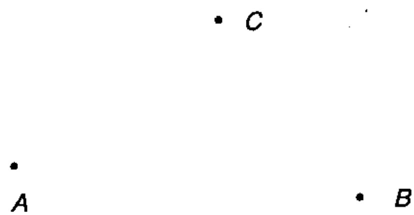
Desde el punto B, que dista 5 Km de A, se desea construir un dique rectilíneo, BC, de manera que la superficie encerrada en el triángulo ABC sea de 10 Km^2. Halla el punto C y la longitud del dique BC.

Utiliza la siguiente figura y explica con detalle todo lo que haces y por qué tu respuesta verifica las condiciones del enunciado.



2. Demuestra que la suma de todos los ángulos de un polígono regular de n lados es 180°(n–2). Explica con detalle tu razonamiento.

3. Dibuja las rectas que equidistan de los tres puntos siguientes. Explica con detalle todo lo que haces y razona por qué las rectas que túu dibujes verifican la condición del problema.



La fiabilidad de las pruebas sobre procedimientos algorítmicos y sobre estrategias heurísticas viene avalada por la univocidad del contenido en el primer caso y por la existencia de una pauta normativa en la corrección de los problemas en el segundo caso.

La validez de estas tres pruebas está garantizada por su concomitancia con los contenidos seleccionados (apartado 4.1.1.) como puede verse en las siguientes tablas:

CONCEPTOS Y ESTRUCTURAS CONCEPTUALES (Ap. 4.1.1.)	ITEMS CORRESPONDIENTES EN LA PRIMERA PRUEBA
C_1	9, 19
C_2	2, 10, 18
C_3	5, 16
C_4	14
C_5	4, 20
C_6	7, 17
C_7	1, 12
C_8	3, 6, 11, 15
C_9	2, 8, 13

PROCEDIMIENTOS ALGORITMICOS (Ap.4.1.1.)	PA_1	PA_2	PA_3	PA_4	PA_5	PA_6	PA_7	PA_8	PA_9
Items correspondientes en la segunda prueba	1	3	7	8	9 y 10	2	5	6	4

ESTRATEGIAS HEURISTICAS (Ap. 4.1.1.)	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
Problemas de la tercera prueba donde donde pueden usarse	1	1	3	2 y 3	2	3	1	1	3

Las pruebas fueron realizadas por 78 alumnos pertenecientes a dos centros distintos, uno en Salamanca y otro en Zamora, en el mes de noviembre de 1987. Puesto que la muestra no es muy amplia y tampoco fue escogida al azar, los resultados obtenidos no pueden ser extrapolados de modo inmediato a toda la población, aunque para nuestro objetivo (análisis de conocimiento previos para elaborar los materiales didácticos) es suficiente. Se utilizaron dos sesiones de una hora cada una: en la primera, ambos grupos contestaron a las pruebas sobre conceptos y sobre algoritmos; en la segunda, cada grupo resolvió los tres problemas. En la sesión dedicada a la resolución de problemas, los estudiantes dispusieron de libros y, en las otras dos, del material adecuado (compás, regla, transportador, etc.).

4.1.3. Análisis de resultados

La corrección se efectuó manualmente y, aunque nuestro interés es de tipo cualitativo, expondremos también los resultados numéricos insistiendo en la advertencia de su dudosa extrapolación.

Conceptos y estructuras conceptuales

La siguiente tabla muestra el porcentaje de contestaciones erróneas en la *Prueba sobre conocimientos en conceptos y estructuras conceptuales*:

ITEMS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Porcentaje de respuestas erróneas	9	12,8	10,3	11,5	20,5	42,3	34,6	23,1	30,8	51,3

ITEMS	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Porcentaje de respuestas erróneas	25,6	19,2	30,8	9	16,7	15,4	66,7	43,6	15,4	41

Un análisis global de estos datos nos indica que los conceptos y estructuras conceptuales han sido asimilados por los estudiantes de un modo desigual. Concentrándonos en aspectos parciales, observamos que muchos no reconocen que una recta tiene infinitas ecuaciones (item 17) a pesar de que la mayoría acepta que la ecuación de una recta depende del sistema de referencia adoptado (item 7). Encontramos aquí una concepción errónea según la cual el sistema de referencia es "anterior" a los objetos geométricos, es algo absoluto dado *a priori,* y, por lo tanto, los objetos geométricos ya *nacen encadenados* a él por una sola ecuación. Una parte de las causas de esta concepción errónea debe buscarse en la escasa actividad didáctica en torno a los cambios de sistemas de referencia, como queda bien patente en la prueba sobre algoritmos (párrafo siguiente) en la cual casi todos los alumnos fueron incapaces de hallar la nueva ecuación de una recta cuando se había efectuado una traslación de los ejes coordenados a un punto dado.

El concepto de lugar geométrico parece estar más memorizado que asimilado. En efecto, la gran mayoría de los estudiantes es capaz de identificar la definición de bisectriz como lugar geométrico (item 2) pero sólo la mitad transfiere este concepto a situaciones nuevas (items 10 y 18).

Las condiciones analíticas de paralelismo y perpendicularidad de rectas son conocidas y aplicadas por la mayoría de los alumnos siendo mejores los resultados cuando se plantean preguntas en casos concretos y con ecuaciones escritas en la misma forma (items 3 y 15) que cuando las preguntas se plantean en situaciones generales y con ecuaciones escritas en distinta forma (item 6).

La generación de una superficie cónica y la propiedad de la tangente a una esfera (o a una circunferencia) desde un punto exterior parecen estructuras conceptuales bien asimiladas por la gran mayoría de los estudiantes (items 5, 9, 16 y 19). No sucede lo mismo con las relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera: mientras casi todos reconocen la desigualdad $a < b + c$, sólo la mitad acepta $a > b - c$ (items 4 y 20).

La condición analítica para que un punto pertenezca a una recta es suficientemente conocida (items 1 y 12) al igual que el teorema de Pitágoras (item 14). Sin embargo, los conceptos de mediana y de mediatriz parecen no estar muy claros para la cuarta parte de los estudiantes (items 8 y 13).

Procedimientos algorítmicos

La siguiente tabla recoge los resultados de la prueba sobre procedimientos algorítmicos:

ITEMS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Porcentaje de contestaciones correctas	65,4	79,5	39,8	71,8	23,1	1,3	2,6	46,2	33,3	2,6
Porcentaje de contestaciones incompletas o con algún error pequeño	10,3	5,1	33,3	3,9	5,1	1,3	2,5	0	6,5	3,8
Porcentaje de contestaciones erróneas	24,3	15,4	26,9	24,3	71,8	97,4	94,9	53,8	60,2	93,6

Al analizar esta tabla se observan resultados satisfactorios en los cuatro primeros items, que se refieren al cálculo de la distancia entre dos puntos, ecuación de la recta que pasa por dos puntos, distancia de un punto a una recta y coordenadas del punto medio de un segmento. Hay algunos errores en el algoritmo para calcular la distancia de un punto a una recta (item 3), como la ausencia del valor absoluto en la fórmula o confusiones de signo en el denominador, que no parecen invalidar un conocimiento general aceptable de todos estos procedimientos algorítmicos. En cambio, en los últimos seis items, el panorama cambia completamente. Exponemos, a continuación el análisis de las respuestas dadas a estos items:

Item 5 (ecuaciones de bisectrices): la mayoría de las contestaciones erróneas se producen por el desconocimiento de un procedimiento algorítmico o por el uso de fórmulas incorrectas.

Item 6 (transformación de la ecuación de una recta por una traslación de ejes coordenados): también aquí se observa un desconocimiento total de un procedimiento algorítmico.

Item 7 (resolución de una ecuación irracional): los alumnos han practicado con este tipo de ecuaciones en el primer y segundo curso y conocen las líneas generales del procedimiento, sin embargo la abundancia de errores como los siguientes les impide llegar a la solución:

– Eliminan las raíces elevando al cuadrado cada raíz separadamente.

– Aplican que la raíz cuadrada de una suma es igual a la suma de las raíces.

– No utilizan paréntesis al eliminar una raíz cuando calculan el cuadrado de un binomio.

– Dividen por x los dos miembros de la ecuación con lo cual pierden una solución.

– No comprueban las soluciones obtenidas tras haber elevado al cuadrado los dos miembros de la ecuación.

Item 8 (trazado de la mediatriz de un segmento): casi todas las respuestas erróneas utilizan el siguiente método: buscan el punto medio del segmento utilizando la regla y luego trazan una perpendicular a mano alzada.

Item 9 (trazado de la bisectriz de un ángulo): los estudiantes saben que la bisectriz divide al ángulo en dos partes iguales y que sus puntos equidistan de los lados del ángulo, pero la mayoría realiza el trazado a mano alzada, sin método alguno. Sorprende el comportamiento de los alumnos en estos dos últimos items si tenemos en cuenta que, en el primer curso, estudiaron y practicaron ya las construcciones geométricas más elementales, muchas de las cuales se apoyan en estas dos.

Item 10 (trazado de la circunferencia inscrita en un triángulo): lo más significativo de las respuestas es que, en casi todas, los alumnos inician el proceso trazando las medianas, las mediatrices y, en menor proporción, las bisectrices. Esto demuestra que reconocen, en su memoria, una relación entre la tarea propuesta y los puntos notables de un triángulo (baricentro, circuncentro e incentro) pero su aprendizaje no soporta esta actualización.

Estrategias heurísticas

La siguiente tabla muestra los resultados de la prueba sobre resolución de problemas que nos sirvió para evaluar el uso y la diversidad de las estrategias heurísticas empleadas así como para detectar algunas concepciones erróneas:

PROBLEMAS	**1**	**2**	**3**
Porcentajes: Resolución correcta y completa	47,5	5	7,9
Resolución correcta pero incompleta o con algunos errores	25	12,5	10,5
Sin resolución o resolución incorrecta	27,5	82,5	81,6

En este caso, mucho más aún que en los anteriores, es más interesante para el propósito de esta investigación analizar los procesos resolutivos utilizados por los estudiantes que constatar el fracaso general manifestado en la escueta información contenida en esta tabla.

Problema 1 (puerto de mar): En la mayoría de las resoluciones correctas se utiliza la estrategia de "suponer resuelto el problema" para obtener información sobre la altura del triángulo ABC y la consecuente ubicación del punto C. Algunos utilizaron la estretagia de "elegir un sistema de referencia" pero ninguno consiguió explotarla hasta el final. Los errores más frecuentes se originan cuando los estudiantes hacen *supuestos* que no figuran entre los datos del problema ni pueden deducirse de ellos, por ejemplo: el ángulo C es de 90°; el dibujo está hecho a escala y se pueden tomar medidas en él; el triángulo ABC es isósceles; etc. Este tipo de comportamiento originó la mayoría de las respuestas erróneas.

Problema 2 (suma de los ángulos de un polígono): Este es un típico problema de demostración de una propiedad que, a juzgar por las respuestas, no era conocida por los estudiantes. Las heurísticas con las que atacaron su resolución fueron las siguientes: "particularizar" (en casos conocidos como triángulos, cuadrados o hexágonos) y "generalizar" (a partir de los casos conocidos). Utilizan la particularización para comprobar que la fórmula se cumple para n = 3 ó para n =4 ó para n =6 y, de ahí, infieren que se cumple siempre (generalización). Hay, por lo tanto, una grave confusión entre comprobación y demostración. En general, se aprecia un desconocimiento de lo que es un proceso demostrativo en matemáticas.

Problema 3 (rectas equidistantes): Este era un problema, en principio, sencillo que, sin embargo, fue resuelto bien por muy pocos alumnos. Apenas utilizaron estrategias eficaces como podría ser la de "subdividir el problema" prescindiendo de uno de los puntos. La mayoría se limitó a dibujar bisectrices, medianas o mediatrices afirmando que ellas constituyen la solución. Se observa una ausencia total de argumentos para defender cualquiera de las conjeturas, ni siquiera en los poquísimos casos en que éstas eran correctas. Estos comportamientos parecen indicar que la *reversibilidad* del concepto "distancia de un punto a una recta" no es tan intuitivo como pudiera parecer a primera vista.

4.1.4. Conclusiones

El análisis de las respuestas obtenidas en las tres pruebas que acabamos de comentar nos permite formular algunas conclusiones generales sobre la competencia de los estudiantes en los conocimientos necesarios para iniciar el estudio de las cónicas.

En el campo conceptual, sólo se observan deficiencias importantes en la asimilación de las propiedades métricas entre las longitudes de los lados de un triángulo y la confusión entre los conceptos (o, tal vez, sólo entre los nombres) de mediana, mediatriz y bisectriz. Existe, sin embargo, una concepción errónea muy extendida: el sistema de referencia es algo absoluto y, por tanto, las rectas tienen una sola ecuación.

Respecto a los procedimientos algorítmicos, advertimos deficiencias graves en el cálculo de las ecuaciones de las bisectrices de dos rectas secantes, en el trazado de la bisectriz y de la mediatriz y, sobre todo, en la eliminación de las raíces cuadradas de una ecuación con dos raíces en el mismo miembro.

Finalmente, en el campo de la resolución de problemas, se aprecia el uso de una pequeña variedad de estrategias heurísticas que, en la mayoría de los casos, no se explotan hasta conseguir la solución completa. Algunos estudiantes formulan conjeturas que ni refutan ni prueban y otros, con el hallazgo de una solución particular, dan por resuelto un problema que requería una solución de carácter general. Un comportamiento frecuente es la tendencia a añadir *supuestos* que no figuran en el enunciado del problema ni pueden deducirse de sus datos. En los problemas de determinación, el grado de comprensión del enunciado es muy alto; en cambio, en los problemas de demostración, aunque puede suceder lo mismo, esto no se manifiesta ya que, en general, estos estudiantes no aprecian lo que es una demostración matemática ni su necesidad (la confunden, por ejemplo, con una comprobación; generalizan, sin más, a partir de algunos casos particulares; no distinguen hipótesis de tesis, etc.).

4.2. Ideas previas sobre las cónicas

Puesto que, entre las investigaciones conocidas, no existe ninguna que se refiera al análisis de las ideas previas sobre las cónicas en alumnos de los últimos cursos de la enseñanza secundaria (3º de BUP, en nuestro caso concreto), nos vimos obligados a realizar una investigación sobre este tema. El *objetivo* era detectar y analizar las ideas previas que poseen los alumnos de 3º de BUP (17 años) sobre las secciones cónicas (elipses, hipérbolas y parábolas) antes de empezar su estudio sistemático.

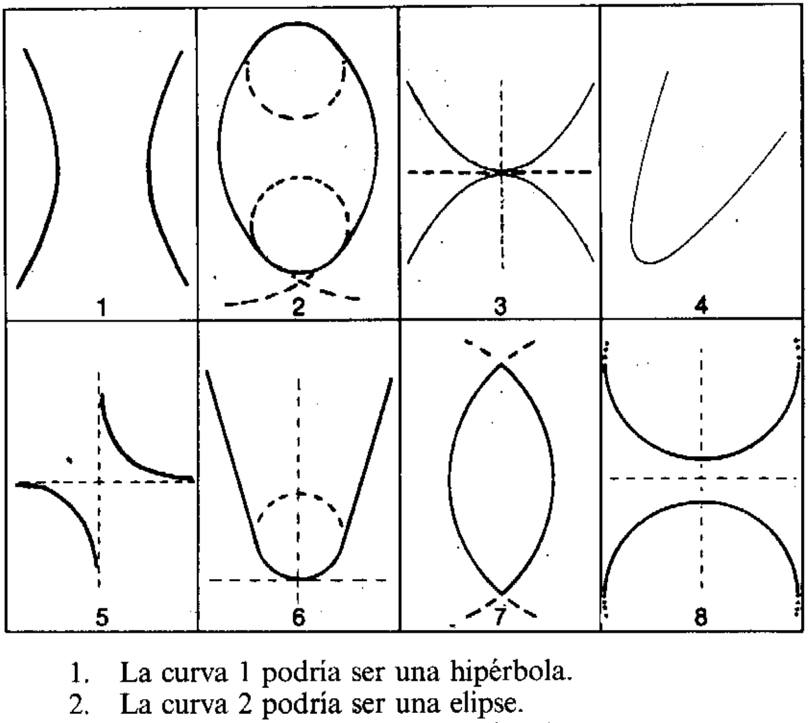
4.2.1. Instrumento, muestra y desarrollo de la investigación.

La primera meta era obtener una información aproximada de carácter general sobre las ideas previas que poseían los alumnos. Para ello se elaboró un cuestionario breve y muy abierto en el que, sobre cada una de las curvas, se pedía a los alumnos que la dibujasen, la definieran, enunciaran alguna propiedad y describieran algún objeto o fenómeno real donde se encontrase esta curva. Fue contestado por 76 alumnos de 3º de BUP en el mes de noviembre de 1987, cuando todavía no habían comenzado su estudio sistemático. Utilizaron una hoja para cada curva, tenían regla y compás y disponían de una hora, tiempo que fue, en todos los casos, suficiente. Las contestaciones fueron anónimas, lo cual favoreció el alto grado de espontaneidad que necesitaba esta primera aproximación al objetivo de la investigación.

Eramos conscientes de que la "apertura" de la prueba iba a impedir a muchos alumnos rememorar y explicitar sus concepciones ya que éstas, en muchos casos, no emergen hasta que no se enfrentan con una situación problemática en la que su intervención es imprescindible y espontánea. Pero el objetivo era detectar un cúmulo de posibles ideas previas que luego validaríamos de una manera más precisa. Por eso, a partir de los resultados obtenidos, elaboramos un cuestionario con 40 items de verdadero-falso que concentraban la atención de los estudiantes sobre los aspectos particulares de estas curvas que, en la primera exploración, fueron detectados como posibles ideas previas.

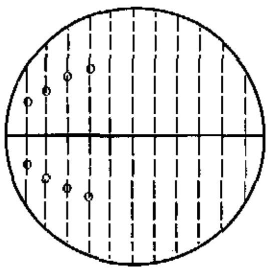
ANALISIS DE LAS IDEAS PREVIAS SOBRE LAS CONICAS
CUESTIONARIO DEFINITIVO

Las primeras 8 frases hacen referencia a las curvas de las siguientes figuras en las cuales las líneas de puntos no forman parte de las curvas, sólo sirven para indicar cómo se trazaron:

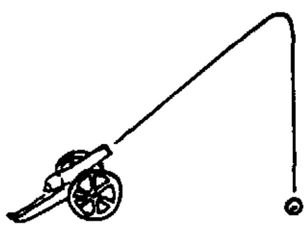


1. La curva 1 podría ser una hipérbola.
2. La curva 2 podría ser una elipse.
3. La curva 3 podría ser una hipérbola.
4. La curva 4 podría ser una parábola.
5. La curva 5 podría ser una hipérbola

6. La curva 6 podría ser una parábola.
7. La curva 7 podría ser una elipse.
8. La curva 8 podría ser una hipérbola.
9. Una elipse puede dibujarse perfectamente utilizando sólo el compás, la regla y el lápiz.
10. Si representamos la función $y = 3x^2$, obtenemos una parábola.
11. Si señalamos los puntos medios de todas las semicuerdas verticales de una circunferencia (còmo en la figura siguiente) y los unimos, entonces se obtiene una elipse.



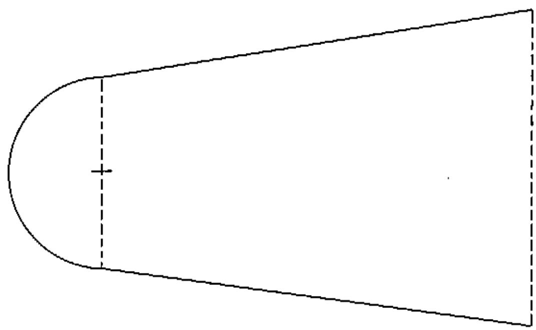
12. Una hipérbola se define así: es la curva obtenida al seccionar una superficie cónica completa mediante un plano que no pasa por el vértice y corta a sus dos hojas.
13. Las únicas elipses que existen en la realidad son las órbitas de los planetas alrededor del sol y las de algunas partículas atómicas alrededor del núcleo.
14. La longitud de una parábola es infinita.
15. Si disparamos un cañón antiguo con una inclinación de 45° y suponemos que el rozamiento del aire no existe, la trayectoria completa de la bala es una curva como la de la siguiente figura:



16. Una hipérbola no puede formarse con las dos mitades de una elipse enfrentadas entre sí.

17. Fijado un punto de una hipérbola, siempre es posible trazar dos tangentes a dicha hipérbola pasando por ese punto.

18. La zona de una cancha de baloncesto que se muestra en la figura siguiente tiene forma de parábola.



19. Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro.

20. Una parábola puede dibujarse perfectamente empleando sólo una regla, un compás y un lápiz.

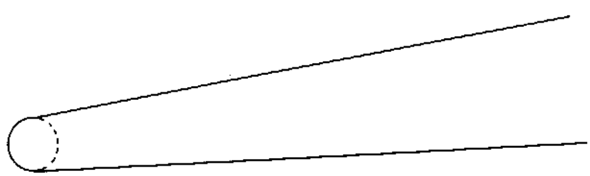
21. Las hipérbolas no aparecen en objetos o fenómenos reales.

22. $y^2 = 2x$ es la ecuación de una parábola cuyo eje coincide con el eje de abscisas.

23. Por cualquier punto de una elipse pasan dos tangentes distintas.

24. Los huevos de gallina tienen forma de elipsoide.

25. Una horquilla de pelo, como la de la siguiente figura,



26. Si un jugador de baloncesto lanza el balón desde el centro del campo y consigue una canasta, entonces el camino recorrido por el balón tiene forma de parábola.

27. Una parábola se define así: es la curva obtenida al cortar una superficie cónica por un plano paralelo a una generatriz.

28. Las parábolas no tienen centro de simetría.

29. Una hipérbola no puede dibujarse perfectamente empleando sólo el compás, la regla y el lápiz.

30. Una elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre la misma.

31. La gráfica de la función $y = 1/x$ es una parábola.

32. Cualquier parábola tiene infinitas ecuaciones no equivalentes entre sí.

33. Un melón perfectamente simétrico tiene forma de elipse.

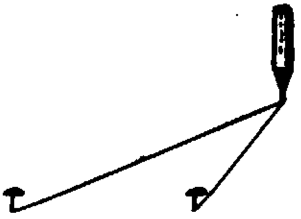
34. $x^2 = 2y$ es la ecuación de una parábola cuyo eje coincide con el eje de ordenadas.

35. Una parábola se define así: es una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función.

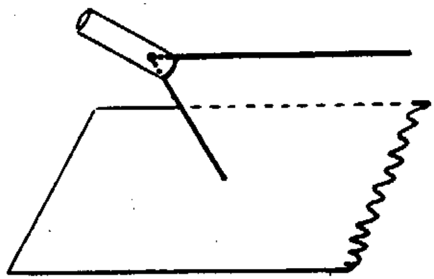
Las próximas cinco frases hacen referencia a las siguientes actividades:

A. Tomamos una superficie cónica (completa) en la cual las generatrices forman con el eje un ángulo de 30°. La cortamos con un plano que no pasa por el vértice y que forma con el eje un ángulo β. Consideramos la curva obtenida en esta sección.

B. Clavamos dos chinchetas sobre una hoja de papel y trazamos la curva que resulta al desplazar un lápiz manteniendo tenso un hilo cuyos extremos se han unido a las chinchetas como muestra la figura siguiente:



C. Con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminamos una hoja de papel con la inclinación que muestra la figura siguiente; consideramos la curva formada por el borde del recinto iluminado.



36. Si $\beta = 30^{\circ}$, la curva obtenida en A es una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en C.

37. Si β es menor que 30°, la curva obtenida en A es siempre una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en B.

38. Si β es mayor que 30°, la curva obtenida en A, en algunos casos, es del mismo tipo que la obtenida en C.

39. Si cortamos la superficie cónica de la actividad A con un plano paralelo a una generatriz, obtenemos una curva del mismo tipo que la obtenida en la actividad C.

40. Si seccionamos la superficie cónica de la actividad A con los planos que cortan a todas las generatrices, podría obtenerse, en algún caso, una curva del mismo tipo que la obtenida en la actividad B.

Este cuestionario fue contestado por el mismo grupo de 78 estudiantes que realizó las pruebas para analizar el grado de competencia de conocimientos previos necesarios (primer apartado de este capítulo). Dada la originalidad y la relativa importancia del propósito de esta exploración, decidimos hacer una segunda aplicación de este cuestionario a una muestra más amplia, con el fin de aumentar la validez de los resultados obtenidos. Aunque el muestreo aleatorio es, en teoría, el procedimiento de selección de muestras más adecuado, no siempre es posible dada la organización de nuestro sistema escolar. No obstante, la muestra de la segunda aplicación se considera bastante representativa, al menos, de la población escolar del distrito universitario de Salamanca, no sólo por su tamaño, 305 estudiantes, sino por las propias características de los grupos y de los centros.

Salamanca:

– un grupo de ciencias y otro mixto de un Instituto de la zona centro;

– tres grupos de ciencias y uno mixto de un Instituto de barrio;

Zamora:

– dos grupos de ciencias y uno mixto de un Instituto de procedencia diversa

A continuación se expone el análisis de los resultados obtenidos en esta segunda aplicación que, sin ser muy diferentes a los obtenidos en la primera, tienen una mayor validez.

4.2.2. Análisis de resultados

La corrección se efectuó en un ordenador con un programa diseñado *ad hoc* en DBASE III. Los datos obtenidos se procesaron con el programa MICROSTAT utilizando la prueba "ji-cuadrado" para medir la dependencia de las respuestas dadas a los distintos items (α = 0,05). Cuando las frecuencias teóricas eran bajas, se contrastaron las conclusiones aplicando la prueba G con la corrección de Ku.

Reconocimiento de las formas y construcción

El primer grupo de items (del 1 al 8) estaba destinado a detectar la representación mental que poseen los alumnos de cada una de las cónicas. Los tipos de figuras sometidas a su percepción visual fueron sugeridos por las respuestas obtenidas en la primera fase de la investigación. Para completar el reconocimiento de las formas se añadieron otros items (9, 11, 16, 18, 20, 25, 29) a fin de obtener información sobre los procedimientos que seguirían para trazarlas.

Estos fueron los resultados:

FORMA DE LA ELIPSE

Porcentajes de:	ITEMS: 2	7	11	9
Alumnos cuya respuesta es correcta	6,5	72,1	88,2	12,5
Alumnos cuya respuesta es errónea	92,8	26,9	10,8	86,5
Alumnos que no contestaron	0,7	1	1	1

Del análisis de estos resultados se sigue que los estudiantes poseen una representación mental de la forma de la elipse que puede considerarse físicamente correcta pues casi todos aceptan como elipses las curvas de los items 2 y 11 (óvalo y circunferencia achatada) al mismo tiempo que rechazan la del 7 (dos semicircunferencias secantes). En cuanto a la construcción, en consonancia con la respuesta de que la curva del item 2 (óvalo) es una elipse, la gran mayoría de los alumnos considera que la elipse puede dibujarse con regla y compás (item 9). Sin embargo, las respuestas a estos items no son dependientes.

FORMA DE LA HIPERBOLA

Porcentajes de:	ITEMS: 1	3	5	8	16	29
Alumnos cuya respuesta es correcta	52,1	42	61,3	69,2	43,6	26,9
Alumnos cuya respuesta es errónea	43	56,1	35,1	27,9	49,8	69,2
Alumnos que no contestaron	4,9	1,9	3,6	2,9	6,6	3,9

En esta tabla se observa que algo más de la mitad de los alumnos reconoce la hipérbola como una curva formada por dos ramas simétricas (items 1 y 5) que no tienen forma circular (item 8). Aproximadamente la mitad completa esta imagen considerando que esas ramas podrían ser semielipses (item 16) y tangentes (item 3). Es interesante constatar cómo el porcentaje de alumnos que reconoció como hipérbolas las curvas de los items 3 y 5 es más alto en ambos casos que el que reconoció la del item 1. Sin embargo, en ambos casos, las respuestas están relacionadas. En nuestra opinión, esto se explica por la presencia de los ejes en los dos primeros casos. Como ya pudimos observar al examinar los dibujos que obtuvimos en la primera fase de la investigación, parece que, para los estudiantes, los ejes son un elemento consustancial con la hipérbola. Respecto a la construcción, vemos, como en el caso de la elipse, que más de 2/3 de los alumnos asegura que puede dibujarse con regla y compás (item 29).

FORMA DE LA PARABOLA

Porcentajes de:	ITEMS:				
	4	**6**	**18**	**25**	**20**
Alumnos cuya respuesta es correcta	77,4	32,8	52,8	25,6	18,4
Alumnos cuya respuesta es errónea	21,3	65,2	46,2	73,1	80
Alumnos que no contestaron	1,3	2	1	1,3	1,6

Esta tabla manifiesta sin lugar a dudas que el reconocimiento de la forma de la parábola es un logro de la mayoría de los alumnos (item 4) aunque incluyen en su representación mental los casos en que la curva está constituida por un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes (items 6 y 25).

La mitad de los alumnos, sin embargo, excluye el caso en que las semirrectas no son tangentes al arco de circunferencia (item 18). Las respuestas a estos tres items están relacionadas dos a dos. En consonancia con estas ideas, igual que en la elipse y en la hipérbola, casi todos los alumnos aseguran que también la parábola puede dibujarse perfectamente empleando sólo la regla y el compás (item 20). La prueba "ji-cuadrado" demuestra que la propiedad de poder ser trazada con regla y compás no es percibida por la mayoría de los alumnos como común para las tres cónicas. Conjeturamos que una parte de este resultado tal vez pueda explicarse por las enseñanzas que, sobre el trazado de estas curvas, han recibido los alumnos en la asignatura de dibujo del primer curso.

Conceptos y estructuras conceptuales de equivalencia

Ahora nos ocuparemos de analizar los resultados de los items que se refieren directa o indirectamente a los conceptos de elipse, hipérbola y parábola y la estructura de equivalencia entre las distintas propiedades caracterizantes. Se recogen en las siguientes tablas:

CONCEPTO DE ELIPSE

Porcentajes de:	ITEMS:				
	2	**7**	**11**	**19**	**30**
Alumnos cuya respuesta es correcta	6,5	72,1	88,2	25,6	50,2
Alumnos cuya respuesta es errónea	92,8	26,9	10,8	71,8	37,7
Alumnos que no contestaron	0,7	1	1	2,6	12,1

El examen de estos datos arroja como conclusión que los estudiantes poseen de la elipse una representación conceptual que se apoya exclusivamente en la percepción visual. En efecto, un 92,8% de los alumnos asegura que el óvalo es una elipse (item 2), lo cual es un error, y al mismo tiempo asegura que también la circunferencia "achatada" es una elipse (item 11), lo cual es correcto. En ambos casos, la percepción visual es muy semejante.

Esta misma percepción visual les lleva a excluir del concepto de elipse la curva del item 7 (dos arcos de circunferencia secantes). El resultado del item 19 parece corroborar la afirmación anterior pues la mayoría de los alumnos (71,8%) define la elipse como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro, definición esencialmente descriptiva que no caracteriza a las elipses.

Respecto al item 30, donde se proponía la definición de elipse a partir de la propiedad focal, no parece notable la diferencia entre las respuestas correctas y las erróneas, teniendo en cuenta el alto porcentaje relativo de alumnos que no contestaron; sería arriesgado concluir algún resultado general sobre el grado de intuición que poseen los alumnos de esta propiedad. No obstante, la prueba "ji-cuadrado", aplicada a las respuestas de este item y a las de los items 37 y 40 (donde se requería una aplicación de este concepto), da una dependencia significativa lo que indica la existencia real de un grupo de alumnos que posee este concepto.

CONCEPTO DE HIPERBOLA

Porcentajes de:	ITEMS:		
	8	**12**	**16**
Alumnos cuya respuesta es correcta	69,2	34,1	43,6
Alumnos cuya respuesta es errónea	27,9	53,4	49,8
Alumnos que no contestaron	2,9	12,5	6,6

Se aprecia, al analizar esta tabla, que más de 2/3 de alumnos rechaza la idea de la hipérbola como dos semicircunferencias enfrentadas (item 8), pero, en cambio, hay un equilibrio entre quienes piensan que se podría formar con dos semielipses y los que no (item 16). Las respuestas al item 12 parecen indicar que el concepto de hipérbola como sección cónica no es muy intuitivo pues más de la mitad de los alumnos no lo reconocen, pero ello puede deberse a la incomprensión de los conceptos implicados en la formulación del item (superficie cónica completa, hoja, etc.). Un apoyo visual en este item probablemente invertiría los porcentajes de respuestas correctas y erróneas y disminuiría el de los alumnos que no contestan, ya que estas respuestas están relacionadas con las emitidas en el item 37, que implicaba una transferencia de este concepto.

La concepción de la parábola como un arco de circunferencia prolongado por dos semirrectas es muy frecuente en los alumnos. Se observa un aumento de esa concepción cuando las semirrectas son tangentes a la circunferencia (item 6 e item 25) y una disminución cuando no lo son (item 18). Estos resultados, junto con el fuerte apoyo a la definición descriptiva e incompleta expresada en el item 35, corrobora una construcción mental generalizada de un concepto de parábola muy próximo a la representación perceptual.

CONCEPTO DE PARABOLA

Porcentajes de:	ITEMS: 6	18	25	27	35
Alumnos cuya respuesta es correcta	32,8	52,8	25,6	49,2	12,4
Alumnos cuya respuesta es errónea	65,2	46,2	73,1	37,7	84,3
Alumnos que no contestaron	2	1	1,3	13,1	3,3

El concepto matemático que se enuncia en el item 27 no parece evidente para la mayoría de los alumnos. Sin embargo, la relación significativa de las respuestas con las emitidas en los items 36 y 39, en los que se pedía una aplicación de ese concepto, asegura la existencia de un grupo de alumnos que ya lo posee.

ESTRUCTURAS CONCEPTUALES DE EQUIVALENCIA

Porcentajes de:	ITEMS: 36	37	38	39	40
Alumnos cuya respuesta es correcta	44,6	39,3	31,5	36,4	45,6
Alumnos cuya respuesta es errónea	38,4	40	45,9	42	31,1
Alumnos que no contestaron	17	20,7	22,6	21,6	23,3

Al examinar esta tabla, destaca, en primer lugar, el alto porcentaje de alumnos que no contestan a este grupo de items en comparación con todos los demás. Se observa, en segundo lugar, que no hay un predominio claro de aciertos o errores en ninguno de estos items. Estos dos factores nos inducen a conjeturar que no hay ninguna idea previa suficientemente extendida sobre las estructuras conceptuales que relacionan las cónicas entre sí, aunque existen relaciones significativas entre las respuestas dadas a todos estos items.

Propiedades de las cónicas

De la única cónica que los estudiantes poseen algún conocimiento sobre sus ecuaciones es la parábola. Así lo pusieron de manifiesto los resultados de la primera fase de la investigación, debido, como parece evidente, a que en los dos cursos anteriores han estudiado las gráficas de las funciones cuadráticas. En el cuestionario de la segunda fase propusimos varios items relacionados con este tema, cuyos resultados se expresan en la tabla siguiente:

ECUACIONES

Porcentajes de:	ITEMS:				
	10	22	34	31	32
Alumnos cuya respuesta es correcta	79,3	43,9	51,1	55,1	31,1
Alumnos cuya respuesta es errónea	18,4	43,9	34,7	36,7	62
Alumnos que no contestaron	2,3	12,2	13,8	8,2	6,9

Casi el 80% de los alumnos reconoce que la gráfica de la función $y = 3x^2$ es una parábola (item 10); en cambio, a pesar de que las respuestas están relacionadas con las del item 34, sólo el 51,5% reconoce que $x^2 = 2y$ (es decir, $y = 1/2\ x^2$) es la ecuación de una parábola (item 34). Este dato, junto con la dependencia de respuestas a los items 10 y 22 y el relativamente alto porcentaje de abstenciones en estos dos últimos items, nos indica que, aunque la mayoría de los alumnos *recuerdan* que la gráfica de una función del tipo $y = ax^2$ es una parábola, más de la tercera parte de ellos no son capaces de relacionar el concepto de fórmula de una función con el de ecuación de una curva o, lo que es lo mismo, no son capaces de ver en el mismo objeto matemático, $y = ax^2$, la equivalencia de las dos expresiones simbólicas: fórmula de una función y ecuación de una curva (la gráfica de esa función).

Sorprende también que, estando relacionadas las respuestas a los items 10 y 31, algo más de la tercera parte de los alumnos asegure que la gráfica de la función y = 1/x es una parábola (item 31); esto demuestra que no han asimilado el único concepto matemático de parábola que, de hecho, han *aprendido* en los dos cursos anteriores: "parábola" = "gráfica de una función cuadrática".

Finalmente, interesa remarcar que el 62% de los alumnos cree que una parábola no tiene infinitas ecuaciones no equivalentes entre sí (item 32). La explicación de este hecho, en nuestra opinión, es la siguiente: en la concepción que los estudiantes tienen de una parábola, aparece la idea de que es la gráfica de una función (item 35); como esta función viene dada por una única fórmula, esa parábola no puede tener infinitas ecuaciones.

Se investigó también si los alumnos *conocían* la unicidad de tangentes en un punto de una cónica así como otras propiedades (simetrías, longitud...) que aparecieron en la primera fase de la investigación. He aquí los resultados:

TANGENCIA Y OTRAS PROPIEDADES

Porcentajes de:	ITEMS:			
	17	**23**	14	**28**
Alumnos cuya respuesta es correcta	52,8	53,8	85,9	38
Alumnos cuya respuesta es errónea	38	40	12,1	58,7
Alumnos que no contestaron	9,2	6,2	2	3,3

Observamos la analogía en las contestaciones a los items 17 y 23, corroborada con la prueba "ji-cuadrado". De aquí se deduce que aproximadamente la mitad de los alumnos cree que sólo es posible trazar una tangente a una cónica en uno de sus puntos. Hay, sin embargo, un porcentaje relativamente alto (en torno al 40%) que piensa que pueden trazarse dos tangentes; esto significa que no es tan intuitiva la propiedad de la unicidad como podría imaginarse.

En cuanto a la longitud de la parábola (item 14), la gran mayoría de los alumnos (85,9%) asegura que es infinita, propiedad derivada de la propia dinámica de la representación. Algo más de la mitad piensa que esta curva tiene centro de simetría (item 28) y la explicación hay que buscarla en que estos estudiantes no conocen de modo significativo el concepto de simetría respecto a un punto y lo confunden con simetría respecto a un eje, como se pone de manifiesto al comparar con la definición de parábola aceptada por el 84,3% en el item 35 ("curva abierta *simétrica* e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función"), definición que fue confeccionada a partir de los datos obtenidos en la primera fase de la investigación, en la que la propiedad de simetría (sin más precisión) fue aplicada abundantemente a todas las cónicas.

Sobre la presencia de las cónicas en la realidad nos preocupamos ya en la primera fase de la investigación y, a partir de los datos allí obtenidos, confeccionamos algunos items de este cuestionario con el fin de precisar más las conclusiones.

He aquí los resultados:

LAS CONICAS EN LA REALIDAD

Porcentajes de:	ITEMS:							
	13	**21**	**15**	**26**	**18**	**25**	**24**	**33**
Alumnos cuya respuesta es correcta	52,1	57	79,7	62	52,8	25,6	18,7	17,7
Alumnos cuya respuesta es errónea	45,3	39	19,7	35,7	46,2	73,1	79,3	79,7
Alumnos que no contestaron	2,6	4	0,6	2,3	1	1,3	2	2,6

Observamos, en primer lugar, que algo más de la tercera parte de los alumnos asegura que las hipérbolas no aparecen en objetos o fenómenos reales (item 21) y casi la mitad afirma que las únicas elipses que existen en la realidad son las órbitas de los planetas alrededor del sol y las de algunas partículas atómicas alrededor del núcleo (item 13).

Este último resultado contrasta con el obtenido en los items 24 y 33 donde casi el 80% de los alumnos mantiene que los huevos de gallina tienen forma de elipsoide y los melones forma de elipse. Como el item 13 estaba colocado delante de éstos, esta contradicción indica, más que una incoherencia en el pensamiento de los estudiantes, una falta de reflexión al contestar el item 13. Por otro lado, se aprecia una imprecisión en la representación mental de la forma del huevo y una confusión (posiblemente sólo expresiva) entre las formas planas y las formas espaciales ("melón = elipse" en vez de "melón = elipsoide").

El análisis de los items 15 y 26 pone de manifiesto que la mayoría de los alumnos rechaza el modelo medieval de trayectoria de una bala y acepta la trayectoria parabólica; sin embargo, hay un 20% de alumnos que acepta todavía el modelo medieval y un 35% que no reconoce las trayectorias parabólicas del balón. En estos alumnos, prevalece aún la idea previa, como ya han constatado muchos estudios sobre este tema en relación con la mecánica y la dinámica.

La percepción de una horquilla del pelo y de la zona de una cancha de baloncesto como sendas parábolas ya fue comentada anteriormente (items 18 y 25).

4.2.3. Conclusiones

Aplicando la escala de niveles de conocimiento en geometría de Van Hiele (1958, 1986), podemos afirmar que, al empezar el estudio sistemático de las cónicas en 3º de BUP, la mayoría de los estudiantes se encuentra entre el Nivel 0 y el Nivel 1, es decir, reconocen y diferencian globalmente las figuras de estas curvas y, de cada una de ellas, pueden emitir alguna propiedad particular establecida de modo perceptivo. Por ejemplo, la mayoría de los estudiantes asegura que las formas de una elipse, de una hipérbola y de una parábola son, aproximadamente, las reflejadas en la figura 1. Reconocen, asimismo, que todas son curvas planas y simétricas, que la longitud de la parábola es infinita y que la elipse es cerrada.

La mayor parte del conocimiento que poseen los alumnos sobre las cónicas es de tipo *físico* y *social* pero no *lógico-matemático* en el sentido que da Piaget a estos términos, pues solamente han

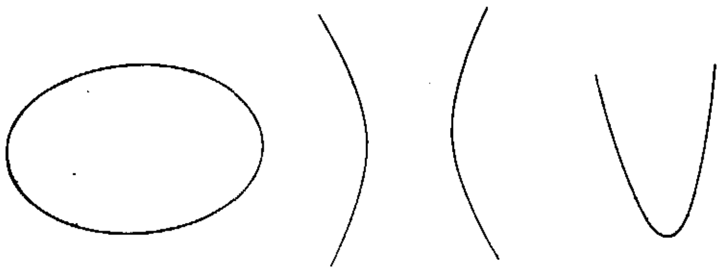


Fig. 1

realizado una abstracción empírica (conocimiento físico) y han asignado a esas curvas el nombre convencionalmente aceptado en el entorno socio-cultural (conocimiento social). Como consecuencia, las definiciones de elipse, hipérbola y parábola, aceptadas de modo casi unánime, están constituidas por una sucesión de propiedades obtenidas perceptualmente que intentan describir por exhaustión la *forma* de la curva. Por ejemplo:

– Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro.

– Una parábola se define como una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función.

Poseen también algunos conocimientos que, sin salirse del dominio del pensamiento perceptivo, se aproximan al lógico-matemático porque son fruto del establecimiento de alguna relación. Así, por ejemplo, la mayoría reconoce que, al "achatar" una circunferencia (transformación afín), se obtiene una elipse.

Entre las principales ideas previas *correctas* que hemos detectado, las siguientes nos parecen las más interesentes:

1. *Al "achatar" una circunferencia se obtiene una elipse (fig. 2).*

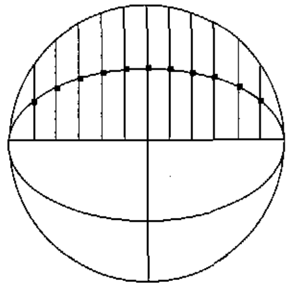


Fig. 2

2. *Dos arcos de circunferencia secantes de igual radio, como los de la figura 3, no constituyen una elipse.*

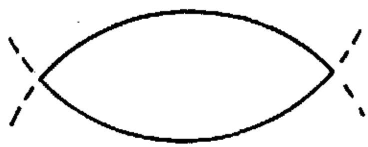


Fig.3

Estas dos ideas, que están muy extendidas (82,2% y 72% respectivamente), expresan de modo claro una transición del pensamiento perceptivo al conceptual ya que relacionan circunferencias con elipses; como además son correctas, pueden y deben ser utilizadas para construir el concepto matemático de elipse.

3. *Dos arcos de circunferencias exteriores de igual radio, como los de la figura 4, no forman una hipérbola.*

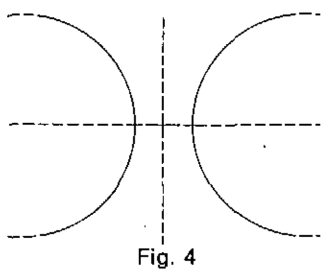


Fig. 4

4. *La gráfica de la función $y = ax^2$ es una parábola.*

Esta es una idea cuyo origen debe buscarse en los conocimientos acumulados durante los dos cursos anteriores en los cuales se asignó el nombre de parábola a la gráfica de una función cuadrática. Este aprendizaje, sin embargo, no se transfiere de modo espontáneo a estas dos situaciones:

a) Reconocimiento de que $x^2 = 2y$ es la *ecuación* de una parábola cuyo eje coincide con el eje de ordenadas.

b) Reconocimiento de que $y^2 = 2x$ es la *ecuación* de una parábola cuyo eje coincide con el eje de abscisas.

Se manifiesta aquí una de las características que Driver (1988) atribuye a las ideas previas: el razonamiento está ligado a un contexto específico, es decir, situaciones que pueden ser vistas como idénticas o similares desde un punto de vista científico, pueden ser interpretadas por los estudiantes como diferentes e inconexas. En nuestro caso, para los alumnos, $y = ax^2$ es la *fórmula* de una *función,* pero no es la *ecuación* de una *curva* (inconexión entre el dominio del análisis y el de la geometría), es decir, no han construido la estructura conceptual que recoge el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \text{Fórmula} & \rightarrow & \text{gráfica} \\ \uparrow\downarrow & & \downarrow\uparrow \\ \text{Ecuación} & \rightarrow & \text{curva} \end{array}$$

Las ideas previas *erróneas* más importantes, a nuestro juicio, serían las siguientes:

1. *Un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia, como el de la figura 5, es una elipse.*

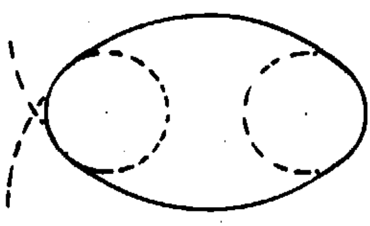


Fig. 5

2. *Un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes en sus extremos, como muestra la figura 6, forman una parábola.*

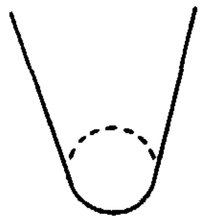


Fig. 6

3. *Todas las cónicas pueden dibujarse perfectamente empleando sólo la regla y el compás.*

Esta última idea y las dos anteriores, que son una aplicación de ella, además de ser la manifestación de un pensamiento perceptivo, pueden estar motivadas, entre otros factores, por la influencia de las construcciones geométricas que, de éstas y de otras curvas, hicieron los estudiantes en la asignatura de dibujo, construcciones que, evidentemente, carecieron de un aprendizaje significativo. En cualquier caso, se trata de ideas previas erróneas bastante extendidas, sobre todo la primera que abarca al 92% de los alumnos y que se detecta también con mucha frecuencia en estudiantes universitarios de ciencias y adultos en general. Esto pone de manifiesto una de las características anteriormente señaladas: la resistencia al cambio que poseen las ideas previas. En el apartado siguiente nos ocuparemos de las implicaciones didácticas de esta situación.

4. *Los tres tipos de cónicas (elipse, hipérbola y parábola) son independientes, no guardan ninguna relación estructural entre sí, ni directa ni indirecta (a través de un elemento externo como podría ser una superficie cónica).*

5. *Una parábola (y, en general, cualquier curva) no es un objeto geométrico independiente del sistema de referencia; por el contrario, primero existe el sistema de referencia como algo dado '**a priori**' y después la curva completamente **encadenada** a él; esto impli-*

ca que una curva no tiene infinitas ecuaciones dependiendo del sistema escogido sino una sola.

6. *Pueden trazarse dos tangentes distintas en cada punto de una cónica.*

Esta idea, aunque sólo es sostenida por el 40% de los estudiantes, debe ser tenida en cuenta, al igual que las dos anteriores, a la hora de diseñar materiales didácticos o planificar una acción educativa verdaderamente eficaz.

7. *En general, los alumnos perciben que las cónicas están poco conectadas con la realidad y los pocos casos en que advierten su presencia tienen características singulares:*

– *las órbitas de los planetas o de las partículas atómicas (aunque la mayoría reconoce que son elipses, se trata, sobre todo, de un conocimiento social),*

– *la zona de una cancha de baloncesto (es percibida erróneamente como una parábola por la mitad de los estudiantes),*

– *la trayectoria de un objeto en tiro oblicuo (una tercera parte de los alumnos no la concibe como una parábola),*

– *los huevos de gallina (el 80% de los estudiantes asegura que tienen forma de elipsoide),*

– *las horquillas del pelo (el 73% de los estudiantes está de acuerdo en que se trata de una parábola).*

4.3. Implicaciones didácticas

El análisis que hemos realizado en los apartados anteriores sobre los conocimientos previos y las concepciones erróneas de los estudiantes acerca de las cónicas tenía como objetivo orientar la elaboración de los materiales didácticos que van a ser utilizados por alumnos y profesores en la experimentación de las dos metodologías que deseamos comparar. Enumeramos, a continuación, algunas implicaciones didácticas que se derivan de este análisis y que, por lo tanto, deben tenerse en cuenta al diseñar las situaciones de aprendizaje y las estrategias de enseñanza.

En primer lugar, al elaborar las actividades para el aprendizaje de los conceptos de elipse, hipérbola y parábola, hay que aprovechar simultáneamente las ideas previas correctas y las erróneas.

Por ejemplo, en el aprendizaje del concepto de elipse, deben facilitarse experiencias en las cuales intervengan el "achatamiento" de una circunferencia (idea previa correcta) y el óvalo de cuatro centros (idea previa errónea). También deben integrarse los tres conceptos, de modo que se aprecien sus interrelaciones estructurales y se superen las definiciones descriptivas (colección de atributos físicos irrelevantes). Sin embargo, teniendo en cuenta que muchos alumnos no discriminan lo que es una demostración matemática ni la valoran, sería conveniente aprovechar las estructuras conceptuales no evidentes que envuelven a las cónicas para hacer sentir la necesidad de una argumentación que gradualmente se aproxime al rigor y al formalismo de la demostración matemática. A esto contribuiría, sin duda, la propuesta de problemas en los que los estudiantes tuvieran que emitir una conjetura y, luego, ante la diversidad de respuestas, tuviesen que refutarla o demostrarla.

En los conceptos deben basarse las construcciones de las cónicas, tanto las aproximadas como las exactas, realizadas con distintos métodos mecánicos. En todos los casos hay que diferenciar unas de otras y justificarlas siempre. Señalemos, una vez más, que la convicción de que todas las cónicas pueden dibujarse perfectamente utilizando sólo la regla y el compás es una de las concepciones erróneas más extendidas y persistentes.

El aprendizaje de algunos algoritmos puede presentar dificultades debidas a las deficiencias en los conocimientos previos. Así, por ejemplo, la determinación de la ecuación de una elipse (o de una hipérbola) requiere eliminar raíces cuadradas, procedimiento que, como hemos visto, es dominado por muy pocos alumnos. Lo mismo sucede con el trazado y las ecuaciones de las tangentes a las cónicas que requieren el conocimiento del trazado y las ecuaciones de las bisectrices, algoritmos que pueden ser ignorados por más de la mitad de los alumnos. Deben proponerse también problemas y ejercicios en los que el alumno tenga que elegir un sistema de referencia y *moverlo* para que, de este modo, comprendan la *relatividad* tanto de los sistemas como de las ecuaciones de los objetos geométricos.

El descubrimiento de la presencia de las cónicas en la realidad debe constituir un importante objetivo de aprendizaje dada la concepción generalizada de que las cónicas están desconectadas del mundo real. Y sería importante conseguir esto desde las primeras situaciones de aprendizaje y no sólo al final del proceso como "aplicaciones" de estructuras conceptuales o algoritmos previamente tratados de un modo absolutamente abstracto.

La abundancia y la variedad de problemas se hace imprescindible para adquirir riqueza y soltura en el uso de las estrategias heurísticas al mismo tiempo que se ponen en juego o se descubren estructuras conceptuales cuya asimilación, de este modo, se verá reforzada. Debe vigilarse la tendencia de los estudiantes a añadir *supuestos* que no figuran en los enunciados de los problemas ni pueden deducirse de sus datos, comportamiento bastante frecuente como se ha visto en el análisis efectuado anteriormente.

CAPITULO 5

ELABORACION DE LOS MATERIALES DIDACTICOS

Introducción

En el capítulo anterior hemos analizado los conocimientos previos y las concepciones erróneas más frecuentes de los estudiantes de 3º de BUP acerca de las cónicas. Este análisis repercutirá en todo el proceso de elaboración de los materiales didácticos de cuyas fases nos ocuparemos en este capítulo: formulación de objetivos didácticos, selección de contenidos, diseño inicial de los materiales, experimentación piloto y elaboración definitiva. Creemos que una meta importante de este trabajo es, precisamente, proporcionar al profesorado unos materiales didácticos que, respetando el currículum escolar y el ambiente real de las aulas, representen, sin embargo, posibles alternativas, debidamente contrastadas, a su práctica instructiva habitual. En este sentido, nos parece sustancial esta etapa del desarrollo general de la investigación que nos ocupa.

5.1. Formulación de los objetivos didácticos

En torno a los objetivos se ha generado una polémica teórica y práctica sobre su conveniencia, su utilidad, sus taxonomías, tanto horizontales como verticales, los procesos formativos que implican (finalizados o abiertos), sus funciones, etc. Las opiniones de los especialistas se decantan en posturas más o menos enfrentadas (a favor o en contra) con más o menos matizaciones. Stenhouse (1987), por ejemplo, uno de los críticos más duros, piensa que el modelo de objetivos no es la mejor base para el desarrollo del profesor pero puede incrementar la claridad de su intención aunque hacen poco o nada por mejorar su calidad. Zabalza (1987, p. 90) opina que lo fundamental es que los objetivos sirvan para lo que deben servir: ser una ayuda para desarrollar con mayor calidad y eficacia el proceso educativo. Lo demás se refiere tan sólo a diversas modalidades o técnicas de consecución de dicho propósito. Si la técnica que uno utiliza le sirve para hacerse cargo, para expresar su proyecto, es sin duda adecuada. Si, por el contrario, a base de introducir matices y superponer un tipo de objetivo al otro (fines generales, intermedios, específicos, tareas, metas conductuales, operativas, etc.) se acaba sin saber realmente lo que se pretende hacer, sin estar de acuerdo con la concreción que la idea inicial ha tenido en ese esquema interminable de objetivos, o sin saber cómo usarlo, el esquema puede ser perfecto, totalmente adecuado a la normativa de tal o cual autor, pero deja de servir, es inútil, puesto que no clarifica la propia idea educativa ni sirve para comunicársela a los demás . Nuestra posición es la de asignar a los objetivos una función clarificadora del proceso educativo, ya que sirven para iluminarlo, para explicitar lo que se desea hacer y el tipo de resultados a los que se quiere llegar; deben expresarse con un grado de concreción razonable entre una formulación general y una formulación puramente operativa.

Con esta concepción, y teniendo en cuenta los análisis efectuados en el capítulo anterior, así como los temarios y las orientaciones metodológicas de la legislación vigente (B.O.E. 18-4-75, p. 8.065), formulamos a continuación los objetivos de nuestra unidad didáctica siguiendo al modelo taxonómico de los campos de aprendizaje de Gagné (Rodríguez Diéguez, 1980) que, además, se ajusta muy bien al modelo propuesto por el Informe Cockcroft (1985, párrafo 240) para el caso específico de la educación matemática (ver apartado 1.4.).

Información

Este campo abarca todos los conocimientos de hechos, conceptos, estructuras conceptuales, principios, etc., que pueden expresarse verbalmente y que, generalmente, pueden transmitirse de ese modo:

I_1: Distinguir los conceptos de elipse, hipérbola y parábola como secciones cónicas.

I_2: Aplicar los conceptos de elipse y de hipérbola como lugares geométricos planos basados en la propiedad focal.

I_3: Aplicar el concepto de parábola como lugar geométrico plano basado en la propiedad foco-directriz.

I_4: Identificar los conceptos de elipse, hipérbola y parábola como envolventes.

I_5: Relacionar entre sí todos los conceptos anteriores mediante analogías, diferencias, implicaciones, equivalencias, etc.

I_6: Relacionar los elementos más notables de las cónicas (focos, directrices, ejes, centro, excentricidad, constante de definición, parámetro, vértices, radios vectores, etc.).

I_7: Comparar las ecuaciones cartesianas reducidas de las cónicas.

I_8: Identificar la propiedad de la tangente a una cónica en un punto y su relación con el concepto de asíntota en el caso de la hipérbola.

I_9: Reconocer la presencia de las cónicas en la realidad: sombras de objetos esféricos, zonas iluminadas por algunas lámparas, trayectorias, puentes, ventanas, edificios, etc.

Habilidades intelectuales

Esta categoría abarca las aptitudes, reglas o procedimientos para realizar tareas de carácter intelectual que, en el caso de las matemáticas, se concretan fundamentalmente en ciertas rutinas o algoritmos:

H_1: Diferenciar el tipo de curva a partir de su ecuación cartesiana reducida.

H_2: Identificar los elementos más notables de una cónica a partir de su ecuación cartesiana reducida.

H_3: Determinar la ecuación cartesiana de una circunferencia conocidas las coordenadas del centro y el radio.

H_4: Determinar la ecuación cartesiana reducida de una elipse o una hipérbola conocidos sus dos ejes, o un eje y la distancia focal.

H_5: Determinar la ecuación cartesiana reducida de una parábola conocido su parámetro.

Habilidades psicomotrices

Las habilidades psicomotrices son destrezas o capacidades que intervienen en las actuaciones de un comportamiento motor organizado, de manera que su consecución requiere práctica, en el sentido de repetición del acto motor principal; éstas son las que se desarrollarán en esta unidad didáctica:

P_1: Trazar las cónicas con algún método mecánico preciso conocidas sus ecuaciones cartesianas reducidas o algunos de sus elementos característicos.

P_2: Dibujar las cónicas a mano alzada a partir de su ecuación cartesiana reducida o alguno de sus elementos característicos.

P_3: Construir las cónicas como envolventes (por plegado de papel, con regla y compás, con hilos, etc.).

P_4: Trazar con regla y compás la tangente a una cónica en un punto conocido el dibujo de la curva con sus elementos característicos.

Estrategias cognitivas

Estrechamente ligadas con las habilidades intelectuales, las estrategias cognitivas son capacidades que gobiernan el aprendizaje del individuo, su retentiva y su conducta de pensar (Gagné, citado por Rodríguez Diéguez, 1980, p. 60). El campo de acción de estas estrategias no está vinculado a ningún conocimiento específico pues se trata de procedimientos generales de aprendizaje, de memorización y de pensamiento en cualquier ámbito. Han sido objeto de numerosos estudios e investigaciones, tanto en psicología como en pedagogía, ya que su desarrollo en los alumnos incide directamente en la cantidad y en la calidad de su aprendizaje. Entre ellas, figuran las estrategias heurísticas (o simplemente, heurísticas) que son procedimientos no algorítmicos que guían la resolución de un problema, la búsqueda de relaciones conceptuales o el desarrollo de una demostración. En esta unidad, los estudiantes desarrollarán las siguientes (Polya, 1965; Newell y Simon, 1972; Schoenfeld, 1979, 1983 y 1985; Bransford y Stein, 1986):

E_1: Representar y organizar la información mediante un dibujo o mediante símbolos.

E_2: Elegir un sistema de referencia.

E_3: Formular una conjetura plausible y después someterla a una evaluación: prueba o refutación (buscar contraejemplos).

E_4: Buscar un problema análogo ya resuelto (o más fácil) o una propiedad análoga ya conocida.

E_5: Analizar casos particulares y luego generalizar; reconocer y generalizar patrones o tendencias.

E_6: Subdividir el problema:

- restringiendo o ampliando las condiciones,
- reduciendo las variables o la dimensión.

E_7: Suponer resuelto el problema; empezar desde el final.

E_8: Buscar los datos que harían falta para resolver el problema.

E_9: Analizar si puede haber otras soluciones.

E_{10}: Recurrir a las definiciones o a las ecuaciones de los objetos geométricos.

E_{11}: No hacer supuestos que no están expresados en los datos del problema o en las hipótesis.

Actitudes

Las actitudes son instancias que predisponen y dirigen sobre los hechos de la realidad y representan una síntesis personal que filtra las percepciones y orienta el pensamiento, facilitando la adaptación de la persona al contexto. Por ello, la atención pedagógica a las actitudes se constituye en un proceso de interés central para la educación siempre que aspire a transformaciones permanentes en la persona. Estas son las que se pretenden generar en esta unidad didáctica:

A_1: Sensibilidad para reconocer la presencia de las cónicas en la realidad circundante (naturaleza, ciencia, arte, juegos, técnica...).

A_2: Reconocimiento de la importancia de expresarse con un lenguaje preciso y claro, exento de ambigüedades, y deseo de hacerlo así.

A_3: Tendencia a revisar y comprobar los procesos resolutivos, las demostraciones, los desarrollos algorítmicos, etc.

A_4: Tenacidad y perseverencia en la búsqueda de soluciones y conciencia de que esta tarea no es inútil.

A_5: Autoestima y confianza en las propias capacidades.

A_6: Actitud crítica ante figuras que pudieran representar alguna sección cónica.

A_7: Apreciación de la belleza que encierra la geometría de las cónicas con sus múltiples relaciones y aplicaciones.

A_8: Curiosidad e interés por resolver problemas y promover investigaciones.

A_9: Actitud dialogante, escuchando y respetando las argumentaciones de los demás y asumiéndolas por convencimiento cuando sean correctas.

A_{10}: Reconocimiento y valoración justa del trabajo en grupo.

A_{11}: Cautela y actitud crítica frente a cualquier proposición no demostrada.

A_{12}: Valoración positiva de la geometría y de las matemáticas en general.

A_{13}: Conciencia de la relatividad de cualquier enunciado pues siempre depende del *sistema de referencia* (axiomas, creencias, hipótesis, paradigmas...) en que se sustenta.

5.2. Selección de contenidos instructivos

Rodríguez Diéguez (1980), rastreando la bibliografía sobre el currículum, establece como criterios para la selección de contenidos la validez, la significación y la adecuación. Define la *validez* como la conexión entre el contenido y los objetivos a los que se pretende llegar, en nuestro caso, los objetivos formulados en el apartado anterior.

El segundo criterio de selección de contenidos, la *significación,* condiciona lo que se pretende enseñar a que sea sistemático, actual, veraz y centrado en un área de conocimientos bien delimitada. Esta significación científica debe completarse con una significación vital, es decir, que el contenido seleccionado solucione un problema planteado al alumno por su contexto. La significación científica, en el caso de las matemáticas, es relativamente fácil de conseguir dejándose guiar por la propia estructura de la ciencia; en cambio, elegir contenidos significativos vitalmente para el alumno es una tarea bastante más difícil. El problema real que tiene planteado es, fundamentalmente, su preparación para la vida adulta, para el trabajo y, en muchos casos, para los estudios superiores. Pero, ¿qué contenidos le sirven mejor para resolver este problema? La respuesta no es fácil y, desde luego, en modo alguno universal. Se impone, por lo tanto, tomar una opción: seleccionar aquellos contenidos que

– den una visión integradora de los aspectos teóricos y prácticos de las matemáticas;

– sirvan para desarrollar habilidades intelectuales, estrategias cognitivas y actitudes que faciliten tanto los estudios posteriores como la integración en el mundo laboral.

En tercer criterio general citado por Rodríguez Diéguez es la *adecuación* de los contenidos a la mentalidad y los intereses de los alumnos. Ello implica que deben tenerse en cuenta las características psicológicas del alumnado (desarrollo, conocimientos e intereses) para seleccionar unos contenidos idóneos.

Teniendo en cuenta estos tres criterios, hemos seleccionado las siguientes unidades de contenido:

1. Concepto y clasificación (afín) de las secciones cónicas.

2. La elipse como lugar geométrico basado en la propiedad focal. Equivalencia con el concepto basado en la sección cónica.
Trazado de la elipse.
Elementos notables de la elipse. Relaciones.

3. La hipérbola como lugar geométrico basado en la propiedad focal. Equivalencia con el concepto basado en la sección cónica.
Trazado de la hipérbola.
Elementos notables de la hipérbola. Relaciones.

4. La parábola como lugar geométrico basado en la propiedad foco-directriz. Equivalencia con el concepto basado en la sección cónica.
Trazado de la parábola y elementos notables.

5. Ecuación cartesiana general y reducida de la circunferencia.

6. Ecuación cartesiana reducida de la elipse.

7. Ecuación cartesiana reducida de la hipérbola.

8. Ecuación cartesiana reducida de la parábola.

9. Las cónicas en la realidad: usos independientes de la propiedad tangencial.

10. Las cónicas como envolventes. Construcción. Equivalencia con alguno de los otros conceptos (sección cónica o lugar geométrico).

11. Propiedad de la tangente a una cónica en un punto. Trazado de la tangente. Asíntotas de la hipérbola.

12. Las cónicas en la realidad: usos debidos a la propiedad tangencial.

5.3. Elaboración de los materiales didácticos

Ya hemos mencionado antes que la elaboración de los materiales didácticos trasciende al lugar que ocupa dentro de la investigación educativa que estamos desarrollando, puesto que estos materiales, por sí mismos, constituyen un instrumento valioso para cuantos profesores quieran emplearlos en sus aulas como alternativa posible y contrastada, a su labor instructiva habitual. En consecuencia, nos tomamos con especial interés el diseño de estos materiales teniendo en cuenta siempre los objetivos y contenidos que acabamos de explicar, las características generales de las dos metodologías (descritas en el capítulo 2) y los resultados de la prospección sobre los conocimientos previos y las concepciones erróneas (capítulo 4). Empleamos tres etapas:

- diseño inicial (octubre 1987-marzo 1988)
- experimentación piloto (abril 1988-junio 1988)
- elaboración definitiva (julio 1988-septiembre 1988).

Antes de describir los materiales didácticos en la versión definitiva, vamos a comentar los ajustes que se produjeron en el diseño inicial a partir de su experimentación piloto. Esta experimentación, realizada por dos grupos de alumnos (75 alumnos en total) de dos centros distintos (uno de Salamanca y otro de Zamora), nos sirvió, sobre todo, para comprobar la adecuación de los materiales diseñados a la situación educativa real y perfilar algunos de sus aspectos (temporalización, lenguaje, ubicación de las puestas en común, respuesta de los alumnos, etc.). En general, observamos que la secuenciación de contenidos y, por lo tanto, de las actividades, era correcta en las dos metodologías. No obstante, decidimos separar en dos bloques los contenidos relacionados con la presencia de las cónicas en la realidad, adelantando aquellos aspectos que no dependían de la propiedad tangencial con el fin de presentar a los alumnos ejemplos prácticos y aumentar con ello su motivación.

Comprobamos que, para una duración entre 18 y 20 clases, no era posible aumentar los contenidos seleccionados con algunos otros que, desde una perspectiva puramente matemática, podían ser interesantes. Por el contrario, para ajustarnos a esa duración, tuvimos que eliminar algunas actividades de refuerzo algorítmico y reducir el tiempo dedicado a otras de carácter manipulativo, aquéllas encaminadas a la construcción de modelos. Decidimos construir nosotros esos modelos y dejárselos a los alumnos una vez que ellos habían iniciado la tarea y comprendían su proceso.

Algunos dibujos no eran suficientemente expresivos y hubo que hacerlos de nuevo. El lenguaje de algunas actividades tampoco era demasiado unívoco, los alumnos no comprendían exactamente lo que tenían que hacer y tuvimos que redactarlo de modo más preciso.

El cambio más significativo se produjo en los tres problemas que, en la metodología basada en la resolución de problemas, conducen al descubrimiento de la estructura conceptual de cada cónica (problemas 3, 6 y 8 de la versión definitiva que se presenta en el *Anexo*). En estos problemas, después de las actividades exploratorias (alguna de las cuales también hubo que cambiarla para facilitar el proceso de evaluación de conjeturas), se proponían a los alumnos preguntas como las siguientes:

"En los experimentos anteriores han surgido curvas que *parecen* elipses, pero ¿son realmente elipses? ¿Qué es, con precisión, una elipse? ¿Qué propiedad tienen *todos* los puntos de una elipse? ¿Cómo podemos distinguir, perfectamente, sin lugar a dudas, una elipse de otra curva?"

Nuestro propósito era que los estudiantes, a partir de su idea intuitiva de elipse, al tratar de aplicarla a esas situaciones, descubrieran una propiedad caracterizante y formularan la correspondiente definición. En cambio, su comportamiento fue recurrir al libro de texto y responder, sin más, con la definición que allí se daba y sus equivalentes tautológicos, olvidándose, además, de contestar a la pregunta más importante –¿son realmente elipses?– con la cual se pretendía provocar el proceso de evaluación de conjeturas. Ante esta situación optamos por introducir en el enunciado la definición de elipse como lugar geométrico y concretar el problema en la tarea de evaluar las conjeturas formuladas sobre cada una de las curvas obtenidas en las experiencias que allí se proponían. De este modo se consiguió que el problema sirviera realmente para lo que había sido concebido: la construcción de la estructura conceptual que hace equivalentes los conceptos de elipse como lugar geométrico, como sección cónica y como circunferencia transformada por una afinidad.

También sirvió esta experiencia para probar los instrumentos que iban a ser empleados para medir los rendimientos de los alumnos, especialmente la prueba de resolución de problemas, que más adelante describiremos (apartado 6.3).

Finalmente, esta experiencia piloto fue útil para que, al menos, dos de los cuatro profesores que participaron en la experiencia definitiva se entrenaran ampliamente en el empleo de estas metodologías, sobre todo, la basada en la resolución de problemas que puede resultar difícil de realizar. Los otros dos profesores también asistieron a algunas de las clases y discutieron con los demás sus observaciones. Entre todos reconocimos cuáles eran los momentos más idóneos para ubicar las puestas en común y nuestras conclusiones quedan sugeridas en las correspondientes *Guías del profesor* que, junto con los *Libros del alumno,* constituyen la versión definitiva de los materiales didácticos.

5.3.1. Materiales didácticos correspondientes a la primera metodología

Este material consta de un *Libro del alumno* y una *Guía del profesor*. El *Libro del alumno* está formado por un guión de actividades cuidadosamente planificadas según la metodología descrita en la primera parte entre las cuales se intercalan breves informaciones o comentarios. Las actividades, escritas en letra cursiva, numeradas y con un espacio en blanco para que los estudiantes anoten en él sus resultados, son de distintos tipos: Exploraciones, manipulaciones, elaboración de definiciones, razonamientos dirigidos, generalizaciones y analogías, corregir y/o completar cálculos, evaluación de conjeturas, ejercicios algorítmicos, problemas de determinación, problemas de demostración y problemas de descubrimiento de propiedades. Estos tipos de actividades se distribuyen a lo largo de todo el guión ajustándose a las fases de la metodología descritas con detalle en el apartado 2.1.2.

La secuencia de contenidos, actividades que los desarrollan y objetivos que se desean alcanzar se muestran en la tabla de las páginas siguientes. Esta secuencia ha sido elegida por criterios didácticos: ideas previas de los alumnos, accesibilidad desde ellas a los nuevos conceptos y facilidad en la evaluación de conjeturas. Tal vez, desde la propia estructura interna de las matemáticas, el orden debiera ser otro, pero, para el aprendizaje de las mismas, un trasvase automático de esas cadenas puede ser funesto.

TABLA DE INTEGRACION

CONTENIDOS	ACTIVIDADES	Información
1. Concepto y clasificación (afín) de las secciones cónicas.	1.1, 1.2, 1.3	I_1, I_5, I_9
2. La elipse como lugar geométrico basado en la propiedad focal. Equivalencia con el concepto basado en la sección cónica	1.4, 1.10, 2.6	I_2, I_5
Trazado de la elipse	1.5, 1.9, 1.10, 2.8, 2.9	
Elementos notables de la elipse. Relaciones	1.6, 1.7, 1.8, 1.9,2.8	I_6
3. La hipérbola como lugar geométrico basado en la propiedad focal. Equivalencia con el concepto basado en la sección cónica	1.11, 1.14, 2.10	I_2, I_5
Trazado de la hipérbola	1.12, 1.14, 2.11	
Elementos notables de la hipérbola. Relaciones	1.13, 2.11	I_6
4. La parábola como lugar geométrico basado en la propiedad foco-directriz. Equivalencia con el concepto basado en la sección cónica	1.15, 1.17, 2.12	I_3, I_5
Trazado de la parábola y elementos notables	1.16, 1.17	I_6
5. Ecuación cartesiana general y reducida de la circunferencia	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.9, 2.14, 3.7	I_2, I_5
6. Ecuación cartesiana reducida de la elipse	1.10, 2.6, 2.7, 2.8 2.9, 2.14, 3.2, 3.5	I_7, I_6
7. Ecuación cartesiana reducidad de la hipérbola	1.14, 2.10, 2.11, 2.14, 3.2	I_7, I_6
8. Ecuación cartesiana reducida de la parábola	1.17, 2.12, 2.13, 2.14, 3.2, 3.6	I_7, I_6
9. Las cónicas en la realidad: usos idependientes de la propiedad tangencial	1.1, 1.3, 1.10, 1.14, 1.17, 2.14, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4	I_9, I_5
10.Las cónicas como envolventes. Construcción. Equivalencia con alguno de los otros conceptos (sección cónica o lugar geométrico)	3.8, 3.11	I_4, I_5
11.Propiedad de la tangente a una cónica en un punto. Trazado de la tangente. Asíntotas de la hiérbola	3.9, 3.10, 3.12 3.13, 3.14	I_8
12.Las cónicas en la realidad: usos debidos a la propiedad tangencial	3.15, 3.16, 3.17	I_9

(PRIMERA METODOLOGIA)

OBJETIVOS

Habili. Intelec.	Habili. psicomotrices	Estrate. cognitivas	Actitudes
		E_3, E_{10}	A_1, A_6, A_9
H_2	P_1	E_7, E_8, E_{11} E_8 E_5, E_{10}	A_1, A_2, A_3, A_{11} A_1, A_6, A_9 A_9, A_{10}
H_2	P_1	E_3, E_4 E_4, E_{10} E_3, E_1	A_4, A_8, A_{11} A_5, A_{12}, A_9 A_3, A_{10}
H_2	P_1	E_{11}, E_4, E_2 E_{10}, E_8	A_2, A_3, A_{13} A_9, A_5
H_1, H_2, H_3	P_2	E_1, E_2, E_3, E_5, E_9	A_1, A_4, A_{13}
H_1, H_2, H_4	P_2	E_2, E_5, E_6	A_3, A_5, A_{13}
H_1, H_2, H_4	P_2	E_2, E_8	A_6, A_7, A_9
H_1, H_2, H_5	P_2	$E_1, E_4, E_5, E_3, E_{10}$	A_8, A_{12}, A_{13}
H_4, H_5		E_1, E_2, E_3, E_4, E_6	A_1, A_2, A_7, A_{12}
	P_3	E_3, E_4	A_3, A_6, A_{10}
	P_4	E_1, E_4, E_3, E_{11}	A_4, A_5, A_{11}
		E_1, E_2, E_7, E_9	A_1, A_8, A_{12}

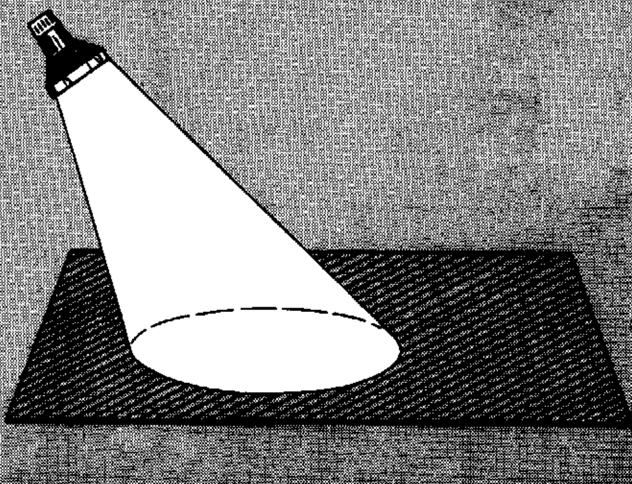
A continuación presentamos, a modo de ejemplo, las actividades que se refieren a la enseñanza de la estructura que hace equivalentes los conceptos de elipse como sección cónica y como lugar geométrico basado en la propiedad focal.

ACTIVIDADES DEL ALUMNO (PRIMERA METODOLOGIA)

1. *Entre las primeras curvas descubiertas y analizadas por los griegos figuran las elipses, las hipérbolas y las parábolas. Como tú ya tienes una cierta idea intuitiva sobre la forma de estas curvas, a continuación aparecerán 9 curvas y tú vas a decidir, apoyándote en esa idea, qué tipo de curva es cada una:*

CURVA I

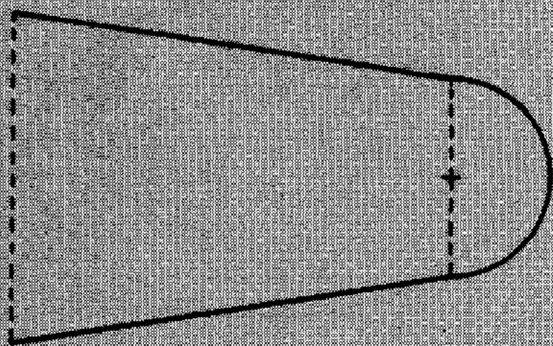
Imagina que, con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminas una hoja de papel con una inclinación parecida a la que indica la siguiente figura:



Considera la curva que delimita el recinto iluminado. ¿Qué tipo de curva es?

CURVA II

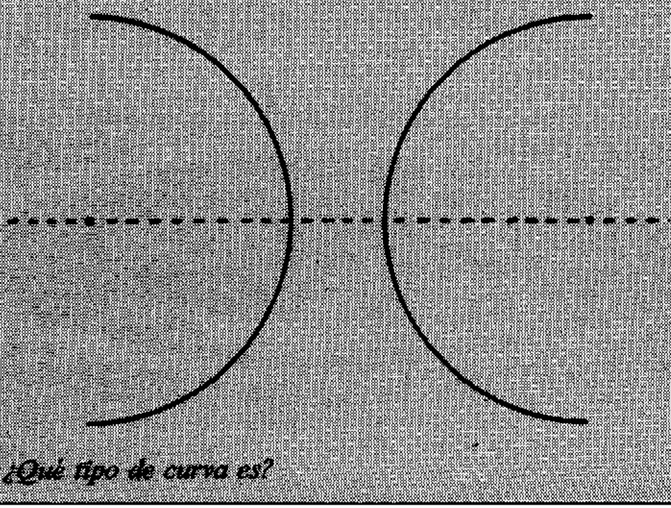
La zona de una cancha de baloncesto tiene aproximadamente la siguiente forma:



¿Qué tipo de curva es?

CURVA III

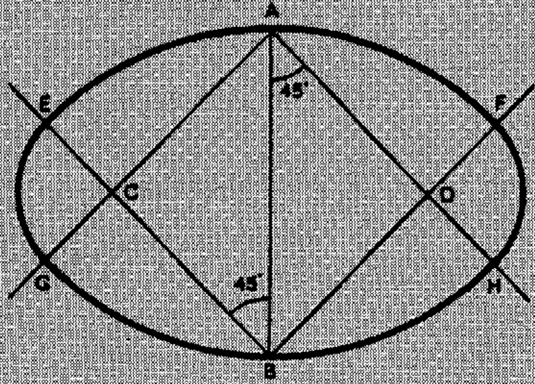
El siguiente dibujo muestra dos semicircunferencias enfrentadas y separadas:



¿Qué tipo de curva es?

CURVA IV

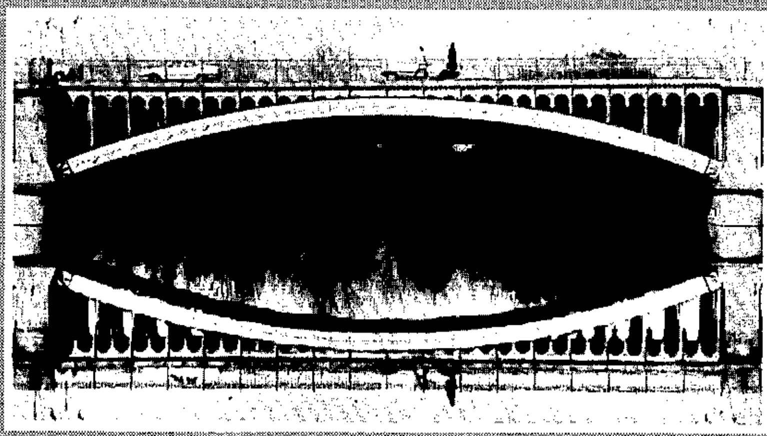
Descubre cómo se trazó la siguiente curva:



¿Qué tipo de curva es?

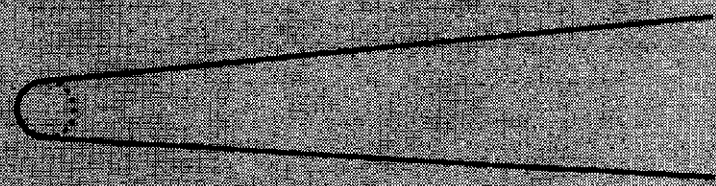
CURVA V

¿Qué tipo de curva es la formada por el arco del puente y su reflejo, en la siguiente fotografía? (Puedes utilizar papel vegetal para calcar esta curva y hacer luego su estudio).



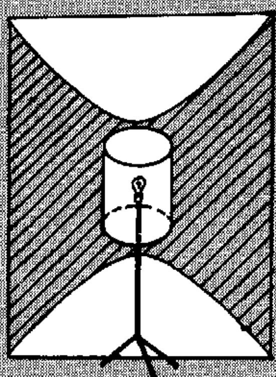
CURVA VI

¿Qué tipo de curva es la formada por una horquilla del pelo como la siguiente?



CURVA VII

Ilumina la pared con una lámpara de mesa que tenga una pantalla cilíndrica manteniendo el eje de la lámpara paralelo a la pared como muestra el siguiente dibujo:



¿Qué tipo de curva forma el borde del recinto iluminado?

CURVA VIII

Considera una circunferencia de 4 cm de radio. Vamos a "achatarla". Para ello, escogemos un diámetro y trazamos varias cuerdas perpendiculares a él (fig. 1). A continuación, "bajamos" cada punto P de la circunferencia al punto P' que está en la mitad *de RP, y "subimos" cada punto Q al punto Q' que está en la mitad de RQ (fig. 2). Unimos todos los puntos P' y Q' así obtenidos. ¿Qué tipo de curva obtenemos?*

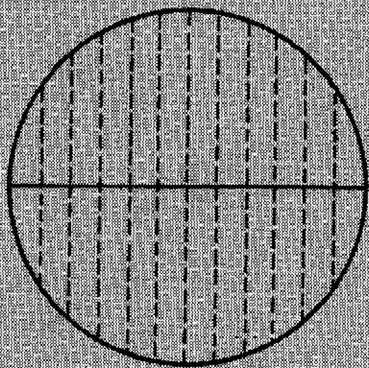


Fig. 1

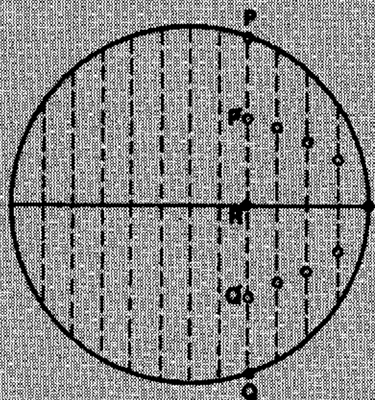
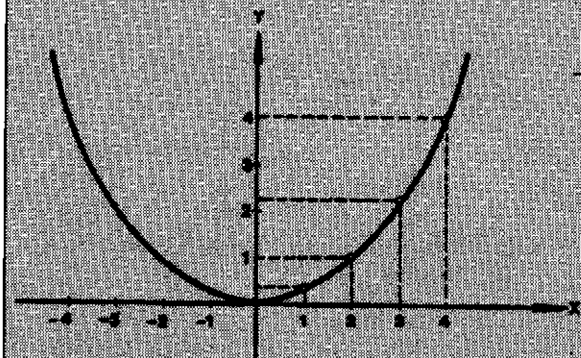


Fig. 2

CURVA IX

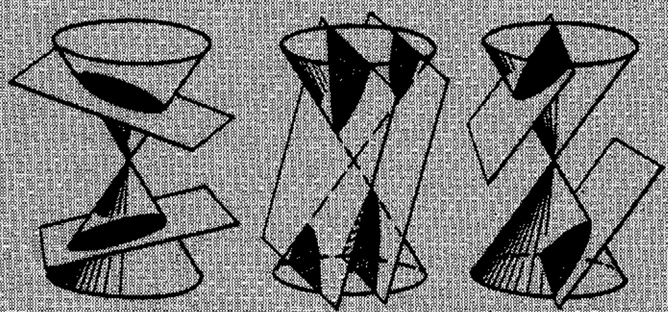
Aquí tienes la gráfica de la función $y = 0'25x^2$ obtenida a partir de su tabla de valores:



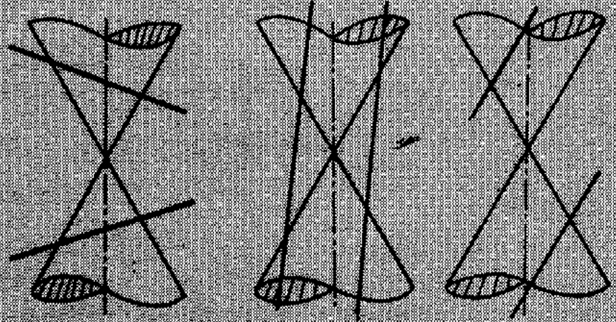
x	y
0	0
± 1	0,25
± 2	1
± 3	2,25
± 4	4
± 5	6,25

¿Qué tipo de curva es?

Del mismo modo que para decidir si un polígono es o no un hexágono necesitamos saber lo que es un hexágono, para decidir con exactitud si una curva es o no una elipse, una hipérbola o una parábola, necesitamos saber qué es una elipse, qué es una hipérbola y qué es una parábola, es decir, necesitamos una definición precisa de cada una de estas curvas. Y las definiciones de las figuras geométricas siempre surgen cuando se descubren dichas figuras. Pues bien, en el siglo IV a.C., los griegos descubrieron estas curvas seccionando con distintos planos una superficie cónica completa, tal como muestran los siguientes dibujos:



ELIPSES HIPÉRBOLAS PARÁBOLAS



2. Estudia qué inclinaciones deben tener los planos para que al cortar una superficie cónica completa, sus secciones sean circunferencias, elipses, hipérbolas o parábolas.

Como conclusión, completa las siguientes definiciones:

La elipse es la curva que se obtiene al cortar una superficie cónica completa por un plano que forma con el eje un ángulo mayor que . . . .

. . . .

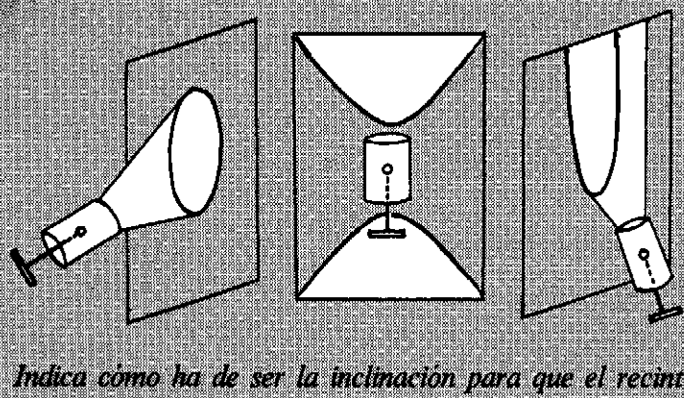
La hipérbola es la curva que se obtiene . . . .

. . . .

La parábola es la curva que se obtiene . . . .

. . . .

3. Puedes materializar estas curvas iluminando la pared con una lámpara de mesa que tenga una pantalla cilíndrica, inclinándola tal como muestran los siguientes dibujos:



Indica cómo ha de ser la inclinación para que el recinto iluminado tenga forma de circunferencia, elipse, hipérbola o parábola. ¿Por qué?

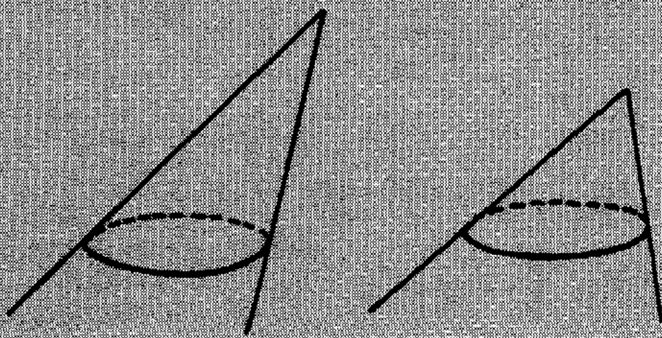
Los matemáticos griegos llamaron a todas estas curvas **Secciones Cónicas** puesto que las descubrieron seccionando una superficie cónica. Ahora bien, poco mérito tendrían si se hubiesen limitado a *mostrar* esas curvas como si hubieran estado escondidas y ellos las hubiesen puesto en un escapate. Es como si tú coges una cámara inflada de una rueda (o una rosquilla bien hecha, que es lo mismo), la cortas de todas las formas posibles y dices: ¡Señores, he aquí las "Secciones Neumáticas"!

Lo interesante y difícil no es encontrar y definir sino *descubrir las propiedades*. Y esto lo hizo, para las Secciones Cónicas, primero Menecmo y, después de él, otros grandes matemáticos como Euclides, Arquímedes, Apolonio, Galileo, Kepler, Descartes, Fermat, Euler, etc.

Tú vas a redescubrir algunas de estas propiedades. Empezamos con la elipse.

Propiedad focal de la elipse

En primer lugar, observa que una misma elipse la puedes obtener a partir de distintas superficies cónicas:



Esto nos hace sospechar que debe existir una propiedad que caracterice a la elipse como curva plana independiente de la superficie cónica escogida. Veamos:

En la superficie cónica donde tenemos la elipse (fig. 1) introducimos dos esferas tangentes a dicha superficie y al plano de la elipse (fig. 2), una en la parte superior y otra en la inferior.

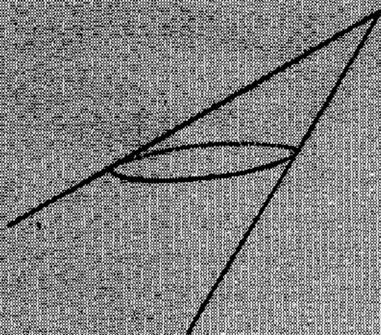


Fig. 1

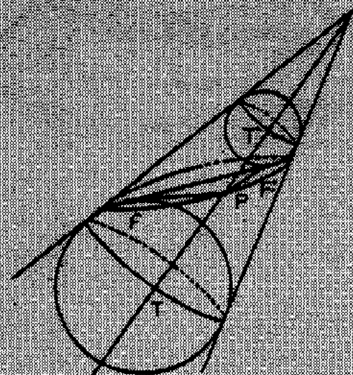


Fig. 2

4. *Razonando en esta situación, vas a descubrir una propiedad que cumple cualquier punto P de la elipse:*

Llamamos F y F' a los puntos en que las esferas tocan al plano de la elipse. Unimos P con estos puntos y obtenemos los segmentos PF y PF'. Trazamos la recta que une P con el vértice de la superficie cónica. Esta recta toca a las esferas en los puntos T y T'. Se forman los segmentos PT y PT'. ¿Qué relación existe entre PF y PT? ¿Y entre PF' y PT'? ¿Por qué?

. . . .

De aquí se deduce que:

$$PF + PF' = PT + PT' = TT$$

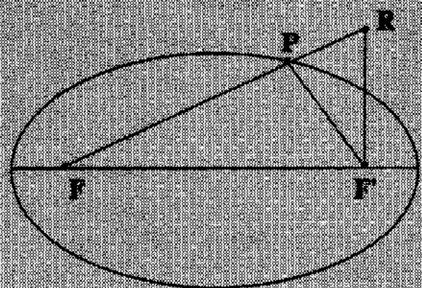
Ahora bien, la longitud del segmento TT' es igual para todos los puntos P de la elipse porque . . . .

. . . .

Luego podemos concluir que, para todos los puntos P de la elipse, la suma PF + PF' tiene el mismo valor, es decir, es un número fijo que representamos por K:

$$PF + PF' = K$$

¿Y cuánto valdrá esa suma para puntos que no pertenezcan a la elipse? Veamos:

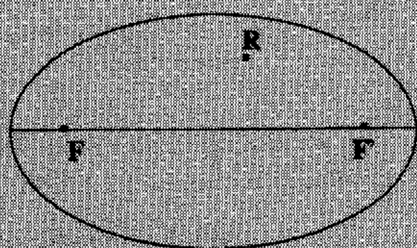


Sea R un punto exterior. Completa y justifica cada igualdad del siguiente cálculo:

$$RF + RF' = RP + \quad + RF' = \quad + (RP + RF') > PF + \quad = K$$

En consecuencia, para los puntos exteriores, la suma de sus distancias a F y F' es mayor que K.

Si R' fuese un punto interior, razonando de forma parecida, obtendríamos que R'F + R'F'........



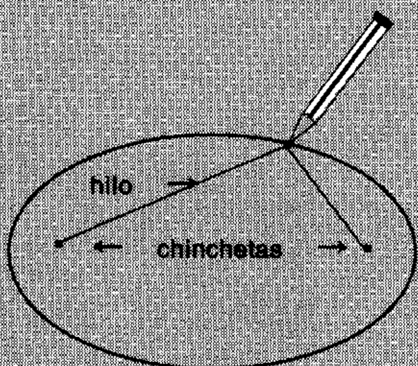
Por lo tanto, todos los puntos de la elipse y sólo ellos verifican que PF + PF' = K.

De esta forma, hemos descubierto una propiedad (llamada propiedad focal) que caracteriza completamente a los puntos de una elipse.

En resumen, también podemos definir la elipse de la siguiente manera:

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que [illegible]

5. *Sobre un cartón coloca una hoja de papel y clava en ella dos chinchetas. Ve trazando la curva que resulta al desplazar un lápiz manteniendo tenso un hilo unido a las chinchetas, tal como muestra el siguiente dibujo:*

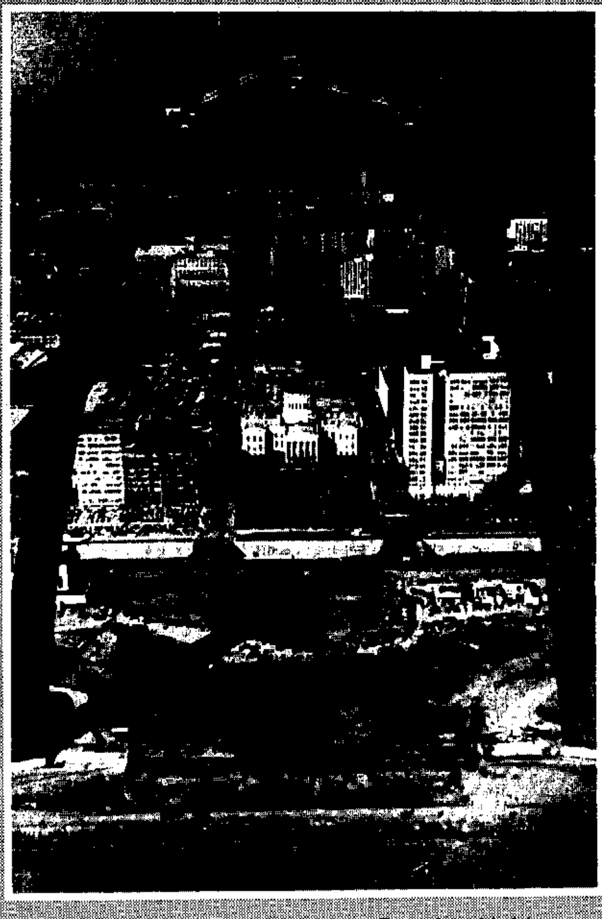


¿Por qué es una elipse la curva que obtienes? ¿Qué relación existe entre su constante K y la longitud del hilo empleado?

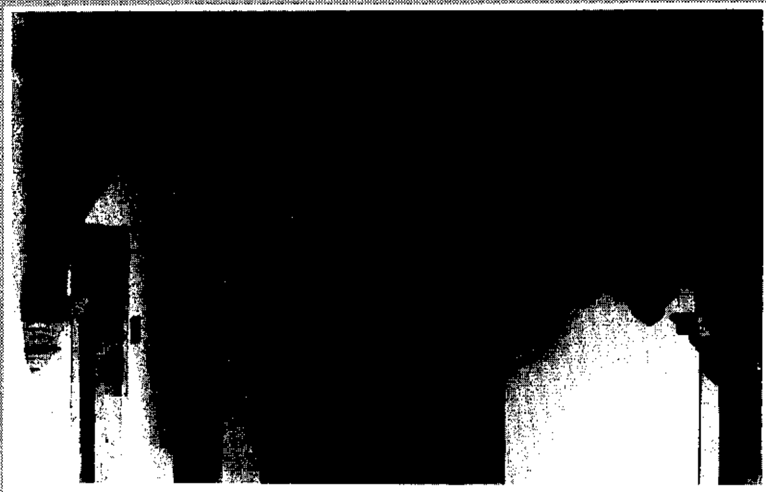
6. *Ahora que ya conoces dos definiciones equivalentes de la elipse,* ***razona matemáticamente*** *qué curvas del primer problema son realmente elipses.*

Los arcos a través de la historia

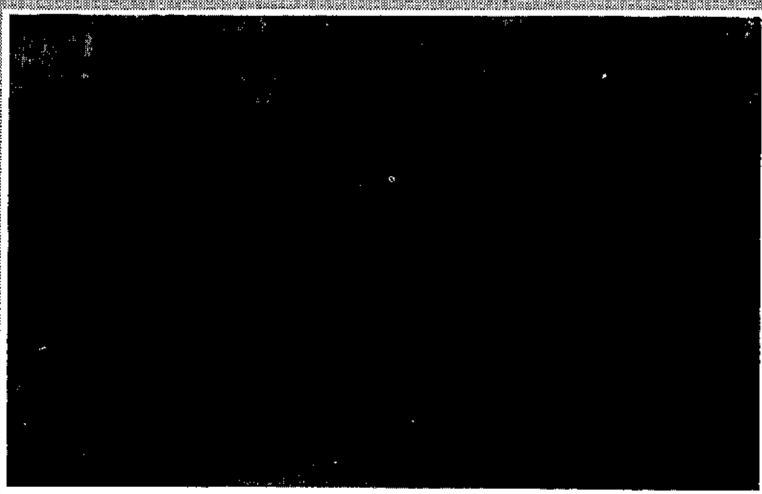
A lo largo de la historia, el hombre ha empleado en sus construcciones una gran variedad de arcos cuyos estilos iban evolucionando con los cambios culturales, económicos y sociales de cada época. Sin embargo se puede observar una constante: casi todos los curvilíneos están formados por arcos de cónicas. En las fotografías siguientes tienes algunos ejemplos.



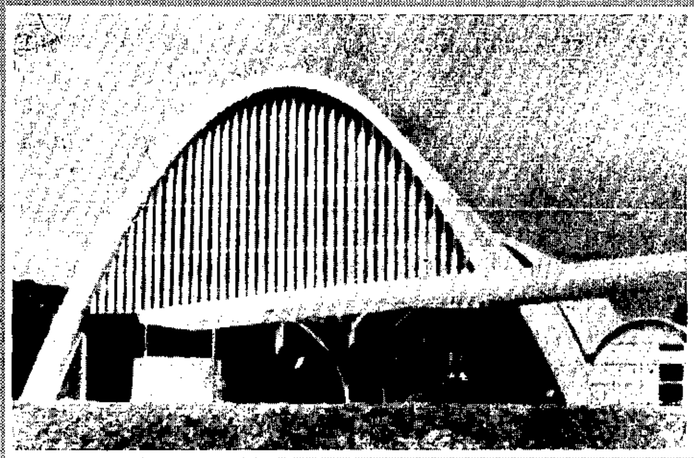
Gateway Arch de St. Louis, Estados Unidos



Arcos del Instituto de Ciencias de la Educación
(Universidad de Salamanca)



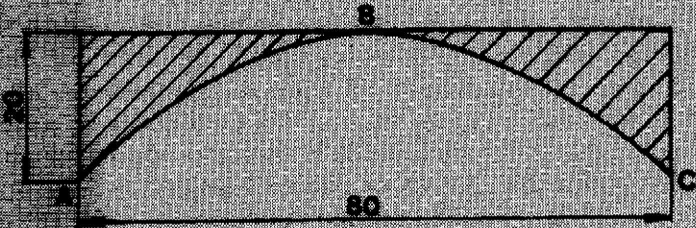
Puerta lateral de la catedral nueva de Salamanca



Iglesia de Pampulha (O. Niemeyer)

1- ¿Qué tipo de curva forma cada uno de estos arcos? ¿Cómo dibujó el arquitecto cada uno de estos arcos?

2. Queremos diseñar un arco para un puente ABC que salve una distancia de 80 m con una altura de 20 m.



Elige un sistema de referencia y, respecto de él, halla la ecuación de ese arco suponiendo que sea parabólico o elíptico o hiperbólico.

En la primera actividad se desarrolla la *fase de contextualización*. En ella, los alumnos analizan nueve curvas distintas relacionadas con las cónicas y van formulando una conjetura sobre el tipo de curva que es cada una de ellas. De este modo, salen a la luz ideas previas que ya poseen sobre las cónicas, el profesor toma conciencia de cuáles son las conjeturas erróneas más frecuentes y en qué grupos se producen con el fin de orientar el cambio conceptual que debe producirse en esos alumnos cuando, en actividades posteriores, deban refutar su conjetura utilizando argumentos basados ya en los conceptos matemáticos. El conflicto cognitivo que se produce entre la idea intuitiva (concepto previo) y el concepto matemático es particularmente interesante en el análisis de la curva IV (óvalo construído con regla y compás) que la mayoría de los alumnos considera una elipse. Se utilizan, como recursos materiales, la regla, el cartabón, la escuadra, el compás, una hoja de papel vegetal y una lámpara con pantalla cilíndrica.

A partir de este momento, comienza la *fase de construcción*. Las actividades 2, 3, 4 y 5 van encaminadas a que el alumno obtenga una información adicional suficiente que le facilite la evaluación matemática de las conjeturas formuladas antes. Mediante los dibujos del guión y cortando superficies cónicas de cartón como las de la figura 7, los alumnos obtienen las definiciones de los tres tipos afines de secciones cónicas (actividad 2) que materializan también iluminando la pared con una lámpara de mesa que tenga una pantalla cilíndrica (actividad 3). A continuación, en la actividad 4, completan un razonamiento que conduce al descubrimiento de la propiedad focal de la elipse, ayudados por modelos materiales construidos con transparencias y pelotas como el de la figura 8. Refuerzan este aprendizaje con el trazado de una elipse utilizando un cartón, dos chinchetas y un trozo de hilo (actividad 5). Una vez adquirida toda esta información, los estudiantes se enfrentan, en la actividad 6, a la refutación o la demostración matemática de las conjeturas que formularon al examinar las curvas de la primera actividad y, en la puesta en común subsiguiente, se resuelven los conflictos cognitivos que hayan surgido.

El guión continúa proponiendo actividades para la construcción de las estructuras conceptuales equivalentes de la hipérbola y de la parábola y, finalmente, plantea una serie de situaciones problemáticas que relacionan todas ellas y que constituyen la *fase de*

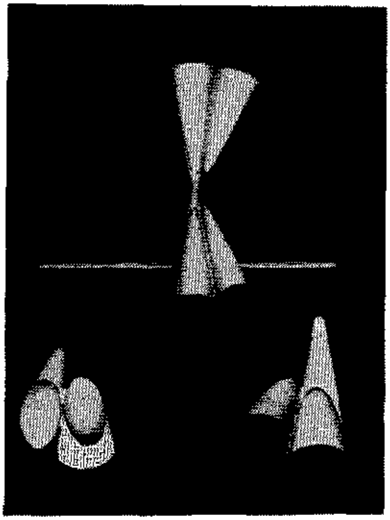


Fig. 7.- Modelos en cartón de las secciones cónicas

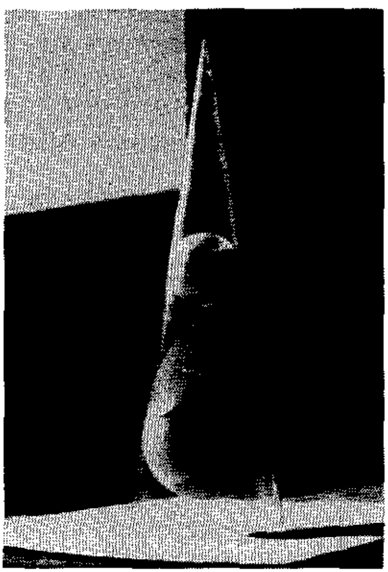


Fig. 8.- Modelo de una superfice cónica construída con plástico transparente en la que se ve una sección elíptica y las esferas tangentes.

ampliación del proceso instructivo, tal como fue descrita en el apartado de la metodología. Se muestra una de ellas, *Los arcos a través de la historia*, como ejemplo. Naturalmente, el *Libro del alumno* abarca todos los contenidos que hemos enumerado anteriormente y puede consultarse completo en Del Río (1990a).

En la *Guía del profesor*, se incluyen, en primer lugar, unas orientaciones de carácter general sobre el uso de los materiales didácticos diseñados para el alumno: fundamentación teórica de la metodología para el aprendizaje por descubrimiento, descripción de las fases del proceso instructivo, secuenciación de contenidos y actividades, método de trabajo de los alumnos, actitud del profesor, puestas en común y, finalmente, una proposición de distribución temporal. En segundo lugar, se ofrecen orientaciones específicas para cada una de las actividades que incluyen:

– lista de materiales o instrumentos complementarios necesarios para realizar la actividad;

– comentarios sobre el propósito de la tarea, cómo utilizar el material complementario, principales dificultades de los alumnos y sugerencias de intervención bien durante el trabajo en grupo bien durante la puesta en común;

– ideas para el examen de la solución: con frecuencia, cuando un alumno resuelve un problema (o realiza una tarea no algorítmica), una vez hallada la solución, no se plantea la posibilidad de comprobar que tal solución es correcta y, mucho menos, la posibilidad de aplicar el método resolutivo o el resultado obtenido a otras situaciones más generales, más particulares, análogas, de menos o más dimensiones, etc.; esta actitud, este hábito, es, sin embargo, una de las características del pensamiento creativo y, como tal, forma parte de la actividad, no sólo matemática, sino de cualquier ámbito de la vida; por lo tanto, existe ahí un terreno propicio para que los alumnos desarrollen numerosas estrategias cognitivas y, en este apartado, sugerimos al profesor algunas preguntas que, partiendo de esa actividad concreta, provoquen en los alumnos comportamientos y actitudes de este tipo.

Todas las orientaciones incluidas en esta guía son fruto de la reflexión sobre la experiencia piloto llevada a cabo anteriormente y, en consecuencia, deben ser entendidas no como una imposición sino como pautas que favorecen el éxito de la metodología. Puede consultarse completa en Del Río (1990b).

5.3.2. Materiales didácticos correspondientes a la segunda metodología

Estos materiales están constituidos, como en la otra metodología, por un *Libro del alumno* y una *Guía para el profesor.* El *Libro del alumno* está formado por una colección de 18 problemas precedida de una guía heurística para resolverlos. Como ya hemos indicado anteriormente, las investigaciones sobre la resolución de problemas han conseguido identificar estrategias solucionadoras generales mediante el análisis de la actuación de expertos o mediante la programación de ordenadores que efectúen tareas intelectualmente exigentes como, por ejemplo, jugar al ajedrez. Estas estrategias reciben el nombre de estrategias heurísticas o, simplemente, heurísticas y son técnicas que tienen una alta probabilidad de conducir a la resolución de muchos tipos de problemas. Estas heurísticas tienen un gran campo de aplicación y, como demuestran algunas investigaciones, pueden ser enseñadas a los estudiantes. La forma en que ello se efectúe depende del método instructivo que se elija y, por supuesto, de su lugar, como objetivos de aprendizaje, en el currículum. Nuestra propuesta es ordenarlas en esta guía de resolución de problemas que puede ser utilizada por los alumnos de forma sistemática en su tarea resolutiva. De este modo, al mismo tiempo que se sistematizan sus procesos de resolución, usan de modo consciente estas estrategias, reconocen su validez en problemas de contenidos diversos y las interiorizan. Para conseguir mayor eficacia en el uso de esta guía, los problemas se han clasificado, por su tarea, en problemas de determinación, problemas de demostración y problemas de descubrimiento de propiedades. Para cada tipo, se relacionan las heurísticas más específicas estructuradas en las cuatro fases del modelo de Polya (1965): Comprender el problema, concebir un plan de resolución, ejecutar el plan y examinar la solución.

La tabla de las páginas siguientes muestra la integración de la secuencia de contenidos, los problemas que los desarrollan y los objetivos que se desean alcanzar. Esta secuencia no coincide exactamente con la propuesta en la otra metodología, debido a que, al ser menor la orientación externa, hay que apoyarse exclusivamente en los conocimientos previos del alumno y conseguir en los primeros problemas instrumentos y modelos para los siguientes. Esto

TABLA DE INTEGRACION

CONTENIDOS	PROBLEMAS	Información
1. Ecuación cartesiana general reducida de la circunferencia.	1, 2, 17	I_5, I_7
2. La elipse como lugar geométrico basado en la propiedad focal. Equivalencia con el concepto basado en la sección cónica.	3	I_2, I_5
Trazado de la elipse.	3, 12	
Elementos notables de la elipse. Relaciones.	4	I_7, I_6
3. Ecuación cartesiana reducida de la elipse.	5, 10, 12	I_7, I_6
4. La hipérbola como lugar geométrico basado en la propiedad focal. Equivalencia con el concepto basado en la sección cónica.	6	I_2, I_5
Trazado de la parábola.	6, 7b	
Elementos notables de la hipérbola. Relaciones.	7a	I_6
5. Ecuación cartesiana reducida de la hipérbola.	7c, 7d, 10	I_7, I_6
6. La parábola como lugar geométrico basado en la propiedad foco-directriz. Equivalencia con el concepto basado en la sección cónica.	8	I_3, I_5
Trazado de la parábola y elementos notables.	8, 13	I_6
7. Ecuación cartesiana reducida de la parábola.	8, 9, 10, 13	I_7, I_6
8. Las cónicas en la realidad: usos independientes de la propiedad tangencial.	3, 6, 8, 10, 11	I_9, I_5
9. Concepto y clasificación (afín) de las secciones cónicas.	14	I_1, I_5, I_7
10. Las cónicas como envolventes. Construcción. Equivalencia con alguno de los otros conceptos (sección cónica o lugar geométrico).	15a, b	I_4, I_5
11. Propiedad de la tangente a una cónica en un punto. Trazado de la tangente. Asíntotas de la hiérbola.	15c	I_8
12. Las cónicas en la realidad: usos debidos a la propiedad tangencial.	16, 18	I_9

(SEGUNDA METODOLOGIA)

OBJETIVOS

Habili. Intelec.	**Habili. psicomotrices**	**Estrate. cognitivas**	**Actitudes**
H_1, H_2, H_3	P_2	E_{10}, E_2, E_6, E_9, E_{11}	A_4, A_5, A_9
	P_1	E_{10}, E_8, E_4 E_8 E_3, E_4, E_5, E_1	A_1, A_2, A_3, A_{11} A_1, A_6, A_9 A_5, A_{10}
H_1, H_2, H_4	P_2	E_2, E_5, E_6	A_3, A_1, A_{13}
H_2	P_1	E_4, E_{10}, E_{11} E_4 E_1, E_4, E_{10}	A_1, A_4, A_8, A_{11} A_5 A_2, A_{10}
H_1, H_2, H_4	P_2	E_2, E_{10}, E_9, E_5	A_3, A_{13}
H_2	P_1	E_3, E_4, E_8, E_{10} E_1, E_2	A_2, A_3, A_6, A_7 A_1, A_7, A_{11}
H_1, H_2, H_5	P_2	E_1, E_2, E_5, E_7	A_8, A_{12}, A_{13}
H_4, H_5		E_1, E_2, E_3, E_4, E_6	A_1, A_2, A_7, A_{12}
		E_3, E_4, E_5, E_{10}	A_3
	P_3	E_1, E_8, E_{10}, E_4	A_3, A_6, A_{10}
	P_4	E_1, E_4, E_3, E_{11}	A_4, A_5, A_{11}
		E_1, E_2, E_7, E_9	A_1, A_8, A_{12}

nos indujo a empezar con la ecuación de la circunferencia (instrumento y modelo para las demás ecuaciones) y seguir con el concepto de elipse (modelo para los conceptos de las demás cónicas).

A continuación mostramos, a modo de ejemplo, la situación problemática en que se construye la equivalencia de los conceptos de elipse como sección cónica y como lugar geométrico basado en la propiedad focal. Como en la primera metodología, los alumnos, tras el examen de las curvas obtenidas, formulan sus conjeturas; pero, aquí, la evaluación de esas conjeturas se realiza empleando como única información adicional la definición de elipse como lugar geométrico. El proceso, por lo tanto, es mucho más abierto; por ello, el número de curvas propuestas es menor y la formulación de la tercera actividad (sección con plano tangente a las esferas) esconde una valiosa ayuda para la descubrimiento de la estructura conceptual. En esta única situación problemática, se recogen la fase de exploración y la fase de construcción. Tras una puesta en común, donde se resuelven los conflictos cognitivos, en los siguientes problemas se construyen, de modo análogo, las estructuras de hipérbola y parábola, y luego se proponen las mismas situaciones problemáticas que en la primera metodología para relacionar todas ellas y completar el proceso instructivo (fase de ampliación). Los recursos materiales son los mismos que en la primera metodología. El *Libro del alumno* se presenta completo en el Anexo.

ACTIVIDADES DEL ALUMNO (SEGUNDA METODOLOGIA)

LAS APARIENCIAS PUEDEN O NO ENGAÑAR

1. Sobre un cartón coloca una hoja de papel y clava en ella dos chinchetas. Manteniendo tenso un hilo unido a ellas, ve trazando con un lápiz una curva como indica la figura 3.1:

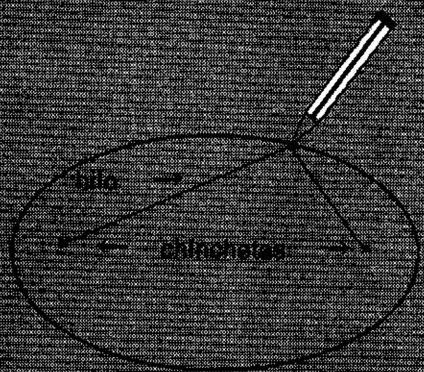


Fig. 3.1

2. Descubre el trazado de la curva siguiente (figura 3.2) y reprodúcela en tu cuaderno:

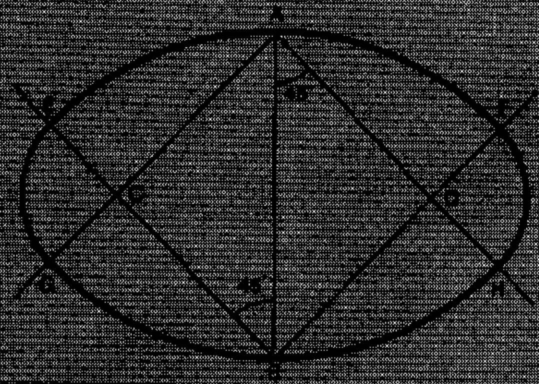


Fig. 3.2

3. Considera un cono en el que se han introducido dos esferas de distinto radio, no tangentes entre sí, como muestra la figura 3.3. Secciona el cono con un plano tangente interiormente a las dos esferas (como indica esquemáticamente la figura 3.4) y dibuja aproximadamente la curva que resulta de dicha sección.

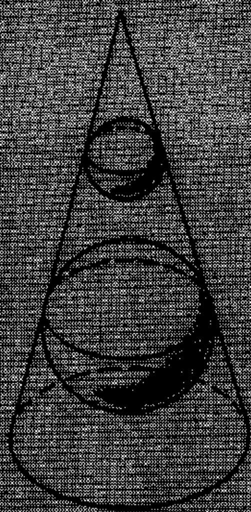


Fig. 3.3

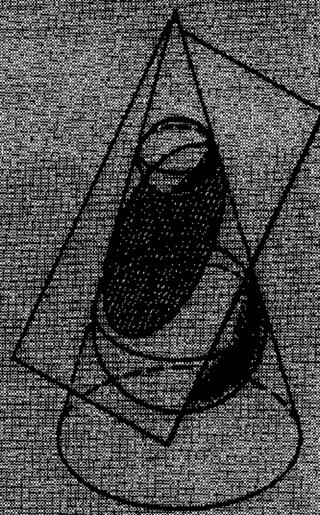


Fig. 3.4

4. Imagina que, con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminas una hoja de papel con una inclinación parecida a la que aparece en la siguiente figura 3.5:

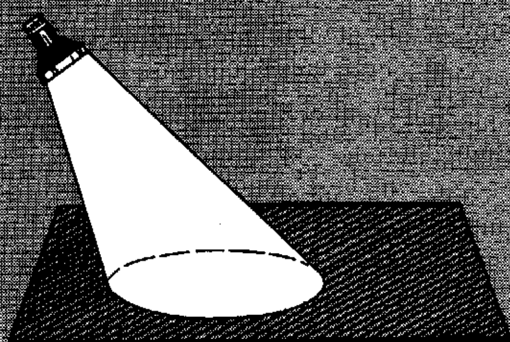


Figura 3.5

Dibuja aproximadamente la curva formada por el borde del recinto iluminado.

5. Considera una circunferencia de 4 cm de radio. Vas a "achatarla". Para ello, escoge un diámetro y traza varias cuerdas perpendiculares a él (fig. 3.6). A continuación, "baja" cada punto P de la circunferencia al punto P' que está en la mitad de RP, y "sube" cada punto Q al punto Q' que está en la mitad de RQ (fig. 3.7). Une todos los puntos P' y Q' así obtenidos y resultará una "circunferencia achatada".

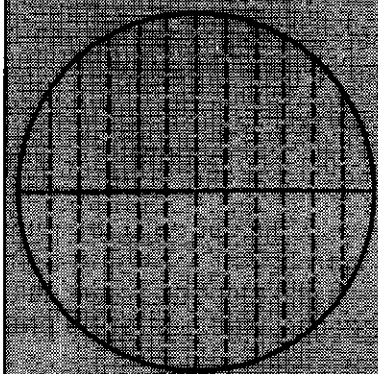


Fig. 3.6.

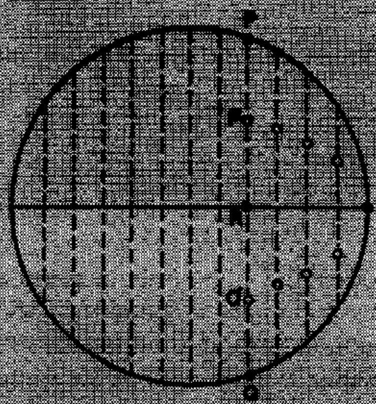


Fig. 3.7

Cuestiones:

a) En las actividades anteriores, han aparecido curvas que parecen *elipses*. Como tú ya tienes una idea intuitiva de lo que es una elipse, después de analizarlas y compararlas detenidamente, indica cuáles crees que son elipses y cuáles no, según esa idea.

b) Es lógico que tu respuesta a la pregunta del apartado anterior difiera de la de algunos de tus compañeros, porque el criterio para decidir qué es una elipse ha sido subjetivo y, por lo tanto, distinto en cada uno. ¿Quién tiene razón? Para decidirlo, nos hace falta un criterio único, objetivo, que sirva para que todas las personas se entiendan sin ambigüedades cuando hablan de elipses. Este criterio consiste en establecer una definición precisa y universalmente aceptada de lo que es una elipse. Los libros de texto de matemáticas suelen definirla así:

"La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es siempre la misma, es decir, es constante."

Tal vez te resulte extraña esta definición e incluso creas que está mal, que ese lugar geométrico no tiene nada que ver con una elipse. Aguarda por un momento y realiza la siguiente [illegible]

¿Cuáles de las curvas que has obtenido antes son elipses y cuáles [illegible] con esa definición? ¡Ojo, ahora ya no te [illegible] de los [illegible]: razona lo mejor que puedas!

[illegible] Compara estas últimas respuestas con las primeras. [illegible]

En la *Guía del profesor,* se incluyen, igual que en la otra metodología, unas orientaciones de carácter general sobre el uso de los materiales didácticos diseñados para el alumno y, a continuación, se ofrecen orientaciones específicas para cada uno de los problemas concretadas en los siguientes aspectos:

– lista de materiales o instrumentos complementarios necesarios para resolver el problema (compás, transparencias, chinchetas, hilo, cartones, fotografías, modelos de superficies, papel vegetal, etc.);

– explicación sobre cómo utilizar estos materiales;

– descripción del comportamiento habitual de los alumnos (dificultades que encuentran, concepciones erróneas que emplean, estrategias que utilizan, etc.);

– clasificación del problema y comentarios sobre las heurísticas más útiles para cada una de las etapas de su resolución, haciendo referencia siempre a la lista enumerada en la guía de resolución que tienen los alumnos; se discute con detalle el alcance de cada una, sobre todo, las referentes a la fase de examen de la solución que, como en la otra metodología, proporciona un campo abierto a la creatividad y al desarrollo de muchas capacidades cognitivas;

– sugerencias y materiales para conducir con eficacia y agilidad la puesta en común (textos para hacer fotocopias, dibujos para hacer transparencias, etc.);

– relación del problema con los objetivos didácticos que se desean alcanzar o con los contenidos que se pretenden desarrollar, indicando las cuestiones en las que el profesor debe incidir especialmente.

Finalmente, queremos señalar que, tal como puede apreciarse en la bibliografía específica, para elaborar todos estos materiales, hemos tenido en cuenta los libros y los artículos más importantes que tratan el tema de las cónicas desde un punto de vista didáctico.

CAPITULO 6

EXPERIMENTACION DE LAS METODOLOGIAS Y APLICACION DE PRUEBAS

Introducción

En los dos capítulos anteriores explicamos todo el proceso de elaboración de los materiales didácticos diseñados para poner en práctica las dos metodologías cuyo estudio comparativo es el objeto de esta investigación. Siguiendo el desarrollo de la misma, en este capítulo expondremos cómo transcurrió la experimentación de dichos materiales y la aplicación de las diferentes pruebas.

6.1. Elección y análisis de la muestra

Tras la experiencia piloto que se realizó durante el tercer trimestre del curso 1987-88 y que permitió perfeccionar y ajustar los materiales didácticos, se decidió realizar la experiencia definitiva en el curso 1988-89. Aunque la elección teóricamente deseable de la muestra debería ser aleatoria, ciertas características del propio diseño, como la experimentación de metodologías didácticas nuevas que exigen un profesorado dispuesto a la innovación, obligaron a que esta elección se realizase en función de los profesores disponibles. Dos de ellos ya habían participado en la experiencia piloto durante el curso anterior, uno con cada metodología. Esto les sirvió para adiestrarse en el uso de los materiales y los recursos didácticos. Ambos quedaron satisfechos y desearon repetir otra vez la experiencia. Encontramos, además, otros tres profesores dispuestos y el primer proyecto de reparto de metodologías fue el siguiente:

Profesor A: un grupo con la primera metodología y un grupo con la metodología tradicional.

Profesor B: idem.

Profesor C: idem.

Profesor D: un grupo con la segunda metodología y un grupo con la metodología tradicional.

Profesor E: un grupo con la segunda metodología.

Los profesores A y B pertenecían al mismo centro; el profesor C a otro distinto y los profesores D y E a un mismo centro pero distinto de los dos anteriores.

Al comienzo del curso, antes de iniciar la experimentación, el profesor E se puso enfermo y decidimos que los dos grupos del profesor D practicaran la segunda metodología ya que, en caso contrario, el número de alumnos que experimentara esta metodología sería sensiblemente menor que los que experimentaran la otra. En resumen, la muestra quedó establecida de la siguiente manera:

Primera metodología: 90 estudiantes pertenecientes a tres grupos de dos institutos de Salamanca a cargo de los profesores A, B y C.

Segunda metodología: 58 estudiantes pertenecientes a dos grupos de un instituto de Zamora a cargo del profesor D.

Metodología tradicional: 82 estudiantes pertenecientes a tres grupos de dos institutos de Salamanca, a cargo de los profesores A, B y C.

El tamaño total de la muestra es, por lo tanto, de 230 alumnos, aunque debemos indicar que la muestra inicial estaba formada por 287 estudiantes de los cuales se eliminaron 57 por faltarles la puntuación en alguna de las 18 pruebas que realizaron a lo largo del curso.

Como puede apreciarse en la distribución de la muestra, todos los grupos que siguieron la metodología tradicional tuvieron profesores que también participaban en la experiencia y, por lo tanto, la variable *profesor* quedó bastante controlada puesto que era el mismo profesor quien impartía las clases en los dos grupos. Pero, por otra parte, la forma de elegir la muestra nos obligó a ser muy exigentes en el estudio de la homogeneidad de los grupos. Para ello comenzamos aplicando a los estudiantes, a lo largo del primer trimestre, las pruebas destinadas a medir las variables de control que se muestran en la siguiente tabla:

VARIABLE	INSTRUMENTO DE MEDIDA
Sexo Estudios del padre Profesión del padre	Cuestionario con distintas categorías obtenido de los impresos de matriculación en los estudios universitarios
Estilo cognitivo: dependencia/ independencia de campo	Test GEFT
Aptitud espacial	Batería DAT
Aptitud numérica	Batería DAT
Factor "g"	Test de Cattell
Actitud hacia las matemáticas	Test de Gairín
Nivel de conoccimientos previos	Pruebas elaboradas *ad hoc*

En el apartado 3.3. ya constatamos que, al procesar los datos obtenidos, no se apreciaron diferencias significativas entre los grupos excepto en actitud inicial, variable que se incorpora como independiente (covariable) en el diseño de la investigación.

6.2. Experimentación de las metodologias

La experimentación de las dos metodologías con los materiales didácticos diseñados se realizó a lo largo del segundo trimestre del curso 1988-89 empleándose en todos los grupos aproximadamente 20 períodos lectivos como se había previsto. Ya dijimos antes que dos profesores, uno de cada metodología, se habían entrenado en su manejo participando en la experiencia piloto. Los otros dos (que trabajaron con la primera metodología) estudiaron durante el primer trimestre los materiales y los discutieron con los investigadores en reuniones sucesivas. Durante la experiencia en las aulas, todos tuvieron el apoyo de los investigadores que hicieron un seguimiento puntual de la misma velando por la fiel realización de ambas metodologías. A pesar de que ninguno de los grupos de alumnos había trabajado con estrategias instructivas de este tipo, todos, en general, acogieron bien las dos nuevas metodologías a las que se adaptaron perfectamente aunque tardaron algo más en la segunda debido a la mayor exigencia de participación. Trabajaron en grupos de tres, que ellos mismos constituyeron, y no se observaron conflictos ni enfrentamientos notables. Sobre las puestas en común, puede decirse que se ajustaron al programa previsto aunque algunos de los debates que se suscitaron podrían haberse alargado más si el tiempo no hubiese tenido que ser controlado. Desde el punto de vista de los alumnos, observamos un cierto cansancio respecto al gran número de pruebas a que fueron sometidos. Las puntuaciones obtenidas en ellas son, desde luego, el testimonio *cuantitativo* de su experiencia (rendimiento, variación actitudinal, etc.) pero creemos que, junto a ellas, hay un cúmulo de signos *cualitativos* que también deben tenerse en cuenta; por ejemplo, los artículos elaborados por cada alumno sobre las aplicaciones técnicas de las cónicas (última actividad propuesta en los materiales didácticos). En ellos se aprecia el interés suscitado por esta unidad didáctica y, aunque en muchos casos la calidad literaria no es la deseable, se observa, sin embargo, una preocupación por buscar información en diversos libros o revistas que se apoya, además, con dibujos, fotografías, etc.

6.3. Aplicación de las pruebas al acabar la experiencia

Una vez finalizado el estudio de la unidad temática que nos ocupa, para valorar el primer bloque de variables dependientes (apartado 3.2.2.), los alumnos contestaron al test de Gairín con el fin de medir su actitud hacia las matemáticas al acabar la experiencia y realizaron tres pruebas que nos sirvieron para medir su rendimiento conceptual, algorítmico, heurístico y global. A continuación, analizamos cada una de ellas detalladamente.

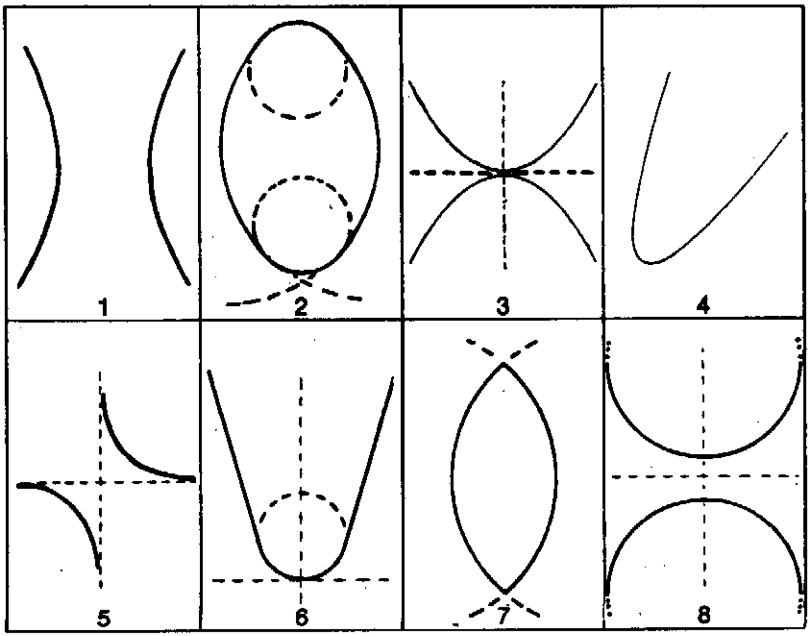
6.3.1. Prueba sobre conceptos y estructuras conceptuales

Mide el *Rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales al acabar la experiencia* y consiste en un cuestionario con 60 items de V-F que se elaboró a partir del cuestionario empleado en la detección de ideas previas al que se le añadieron 20 items más para abarcar todos los objetivos del campo de la *Información* (apartado 5.1).

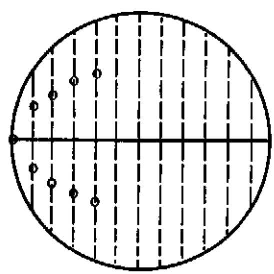
LAS CONICAS

PRUEBA SOBRE CONCEPTOS Y ESTRUCTURAS CONCEPTUALES

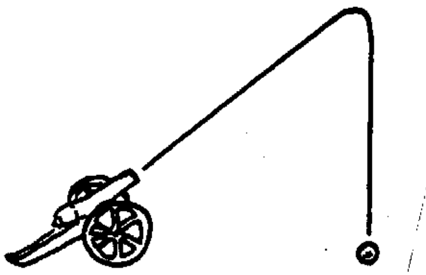
Las 8 primeras frases hacen referencia a las curvas de las siguientes figuras en las cuales las líneas de puntos no forman parte de las curvas, sólo sirven para indicar cómo se trazaron:



1. La curva 1 podría ser una hipérbola.
2. La curva 2 podría ser una elipse.
3. La curva 3 podría ser una hipérbola.
4. La curva 4 podría ser una parábola.
5. La curva 5 podría ser una hipérbola
6. La curva 6 podría ser una parábola.
7. La curva 7 podría ser una elipse.
8. La curva 8 podría ser una hipérbola.
9. Una elipse puede dibujarse perfectamente utilizando sólo el compás, la regla y el lápiz.
10. Si representamos la función $y = 3x^2$, obtenemos una parábola.
11. Si señalamos los puntos medios de *todas* las semicuerdas verticales de una circunferencia (como en la figura siguiente) y los unimos, entonces se obtiene una elipse.



12. Una hipérbola se define así: es la curva obtenida al seccionar una superficie cónica completa mediante un plano que no pasa por el vértice y corta a sus dos hojas.
13. Las únicas elipses que existen en la realidad son las órbitas de los planetas alrededor del sol y las de algunas partículas atómicas alrededor del núcleo.
14. La longitud de una parábola es infinita.
15. Si disparamos un cañón antiguo con una inclinación de 45° y suponemos que el rozamiento del aire no existe, la trayectoria completa de la bala es una curva como la de la siguiente figura:



16. Una hipérbola no puede formarse con las dos mitades de una elipse enfrentadas entre sí.

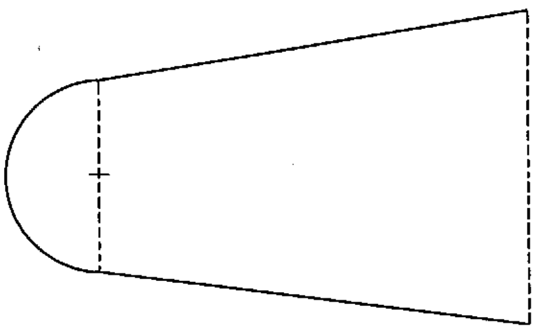
17. Los focos de una elipse son dos puntos tales que la diferencia de las distancias desde ellos a cualquier punto de la elipse es siempre la misma.

18. Fijado un punto de una hipérbola, siempre es posible trazar dos tangentes a dicha hipérbola pasando por ese punto.

19. $x^2 + y^2 = 4$ es la ecuación de una circunferencia cuyo radio mide 2.

20. En las hipérbolas, la diferencia entre las longitudes de los dos radios vectores de cualquier punto es igual al eje real.

21. La zona de una cancha de baloncesto que se muestra en la figura siguiente tiene forma de parábola:



22. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ es la ecuación de una elipse cuyos ejes están sobre los ejes de coordenadas.

23. Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro.

24. El segmento que une los vértices de una hipérbola se llama eje real.

25. Una parábola puede dibujarse perfectamente empleando sólo una regla, un compás y un lápiz.

26. Las hipérbolas no aparecen en objetos o fenómenos reales.

27. El parámetro de la parábola, p, es la distancia entre el foco y el vértice.

28. En cualquier elipse, si a representa la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor y c la semidistancia focal, entonces se verifica: $a^2 = b^2 + c^2$.

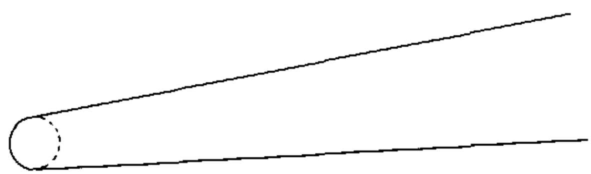
29. $y^2 = 2x$ es la ecuación de una parábola cuyo eje coincide con el eje de abscisas.

30. Por cualquier punto de una elipse pasan dos tangentes distintas.

31. La ecuación $x^2/9 - y^2/4 = 1$ representa una hipérbola.

32. Los huevos de gallina tienen forma de elipsoide.

33. Una horquilla de pelo, como la de la siguiente figura, tiene forma de parábola:



34. Los puntos en que una elipse es cortada por sus ejes se llaman vértices.

35. $2x^2 + y^2 - 2x + ... = 0$ podría ser la ecuación de una circunferencia.

36. Si un jugador de baloncesto lanza el balón desde el centro del campo y consigue una canasta, entonces el camino recorrido por el balón tiene forma de parábola.

37. En cualquier elipse, la suma de las distancias desde los puntos a los focos varía según el punto que tomemos.

38. Una parábola se define así: es la curva obtenida al cortar una superficie cónica por un plano paralelo a una generatriz.

39. La ecuación $x^2/25 + y^2/16 = 1$ representa una elipse.

40. La bisectriz de los radios vectores de cualquier punto de una hipérbola es tangente a dicha hipérbola.

41. En las elipses cada radio vector de los vértices correspondientes al eje menor mide lo mismo que el semieje mayor.

42. Las parábolas no tienen centro de simetría.

43. Una hipérbola no puede dibujarse perfectamente empleando sólo el compás, la regla y el lápiz.

44. Una elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre la misma.

45. La gráfica de la función $y = 1/x$ es una parábola.

46. En las elipses, no existe ninguna relación entre los radios vectores de un punto y la tangente en dicho punto.

47. En las hipérbolas, la diferencia entre las distancias de un punto cualquiera a los focos es igual al eje real.

48. Cualquier parábola tiene infinitas ecuaciones no equivalentes entre sí.

49. Un melón perfectamente simétrico tiene forma de elipse.

50. $x^2 = 2y$ es la ecuación de una parábola cuyo eje coincide con el eje de ordenadas.

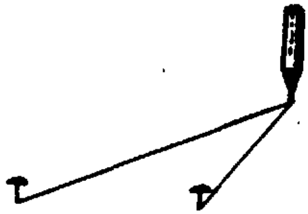
51. La tangente a una parábola en un punto P es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector de P y la perpendicular desde P a la directriz.

52. Una parábola se define así: es una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función.

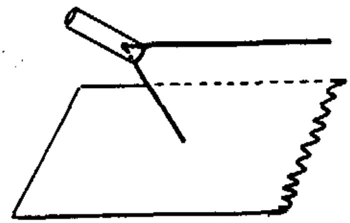
Las próximas 8 frases hacen referencia a las siguientes actividades:

A. Tomamos una superficie cónica (completa) en la cual las generatrices forman con el eje un ángulo de 30º. La cortamos con un plano que no pasa por el vértice y que forma con el eje un ángulo β. Consideramos la curva obtenida en esta sección.

B. Clavamos dos chinchetas sobre una hoja de papel y trazamos la curva que resulta al desplazar un lápiz manteniendo tenso un hilo cuyos extremos se han unido a las chinchetas como muestra la figura siguiente.



C. Con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminamos una hoja de papel con la inclinación que muestra la figura siguiente; consideramos la curva formada por el borde del recinto iluminado.



D. Dibujamos en una hoja de papel una circunferencia y un punto exterior. Plegamos el papel haciendo coincidir el punto exterior con uno de la circunferencia. Desplegamos y volvemos a plegar tomando otros puntos de la circunferencia. Repetimos esta operación con todos los puntos y consideramos la curva envolvente de todos los pliegues así obtenidos.

53. Si $\beta = 45^\circ$, la curva obtenida en A es una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en D.

54. Si $\beta = 30^\circ$, la curva obtenida en A es una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en C.

55. Si β es menor que 30°, la curva obtenida en A es siempre una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en B.

56. Si β es mayor que 30°, la curva obtenida en A, en algunos casos, es del mismo tipo que la obtenida en C.

57. La curva obtenida en C es una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en D, aunque le falta una parte.

58. La curva obtenida en B es una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en D.

59. Si cortamos la superficie cónica de la actividad A con un plano paralelo a una generatriz, obtenemos una curva del mismo tipo que la obtenida en la actividad C.

60. Si seccionamos la superficie cónica de la actividad A con los planos que cortan a todas las generatrices, podría obtenerse, en algún caso, una curva del mismo tipo que la obtenida en la actividad B.

La validez de contenido de este instrumento, como puede apreciarse en la siguiente tabla, es aceptable.

OBJETIVOS (Apartado 5.1.)	ITEMS CORRESPONDIENTES EN LA PRUEBA	TOTAL
I_1	3, 6, 7, 8, 12, 38	6
I_2	1, 2, 5, 9, 17, 23, 37, 43, 44	9
I_3	4, 6, 14, 21, 25, 33, 52	7
I_4	1, 3, 6, 7, 8, 14, 16, 23	8
I_5	16, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60	9
I_6	20, 24, 27, 28, 34, 41, 42, 47	8
I_7	10, 11, 19, 22, 29, 31, 35, 39, 45, 48, 50	11
I_8	18, 30, 40, 46, 51	5
I_9	13, 15, 21, 26, 32, 33, 36, 49	8

Los estudiantes dispusieron de una hora para contestar a este cuestionario. Su corrección se realizó automáticamente introduciendo las respuestas en una base de datos en DBASE III y utilizando un programa diseñado *ad hoc* que aplicó la siguiente fórmula para dar la puntuación (Rodríguez Diéguez, 1980, p. 320):

$$1/2\ (\text{aciertos} - \text{errores} + 0{,}3\ \text{omisiones})$$

Así, la puntuación máxima es 30, igual que en las otras dos pruebas que analizaremos a continuación. Se midió también la fiabilidad mediante la fórmula 20 de Kuder y Richardson (Rodríguez Diéguez, 1980, p. 345) obteniéndose como valor:

$$KR_{20} = 0{,}948981$$

lo que implica una fiabilidad muy alta.

6.3.2. Prueba sobre procedimientos algorítmicos

Mide el *Rendimiento en procedimientos algorítmicos al acabar la experiencia* y consiste en un conjunto de 6 ejercicios elaborado a partir de los objetivos señalados en los campos de las habilidades intelectuales y psicomotrices (apartado 5.1).

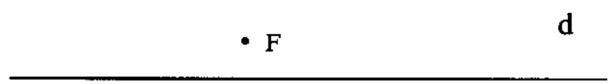
LAS CONICAS

PRUEBA SOBRE PROCEDIMIENTOS ALGORITMICOS

1. Escribe el nombre de la curva que tiene por ecuación $x^2/25 + y^2/16 = 1$ y halla sus elementos más significativos.

2. Dibuja esta curva aproximadamente y luego explica con *todo detalle* lo que habría que hacer para dibujarla con precisión.

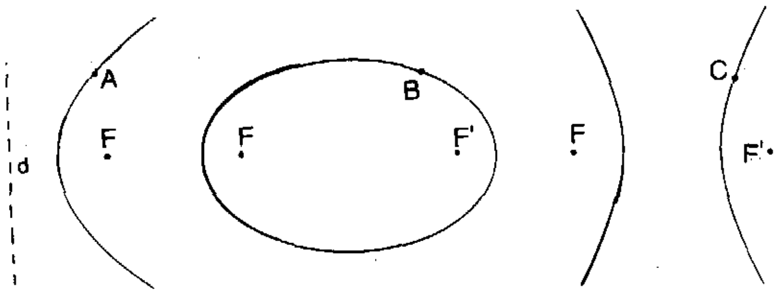
3. Dibuja aproximadamente la parábola cuyo foco es el punto F y cuya directriz es la recta d:



4. Halla la ecuación de *esa* parábola tomando con la regla las medidas que te hagan falta.

5. Halla la ecuación de una circunferencia de radio 3 y que tiene su centro en el punto (1,2).

6. Dibuja con la regla y el compás la tangente a cada una de las siguientes curvas en los puntos A, B y C y explica cómo lo haces:



La siguiente tabla recoge la correspondencia entre los objetivos y los items de la prueba:

OBJETIVOS (Apartado 5.1)	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	P_1	P_2	P_3	P_4
Ejercicios correspondientes en la prueba	1	1	5	–	4	2	2 y 3	–	6

Los alumnos dispusieron de 30 minutos para realizar esta prueba que fue corregida manualmente de forma objetiva puesto que los enunciados sólo admiten respuestas unívocas. Se asignaron 5 puntos a cada item para que, como en la prueba anterior, la puntuación máxima posible fuese 30.

6.3.3. Prueba sobre resolución de problemas

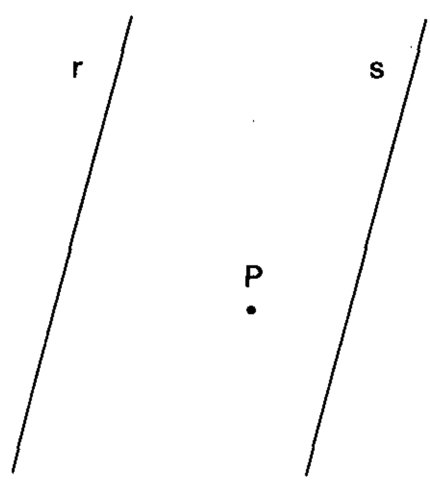
Mide el *Rendimiento en resolucion de problemas*. La selección de los problemas para una prueba es una tarea delicada que debe ajustarse a los siguientes criterios:

– han de ser pocos, ya que su resolución lleva mucho tiempo;
– representativos de las estrategias heurísticas propuestas como objetivos;
– de formato distinto en cuanto a la tarea;
– con diferentes grados de dificultad;
– en su resolución deben intervenir conceptos y procedimientos algorítmicos variados; y
– han de permitir usar los libros y los apuntes sin perder su calidad de verdaderos problemas.

Para hacer nuestra selección, al final de la experiencia piloto propusimos a los alumnos la siguiente colección de 8 problemas, 4 para cada uno de los grupos que participaban. Los alumnos tenían que resolver sólo 3 de ellos con libros y apuntes durante una hora.

LAS CONICAS
PRUEBA SOBRE RESOLUCION DE PROBLEMAS

1. Las rectas r y s de la siguiente figura son paralelas y están separadas por una distancia de 6 cm y, entre ellas, hay un punto P que dista 4 cm de la recta r.

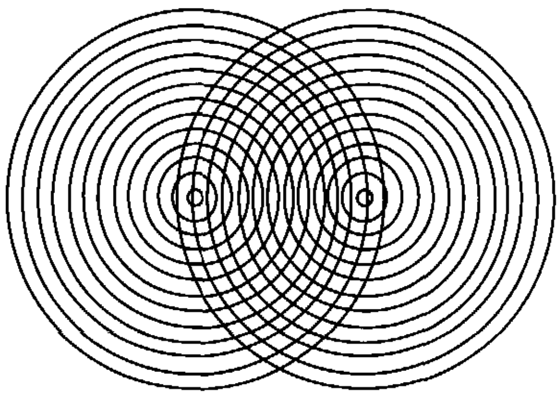


a) Dibuja con toda precisión (utilizando la regla y el compás) una circunferencia tangente a ambas rectas y que pase por el punto P. Explica con detalle cómo dibujas esa circunferencia y por qué verifica las condiciones requeridas.

b) Halla una ecuación para esa circunferencia. Explica con detalle *todo* lo que haces para hallarlas y *por qué* lo haces así.

Nota: si lo prefieres, puedes contestar primero al apartado a y luego al b.

2. La siguiente figura representa dos familias de circunferencias concéntricas que, al cortarse, forman una red de puntos:



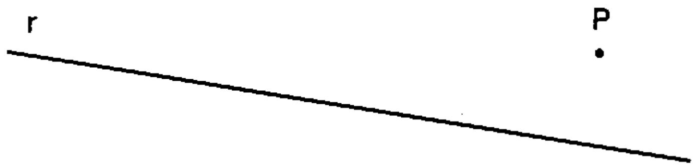
a) Uniendo puntos de esa red, dibuja una hipérbola.

b) Demuestra que esa curva que acabas de dibujar es realmente una hipérbola.

3. Halla la ecuación de una circunferencia y de una elipse que se corten en cuatro puntos formando un cuadrado. Si crees que hay más de una solución, encuentra todas las que puedas. Explica con detalle *todo* lo que haces y razona *por qué* lo haces.

4. Considera una recta r y un punto H que dista 3 cm de ella. Un punto P del plano se mueve manteniendo siempre igual a 13 cm la suma de sus distancias al punto H y a la recta r. ¿Qué tipo de curva describe el punto P? Determina sus elementos más característicos. Halla un método para dibujarla.

5. El punto P de la siguiente figura dista 2 cm de la recta r.

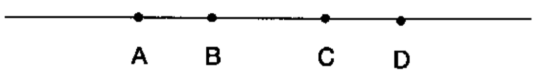


a) Dibuja con toda precisión (utilizando regla y compás) una circunferencia que pase por el punto P, que sea tangente a la recta r y cuyo radio mida 3 cm. Explica con detalle cómo dibujas esa circunferencia y por qué verifica las condiciones requeridas.

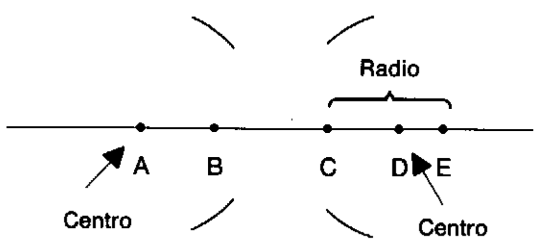
b) Halla una ecuación para esa circunferencia. Explica con detalle *todo* lo que haces para hallarla y *por qué* lo haces así.

Nota: si lo prefieres, puedes contestar primero al apartado a y luego al b.

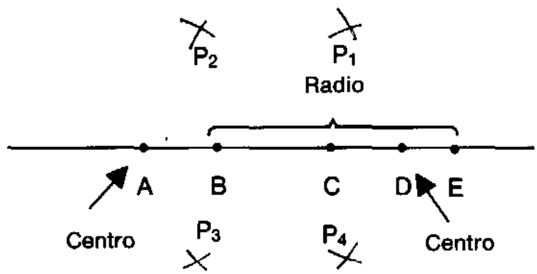
6. En la figura siguiente hay dibujados 4 puntos alineados, A, B, C y D, separados por las distancias AB = CD = 1 cm; BC = 1,5 cm (compruébalo).



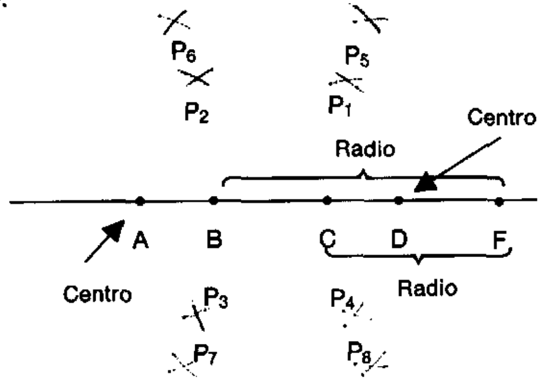
Escogemos un punto cualquiera, E, a la derecha de D. Tomamos como radio la longitud del segmento EC, y, haciendo centro primero en A y luego en D, trazamos los 4 arcos de la figura siguiente (compruébalo).



Después tomamos como radio la longitud del segmento EB y, haciendo centro primero en A y luego en D, trazamos otros 4 arcos que cortan a las anteriores en 4 puntos, P_1, P_2, P_3 y P_4 como muestra la figura siguiente (compruébalo).



Ahora escogemos otro punto distinto, F, a la derecha de D y trazamos como antes los ocho arcos que nos determinan otros 4 puntos P_5, P_6, P_7 y P_8, como muestra la figura siguiente (compruébalo).



Imagina que tomamos, uno tras otro, *todos* los puntos que están a la derecha de D (incluido D) y que dibujamos por el procedimiento anterior los puntos correspondientes P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12},..., etc. ¿Qué tipo de curva formaría el conjunto de *todos* los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, etc? ¡Demuéstralo!

7. Dado un rectángulo de 10 cm de perímetro, halla la ecuación de una elipse que pase por sus cuatro vértices. Si crees que hay más de una solución, encuentra todas las que puedas. Explica con detalle *todo* lo que haces y *por qué* lo haces.

8. Un arco gótico está formado (como muestra la Fig. 1) por un segmento AB de longitud 2 m y dos arcos de circunferencia AC y BC. El centro del arco BC es A y el de AC es B. Determina el centro y el radio de una circunferencia tangente a los tres lados del arco (ver Fig. 2).

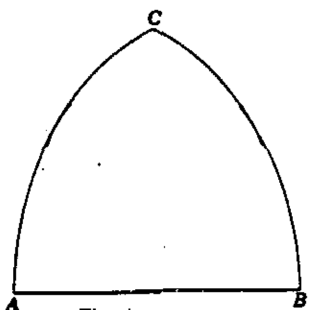


Fig. 1

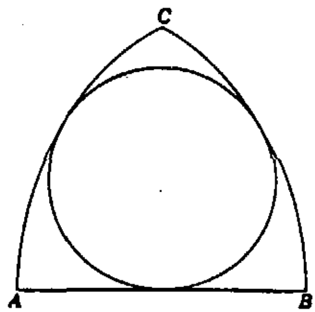


Fig. 2

Una corrección atenta reveló los siguientes resultados:

NUMERO DEL PROBLEMA	GRUPO A (n = 37)				GRUPO7 B (n = 38)			
	1	2	3	4	5	6	7	8
Formato del problema en cuanto a la tarea	**Dibujar y hallar ecuación**	**Demostrar**	**Hallar ecuación**	**Determinar gráfica o analíticamente**	**Dibujar y hallar ecuación**	**Demostrar**	**Hallar ecuación**	**Determinar gráfica o analíticamente**
Porcentaje de alumnos que lo escogió	100	81,1	73	45,9	100	89,5	92,1	18,4
Porcentaje de alumnos que lo resuelve bien	43,3	26,7	25,9	5,9	39,5	20,6	22,9	0
Porcentaje de alumnos que lo resuelve regular	21,6	30	33,3	23,5	23,7	23,5	31,4	14,3
Porcentaje de alumnos que lo resuelve mal	35,1	43,3	40,8	70,6	36,8	55,9	45,7	85,7

A la vista de estos datos y teniendo en cuenta los criterios establecidos antes, elegimos los problemas 1, 3 y 6 para la prueba al acabar la experiencia y el 5, el 7 y el equivalente al 6 referido a la elipse para la prueba a los dos meses de acabar la experiencia. En puridad, deberíamos haber escogido como problema de demostración el 2 (ya que resultó algo más fácil que el 6) pero ese problema venía resuelto en el libro de texto utilizado en uno de los institutos.

En la resolución de estos problemas, se aplican abundantes conceptos, estructuras conceptuales, procedimientos algorítmicos y, sobre todo, estrategias heurísticas. A continuación, se muestra cómo las estrategias heurísticas señaladas en los objetivos pueden ser desarrolladas en los problemas propuestos al finalizar la experiencia:

Estrategias heurísticas propuestas en los objetivos (Apartado 5.1.)	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}
Problemas	3	1 y 3	6	3 y 6	6	1 y 3	1	3	1 y 3	3 y 6	1

La distribución correspondiente a los problemas propuestos a los dos meses de acabar la experiencia es análoga.

Para resolverlos, los estudiantes dispusieron de una hora y media de tiempo (30 minutos para cada problema) y podían utilizar libros, apuntes y cuantos instrumentos considerasen necesarios. Su corrección se hizo leyendo primero 40 resoluciones escogidas al azar a partir de las cuales se tipificaron, ordenaron y cuantificaron los comportamientos resolutivos; por ejemplo, para el problema 3, aplicamos la siguiente escala:

A) Representación y organización de los datos:

– Dibuja sólo el cuadrado y la circunferencia: 1 punto.

– Dibuja el cuadrado, la circunferencia y una elipse:

- sin los datos y con poca precisión: 2 puntos
- con los datos y con cierta precisión: 3 puntos.

- Dibuja el cuadrado, la circunferencia, una elipse y los ejes con los datos y cierta precisión:
    - no escribe las coordenadas de los vértices del cuadrado: 3 puntos.
    - escribe las coordenadas de los vértices del cuadrado: 4 puntos.

B) Ecuación de la circunferencia:

- Calcula el radio: 1 punto.
- Halla la ecuación: 2 puntos.

C) Ecuaciones de las elipses:

- Mide los semiejes en el dibujo y halla *una* ecuación: 1 punto.
- Fija como focos los puntos medios de los lados y halla *una* ecuación correcta: 2 puntos.
- Fija uno de los ejes y halla *una* ecuación correcta: 2 puntos.
- Sustituye las coordenadas de los vértices del cuadrado en la ecuación reducida de una elipse y halla la solución general: 4 puntos.

D) Examen de la solución:

- Afirma que hay infinitas ecuaciones con algún argumento: 1 punto.
- Encuentra otras soluciones posibles: 1 punto.
- Encuentra la ecuación de todas las soluciones (ya se valoró en la fase anterior).

La puntuación del problema se obtiene sumando los puntos correspondientes a cada fase según el comportamiento resolutivo. Se asignó a cada problema una valoración máxima de 10 puntos y, por lo tanto, a toda la prueba 30 puntos.

Los datos de la variable *Rendimiento global al acabar la experiencia* se obtuvieron sumando las puntuaciones de las tres pruebas puesto que, desde un punto de vista de formación integral, los tres campos evaluados nos parecen igualmente importantes.

De este modo, junto con la valoración de la actitud, obtuvimos para cada alumno cinco puntuaciones correspondientes a las cinco variables dependientes del primer bloque que, genéricamente, podemos llamar *Rendimientos al acabar la experiencia.*

6.4. Aplicación de las pruebas a los dos meses de acabar la experiencia

Una vez finalizada la experiencia, todos los alumnos prosiguieron con el desarrollo habitual de su programa y, de un modo directo, no volvieron a tratar el tema de las cónicas aunque, naturalmente, no podían evitarse referencias esporádicas a algunas de estas curvas al estudiar otras unidades didácticas como el cálculo diferencial, por ejemplo. Los profesores retomaron su metodología expositiva tradicional, basada en la explicación de conceptos y algoritmos acompañada de un libro de texto y la posterior resolución de ejercicios y problemas.

Transcurridos dos meses, se aplicaron de nuevo las tres pruebas que hemos descrito en el apartado anterior con la variación correspondiente en la colección de problemas de la tercera prueba a la cual también nos hemos referido antes. Se procedió así porque, en la resolución de los problemas, los alumnos disponían de libros y apuntes, lo cual podía permitir a alguno copiar la solución. De este modo, y aplicando los mismos criterios de corrección que la vez anterior, obtuvimos las puntuaciones de las variables del segundo bloque: Rendimiento en conceptos, en procedimientos algorítmicos, en resolución de problemas y rendimiento global a los dos meses. La actitud se midió también con el test de Gairín (1987). En el siguiente capítulo se analizan todos los datos obtenidos y se exponen las conclusiones de la investigación.

TERCERA PARTE

RESULTADOS DE LA INVESTIGACION

CAPITULO 7

ANALISIS DE LOS DATOS Y ELABORACION DE LAS CONCLUSIONES

Introduccion

En la primera parte expusimos el diseño de nuestra investigación educativa cuyo desarrollo fue descrito con detalle en la segunda. Una vez obtenidos los datos correspondientes a cada una de las variables dependientes, ahora nos ocuparemos de su análisis y, como consecuencia, elaboraremos las conclusiones pertinentes en relación con las hipótesis formuladas en el diseño de la investigación.

7.1. Estadística descriptiva, normalidad y homogeneidad de varianzas

Para analizar los datos obtenidos en las diez variables dependientes relacionadas con los rendimientos y la actitud, se introdujeron en un ordenador y se procesaron con los programas Statview, Statworks, Systat y Datadesk.

Efectuamos, en primer lugar, una *estadística descriptiva* por grupos cuyos resultados se exponen a continuación:

ESTADISTICA DESCRIPTIVA

GRUPO 1

X_1: R. Conc. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
16.68	5.45	.575	29.707	32.676	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
1.7	26.6	24.9	1501.2	27683.94	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
	15.417	13.225	-.031	-.483	

X_2: R.Algo. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
19.156	6.754	.712	45.616	35.258	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
2	30	28	1724	37084	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
18	17.612	15.275	-.692	-.302	

X_3: R. Probl.F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
13.778	6.118	.645	37.433	44.407	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
2	28	26	1240	20416	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
12	12.251	10.342	-.468	.379	

X_4: R. Glob. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
49.613	14.989	1.58	224.675	30.212	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
12.5	81.6	69.1	4465.2	241529.54	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
61	46.944	43.613	-.289	-.189	

X_5: R. Actitud. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.252	.383	.04	.147	11.772	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
2.262	4.333	2.071	292.712	965.049	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
3.091	3.23	3.209	.181	.386	

X_6: R. Conc. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
14.167	5.378	.567	28.922	37.962	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
-5	26	31	1275	20636.58	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
15	.	.	.862	-.246	

X_7: R. Algo. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
15.6	5.611	.591	31.479	35.965	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
3	27	24	1404	24704	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
.	14.461	13.108	-.27	.067	

X_8: R. Probl. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
13.4	4.953	.522	24.535	36.965	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
5	25	20	1206	18344	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
.	12.484	11.579	-.715	.413	

X_9: R. Glob. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
43.167	12.103	1.276	146.48	28.038	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
9	67.6	58.6	3885	180739.18	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
40	41.26	38.83	-.221	.035	

X_{10}: R. Actitud. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.11	.212	.022	.045	6.809	90
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
2.634	3.5	.866	279.858	874.218	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
.	3.102	3.095	-.24	-.518	

GRUPO 2

X_1: R. Conc. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
12.617	5.168	.679	26.706	40.958	58
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
1	23	22	731.8	10755.52	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
14	11.124	8.605	-.397	-.164	

X_2: R. Algo. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
18.621	7.558	.992	57.117	40.587	58
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
2	29	27	1080	23366	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
29	16.592	13.612	-.987	-.25	

X_3: R.Probl. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
14.31	5.535	.727	30.639	38.68	58
Mínimo	Máximo	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	# Perdidos:
2	28	26	830	13624	0
Moda:	Med. Geom.:	Med. Arm.:	Curtosis	Asimetría	
.	12.967	11.041	-.259	7.335E-3	

X_4: R. Glob. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
45.548	15.216	1.998	231.521	33.406	58
Mínimo	Máximo	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	# Perdidos:
15	78	63	2641.8	133526.12	0
Moda:	Med. Geom.:	Med. Arm.:	Curtosis	Asimetría	
54	42.79	39.682	-.503	.14	

X_5: Actitud. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.112	.23	.03	.053	7.382	58
Mínimo	Máximo	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	# Perdidos:
2.5	3.545	1.045	180.497	564.718	0
Moda:	Med. Geom.:	Med. Arm.:	Curtosis	Asimetría	
.	3.103	3.094	.633	-.857	

X_6: R. Conc. 2 m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
10.995	5.421	.712	29.389	49.306	58
Mínimo	Máximo	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	# Perdidos:
- 2	21	23	637.7	8686.57	0
Moda:	Med. Geom.:	Med. Arm.:	Curtosis	Asimetría	
.	.	.	-.312	-..339	

X_7: R. Algo. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
13	5.855	.769	34.281	45.038	58
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
0	24	24	754	11756	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
13	.	.	-.721	- 8.993E - 3	

X_8: R. Probl. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
10.276	3.355	.441	11.256	32.649	58
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
3	20	17	598	6766	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
11	9.68	8.985	.282	.25	

X_9: Glob. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
34.271	12.577	1.651	158.178	36.699	58
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
5	63	58	1987.7	77135.97	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
36	31.323	27.073	-.205	-.11	

X_{10}: RActitud. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.105	.219	.029	.048	7.057	58
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
2.364	3.5	1.136	180.087	561.897	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
3.227	3.097	3.088	1.985	- 1.091	

GRUPO 3

X_1: R. Conc. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
9.132	5.53	.611	30.585	60.558	82
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
- 3	23.6	26.6	748.85	9316.093	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
6	, , -.499	.221			

X_2: R. Algo. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
16.402	7.624	.842	58.12	46.479	82
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
0	30	30	1345	26769	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
.	.	.	-.865	-.337	

X_3: R. Probl. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
12.39	4.791	.529	22.957	38..67	82
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
2	28	26	1016	14448	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
11	11.314	9.812	1.012	.484	

X_4: R. Glob. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
37.925	14.774	1.632	218.271	38.956	82
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
5	71.7	66.7	3109.85	135620.992	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
44	34.485	29.875	-.289	.124	

X_5: Actitud. F.

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.26	.487	.054	.237	14.939	82
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
1.81	4.381	2.571	267.339	890.801	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
.	3.223	3.184	.633	.051	

X_6: R. Conc. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
8.493	5.826	.643	33.944	68.602	82
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
- 3	21	24	696.4	8663.78	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
6	.	.	-.556	.188	

X_7: R. Algo. 2m

Media:	Desv. Tip.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
15.378	6.269	.692	39.3	40.766	82
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
0	28	28	1261	22575	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
20	.	.	-.419	.105	

X_8: R. Probl. 2m

Media:	Desv. Tip.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
12.329	4.74	.523	22.47	38.448	82
Mínimo	**Máximo**	**Rango:**	**Suma:**	**Suma Cuadrát.:**	**# Perdidos:**
3	24	21	1011	14285	0
Moda:	**Med. Geom.:**	**Med. Arm.:**	**Curtosis**	**Asimetría**	
.	11.308	10.147	-.659	.125	

X_9: R. Glob. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
36.2	14.024	1.549	196.668	38.74	82
Mínimo	Máximo	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	# Perdidos:
7	71	64	2968.4	123386.18	0
Moda:	Med. Geom.:	Med. Arm.:	Curtosis	Asimetría	
19	33.259	29.897	-.545	.293	

X_{10}: Actitud. 2m

Media:	Desv. Típ.:	Error Típ.:	Varianza:	Coef. Var.:	N:
3.146	.23	.025	.053	7.313	82
Mínimo	Máximo	Rango:	Suma:	Suma Cuadrát.:	# Perdidos:
2.5	3.636	1.136	257.992	815.993	0
Moda:	Med. Geom.:	Med. Arm.:	Curtosis	Asimetría	
3.409	3.138	3.129	.629	.-671	

Para contrastar la normalidad de cada una de las variables en cada uno de los grupos, procedimos a la aplicación de la *Prueba de Kolmogorov-Smirnov* y los resultados obtenidos son los siguientes:

PRUEBA DE KOLMOGOROV - SMIRNOV

VARIABLES	GRUPO 1		GRUPO 2		GRUPO 3	
	Estadístico	p	Estadístico	p	Estadístico	p
Rend. en conceptos al acabar	0.062	0.278	0.073	0.289	0.077	0.243
Rend. en pr. algorítmicos al acabar	0.086	0.208	0.094	0.237	0.129	0.121
Rend. en resolución problemas al acabar	0.114	0.139	0.070	0.297	0.105	0.117
Rend. global al acabar	0.054	0.304	0.101	0.221	0.041	0.356
Actitud al acabar	0.112	0.143	0.162	0.108	0.12	0.140

VARIABLES	GRUPO 1		GRUPO 2		GRUPO 3	
	Estadístico	p	Estadístico	p	Estadístico	p
Rend. en conceptos a los dos meses	0.077	0.234	0.066	0.307	0.080	0.234
Rend. en pr. algorítmicos a los dos meses	0.077	0.233	0.103	0.215	0.085	0.221
Rend. en resolución de problemas a los dos meses	0.110	0.148	0.104	0.214	0.067	0.272
Rend. global a los dos meses	0.081	0.221	0.102	0.218	0.071	0.261
Actitud a los dos meses	0.128	0.113	0.126	0.168	0.080	0.235

Como puede observarse, en todos los grupos, las diez variables dependientes pueden considerarse *normales*.

Aplicamos también el *Test de Bartlett* para contrastar la homogeneidad de varianzas de estas variables en los tres grupos. Los resultados fueron los siguientes:

TEST DE BARTLETT

VARIABLES	Estadístico	p
Rendimiento en conceptos al acabar	0.320	0.852
Rendimiento en procedimientos algorítmicos al acabar	1.463	0.481
Rendimiento en res. de problemas al acabar	4.951	0.084
Rendimiento global al acabar	0.058	0.971
Actitud al acabar	32.254	0.000
Rendimiento en conceptos a los dos meses	0.626	0.731
Rendimiento en proce. algorítmicos a los dos meses	1.054	0.590
Rendimiento en resol. de problemas a los dos meses	10.285	0.006
Rendimiento global a los dos meses	1.947	0.378
Actitud a los dos meses	0.587	0.746

Todas las variables tienen la misma varianza en los tres grupos, excepto la *actitud al acabar el experimento* y el *rendimiento en resolución de problemas a los dos meses*. Por lo tanto, a la vista de estos resultados, mantenemos el criterio de utilizar pruebas paramétricas en la comparación de los rendimientos, teniendo siempre en cuenta que cuando intervengan estas dos últimas variables en un análisis de varianza, el valor real del nivel de significación disminuye ya que las muestras menores son extraídas de las poblaciones con menor varianza (Tejedor, 1984; p. 281).

7.2. Comparación de rendimientos y actitud al acabar el periodo instructivo

Se trata de contrastar la *Hipótesis 1* formulada en el apartado 3.1:

Al acabar el período instructivo, entre los tres grupos de alumnos, existen diferencias entre las medias de las siguientes variables en el sentido que se indica:

Rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales:

Grupo 1 = Grupo 2 > Grupo 3

Rendimiento en procedimientos algorítmicos:

Grupo 3 > Grupo 1 > Grupo 2

Rendimiento en resolución de problemas:

Grupo 2 > Grupo 1 > Grupo 3

Rendimiento global:

Grupo 1 = Grupo 2 > Grupo 3

Actitud hacia las matemáticas:

Grupo 1 = Grupo 2 > Grupo 3

Para ello utilizamos, como habíamos previsto en el diseño de la investigación, el *análisis de la covarianza*, tomando como factor las metodologías (grupos), como covariable la actitud inicial y como variables dependientes los rendimientos y la actitud. He aquí los resultados obtenidos:

RENDIMIENTO AL ACABAR LA EXPERIENCIA

V.D.: **CONCF** N: 230 R MULTIPLE: .520 R MULT. CUADRADO: .271

"ANALISIS DE COVARIANZA"

Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	2414.569	2	1207.285	41.123	0.000
ACT. IN.	8.635	1	8.635	0.294	0.588
ERROR	6634.869	226	29.358		

V.D.: **ALGOF** N: 230 R MULTIPLE: .169 R MULT. CUADRADO: .271

"ANALISIS DE COVARIANZA"

Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	350.951	2	175.475	3.298	0.039
ACT. IN.	0.280	1	0.280	0.005	0.942
ERROR	12022.917	226	53.199		

V.D.: **PROBF** N: 230R MULTIPLE: 150 R MULT. CUADRADO: .022

"ANALISIS DE COVARIANZA"

Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	149.919	2	74.960	2.447	0.089
ACT. IN.	14.024	1	14.024	0.458	0.499
ERROR	6923.458	226	30.635		

V.D.: **GLOBF** N: 230R MULTIPLE: .325 R MULT. CUADRADO: .106

"ANALISIS DE COVARIANZA"

Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	5897.556	2	2948.778	13.113	0.000
ACT. IN.	52.018	1	52.018	0.231	0.631
ERROR	50820.682	226	224.870		

V.D.: **ACTIF**	N: 230 R MULTIPLE: .788		R MULT. CUADRADO: .620		
		"ANALISIS DE COVARIANZA"			
Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	0.160	2	0.080	1.320	0.269
ACT. IN.	21.534	1	21.534	354.359	0.000
ERROR	13.734	226	0.061		

Se observan diferencias significativas (α = 0, 05) entre las medias de tres variables: rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales, rendimiento en procedimientos algorítmicos y rendimiento global. Para determinar entre qué grupos se dan las diferencias empleamos el *Test de Scheffé* y obtenemos:

DIFERENCIAS ENCONTRADAS

Variable: Rend. Conceptos	**"F"**	**Dif.**	**Sign**[1]
Grupo 1 vs. Grupo 2	20.422	4.063	**
Grupo 1 vs. Grupo 3	1.654	7.548	**
Grupo 2 vs. Grupo 3	14.235	3.485	**
Variable: Rend. Conceptos	**"F"**	**Dif.**	**Sign**[1]
Grupo 1 vs. Grupo 2	0.201	0.535	
Grupo 1 vs. Grupo 3	6.306	2.753	*
Grupo 2 vs. Grupo 3	2.897	2.218	
Variable: Rend. Conceptos	**"F"**	**Dif.**	**Sign**[1]
Grupo 1 vs. Grupo 2	2.564	4.065	
Grupo 1 vs. Grupo 3	26.449	11.688	**
Grupo 2 vs. Grupo 3	8.824	7.623	**

[1] *Significativo al 95%
**Significativo al 99%

Estos resultados indican que la primera metodología produce mejores rendimientos que la segunda sólo en el aprendizaje de conceptos y estructuras conceptuales (α = 0,01). En cambio, ambas superan a la metodología expositiva tradicional en el aprendizaje de conceptos y estructuras conceptuales y en el rendimiento global ($\alpha = 0{,}01$). En cuanto al rendimiento en procedimientos algorítmicos, sólo la primera metodología sobrepasa a la tradicional. Finalmente, es interesante remarcar que no se han obtenido diferencias ni en resolución de problemas ni en actitud hacia las matemáticas. Resumimos así los resultados:

VARIABLES	**RESULTADOS AL ACABAR EL PERIODO INSTRUCTIVO: DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS**
Rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales	GRUPO 1 > GRUPO 2 > GRUPO 3 ($\alpha = 0{,}01$)
Rendimiento en procedimientos algorítmicos	GRUPO 1 > GRUPO 3 ($\alpha = 0{,}05$)
Rendimiento en resolución de problemas	Ninguna diferencia
Rendimiento global	GRUPO 1 > GRUPO 3; GRUPO 2 > GRUPO 3 ($\alpha = 0{,}01$) ($\alpha = 0{,}01$)
Actitud	Ninguna diferencia

Al comparar estos resultados con las conjeturas formuladas en la *Hipótesis 1,* observamos bastantes coincidencias pero también algunas desviaciones. Sobre el *rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales* se corrobora la superioridad de los grupos experimentales sobre el de control. Este resultado es debido, en nuestra opinión, a que estas metodologías favorecen un aprendizaje significativo al emplear como punto de partida los conocimientos previos y permitir los conflictos cognitivos. Además, la mayor orientación usada en la primera metodología garantiza que la construcción de los conceptos es realizada por un número mayor de estudiantes y, como consecuencia, produce un rendimiento más alto.

En cuanto al *rendimiento algorítmico*, habíamos conjeturado una ventaja de la metodología tradicional de acuerdo con investigaciones precedentes (Kersh, 1958; Roughead y Scandura, 1968; Olander y Robertson, 1973). Nuestra experiencia ha refutado completamente esta expectativa demostrando, además, que hay diferencias a favor de la primera metodología con respecto a la tradicional. Este resultado puede explicarse porque el desarrollo de esta metodología, estructurada en múltiples actividades cortas, permite también realizar, en el mismo período de tiempo, suficientes tareas algorítmicas cuyo significado, además, es comprendido por el alumno.

En *resolución de problemas*, habíamos supuesto que el Grupo 2 obtendría mejores rendimientos porque, en su tratamiento instructivo, esta actividad era practicada casi exclusivamente. El análisis anterior no corrobora tal conjetura ya que no se aprecian diferencias significativas entre los tres grupos. No obstante, el hecho de que la media muestral del segundo grupo (14,31) sea superior a la de los otros dos (13,77 el primero y 12,39 el tercero) confirmando, como tendencia, los resultados de otras investigaciones (Schoenfeld, 1985), nos induce a pensar que la hipótesis es correcta y que la corta duración del período instructivo fue insuficiente para producir un incremento en el aprendizaje de las estrategias heurísticas capaz de manifestarse en diferencias significativas de rendimiento en resolución de problemas, pues dicho aprendizaje es un proceso lento que requiere una abundante y variada actividad resolutiva. Por lo tanto, mantenemos nuestra hipótesis de que la incorporación de la enseñanza explícita de estrategias heurísticas en una metodología didáctica mejora la habilidad de resolución de problemas en los estudiantes.

Como consecuencia de los resultados anteriores, en el *rendimiento global* se corrobora totalmente la Hipótesis 1: los grupos experimentales son equivalentes y ambos superan al grupo de control.

Finalmente, nuestra conjetura sobre la *actitud* se ve sólo parcialmente confirmada, en el sentido de no apreciarse diferencias entre los dos grupos experimentales; en cambio, ninguno de ellos supera al de control como nosotros habíamos previsto contradiciendo resultados de otras investigaciones (Worthen, 1968; Williams, 1983; Aiken, 1976); de nuevo éstos parecen confirmados. Sin embargo, creemos que el problema no está completamente resuelto y el factor duración del período instructivo debe influir en el cambio actitudinal. Olander y Robertson (1973), por ejemplo, encontraron una mejora del nivel actitudinal con un tratamiento por descubrimiento que duró siete meses.

7.3. Comparación de rendimientos y actitud dos meses después de acabar el periodo instructivo

Deseamos contrastar la *Hipótesis 2* formulada en el apartado 3.1:

Transcurridos dos meses después del período instructivo, entre los tres grupos de alumnos, se mantienen las diferencias de medias enumeradas en la hipótesis primera excepto la siguiente:

Rendimiento en procedimientos algorítmicos:

Grupo 1 = Grupo 2 > Grupo 3

Procedimos como antes pero utilizando ahora como variables dependientes los rendimientos y la actitud a los dos meses de acabar el período instructivo experimental. Los resultados de los *análisis de la covarianza* fueron los siguientes:

RENDIMIENTO A LOS DOS MESES

V.D.: **CONC2M** N: 230 RMULTIPLE: .408 R MULT. CUADRADO:.166

"ANALISIS DE COVARIANZA"

Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	1367.301	2	683.650	22.091	0.000
ACT. IN.	4.856	1	4.856	0.157	0.692
ERROR	6993.868	226	30.946		

V.D.:**ALGO2M** N: 230 RMULTIPLE:.192 R MULT. CUADRADO:.037

"ANALISIS DE COVARIANZA"

Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	230.479	2	115.240	3.294	0.039
ACT. IN.	32.282	1	32.282	0.923	0.338
ERROR	7906.599	226	34.985		

V.D.: **PROBL2M** N: 230 R MULTIPLE:263 R MULT. CUADRADO:.069

"ANALISIS DE COVARIANZA"

Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	338.511	2	169.255	8.236	0.000
ACT. IN.	0.633	1	0.633	0.031	0.861
ERROR	4644.663	226	20.552		

V.D.: **GLOB2M** N: 230 R MULTIPLE:.290 R MULT. CUADRADO:.084

"ANALISIS DE COVARIANZA"

Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	3202.697	2	1601.348	9.541	0.000
ACT. IN.	50.261	1	50.261	0.299	0.585
ERROR	37932.640	226	167.844		

V.D.: **ACTI2M** N: 230 R MULTIPLE: .197 R MULT. CUADRADO:.039

"ANALISIS DE COVARIANZA"

Fuente	S.C.	GL	M.C.	F	P
GRUPO	0.081	2	0.041	0.863	0.423
ACT. IN.	0.353	1	0.353	7.475	0.007
ERROR	10.662	226	0.047		

Se observan diferencias significativas (α = 0,05) entre las medias de las cuatro variables del rendimiento pero no en la actitud. Efectuada la correspondiente prueba de Scheffé para determinar entre qué grupos se dan estas diferencias, se obtuvieron los siguientes resultados:

DIFERENCIAS ENCONTRADAS

Variable: Rend. Conceptos	"F"	Dif.	Sign[2].
Grupo 1 vs. Grupo 2	12.192	3.172	**
Grupo 1 vs. Grupo 3	44.111	5.674	**
Grupo 2 vs. Grupo 3	6.633	2.502	**
Variable: Rend. Algoritmos			
Grupo 1 vs. Grupo 2	7.320	2.600	**
Grupo 1 vs. Grupo 3	0.060	0.222	
Grupo 2 vs. Grupo 3	5.161	-2.368	*
Variable: Rend. Problemas			
Grupo 1 vs. Grupo 2	17.79	3.124	**
Grupo 1 vs. Grupo 3	2.089	1.007	
Grupo 2 vs. Grupo 3	8.030	-2.053	**
Variable: Rend.Global			
Grupo 1 vs. Grupo 2	18.479	8.896	**
Grupo 1 vs. Grupo 3	12.222	6.967	**
Grupo 2 vs. Grupo 3	1.188	-1.929	

[2] * Significativo al 95%
**Significativo al 99%

Estos resultados, en general, indican un predominio del rendimiento producido por la primera metodología, y una equivalencia entre los producidos por la segunda y la expositiva tradicional. Podemos resumir estos resultados de la siguiente manera:

VARIABLES	RESULTADOS DOS MESES DESPUES DEL PERIODO INSTRUCTIVO: DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS
Rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales	GRUPO 1 > GRUPO 2 > GRUPO 3 (α = 0,01)
Rendimiento en procedimientos algorítmicos	GRUPO 1 = GRUPO 3 > GRUPO 2 (α = 0,05)
Rendimiento en resolución de problemas	GRUPO 1 = GRUPO 3 > GRUPO 2 (α = 0,01)
Rendimiento global	GRUPO 1 > GRUPO 2 = GRUPO 3 (α = 0,01)
Actitud	Ninguna diferencia

Al comparar estos resultados con los previstos en la *Hipótesis 2,* se observan algunas desviaciones notables que vamos a analizar. El *rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales* se ajusta bastante a lo conjeturado aunque, otra vez, el Grupo 1 sobrepasa al Grupo 2, debido, como suponíamos antes, a que se ha producido una mayor orientación en el proceso instructivo que sin anular el descubrimiento, produce más cantidad de conocimientos y, además, aprendidos significativamente.

En el *aprendizaje de algoritmos,* la superioridad del Grupo 1 sobre el Grupo 2, que no era ostensible al acabar el período instructivo, ahora se hace significativa en contra de la igualdad conjeturada. La explicación puede encontrarse en el menor número de tareas algorítmicas que se realizan con la segunda metodología. La misma argumentación puede explicar la superioridad obtenida por el grupo de control.

El resultado relativo a la *resolución de problemas* es, sin duda, el más sorprendente pues refuta frontalmente la conjetura formulada en la hipótesis 2, por colocar al Grupo 2 en el nivel más bajo de rendimiento cuando debería esperarse todo lo contrario, dada la metodología seguida. Creemos que alguna variable extraña, focalizada en las circunstancias de aplicación de la prueba, debió de influir en este resultado. En cualquier caso, puesto que las investigaciones realizadas sobre este punto, en condiciones contextuales semejantes, son muy escasas, sugerimos la necesidad de convertirlo en objeto de nuevos estudios.

El *rendimiento global* tampoco se ajusta a las expectativas, pues preveíamos una igualdad entre los grupos experimentales y una ventaja de ambos sobre el de control; los resultados señalan una diferencia a favor del Grupo 1 y una equivalencia entre los otros. Parece que, en general, el nivel de retención producido por la segunda metodología es semejante al producido por la metodología tradicional, aunque este resultado habría que confirmarlo con investigaciones posteriores.

Finalmente, como ocurrió antes, tampoco se apreciaron las diferencias previstas en cuanto a la *actitud*, variable que se resiste a ser modificada probablemente debido a los cortos períodos de tiempo transcurridos entre las diferentes mediciones.

7.4. Comparación del nivel de cambio conceptual

Como ya señalamos anteriormente, el nivel de cambio conceptual se estima mediante la frecuencia de aciertos en los items de la prueba sobre conceptos y estructuras conceptuales (ver apartado 6.3.1.) que contienen ideas previas erróneas. Después del estudio realizado en el apartado 4.2, escogimos como items adecuados los siguientes: 2, 9, 12, 13, 16, 18, 23, 25, 30, 32, 33, 38, 43, 48, 49, 52, 54, 55, 58 y 59.

Para comparar los niveles de cambio conceptual de los Grupos 1 y 2, utilizamos la prueba "ji-cuadrado" tomando como variable la frecuencia de aciertos/errores en las respuestas dadas a cada item por los alumnos de cada uno de esos grupos. Del mismo modo procedimos para comparar el Grupo 1 con el Grupo 3 y el Grupo 2 con el Grupo 3. Resumimos los resultados en las tablas, de las páginas siguientes donde el signo + indica una diferencia significativa ($\alpha = 0,05$) a favor del grupo que aparece escrito en primer lugar y el signo – a favor del grupo que aparece en segundo lugar.

La primera de estas tablas indica claramente que, al acabar el período instructivo:

– El porcentaje de respuestas correctas del Grupo 1 es superior al del Grupo 2 en cuatro items y el porcentaje de aciertos del Grupo 2 es superior al del Grupo 1 en un item.

– El porcentaje de respuestas correctas del Grupo 1 es superior al del Grupo 3 en doce items y el porcentaje de aciertos del Grupo 3 es superior al del Grupo 1 en un item.

– El porcentaje de respuestas correctas del Grupo 2 es superior al del Grupo 3 en siete items y el porcentaje de aciertos del Grupo 3 es superior al del Grupo 2 en un item.

COMPARACION DEL NIVEL DE CAMBIO CONCEPTUAL AL ACABAR LA EXPERIENCIA

ITEMS	Porcentaje de respuestas Correctas			Diferencias Significativas ($\alpha = 0.05$)		
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Gr. 1/2	Gr. 1/3	Gr. 2/3
2	86.67	79.31	31.71		+	+
9	51.11	20.69	25.61	+	+	
12	38.89	72.41	54.88	–	–	+
13	70	77.59	50		+	+
16	56.67	50	53.66			
18	83.33	70.69	59.76		+	
23	54.44	43.1	41.46			
25	41.11	13.79	23.17	+	+	
30	78.89	68.97	54.88		+	
32	61.11	50	35.37		+	
33	91.11	81.03	29.27		+	+
38	86.67	77.59	93.9			+
43	55.56	22.41	39.02	+	+	–
48	46.67	31.03	32.93			
49	44.44	43.1	31.71			
52	32.22	22.41	20.73			
54	64.44	56.9	56.1			
55	77.78	67.24	59.76		+	
58	82.22	75.86	58.54		+	+
59	81.11	58.62	34.15	+	+	+

COMPARACION DEL NIVEL DE CAMBIO CONCEPTUAL A LOS DOS MESES

ITEMS	Porcentaje de respuestas Correctas			Diferencias Significativas (α = 0.05)		
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Gr. 1/2	Gr. 1/3	Gr. 2/3
2	95.56	75.86	39.02	+	+	+
9	53.33	17.24	24.39	+	+	
12	53.33	65.52	62.2			
13	70	70.69	60.98			
16	63.33	62.07	43.9		+	+
18	66.67	81.03	48.78		+	+
23	54.44	48.28	32.93		+	
25	45.56	15.52	29.27	+	+	
30	74.44	84.48	57.32		+	+
32	62.22	39.66	34.15	+	+	
33	98.89	81.03	43.9	+	+	+
38	87.78	87.93	91.46			
43	62.22	22.41	34.15	+		
48	40	31.03	29.27			
49	58.89	31.03	54.88	+		–
52	48.89	25.86	43.9	+		–
54	58.89	65.52	59.76			
55	68.89	58.62	56.1			
58	62.22	67.24	52.44			
59	60	58.62	32.93		+	

Estas conclusiones corroboran la *Hipótesis 3* en cuanto a los resultados previstos al acabar la experimentación: Se produce un nivel de cambio conceptual análogo en los dos grupos experimentales, que es superior al del grupo de control.

De la segunda tabla pueden obtenerse las siguientes conclusiones sobre el cambio conceptual a los dos meses:

– El porcentaje de respuestas correctas del Grupo 1 es superior al del Grupo 2 en ocho items.

– El porcentaje de respuestas correctas del Grupo 1 es superior al del Grupo 3 en once items.

– El porcentaje de respuestas correctas del Grupo 2 es superior al del Grupo 3 en seis items y el porcentaje de aciertos del Grupo 3 es superior al del Grupo 2 en dos items.

Estas conclusiones corroboran parcialmente la *Hipótesis 3* en cuanto a los resultados previstos a los dos meses: en lugar de un nivel análogo en los grupos experimentales, se observa un predominio del Grupo 1 sobre el Grupo 2; se confirma la superioridad del Grupo 1 sobre el Grupo 3 pero disminuye bastante la del Grupo 2 sobre el Grupo 3.

Un análisis minucioso de las dos tablas anteriores todavía permite extraer algunos otros resultados interesantes. Por ejemplo, se observa que las dos metodologías experimentales, aunque consiguen cambiar casi todas las ideas previas erróneas, todavía son incapaces de conseguir que la mayoría de los alumnos superen estas tres:

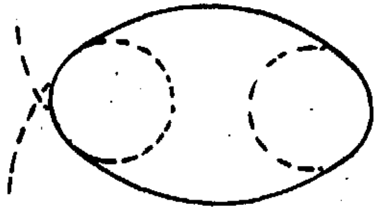
– Una parábola puede construirse perfectamente empleando sólo la regla, el compás y el lápiz (item 25).

– Una parábola no tiene infinitas ecuaciones no equivalentes entre sí (item 48).

– Una parábola se define así: es una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función (item 52).

Por su parte, la mayoría de los alumnos del grupo de control mantiene esas tres ideas previas erróneas y además las siguientes:

– La figura siguiente podría ser una elipse (item 2):



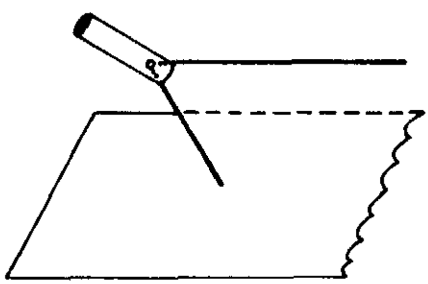
– Una elipse o una hipérbola pueden dibujarse perfectamente empleando sólo la regla, el compás y el lápiz (items 9 y 43).

– Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro (item 23).

– Los huevos de gallina tienen forma de elipsoide (item 32).

– Una horquilla de pelo como la de la siguiente figura, tiene forma de parábola (item 33).

– Si cortamos una superficie cónica con un plano paralelo a una generatriz, obtenemos una curva que no es del mismo tipo que la obtenida iluminando una hoja de papel con una linterna inclinada según muestra la siguiente figura (item 59).



Esto demuestra, una vez más, la resistencia al cambio que ofrecen este tipo de ideas y la necesidad de contar con ellas para que la enseñanza sea realmente eficaz.

7.5. Interacción entre las metodologías y las características de los alumnos

Para estudiar las interacciones entre las metodologías y los diferentes tipos de alumnos según su sexo, estilo cognitivo, inteligencia general, nivel de instrucción previa y actitud hacia las matemáticas, realizamos varios *análisis de la varianza* de dos factores, tomando como primer factor los grupos (metodologías) y como segundo factor la variable correspondiente, codificando las cuantitativas en dos o tres categorías de acuerdo con los siguientes criterios:

Estilo cognitivo (criterio de separación: mediana)
Bajo (dependientes de campo): Puntuación menor o igual que 15.
Alto (independientes de campo): Puntuación mayor o igual que 16.

Inteligencia general (criterio de separación: cuartiles)
Baja: Puntuación menor o igual que 20.
Media: Puntuación entre 21 y 26.
Alta: Puntuación mayor o igual que 27.

Nivel de instrucción previa (criterio de separación: cuartiles)
Baja: Puntuación menor o igual que 2,80.
Media: Puntuación entre 2,81 y 4,50.
Alta: Puntuación mayor o igual que 4,51.

Actitud (criterio de separación: mediana)
Negativa: Puntuación menor o igual que 3,13.
Positiva: Puntuación mayor que 3,13.

Se tomaron como variables dependientes las diez que se refieren a rendimientos y actitudes, de manera que realizamos 50 análisis de la varianza. Sólo se han obtenido interacciones significativas ($\alpha = 0{,}05$) con las siguientes variables:

Sexo: respecto del rendimientEos global y en resoluctiión de problemas al acabar la experiencia.

Tabla Anova para 2-factor Análisis de Varianza sobre Y_3: R. Probl.F.

Fuente	gl:	Suma Cuadrát.:	Cuadr. Medios:	Test-F:	Valor p:
Grupo (A)	2	104.337	52.168	1.874	.1559
Sexo (B)	1	482.196	482.196	17.323	1.0E-4
AB	2	179.127	89.564	3.218	.0419
Error	224	6235.029	27.835		

Rendimiento Problemas Final

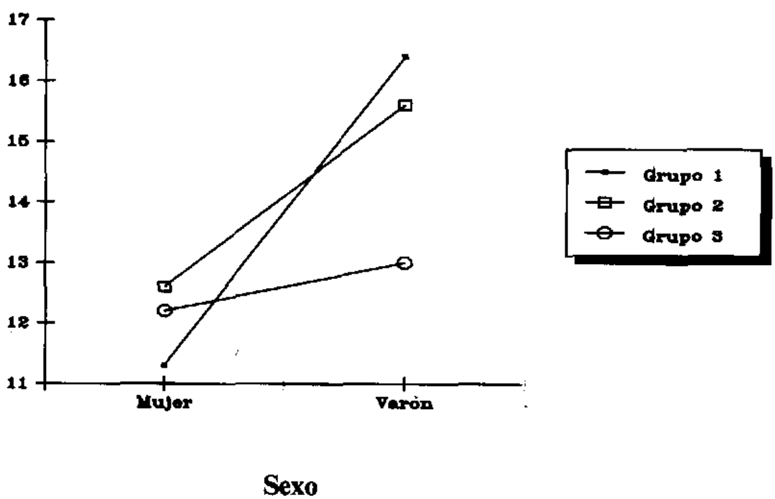
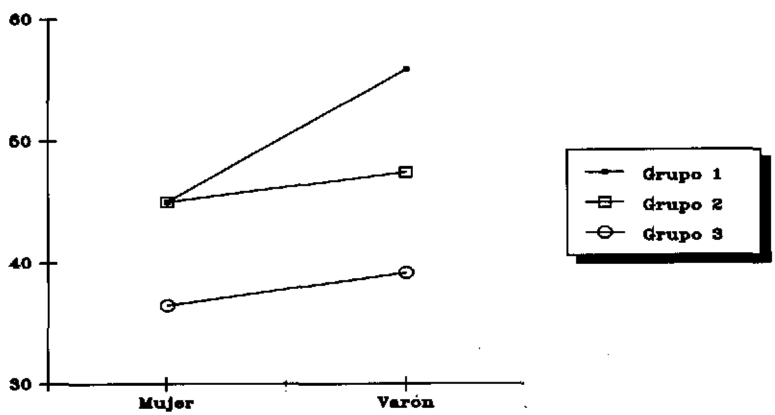


Tabla Anova para 2-factor Análisis de Varianza sobre Y_4: R. Glob.F.

Fuente	gl:	Suma Cuadrát.:	Cuadr. Medios:	Test-F:	Valor p:
Grupo (A)	2	5572.168	2786.084	13.227	1.0E-4
Sexo (B)	1	1782.199	1782.199	8.461	.004
AB	2	1502.309	751.154	3.566	.0299
Error	224	47181.345	210.631		

Rendimiento *Global Final*



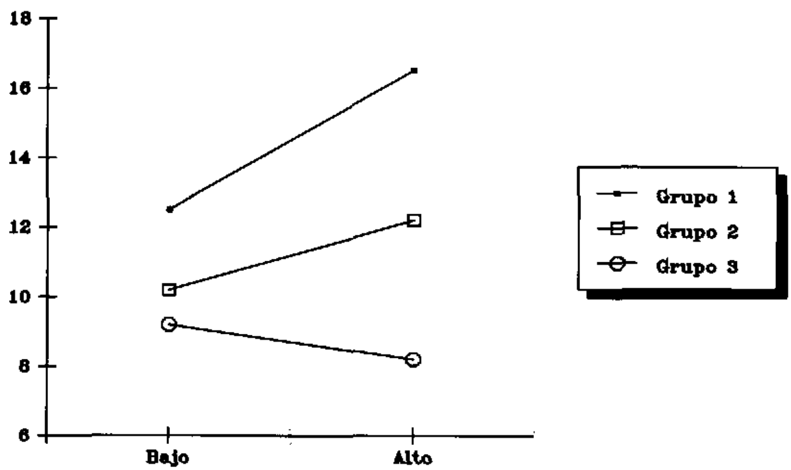
Sexo

Estilo cognitivo: respecto del rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales a los dos meses.

Tabla Anova para 2-factor Análisis de Varianza sobre Y_6: R. Conc.2m.

Fuente	gl:	Suma Cuadrát.:	Cuadr. Medios:	Test-F:	Valor p:
Grupo (A)	2	1393.24	696.62	23.831	1.0E-4
Est. Cogn. Codif. (B)	1	163.145	163.145	5.581	.019
AB	2	272.092	136.046	4.654	.0105
Error	224	6547.802	29.231		

Rendimiento Conceptos 2 M.



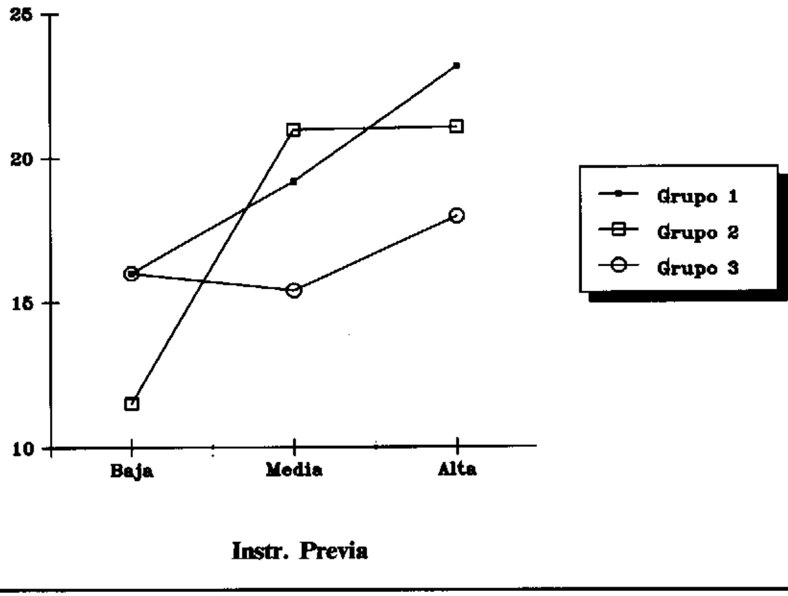
Estilo Cognitivo

Nivel de instrucción previa: respecto del rendimiento en procedimientos algorítmicos al acabar la experiencia.

Tabla Anova para 2-factor Análisis de Varianza sobre Y_2: R. Algo.F.

Fuente	gl:	Suma Cuadrát.:	Cuadr. Medios:	Test-F:	Valor p:
Grupo (A)	2	342.482	171.241	3.693	.0264
Instr. Prev. Codif. (B)	1	1437.747	718.873	15.504	1.0E-4
AB	2	551.879	137.97	2.976	.0202
Error	224	10247.158	46.367		

R. Algoritmos F.

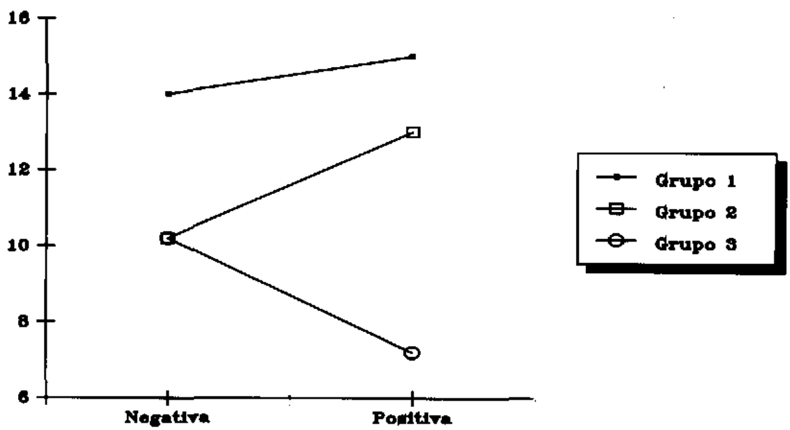


Actitud: respecto del rendimiento en conceptos y estructuras conceptuales a los dos meses.

Tabla Anova para 2-factor Análisis de Varianza sobre Y_6: R. Conc.2m.

Fuente	gl:	Suma Cuadrát.:	Cuadr. Medios:	Test-F:	Valor p:
Grupo (A)	2	1311.578	655.789	21.939	1.0E-4
Actitud. Cod. (B)	1	1.542	1.542	.052	.8205
AB	2	300.045	150.023	5.019	.0074
Error	224	6695.568	29.891		

Rendimiento Conceptos 2 M.



Actitud

Estos resultados y el análisis de todos los gráficos permiten realizar algunas inferencias:

1. La segunda metodología tiende a favorecer más a las mujeres en su aprendizaje a corto plazo, pero no en la retención. A los hombres, en general, les favorece más la primera metodología.
2. En el rendimiento conceptual a largo plazo, la primera metodología favorece a los independientes de campo pero la tradicional les desfavorece.
3. La metodología tradicional favorece más el aprendizaje a corto plazo de procedimientos algorítmicos en los alumnos con un nivel bajo de instrucción previa; pero en los de nivel medio y alto influyen más las dos metodologías experimentales.
4. La metodología tradicional desfavorece el aprendizaje de los alumnos con una actitud positiva hacia las matemáticas.

Estos resultados corroboran parcialmente la *Hipótesis 4* ya que se han encontrado algunas de las interacciones previstas, aunque no todas.

El resultado relativo al estilo cognitivo indica que para el aprendizaje conceptual a largo plazo de los sujetos independientes de campo la metodología expositiva tradicional es poco eficaz en comparación con las otras dos experimentales. Este resultado y la tendencia observada en los otros aprendizajes corrobora, entre otras, las conclusiones de McLeod y Adams (1977,1979) en el sentido de que el grado de orientación externa influye sobre el rendimiento de los sujetos según sea su estilo cognitivo: los independientes de campo aprenden mejor con poca orientación externa. Ahora bien, nuestros resultados matizan aún más esta conclusión. En efecto, las dos metodologías experimentales producen mejores rendimientos que la tradicional pero, entre ellas, es más eficaz la primera que la segunda; puesto que la primera es una metodología más orientada, esto sugiere que existe un cierto intervalo en la magnitud de la orientación fuera del cual una metodología didáctica podría resultar poco eficaz.

La interacción con el nivel de conocimientos previos, en el sentido de que la metodología tradicional favorece el aprendizaje de algoritmos en alumnos con un nivel bajo de conocimientos previos, puede explicarse porque la enseñanza por descubrimiento potencia más la comprensión de los procedimientos algorítmicos que su práctica; cuando el nivel de conocimientos previos es bajo, puede no producirse esa comprensión y el aprendizaje es deficiente; en cambio, la enseñanza expositiva tradicional suple esta deficiencia con abundantes ejercicios rutinarios que, mecánicamente, pueden conducir al aprendizaje a corto plazo de la práctica correcta del algoritmo pero no a su justificación; prueba de ello es que esta interacción desaparece en el aprendizaje a largo plazo.

Finalmente, la interacción obtenida con la variable actitud era de esperar: a los alumnos con una actitud positiva les favorece más la enseñanza por descubrimiento que la enseñanza tradicional ya que, en el primer caso, tienen más oportunidades de investigar, de construir conceptos y estructuras conceptuales por sí mismos, lo cual les permite poner en juego muchas de sus predisposiciones y actitudes que estimulan el aprendizaje.

Todavía puede obtenerse alguna información más de los análisis de varianza efectuados como, por ejemplo, las diferencias observadas en las categorías del segundo factor. He aquí una tabla resumiendo estos resultados:

DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS EN EL SEGUNDO FACTOR

SEGUNDO FACTOR	VARIABLES DEPENDIENTES									
	RENDIMIENTOS ACABAR LA EXPERIENCIA					RENDIMIENTOS A LOS DOS MESES				
	Concep.	Algor.	R. Probl.	Glob.	Actit.	Concep.	Algor.	R. Probl.	Glob.	Actit.
SEXO	*		**	**				**	*	
ESTILO COGNITIVO	**	*	**	**		*	*	**	**	
INTELIGEN. GENERAL	*	**	**	**			*	*	**	
NIVEL DE INSTRUCCION PREVIA	**	**	**	**	**	**	**	**	**	
ACTITUD					**					

* Significativo al 95%

** Significativo al 99%

Llaman la atención las diferencias observadas en el factor sexo a favor de los varones (comprobadas también en otros trabajos: Bethencourt y Torres, 1987) y las obtenidas en el factor estilo cognitivo a favor de los independientes de campo, lo que corrobora nuestra sospecha de que esta dimensión del estilo cognitivo podría influir en el aprendizaje y que, por lo tanto, debería ser considerada como una variable interviniente (ver apartado 3.2.3). Este resultado corrobora también los obtenidos por la mayoría de las investigaciones de este tipo: los sujetos independientes de campo alcanzan un rendimiento en matemáticas superior al de los dependientes de campo. Además, aquí, constatamos que esta superioridad se produce en todos los tipos de aprendizaje (conceptual, algorítmico y heurístico) y se mantiene a largo plazo.

Las diferencias entre los niveles de inteligencia y de instrucción previa son los esperados en cuanto a los rendimientos; sin embargo, es interesante señalar que no se hallan diferencias significativas en cuanto a la actitud final entre los alumnos de los tres niveles de inteligencia y sí entre los tres niveles de instrucción previa: cuanto más alto es el nivel de instrucción previa, más alta es la actitud tras el proceso de aprendizaje.

De nuevo no se aprecian diferencias entre los alumnos con actitud inicial distinta en ninguna de las variables, salvo en la propia actitud al acabar el período instructivo.

7.6. Conclusiones generales

Resumimos a continuación las principales aportaciones y conclusiones proporcionadas por el trabajo que con detalle hemos ido exponiendo en las páginas precedentes.

En primer lugar, esta investigación aporta una profunda revisión de la literatura sobre el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento en tres dominios complementarios (capítulo 1):

- evaluación comparativa de métodos instructivos
- interacción de tratamientos y características de los alumnos
- concepciones erróneas y su superación .

En segundo lugar, aporta un detallado diseño de dos metodologías didácticas distintas para el aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento, entendiendo éste como un proceso cognoscitivo que parte de la identificación de un problema y, mediante un procedimiento resolutivo al que le es consustancial la evaluación de conjeturas, autorregulado por el propio sujeto con la necesaria orientación sociocultural, produce una construcción intrapsíquica novedosa; la diferencia fundamental entre las dos metodologías estriba en el grado de orientación sociocultural del proceso de evaluación de conjeturas (capítulo 2).

En tercer lugar, proporciona un conjunto de materiales didácticos para el alumno y para el profesor que ejemplifican una aplicación de estas metodologías en el contexto educativo habitual (capítulos 4 y 5; anexo; Del Río, 1990 a y b).

En cuarto lugar, este trabajo aporta los resultados obtenidos en la experimentación de estas dos metodologías que permiten compararlas entre sí y con la metodología tradicional (capítulo 7) y cuyo resumen es el siguiente:

Comparación de rendimientos y actitud al acabar el período instructivo:

La primera metodología experimental, cuya orientación externa del proceso de aprendizaje es más fuerte, produjo mejor rendimiento que la segunda en el aprendizaje de conceptos y estructuras conceptuales ($\alpha = 0{,}01$); no se encontraron diferencias en los demás campos. Ambas metodologías superaron a la expositiva tradicional en el aprendizaje de conceptos y en el rendimiento global, pero en el aprendizaje de procedimientos algorítmicos sólo la primera obtuvo una diferencia significativa ($\alpha = 0{,}05$). No se hallaron diferencias entre las tres metodologías respecto al rendimiento en resolución de problemas y a la actitud hacia las matemáticas.

Comparación de rendimientos y actitud a los dos meses de acabar el período instructivo:

En el aprendizaje de conceptos y estructuras conceptuales, el rendimiento producido por la primera metodología fue superior al de la segunda y ambos superaron al producido por la expositiva tradicional ($\alpha = 0{,}01$). En cambio, no se encontraron diferencias en procedimientos algorítmicos y en resolución de problemas entre la primera metodología y la tradicional, pero ambas superaron a la segunda metodología (α = 0,05). En el rendimiento global, se encontraron diferencias a favor del grupo que siguió la primera metodología (α = 0,01) y ninguna entre los otros dos. En la actitud hacia las matemáticas no se encontraron diferencias.

Comparación del nivel de cambio conceptual:
Al acabar el proceso instructivo se produce un nivel de cambio conceptual análogo en los dos grupos que utilizaron las metodologías experimentales, que es superior al del grupo que utilizó la metodología expositiva tradicional. Dos meses después de finalizar el período instructivo, entre los dos grupos experimentales se produce una diferencia a favor del primero y disminuye la que existía entre el segundo y el de control.

Interacción entre metodologías y características de los alumnos:
La segunda metodología, cuya actividad fundamental es la resolución de problemas, tiende a favorecer más a las mujeres en su aprendizaje a corto plazo; a los hombres, en general, les favorece más la primera metodología.

En los independientes de campo, la primera metodología propicia el rendimiento conceptual a largo plazo.

A los alumnos con un nivel de instrucción previa bajo, les favorece más la metodología tradicional en cuanto al aprendizaje a corto plazo de procedimientos algorítmicos, mientras que en los de nivel medio y alto influyen más las dos metodologías experimentales.

La metodología tradicional desfavorece el aprendizaje de los alumnos con una actitud positiva hacia las matemáticas.

Como resumen general de las conclusiones que, sobre cada uno de estos aspectos, expusimos en el capítulo anterior, podemos decir que las metodologías expositivas tradicionales son menos eficaces que las metodologías que favorecen el aprendizaje por descubrimiento. Además, hemos constatado que la orientación sociocultural, en el aprendizaje por descubrimiento, es uno de los factores determinantes de la eficacia instructiva, alcanzando su grado óptimo en un punto intermedio que, sin anular la autorregulación interna que debe ejercer el propio sujeto sobre su proceso de aprendizaje, utilice un rico contexto de orientaciones externas expertamente estructuradas y organizadas que faciliten la evaluación de las conjeturas. Esta es la característica diferenciadora de la primera metodología y de ahí su eficacia al no discriminar a estudiantes que, por sus rasgos personales, podrían sentirse poco motivados, desbordados o inseguros ante estas metodologías. Sin embargo, como no se han encontrado resultados concluyentes en actitud y en resolución de problemas, pensamos que estas variables deben seguir siendo investigadas con diseños similares a éste pero incrementando la duración del período instructivo, factor que puede ser determinante para producir diferencias significativas.

BIBLIOGRAFIA GENERAL

AIKEN, L.R. (Jr.) (1976): "Update on attitudes and other affective variables in Learning Mathematics". *Review of Educational Research,* 46 (2), 293-311.

AIKEN, L.R. y DREGER, R.M. (1961): "The effect of attitudes on performance in mathematics". *Journal of Educational Psychology,* 52, 19-24.

ALVAREZ, A. (Comp.) (1987): *Psicología y educación: Avances y tendencias actuales en la investigación y en la práctica. Actas de las II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación.* Visor-Aprendizaje y MEC, Madrid.

ALLWOOD, C.M. (1982): "Use of knowledge and error detection when solving statistical problems", en Vermandel (Ed.): *Proceeding of the sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education,* Universitaire Instelling Antwerpen, Bélgica.

ANTHONY, W.S. (1973): "Learning to Discover Rules by Discovery". *Journal Educational Psychology,* 64, 325-28.

ARRIETA GALLASTEGUI, J. (1989): "La resolución de problemas y la educación matemática: hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo circular". *Enseñanza de las Ciencias,* 7 (1), 63-71.

ARTIGUE, M. y VIENNOT, L. (1987): "Some aspects of student's conceptions and difficulties about differentials" en NOVAK, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceeding of the International Seminar (2nd).* Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 1-8.

AUSUBEL, D.P. (1976): *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* 1ª edición. Trillas, México.

AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D. y HANESIAN, H. (1978): *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* Trillas, México.

BARRON, A. (1988): *Estudio crítico y reconstrucción teórica del aprendizaje por descubrimiento.* (Tesis doctoral). Salamanca. (Publicada en 1991 por la Universidad de Salamanca).

BAUTISTA, A. (1987): "Fundamentación de un método de enseñanza basado en la resolución de problemas". *Revista de Educación,* 282, 151-160.

BAUTISTA, A. (1987): "Estudio piloto sobre el efecto del ordenador en la adquisición de conceptos matemáticos en alumnos de 5º y 7º de EGB". *Enseñanza de las Ciencias,* 5 (3), 205-210.

BECKER, J.P.; YOUNG, C.D. (Jr.) (1978): "Designing Instructional Methods in Mathematics to Accommodate Different Patterns of Aptitude". *Journal for Research in Mathematics Education*, 9 (1), 4-19.

BELL, A. (1982): "Treating Student Misconceptions". *Australian Mathematics Teacher*, 38 (3) 11-13.

BELL, A. (1986a): "Shell Center for Mathematical Education: Estudios de enseñanza por diagnóstico". *Enseñanza de las Ciencias*, 4 (1), pp. 86-89.

BELL, A. (1986b): "Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros". *Enseanza de las Ciencias*, 4 (3), pp. 199-208.

BELL, A. (1986c): *Diagnostic Teaching: Report of an ESRC projet"*. University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education.

BELL, A. (1987): "Diseño de enseanza diagnóstica en matemáticas", en A. Alvarez (Comp.): *Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica*, VISOR-MEC, Madrid.

BELL, A.; BREKKE, G. y SWAN, M (1987): "Diagnostic Teaching". *Mathematics Teaching*, 119, 56-59.

BELL, A.; COSTELLO, J., y KUCHERMANN, D. (1983): *Research on Learning and Teaching. Part A*. NFER-NELSON, Windsor.

BENNETT, G.K.; SEASHORE, H.G. y WESMAN, A.G. (1972): *DAT. Test de Aptitudes Diferenciales*. T.E.A., Madrid.

BETHENCOURT, J.T. y TORRES, E. (1987): "La diferencia de sexo en la resolución de problemas aritméticos: un estudio transversal" *Infancia y aprendizaje*, 38, 9-20.

BIGGS, E.E. (1971): "The role of experience in the learning of mathematics". *The Arithmetic Teacher*, May 1971, 278-295.

BLANTON, F.L. (1981): "The Investigating Spirit: Resurrection in the Geometry Classroom". *Curriculum Review*, 20 (3) pp. 251-53.

BOOTH, L.R. (1982): "Developing a teaching module in beginning Algebra", en A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Universitaire Instelling, Antwerp, Bélgica.

BORASI, R. (1985): "Errors in the Enumeration of Infinite Sets". *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 7 (3-4), pp. 77-89.

BRANSFORD, J.D. y STEIN, B.S. (1986): *Solucin IDEAL de problemas*. Labor, Barcelona.

BROWN, S. (1971): "Learning by Discovery in Mathematics: Rationale, Implementation and Misconception". *Educational Theory*, 21 (3), 232-60.

BRUNER, J.S. (1961): "The act of discovery". *Harvard Educatinal Rev.*, 31 (1), 21-32.

BRUNER, J.S. (1964): "Some Theorems on Instruction Illustrated with Reference to Mathematics", en Hilgard, E.R. (Ed.), *Theories of Learning and Instruction*, National Society for the Study of Education, Chicago, 306-35.

BUTTS, T. (1980): "Posing Problems Properly", en Krulik, S. y Reys, R. (Ed.): *Problem Solving in School Mathematics*, N.C.T.M., Reston, 23-33.

CASTELNUOVO, E. (1970): *Didáctica de la matemática moderna*. Trillas, México.

CATTELL, R.B. y CATTELL, A.K.S. (1977): *Tests de factor "g", escalas 2 y 3.* T.E.A., Madrid.

CLEMENT, J. y otros (1985): *Adolescents' Graphing Skills: A Descriptive Analysis*. Technical Education Research Center, Cambridge, Mass.

CLEMENTS, M.A. y DEL CAMPO, G. (1987): "Fractional understandig of fractions: Variations in children's understanding of fractional concepts, across embodiments (Grades 2 through 5)" en NOVAK, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd)*, Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 98-110.

CLOSE, G.S. (1982): *Children's Understanding of Angle at the Primary/Secondary Transfer Stage*. Polytechnic of the South Bank, London (England).

CLUTE, P. (1984): "Mathematics Anxiety, Instructional Method, and Achievement in a Survey Course in College Mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (1), 50-58.

COCKCROFT (Informe) (1985): *Las matemáticas si cuentan*. MEC, Madrid.

COSTA, A.L. (1981): "Teaching for intelligent behavior". *Educational Leadership*, 39, 29-32.

CRONBACH, L.J. y SNOW, R.E. (1977): *Aptitudes and instructional methods*. Irvington, New York.

DE BONO, E. (1968): *New think. The use of lateral thinking in the generation of new ideas*. Basic Books, Nueva York.

DEL RIO S., J. (1990 a): *Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de las cónicas. Libro del alumno*. I.U.C.E., Salamanca.

DEL RIO S., J. (1990 b): *Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de las cónicas. Guía del profesor*. I.U.C.E., Salamanca.

DOMENECH, J.M. (1975): *Métodos estadísticos para la investigación en Ciencias Humanas*. Herder, Barcelona.

DRIVER, R. (1988): "Un enfoque constructivista para el desarrollo del currículo en ciencias", *Enseanza de las Ciencias*, 6 (2), 109-120.

EGAN, D.E. y GREENO, J.G. (1973): "Acquiring cognitive structure by discovery and rule learning". *Journal of Educational Psychology*, 64, 85-97.

ERNEST, P. (1984): "Mathematical Induction: A Pedagogical Discussion". *Educational Studies in Mathematics*, 15 (2) 173-89.

FINEGOLD, M. y AVITAL, S. (1976): "Enquiry, Discovery and Research: Terminology and Meaning". *Educational Studies in Mathematics*, 7 (4) 389-397.

FORMAN, E.A. y CAZDEN, C.B. (1984): "Perspectivas vygotskianas en la educación: el valor cognitivo de la interacción entre iguales". *Infancia y Aprendizaje*, 27-28, 139-157.

FOXMAN, D. y RUDDOCK, G. (1984): "Concepts and Skills: Line Symmetry and Angle". *Mathematics in School*, 13, 9-13.

FRANK, M.L. (1988): "La resolución de problemas y las creencias matemáticas". *Arithmetic Teacher*, enero 1988.

GADANIDIS, G. (1988): "Problem Solving: The Third Dimension in Mathematics Teaching". *Mathematics Teacher*, 81 (1), 16-21.

GAGNE, R.M. (1974): "Diversas especies de aprendizaje y el concepto de descubrimiento", en L.S. Shulman y E.R. Keislar, *Aprendizaje por descubrimiento*. Trillas, México, 167-175.

GAGNE, R.M. y BROWN, L.T. (1961): "Some factors in the programming of conceptual learning". *Journal of Experimental Psychology*, 62, 313-321.

GAIRIN, J. (1987): *Las actitudes en educación*, PPU, Barcelona.

GARRET, H.E. (1966): *Estadística en Psicologa y Educación*. Paidós, Buenos Aires.

GRUPO AZARQUIEL (1987): "Análisis de los errores en la adquisición de los conceptos matemáticos" en A. Alvarez (Comp.): *Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica*, Visor-MEC, Madrid.

GRUPO ZERO (1982): "Metodologia: La resolución de problemas". *Cuadernos de Pedagoga*, 88, 9-11.

GUZMAN, M. de (1987): "Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas", en *Aspectos didácticos de Matemáticas 2*, I.C.E., Zaragoza.

HART, K.M. (ed.) (1981): *Children's Understanding of Mathematics 11-16*. Murray, Londres.

HARTUNG, M.L. (1971): "The role of experience in the learning of mathematics". *The Arithmetic Teacher*, Mayo 1971, 279-284.

HELM, H. y NOVAK, J. (Ed.) (1983): *Misconceptions in Science and Mathematics. Proceeding of the International Seminar (Cornell University, Ithaca, June, 1983)*. Cornell University, Ithaca, New York.

HENDRIX, G. (1961): "Learning by discovery". *The Mathematics Teacher*, 54 (5), 290-299.

HERSHKOWITZ, R. (1987): "The acquisition of concepts and misconceptions in basic Geometry or when a little learning is dangerous thing ", en Novak, J. (Ed.): *Misconcetions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd)*, Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 238-251.

HIELE, P.M. (1986): *Structure and insight*. Academic Press, N. York.

HIELE, P.M. y HIELE-GELDOF, D. (1958): "A method of initiation into geometry at secondary schools", en H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of iniciation into geometry*. Wolters, Groningen, pp. 67-80.

HIRSH, C.R. (1977): "The Effects of Guided Discovery and Individualized Instructional Packages on Initial Learning, Transfer, and Retention in Second-Year Algebra". *Journal for Research in Mathematics Education*, 8 (5), 359-368.

HIRST, K.E. (1981): "Undergraduate Investigations in Mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 12 (3), 373-87.

HIRSTEIN, J.; LAMB, Ch. y OSBORNE, A. (1978): "Student Misconceptions About Area Measure". *The Aritmetic Teacher*, 25 (6), 10-16.

HORAK, V.M. y ZWENG, M.J. (1978): *The Effects of Inductive-Deductive Teaching Methods and Field-Dependence-Independence Cognitive Style Upon Student Achievement in Mathematics*. Annual meeting of the NCTM.

HUGUES, B. (1974): "Heuristic Teaching in Mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 5, 291-299.

JOYCE, B. y WEIL, M. (1985): *Modelos de enseñanza*. Anaya, Madrid.

KAGAN, J. (1974): "El aprendizaje, la atención y el problema del descubrimiento", en L.S. Shulman y E.R. Keislar, *Aprendizaje por descubrimiento. Trillas, México, 176-188.*

KAVETT, H. y PHILLIS, F. (1978): "Square Dealign". *School Science and Mathematics*, 78 (5), 419-24.

KERSH, B.Y. (1958): "The adequacy of meaning as an explanation for superiority of learning by independent discovery". *Journal of Educational Psychology*, 49, 282-292.

KERSH, B.Y. (1962): "The motivating effect of learning by directed discovery". *Journal of Educational Psychology*, 53, 65-71.

KERSH, B. y WITTROCK, M. (1962): "Learning by Discovery: An Interpretation of Recent Research". *Journal of Teacher Education*, 13, 461-68.

KNIGHTS, G.J. (1981): *Teaching Aspects of Transformation Geometry*. Shell Centre for Matematical Education, University of Nottigham.

KRULIK, S. y REYS, R.E. (Ed.) (1980): *Problem Solving in School Mathematics. N.C.T.M. Yearbook 1980.* N.C.T.M., Reston, Virginia.

KRULIK, S. y RUDNICK, J.A. (1981): "Suggestions for Teaching Problem Solving. A Baker's Dozen". *School Science and mathematics,* 81 (1), 37-41.

LAMB, Ch.E. y HIRSTEIN, J.J. (1979): "Point Counting in Measurement -or- What It the Unit?". *School Science and Mathematics,* 79 (2) 168-71.

LEFCOURT, H.M. (1976): *Locus of control: Current trends in theory and research.* Erlbaum, Hillsdale, N.J.

LIBESKIND, S. (1977): "A Problem Solving Approach to Teaching Mathematics". *Educational Studies in Mathematics,* 8 (2) 168-179.

MARKS, L.K. (1980): *Meeting the Challenge: Successfully Teaching the Student of the 80's at the Conceptual Level.* Mentor Consulting, Philippi, WV.

MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1988): *Pensar matemticamente.* Labor-MEC, Barcelona.

McLEOD, D. y ADAMS, V.M. (1977): "Relating Field Independence and a Discovery Approach to Learning Mathematics: A Trait-treatment Interaction Study". *Annual Meeting of the American Educational Research Association,* New York.

McLEOD, D. y ADAMS, V. (1979): "The interaction of field dependence/independence and the level of guidance of mathematics instruction". *Journal for Research in Mathematics Education,* 10, 347-355.

McLEOD, D. y ADAMS, V. (1980a): "Aptitude-Treatment Interaction in Mathematics Instruction Using Expository and Discovery Methods". *Journal for Research in Mathematics Education,* 11 (3), 225-34.

McLEOD, D. y ADAMS, V. (1980b): "Locus of Control and Mathematics Instruction: Three Exploratory Studies". *Journal of Experimental Education,* 49 (2), 94-99.

McLEOD, D. y BRIGGS, J.T. (1980): "Interactions of field independence and general reasoning with inductive instruction in mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education,* 11, 94-103.

McLEOD, D. y OTROS (1978): "Cognitive Style and Mathematics Learning: The Interaction of Field Independence and Instructional Treatment in Numeration Systems". *Journal for Research in Mathematics Education,* 9 (3), 163-74.

MEDECI, D., SPERANZA, F. y VIGHI, P. (1986): "Sobre la formación de los conceptos geométricos y sobre el léxico geométrico". *Enseñanza de las Ciencias,* 4 (1), 16-22.

MORENO, M. y SASTRE, G. (1980): *Descubrimiento y construcción del conocimiento.* Gedisa, Barcelona.

MORINE, H. y MORINE, G. (1978): *El descubrimiento: un desafío a los profesores*. Ed. Santillana, Madrid.

MOTTERSHEAD, L. (1978): *Sources of Mathematical discovery*. B. Blackwell, Oxford.

NEWEL, A. y SIMON, H.A. (1972): *Human problem solving*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

NICKERSON, R.S.; PERKINS, D.N. y SMITH, E.E. (1987): *Enseñar a pensar*. Paidós-MEC, Barcelona.

NOVAK, J.D. (Ed.) (1987): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd, Ithaca, New York, July 26-29, 1987), vol. III*. Cornell University, Ithaca, New York.

OLANDER, H.T. y ROBERTSON, H.C. (1973): "The Effectiveness of Discovery and Expository Methods in the Teaching of Fourth-grade Mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education*, 4 (1), 33-44.

OPPENHEIM, J.R. (1987): "Patterns of Mathematical misconceptios as revealed on tests of Algebra readiness", en Novak, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd)*, Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 361-369.

ORTON, A. (1983a): "Students' Understanding of Integration". *Educational Studies in Mathematics*, 14 (1), 1-18.

ORTON, A. (1983b): "Students' Understanding of Differentiation". *Educational Studies in Mathematics*, 14 (3), 235-50.

PERRET-CLERMONT, A.-N. (1980): *Social interaction and cognitive development in children*. Academic Press, Londres.

POLYA, G. (1962-65): *Mathematical Discovery (2 vols.)*. Wiley, New York.

POLYA, G. (1965): *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

POLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos, Madrid.

POLYA, G. (1981): *Mathematical Discovery. On Understandig, Learning an Teaching Problem Solving*. Wiley & Sons, New York.

POLYA, G. y KILPATRICK, J. (1974): *The Stanford Mathematics problem Book*. New York, Teachers College Press.

POZO, J.I. y CARRETERO, M. (1987): "Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿qué cambia en la enseñanza de la ciencia?". *Infancia y Aprendizaje*, 38, 35-52.

PUIG ADAM, P. (1985): "Enseanza heurística de la Matemática", en Benavente B., J. M, y otros (coord.): *Didáctica de las Matemáticas*, Publicaciones de la NREM, Madrid.

PUIG ADAM, P. (1985): "El decálogo del profesor de Matemáticas", en Benavente B., J.M, y otros (coord.), *Didáctica de las Matemáticas,* Publicaciones de la NREM, Madrid.

RODRIGUEZ DIEGUEZ, J.L. (1980): *Didáctica General.* Kapelusz, Madrid.

ROUGHEAD, W. y SCANDURA, J. (1968): "What is learned in Mathematical discovery". *Journal of Educational Psychology,* 59, 283-289.

SALES BOLI, M. (1954): *El método de la investigación dirigida para la enseñanza de las matemáticas en el Bachillerato.* Publicación de la revista "Enseñanza Media", Madrid.

SANDERS, W.J. (1980): "Teaching Elementary Mathematics as a Science". *School Science and Mathematics,* 80 (6), 453-56.

SARRAMONA, J. (1980): *Investigación y estadística aplicadas a la educación,* CEAC, Barcelona.

SAWYER, W.W. (1983): "Some Thoughts on Education and Mathematics". *Gifted Education International,* 1 (2), 65-69.

SCOTT, J.A. (1972): *Lessons on Selected Geometry Concepts Written in Expository and Discovery Modes of Presentation and a Test of Concept Mastery.* Office of Education (DHEW), Washington, D.C.

SCHMITTAU, J. (1987): "Relating concepts to problem solving in the determination of meaning in Mathematics", en Novak, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd),* Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 426-433.

SCHOENFELD, A.H. (1979): "Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem Solving Performance". *Journal for Research in Mathematics Education,* 10 (3), 173-187.

SCHOENFELD, A.H. (1982): "Measures of Problem Solving Performance and Problem Solving Instruction". *Journal for Research in Mathematics Education,* 13 (1), 31-49.

SCHOENFELD, A.H. (1983): *Problem Solving in the mathematics curriculum: a report, recommendations and an annotated bibliography.* The Mathematical Association of America, Washington.

SCHOENFELD, A.H. (1985): *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Nueva York.

SELDEN, A. y SELDEN, J. (1987): "Errors and Misconceptions in College level Theorem proving", en Novak, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd).* Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 457-470.

SHAUGHNESSY, J.M. (1981): "Misconceptions of probability: from systematic errors to systematic experimentsand decision", en *Teaching Statistics and Probability. Yearbook.* NCTM, 90-99.

SHAUGHNESSY, J.M. (1982): "Misconceptions of probability, systematic and other-wise; teaching probability and statistics so as to overcome some misconceptions", en *Proceedings of ICOTS,* Universidad de Sheffield, vol II. 784-801.

SHUFELT, G. y SMART, J.R. (Ed.) (1983): *The Agenda in Action (1983 Yearbook).* N.C.T.M., Reston, Virginia.

SHULMAN, L. (1970): "Psychology and mathematics education", in *Mathematics Education, 69th Yearbook of the National Society for the Study of Education.*

SHULMAN, L.S. y KEISLAR, E.R. (eds.) (1966): *Learning by Discovery: A Critical Appraisal.* Rand McNally, Chicago (*Aprendizaje por descubrimiento.* Trillas, México, 1974).

SIEGEL, S. (1978): *Estadística no paramétrica.* Trillas, México.

SIMON, M.A. (1986): "The Teacher's Role in Increasing Student Understanding of Mathematics". *Educational-Leadership,* 43 (7), 40-43.

SNOW, R.E. (1974): "Representative and quasi-representative designs for research on teaching". *Review of Educational Research,* 44 (3), 265-91.

STENHOUSE, L. (1987): *La investigación como base de la enseñanza.* Morata, Madrid.

SWAN, M. (1989): *El lenguaje de funciones y gráficas.* Universidad del País Vasco, Servicio Editorial, Bilbao.

TATSUOKA, K.K. (1984): *Analysis of Errors in Fraction Addition and Subtraction Problems. Final Report.* National Inst. of Education, Washington, D.C.

TEJEDOR, F.J. (1984): *Análisis de la varianza aplicado a la investigación en pedagogía y psicología.* Anaya, Madrid.

THREADGILL, J.A. (1979): "The Relationship of Field-Independent/Dependent Cognitive Style and Two Methods of Instruction in Mathematics Learning". *Journal for Research in mathematics Education,* 10 (3), 219-22.

TROWN, E.A. (1970): "Some evidence on the interaction between teaching strategies an personality". *British Journal of Educational Psychology,* 40, 209-11.

TROWN, E.A. y LEITH, G.O.M. (1975): "Decision rules for teaching strategies in primary schools: personality-treatment interactions". *British Journal of Educational Psychology,* 45, 130-140.

VINNER, S. y ZUR, Ch. (1987): "Some Aspects of Geometry as a Deductive System in High School Students", en Novak, J. (Ed.): *Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd)*. Cornell Univ., Ithaca, NY, v. III, pp. 551-563.

WELKOWITZ, J., EWEN, B. y COHEN, J. (1981): *Estadística aplicada a las Ciencias de la Educación*. Santillana, Madrid.

WILLIAMS, P.D. (1983): "Discovery Learning in Remedial Mathematics: Multiple-Choice versus Written Generalization". *Mathematics and Computer Education*, 17 (3), 171-77.

WITKIN, H.A.; OLTMAN, P.K.; RASKIN, E. y KARP, S.A. (1987): *Tests de Figuras Enmascaradas*. T.E.A., Madrid.

WOODWARD, E. (1982): "Heidi's Misconception about Area and Perimeter". *School Science and Mathematics*, 82 (4) 332-334.

WOODWARD, E. y BYRD, F. (1983): "Area: Included Topic, Neglected Concept". *School Science and Mathematics*, 83 (4), 343-347.

WORTHEN, B.R. (1968): "Discovery and expository task presentation in elementary mathematics". *Journal of Educational Psychology*, 59, 1-13.

ZABALZA, M.A. (1987): *Diseño y desarrollo curricular*. Narcea, Madrid.

ZIMMERMANN, M.J. y SASSENRATH, J.M. (1978): "Improvement in Arithmetic and Reading and Discovery Learning in Mathematics". *Educational Research Quarterly*, 3 (1), 27-33.

BIBLIOGRAFIA ESPECIFICA DE LA UNIDAD TEMATICA ELABORADA

ALEKSANDROV, A.D. y otros (1973): *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza, Madrid.

ALONSO, M. y FINN, E.J. (1976): *Física* (2 vol.). Fondo Educativo Interamericano, México.

ALSINA, C. y TRILLAS, E. (1984): *Lecciones de Algebra y Geometría*. Gustavo Gili, Barcelona.

ATKINSON, D. (1987): "Spheres in a Cone; or, Proving th Conic Sections", *Mathematics Teacher*, 80 (3), 82-84.

AZCARATE JIMENEZ, C. (1985): *Los métodos matemáticos en la cinemática de Galileo y su génesis histórica*. Servicio de Publicaciones de la U. Autónoma de Barcelona, Barcelona.

BABINI, J. y REY PASTOR, J. (1984): *Historia de la matemática* (2 vol.). Gedisa, Madrid.

BIXBY, W. (1966): *El Universo de Galileo y Newton*. Timún Mas, Barcelona.

BOLT, B. (1988): *Actividades matemáticas*. Labor, Barcelona.

BOLT, B. (1988): *Divertimentos matemáticos*. Labor, Barcelona.

BOLT, B. (1988): *Más actividades matemáticas*. Labor, Barcelona.

BOLTIANSKI, V. (1977): *La envolvente*. Mir, Moscú.

BOLL, M. (1976): *Historia de las matemáticas*. Diana, México.

BOYER, C.B. (1956): *History of Analytic Geometry*. Scripta Mathematica, New York.

BOYER, C.B. (1985): *Historia de la matemática*. Alianza, Madrid.

BRUCKHEIMER, M. y HERSHKOWITZ, R. (1977): "Constructing the Parabola without Calculus". *The Mathematics Teacher*, 70 (8).

BURTON, D.M. (1985): *The History of Mathematics. An Introduction*. Allyn and Bacon Inc., Massachusetts.

CASADELLA, J. y BIBILONI, L. (1985): "La construcción histórica del concepto de fuerza centripeta en relación con las dificultades de su aprendizaje". *Enseñanza de las Ciencias,* 3 (3), 217-224.

CASSINELLO PEREZ, F. (1974): *Construcción Hormigonera.* Rueda, Madrid.

CASTELNUOVO, E. (1963): *Geometría intuitiva.* Labor, Barcelona.

CASTELNUOVO, E. (1970): *Didáctica de la Matemática Moderna,* Trillas, México.

CASTELNUOVO, E. (1981): *La geometría,* Ketres, Barcelona.

CASTELNUOVO, E.; GORI-GIORGI, C. y VALENTI, D. (1984): *La matemática nella realtá* (3 vol.). La Nuova Italia, Florencia.

CASTELNUOVO, E.; GORI-GIORGI, D. et C. (1979): "Coniques et Gravitation Universelle". *Educational Studies in Mathematics,* 10 (3), 323-359.

CASTELNUOVO, E.; GORI-GIORGI, D. et C. (1979): "Le lancement des projectiles". *Educational Studies in Mathematics,* 10 (2), 147-159.

CATRANIDES, P. (1978): "Beyond the Parabolic Envelope". *Mathematics Teaching,* 85, 41-44.

COLLETE, J.P. (1985): *Historia de las matemáticas.* Siglo XXI, Madrid.

Cómo funciona. Enciclopedia Salvat de la técnica (10 vól.) (1979). Salvat, Navarra.

COOLIDGE, J.L. (1949): *The Mathematics of Great Amateurs.* Clarendon, Oxford.

COOLIDGE, J.L. (1963): *A History of Geometrical Methods.* Dover, Nueva York.

COOLIDGE, J.L. (1968): *A History of the Conic Sections and the Quadric Surfaces.* Dover, Nueva York.

COURANT, R. y ROBBINS, H. (1974): *Qué es la matemática?* Aguilar, Madrid.

CUNDY, H.M. y ROLLET, A.P. (1970): *Modèles Mathèmatiques.* CEDIC, París.

DEL RIO SANCHEZ, J. (1981): *Ideas Metodológicas sobre el desarrollo de la Geometría en el Bachillerato.* ICE, Salamanca.

DIEUDONNE, J. (1986): *Abregé d'Histoire des Mathèmatiques.* Herman, Paris.

EFIMOV, N. (1970): *Formas cuadráticas y matrices.* Mir, Moscú.

EHRHART, E. (1982): "L'oeuf géométrique". *Boulletin de l'APMEP,* 336, 779-782.

ENGEL, H. (1970): *Sistemas de estructuras.* Blume, Madrid.

EVES, H. (1976): *An introduction to the history of mathematics.* Holt, Rinehart and Winston, Nueva York.

FRIEDLANDER, A. y otros (1982): "Parallel Coordinate Axes". *Mathematics Teaching*, 99, 44-48.

GAMOW, G. (1971): *Biografía de la Física*. Salvat, Madrid.

GARDNER, M. (1972): *Nuevos pasatiempos matemáticos*. Alianza, Madrid.

GARDNER, M. (1977): "On conic sections, ruled surfaces and other manifestations of the hyperbola". *Scientific American*, Septiembre 1977, 24-42.

GARDNER, M. (1980): "Huevos de Pascua: cocidos, crudos, a la vinagreta y, por qué no?, matemáticos". *Investigación y Ciencia*. Junio 1980, 114-120.

GARDNER, M. (1981): "La parábola: curva abstracta que se adapta bien al mundo concreto". *Investigación y Ciencia*. Octubre 1981, 118-124.

GAUTHIER, R. (1978): "Matériaux pour une classe de seconde A". *Boulletin de l'APMEP*, 314, 539-554.

GREIG, D.J. y WALSH, B.J. (1979): "Evading co-ordinate geometry: a cautional tale". *Int. J. Educ. Sci. Technol.*, 10 (4), 545-548.

GRUPO CERO (1982): *Matemáticas 3ºBUP. Geometría y Cónicas*. ICE, Valencia.

GUZMAN, M. de (1976): *Mirar y ver*. Alhambra, Madrid.

GUZMAN, M. de (1984): *Cuentos con cuentas*. Labor, Barcelona.

GUZMAN, M. de (1987): *Aventuras matemáticas*. Labor, Barcelona.

GUZMAN, M.; COLERA, J. y SALVADOR, A. (1988): *Matemáticas Bachillerato (3 vol.)*. Anaya, Madrid.

HEATH, T. (1981): *A History of Greek Mathematics*. Dover, New York.

HEART, T. (1981): *Aristarchus of Samos: The Ancient Copernicus*. Dover, Nueva York.

HIRST, K. (1981): "Curves and Parameters". *Mathematics Teaching*, 96, 56-58, 60-61.

JIMENEZ, P.; GARCIA, A. y MORAN, F. (1979): *Hormigón Armado*. Gustavo Gili, Barcelona.

KANTER, L.H. (1973): "A Note on the Optical Property of the Ellipse", *School Science and Mathematics*, 73 (4), 270-272.

KASNER, E. y NEWMAN, J. (1987): *Matemáticas e Imaginación*. Orbis, Barcelona.

KENNEDY, R.E., COOPER C.N., y GOODMAN, T.A. (1983): "Chords, Arcs and Iteration". *School Science and Mathematics*, 83 (4), 318-325.

KENTMOORE, H. (1982): "A Carbon Paper Trajectory Simulator". *School Science and Mathematics*, 82 (4), 311-316.

KIMBERLING, C. (1984): "Microcomputer-Assisted Discoveries: Conics". *Mathematics-Teacher*, 77 (5), 363-68.

KITTEL, Ch.; KNIGHT, W.D. y RUDERMAN, M.A. (1968): *Mecánica, vol. 1 (Berkeley Physics Course)*. Reverté, Barcelona.

KLINE, M. (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, Nueva York.

KLINE, M. (1981): *Mathematics and the physical world*. Dover, New York.

KOEHLER, V. (1977): "The Algebraic Relationships Between the Conic Sections, or a Far-Out Ellipse is a Parabola". *MATYC-Journal*, 11 (3), 205-7, 213.

LEAPFROGS GROUP (1979): *Conics*. Leapfrogs, Cambridge.

LEAPFROGS GROUP (1982): *Curves*. Leapfrogs, Cambridge.

LIBESKIND, S. (1981): "Certain Properties of the Parabola Proved by Synthetic Methods". *School Science and Mathematics*, 81 (6), 473-479.

LIUSTERNIK, L.A. (1979): *Lineas más cortas. Problemas de variaciones*. Mir, Moscú.

LOCKWOOD, E.H. (1961): *A Book of Curves*. Cambridge University Press, Cambridge.

LYNG, M.J. (1978): *Dancing Curves: A Dynamic Demonstration of Geometric Principles*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, Va.

MALETSKY, E.M. (1973): "Conics From Straight Lines and Circles: Parabolas". *Mathematics-Teacher*, 66 (3), 243-46.

MAOR, E. (1978): "Line equations of curves: duality in analytic geometry". *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 9 (3), 311-322.

MARKUSHEVICH, A.I. (1977): *Curvas maravillosas. Números complejos y representaciones conformes. Funciones maravillosas*. Mir, Moscú.

MATAIX, M. (1986): *Historias de Matemáticas y algunos problemas*. Marcombo, Barcelona.

O'DAFFER, P.G. y CLEMENS, S.R. (1977): *Geometry: an investigative approach*. Addison-Wesley, Massachusetts.

PARR, J.M. (1977): "Conic Curves as Conceived by the Greeks". *School Science and Mathematics*, 77 (3), 214-226.

PEDOE, D. (1979): *La geometría en el arte*, Gustavo Gili, Barcelona.

PICKERT, G. (1971): "The Introduction of Metric by the Use of Conics". *Educational Studies in Mathematics*, 4 (1), 31-47.

PUIG ADAM, P. (1956): *Didáctica matemática eurística*. Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, Madrid.

PUIG ADAM, P. (1958): *El material didáctico matemático actual. Revista Enseñanza Media,* Madrid.

PUIG ADAM, P. (1969): *Geometría métrica* (2 vól.) Biblioteca Matemática, Madrid.

RIBNIKOV, K. (1987): *Historia de las matemáticas,* Mir, Moscú.

ROSE, K. (1974): "New Conic Graph Paper". *Mathematics Teacher,* 67 (7), 604-606.

SAGAN, C. (1985): *Cosmos.* Planeta, Barcelona.

SALMON, G. (1960): *Conic sections.* Chelsea, New York.

SAUVY, J. (1983): *Mystère et beauté de la géométrie: l'Ellipse* (Exposición).

SEYMOUR, D., SILVEY, L. y SNIDER, J. (1974): *Line Desings.* Creative Publications, Palo Alto.

SHILGALIS, T.W. (1985): "Conics and Finite Geometries". *Mathematics and Computer Education,* 19 (1), 39-44.

SHWARGER, M. (1972): "Parametric Construction of the Conics". *Mathematics Teacher,* 65 (2), 105-109.

SIMON, G. (1979): *Kepler astronome astrologue.* Gallimard, Pars.

SOMERWELL, E.L. (1975): *A Rhytmic Aproach to Mathematics.* N.C.T.M., Reston, Virginia.

SPAIN, B. (1957): *Analytic conics.* Pergamon, New York.

STEINHAUS, H. (1986): *Instantáneas Matemáticas.* Salvat, Barcelona.

SYMON, K.R. (1968): *Mecánica.* Aguilar, Madrid.

TATON, R. (1988): *Historia General de las Ciencias* (18 v.). Orbis, Madrid.

VAN DER WAERDEN, B.L. (1985): *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Springer-Verlag. New York y Berlín.

VERNO, C.R. (1974): "The Golden Section and Conic Sections". *Mathematics Teacher,* 67 (4), 361-363.

ANEXO

LIBRO DEL ALUMNO
(SEGUNDA METODOLOGIA)

INTRODUCCION

Cuando una persona construye o descubre los conocimientos por sí misma, entonces no olvida tan fácilmente lo aprendido, pues el esfuerzo por descubrir se lo compensa la permanencia de lo descubierto. Resolviendo los problemas de las páginas que siguen, vas a descubrir por ti mismo los conceptos, las fórmulas y las propiedades de una clase muy importante de curvas: las cónicas.

Ya sabes que no hay reglas infalibles que conduzcan a la resolución de todos los problemas; sin embargo, existen unas normas de conducta que favorecen la resolución de un problema:

- lee el enunciado atentamente (dos veces por lo menos);
- siente curiosidad y deseo por resolver el problema;
- concéntrate en la tarea y no pienses en otra cosa;
- no abandones; emplea todo el tiempo que sea necesario hasta que llegue la "idea brillante";
- para provocar, propiciar, facilitar esa llegada, puedes seguir las estrategias señaladas en las hojas siguientes, según el tipo de problemas que trates de resolver; también te pueden ayudar los libros, pero, ¡ojo!, nunca utilices fórmulas, propiedades, construcciones, etc. que no seas capaz de comprender y demostrar, pues te convertirías en una "fotocopiadora" que reproduce sin pensar ni entender lo que está haciendo;
- escribe con detalle la resolución del problema; aunque no llegues a la solución completa, describe los caminos, estrategias que intentaste para resolverlo; explica todo lo que haces y por qué lo haces;
- cada cierto tiempo, habrá una puesta en común de los resultados obtenidos por todos los grupos.

Este método de aprendizaje requiere que el ritmo de trabajo sea constante. Todos los días hay que dedicarle un tiempo (más o menos largo) a la materia, tanto en clase como en casa. La razón es muy sencilla: a través de cada problema vas a descubrir conceptos, propiedades y estrategias que te servirán para resolver los siguientes. Tú sabes que las matemáticas no se "digieren" en una sola tarde: es imprescindible tomarlas en dosis cortas durante todos los días.

A continuación encontrarás una guía con reglas generales que te ayudarán a resolver los tres tipos fundamentales de problemas que aparecen en este tema.

GUIA PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

PROBLEMAS DE DETERMINACION

Son aquellos problemas cuyo enunciado puede transformarse en uno del tipo siguiente:

Halla, construye, determina, busca, traza, encuentra, etc., un punto, una recta, una curva, un segmento, un lugar geométrico, etc. (por su dibujo o por su ecuación) que verifique la o las condiciones...

Para resolverlo es conveniente seguir las siguientes etapas:

1. Comprender el problema

Para esto es necesario leer atentamente el enunciado,ordenar, resumir y organizar la información (mediante símbolos, dibujos, tablas, etc) y contestar claramente a las siguientes preguntas:

1.1. ¿Cuál es la incógnita, qué nos pide el problema?

1.2. ¿Cuáles son los datos?

1.3. ¿Qué condiciones tiene que verificar la incógnita?

2. Concebir un plan de resolución

Algunas de las siguientes estrategias, o varias de ellas combinadas, te pueden ayudar a encontrar un plan para resolver el problema:

2.1. Si es posible, dibuja una figura o construye un modelo material con toda la precisión que puedas.

2.2. Trata de buscar alguna definición o alguna propiedad que relaciones los datos con la incógnita.

2.3. Elige, si es posible, un sistema de referencia adecuado.

2.4. Trata de buscar un problema ya resuelto que tenga una incógnita o una condición igual o parecida; si lo encuentras, analiza en qué se parecen y en qué se diferencian e intenta aprovechar el resultado o bien el método de resolución.

2.5. Si no puedes resolver el problema tal como está propuesto, trata de resolver primero algún caso particular o trata de resolver un problema análogo pero en una situación más sencilla.

2.6. Piensa en las condiciones. ¿Qué significan? ¿A qué otras condiciones son equivalentes? Trata de expresarlas de otra manera. Trata de encontrar una relación de los datos con las condiciones.

2.7. Si la incógnita debe verificar más de una condición, toma sólo una de ellas y estudia en qué medida queda determinada la incógnita. Luego considera las demás condiciones.

2.8. Busca otros datos que te harían falta para determinar la incógnita. Trata de relacionarlos con los que te da el problema.

2.9. Haz una conjetura y trata de corroborarla o refutarla.

3. Ejecutar el plan

Al ejecutar un plan concebido en la etapa anterior, demuestra que todos los pasos son correctos; repásalos para corregir posibles errores en las operaciones o en el razonamiento. Si el plan conduce a la solución, pasa a la fase siguiente (Examinar la solución) y, en caso contrario, vuelve a la fase anterior para buscar otro plan de resolución.

4. Examinar la solución

4.1. Trata de ver si la solución es coherente con el planteamiento del problema.

4.2. Si es posible, compruébalo con un caso particular ya conocido.

4.3. Trata de obtener ese resultado por otro método. ¿Podrías verlo de golpe?

4.4. ¿Podrías generalizar ese resultado?

4.5. Suprime o transforma algún dato o alguna condición. ¿Sigue siendo válida la solución?

4.6. Intenta aplicar el resultado o el método empleado para resolver otros problemas que tú mismo te propongas.

4.7. Analiza si puede haber otras soluciones.

PROBLEMAS DE DEMOSTRACION

Son aquellos problemas cuyo objetivo es demostrar una determinada proposición, por ejemplo:

Demuestra que el área de una elipse, cuyos semiejes son a y b, es πab.

El enunciado de cualquier problema de demostración puede transformarse en un esquema como éste:

Demuestra que si .... *entonces* ....

Por ejemplo, el problema anterior puede enunciarse así:

Demuestra que si a y b representan las longitudes de los semiejes de una elipse, entonces su área es πab.

La condición, que es la frase escrita después de "si", se llama **hipótesis**; la conclusión, que es la frase escrita después de "entonces", se llama **tesis**; y la frase condicional completa, desde "si" hasta el final, se llama **proposición**.

En nuestro ejemplo, la hipótesis es: "a y b representan las longitudes de los semiejes de una elipse"; la tesis es: "su área es πab"; y la proposición es: "si a y b representan las longitudes de los semiejes de una elipse, entonces su área es πab".

La **hipótesis** es la condición que suponemos y la **tesis** es la conclusión que debemos demostrar a partir de la hipótesis.

Una **demostración matemática** es un razonamiento escalonado en el que cada paso se deduce lógicamente del anterior o de una definición o de un axioma, de manera que, en ningún momento, se hace un avance sin justificarlo completamente. (Los axiomas son propiedades, más o menos evidentes, aceptadas como verdaderas en un cierto contexto).

El rigor, la contundencia y la fiabilidad de las demostraciones matemáticas deben servir de contraste y referencia para las otras demostraciones de la vida corriente; ellas constituyen, sin duda, el modelo al que desean aproximarse el resto de las ciencias: física, química, biología, geología, psicología, medicina, derecho, economía, política, etc.

Para llegar a encontrar una demostración matemática es conveniente seguir las siguientes etapas:

1. Comprender la proposión

Para eso es aconsejable leer atentamente el enunciado, ordenarlo, resumirlo (mediante símbolos, dibujos, tablas, etc.) y contestar claramente a las siguientes preguntas:

1.1. ¿Cuál es la hipótesis, la condición?

1.2. ¿Cuál es la tesis, la conclusión?

Y, finalmente, como resumen, es necesario escribir el enunciado en la forma:

Entonces demuestra que si ....
entonces...

2. Concebir un plan de demostración

Para conseguirlo, puedes probar con las siguientes estrategias; una o varias combinadas te podrán ayudar a encontrar una demostración:

2.1. Si es posible, dibuja una o varias figuras, o construye modelos materiales con toda la precisión que puedas.

2.2. Analiza detenidamente las definiciones o las ecuaciones de los objetos matemáticos que aparecen en la hipótesis y en la tesis. ¿Observas alguna relación?

2.3. Considera los elementos más significativos de los objetos geométricos que aparecen tanto en la tesis como en la hipótesis.

2.4. Si la proposición hace referencia a alguna figura geométrica trata de buscar otra figura parecida con una propiedad parecida. ¿Se puede transformar geométricamente esta nueva figura en la del problema?

2.5. Analiza bien la conclusión. Trata de pensar en alguna propiedad (teorema o fórmula) que tenga una conclusión análoga. ¿Podrías "adaptar" su demostración cambiándola de contexto?

2.6. Fíjate en la hipótesis y en la tesis. Trata de expresar cada una de ellas de otra manera equivalente. Intenta buscar una relación entre la nueva hipótesis y la nueva tesis.

3. Escribir una demostración

Al escribir una demostración concebida en la etapa anterior, cuida de justificar correctamente cada paso y, si hay cálculos, repásalos para corregir posibles errores. Si el plan diseñado no conduce a una demostración correcta, vuelve a buscar otro.

4. Examinar la demostración

4.1. ¿Podrías suprimir algún paso de la demostración?

4.2. Si la hipótesis constaba de varias partes, ¿has empleado en la demostración todas ellas? ¿Podrías suprimir alguna parte de la hipótesis?

4.3. Si cambias entre sí la hipótesis y la tesis, ¿es verdadera la proposición resultante? ¿Podrías demostrarla o refutarla? ¿Vale la misma demostración?

4.4. Intenta aplicar el método de tu demostración a otra proposición análoga descubierta por tí. (Puedes encontrar nuevas proposiciones modificando algunas partes de la hipótesis).

4.5. ¿Puedes deducir alguna propiedad, alguna relación, alguna fórmula, de la proposición que has demostrado?

PROBLEMAS DE DESCUBRIMIENTO DE PROPIEDADES

Son aquellos problemas cuyo enunciado puede transformarse en uno del tipo:

Halla, busca, descubre, encuentra, etc., una propiedad, una fórmula, una función, una gráfica, etc., que relacione ciertos elementos, objetos o magnitudes matemáticos o físicos.

Para resolver estos problemas es conveniente seguir las siguientes etapas:

1. Analizar los elementos que intervienen en la relación

Para lograr esto debes responder claramente a las siguientes preguntas:

1.1. ¿Cuáles son los elementos, objetos o magnitudes que intervienen en esa relación?

1.2. ¿Cuál es el significado (o significados) de cada uno de ellos?

1.3. ¿Existe alguna condición sobre estos elementos o sobre la relación que buscas?

2. Descubrir la propiedad

Para conseguirlo puedes probar con las siguientes estrategias:

2.1. Si buscas una relación entre objetos geométricos (segmentos, rectas, curvas,...) represéntalos gráficamente de **todas** las formas posibles y observa atentamente las figuras que obtengas. ¿Hay otras posibilidades de representación?

2.2. Escribe una lista con las propiedades, fórmulas, etc., ya conocidas en las que aparecen los elementos que quieres relacionar. Analízala detenidamente. Manipula, transforma, opera. ¿Obtienes alguna conclusión?

2.3. Considera casos particulares y luego generaliza.

2.4. Si buscas una relación entre dos magnitudes, intenta elaborar una tabla con los valores correspondientes de una y otra. Represéntala en un sistema de coordenadas cartesianas. ¿Observas alguna regularidad? ¿Conoces alguna función (o alguna curva) cuya gráfica sea igual o semejante a la obtenida? ¿Podrías transformar los valores de las dos magnitudes para que la gráfica fuera más sencilla? (Transformar significa hacerle a todos la misma operación aritmética).

2.5. Si sospechas inmediatamente cuál es la relación buscada, haz una conjetura y trata luego de comprobarla en varios casos particulares; si en algún caso no se verifica, la conjetura queda refutada y debes modificarla o buscar una nueva; si en todos los casos se verifica, entonces debes demostrarla.

3. Demostrar la propiedad

En muchos casos, la misma estrategia que te condujo al descubrimiento de las propiedades es ya una demostración **rigurosa**. En otros casos, en cambio, al descubrir esa propiedad por otros procedimientos como la analogía, la inducción o la conjetura, se hace necesaria una demostración rigurosa para no dejar lugar a ninguna duda. Para encontrala, puedes guiarte por las recomendaciones que se hacen para resolver los *Problemas de demostración.*

4. Analizar la propiedad

4.1. ¿Podrías aplicar esta propiedad en otro contexto análogo o más general o más particular?

4.2. Si suprimes alguna condición, ¿sigue valiendo la propiedad?

4.3. Modifica alguna condición. ¿Sigue verificándose la propiedad?

LOS PROBLEMAS

1. DESCUBRIENDO NUEVAS ECUACIONES

Halla la ecuación de una circunferencia de 3 cm de radio.

2. CIRCUNFERENCIAS ATRAPADAS POR PUNTOS

a) ¿Cuántas circunferencias pasan por 1 punto? ¡Dibújalas empleando sólo la regla y el compás! ¿Tienen alguna propiedad común? (Por ejemplo: ¿dónde están colocados sus centros?, ¿cómo son sus radios?, ¿cómo son sus ecuaciones?, etc.).

b) Las mismas preguntas para dos puntos.

c) Las mismas preguntas para tres puntos.

d) Las mismas preguntas para cuatro puntos.

Explica, razona y justifica tus construcciones con todo detalle.

3. LAS APARIENCIAS PUEDEN O NO ENGAÑAR

Realiza las siguientes actividades:

1. Sobre un cartón coloca una hoja de papel y clava en ella dos chinchetas. Manteniendo tenso un hilo unido a ellas, ve trazando con un lápiz una curva como indica la figura 3.1.

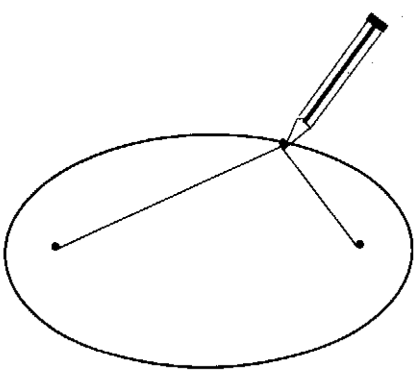


Fig. 3.1

2. Descubre el trazado de la curva siguiente (figura 3.2) y reprodúcela en tu cuaderno:

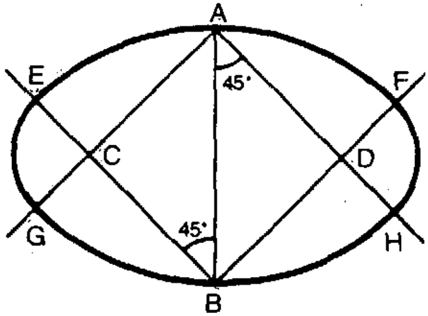


Fig. 3.2.

3. Considera un cono en el que se han introducido dos esferas de distintos radios no tangentes entre sí, como muestra la figura 3.3. Secciona el cono con un plano tangente interiormente a las dos esferas (como indica esquemáticamente la fig. 3.4) y dibuja aproximadamente la curva que resulta de dicha sección.

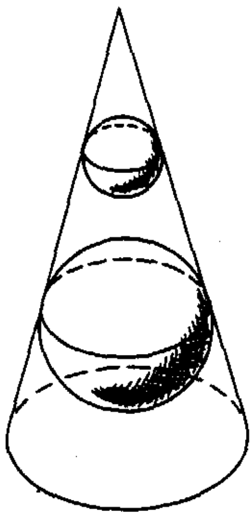


Fig. 3.3.

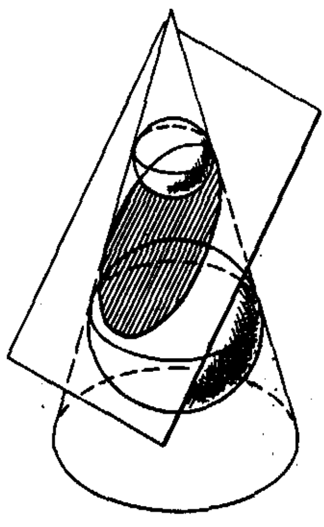


Fig. 3.4.

4. Imagina que, con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminas una hoja de papel con una inclinación parecida a la que aparece en la siguiente figura 3.5. Dibuja aproximadamente la curva formada por el borde del recinto iluminado.

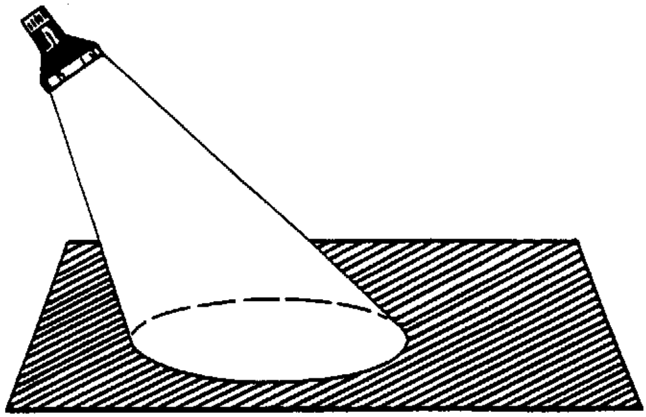


Fig. 3.5.

5. Considera una circunferencia de 4 cm de radio. Vas a "achatarla". Para ello, escoge un diámetro y traza varias cuerdas perpendiculares a él (fig. 3.6). A continuación, "baja" cada punto P de la circunferencia al punto P' que está en la mitad de RP, y "sube" cada punto Q al punto Q' que está en la mitad de RQ (fig. 3.7). Une todos los puntos P' y Q' así obtenidos y resultará una "circunferencia achatada".

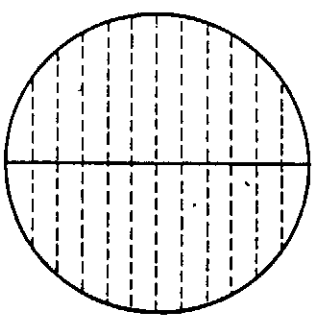


Fig. 3.6.

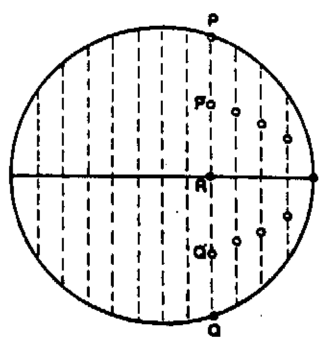


Fig. 3.7.

Cuestiones:

a) En las actividades anteriores, han aparecido curvas que parecen *elipses*. Como tú ya tienes una idea intuitiva de lo que es una elipse, después de analizarlas y compararlas detenidamente, indica cuáles crees que son elipses y cuáles no, según esa idea.

b) Es lógico que tu respuesta a la pregunta del apartado anterior difiera de la de algunos de tus compañeros, porque el criterio para decidir qué es una elipse ha sido subjetivo y, por lo tanto, distinto en cada uno. ¿Quién tiene razón? Para decidirlo, nos hace falta un criterio único, objetivo, que sirva para que todas las personas se entiendan sin ambigüedades cuando hablan de elipses. Este criterio consiste en establecer una definición precisa y universalmente aceptada de lo que es una elipse. Los libros de texto de matemáticas suelen definirla así:

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es siempre la misma, es decir, es constante.

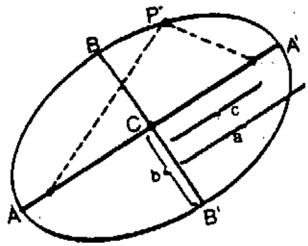
Tal vez te resulte extraña esta definición e incluso creas que está mal, que ese lugar geométrico no tiene nada que ver con una elipse. Acéptala por un momento y realiza la siguiente investigación:

¿Cuáles de las curvas que has obtenido antes son elipses y cuáles no de acuerdo con esa definición? ¡Ojo, ahora ya no te fíes sólo de tus ideas intuitivas: razona lo mejor que puedas!

c) Compara estas últimas respuestas con las primeras. ¿Las apariencias engañan?

4. RELACIONES OCULTAS

Hemos dibujado la elipse de la siguiente figura utilizando el método de las chinchetas y el hilo. Los elementos de una elipse reciben los siguientes nombres:



- **F** y **F'** son los focos.
- La distancia de **F** a **F'** se llama distancia focal y su valor suele representarse por **2c**:

FF' = 2c

- El segmento **AA'** se llama eje mayor y su longitud se representa por **2a:**

AA' =2a

- El segmento **BB'** se llama eje menor y su longitud se representa por 2b:

BB' =2b

- Los puntos **A, A' B y B'** son los vértices de la elipse.
- El punto **C** (centro de simetría de la figura) se llama centro de la elipse.
- Los segmentos **PF** y **PF'**, que unen cada punto **P** de la elipse con los focos, se llaman radios vectores del punto **P.**

Cuestiones:

a) Busca una fórmula que relacione la longitud del hilo con los valores de a, b, c, o con alguno de ellos.

b) Demuestra que, en todas las elipses, se verifica siempre:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

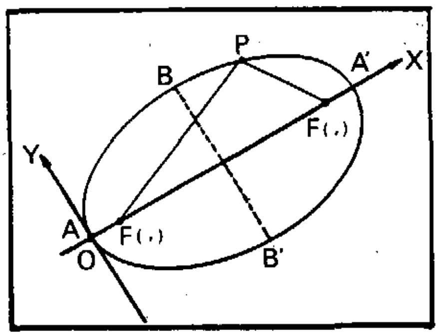
c) Demuestra o refuta la siguiente proposición:

En todas la elipses se verifica 2b + c = 2a

5. UNA ECUACION ES UN DISFRAZ, EVIDENTEMENTE

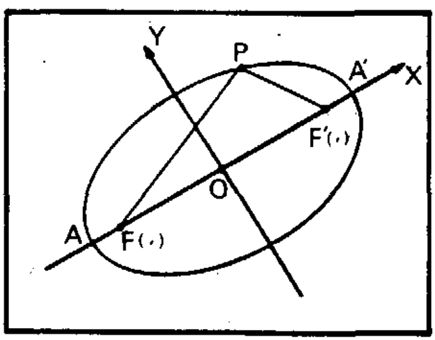
a) Dibuja con precisión una elipse cuyo eje mayor mida 10 cm y el menor 6 cm.

b) Halla *su* ecuación tomando como sistema de referencia la recta que pasa por los focos (eje X) y la tangente en el vértice A (eje Y):



(Nota: prohibido utilizar las fórmulas "mágicas" que aparecen en los libros de texto).

c) Halla también su ecuación tomando como sistema de referencias las rectas que contienen a los ejes:



d) ¿Cuántas ecuaciones tendrá *esta* elipse? ¿Por qué? ¿Cuál será la más sencilla? ¿Por qué?

e) Generaliza la situación anterior; es decir, halla la ecuación de una elipse *cualquiera* al tomar como sistema de referencia las rectas que contienen a sus ejes.

6. COMO DISTINGUIR UNA HIPERBOLA

Realiza las siguientes actividades:

1. Sobre un cartón coloca una hoja de papel y clava en ella dos chinchetas a las que atarás dos trozos de hilo desiguales. Los otros extremos únelos al ojo de una aguja de lana (fig. 6.1). Venda con celofán la punta de una pintura de cera y practica encima un orificio (fig. 6.2). Pasa a través de él una aguja y, sujetándola, desplaza hacia adelante la pintura, de manera que deje un trazo sobre el papel (fig. 6.3). Luego cambia los hilos de chinchetas y repite la operación.

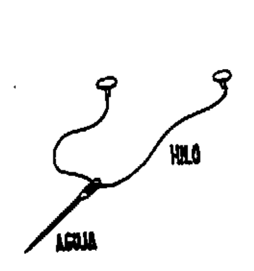


Fig. 6.1.

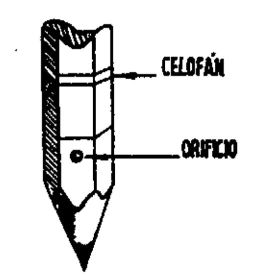


Fig. 6.2.

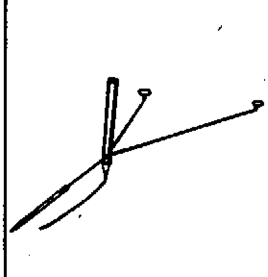


Fig. 6.3.

2. Calca en papel vegetal la curva que forma el arco del puente de la figura 6.4 y su reflejo en el agua:

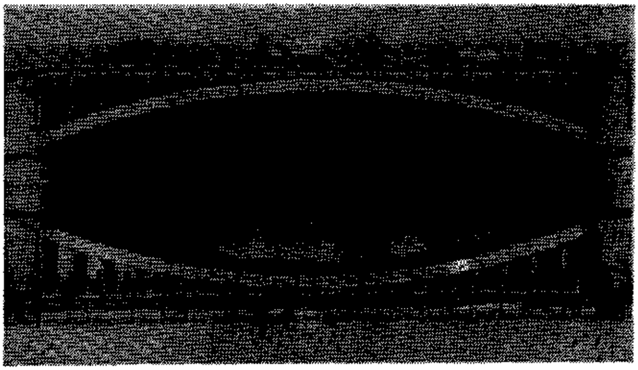


Fig. 6.4.

3. Considera una superficie cónica completa, con sus dos hojas, en cada una de las cuales se ha introducido una esfera, tal como muestra la figura 6.5.

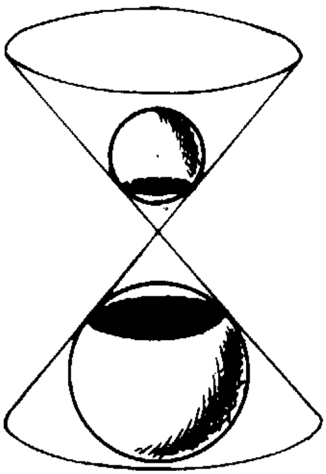


Fig. 6.5

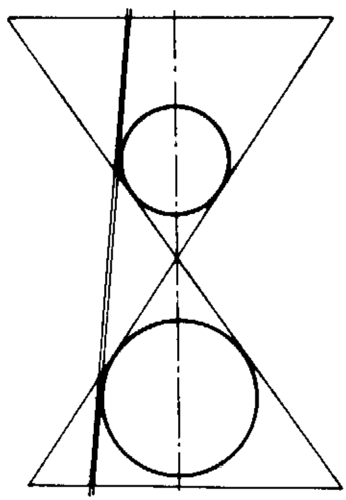
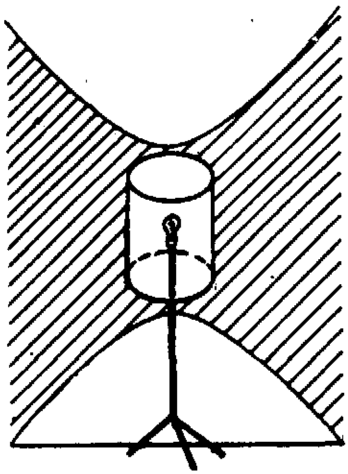


Fig. 6.6..

Secciona esta superficie con un plano tangente exteriormente a las dos esferas (como te muestra esquemáticamente la fig. 6.6.). Dibuja aproximadamente la curva que resulta en dicha sección.

4. Observa el borde de la zona iluminada en una pared por una lámpara de pie cuya pantalla sea cilíndrica.



Cuestiones:

a) En las actividades anteriores, han aparecido curvas que parecen *hipérbolas*. Como tú ya tienes una cierta idea intuitiva de lo que es una hipérbola, indica cuáles crees que son hipérbolas y cuáles no, según esa idea.

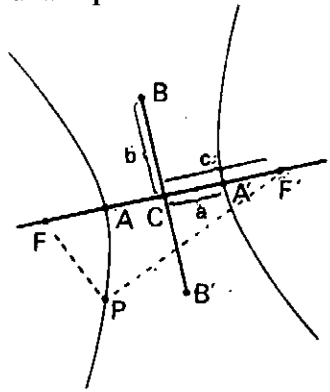
b) Es lógico que tus respuestas a la pregunta del apartado anterior sean distintas de las de algunos de tus compañeros, porque el criterio para decidir qué es una hipérbola ha sido subjetivo y, por lo tanto, distinto en cada uno. Para saber quién tiene razón, nos hace falta un criterio único, objetivo, que sirva para que todas las personas se entiendan sin ambigüedades cuando hablan de hipérbolas. Este criterio consiste en establecer una definición precisa y universalmente aceptada de lo que es una hipérbola. Los libros de texto de matemáticas suelen definirla así:

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es siempre la misma, es decir, es constante.

De acuerdo con esta definición, ¿cuáles de las curvas anteriores son hipérbolas y cuáles no? ¡Razona lo mejor que puedas tus respuestas!

7. TODO DEPENDE DEL PUNTO DE VISTA

Los elementos de una hipérbola reciben los siguientes nombres:



- Los puntos fijos **F** y **F'** son los focos.
- La distancia de **F** a **F'** se llama distancia focal y su valor suele representarse por **2c**:

FF' = 2c

- El segmento **AA'** se llama eje real de la hipérbola y su longitud se representa por **2a:**

AA' = 2a

- Los puntos **A** y **A'** son los vértices de la hipérbola.
- El punto **C** (centro de simetría) se llama centro de la hipérbola.
- El punto **B** (determinado de modo que **AB** = **FC** = **c**)forma con su simétrico **B'**, un segmento, **BB'**, que se llama eje imaginario; su longitud se representa por **2b:**

BB' =2b

- **PF** y**PF'** son los radios vectores del punto **P.**

Cuestiones:

a) Demuestra que entre **a, b** y **c** se verifica siempre la relación

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$

b) Dibuja una hipérbola cuyos focos sean el origen de coordenadas y el punto (6,0) y cuyo eje real mida 4 unidades.

c) Halla su ecuación.

d) ¿Se podría elegir otro sistema de referencia para que esta ecuación resultara más sencilla? Compruébalo hallando dicha ecuación.

8. EN BUSCA DE LA VERDAD ESCONDIDA

Realiza las siguientes actividades:

1. Toma una regla, un cartabón y un hilo cuya longitud sea igual a la del cateto mayor del cartabón, AB. Une un extremo al vértice B y el otro a una chincheta clavada en un punto F, como indica la figura 8.1. Coloca un lápiz en el punto P, pegado al cartabón, y, manteniendo fija la regla, desplaza a lo largo de ella, hacia abajo, el cartabón (figura 8.2). Cuando el cartabón llegue a la chincheta, dale la vuelta para poder seguir. Observa la figura que resulta.

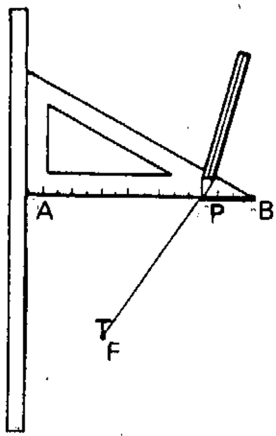


Fig. 8.1

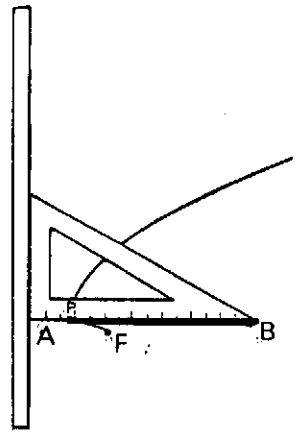


Fig. 8.2..

2. Observa la *zona* de una cancha de baloncesto y dibuja la línea que la delimita.

3. Dibuja la gráfica de la función $y = 0,25\ x^2$.

4. Considera una de las hojas de una superficie cónica en la que se ha introducido una esfera. Secciona esta superficie con un plano tangente a la esfera y paralelo a una generatriz cualquiera (como indica esquemáticamente la fig. 8.3). Dibuja aproximadamente la curva que resulta en dicha sección.

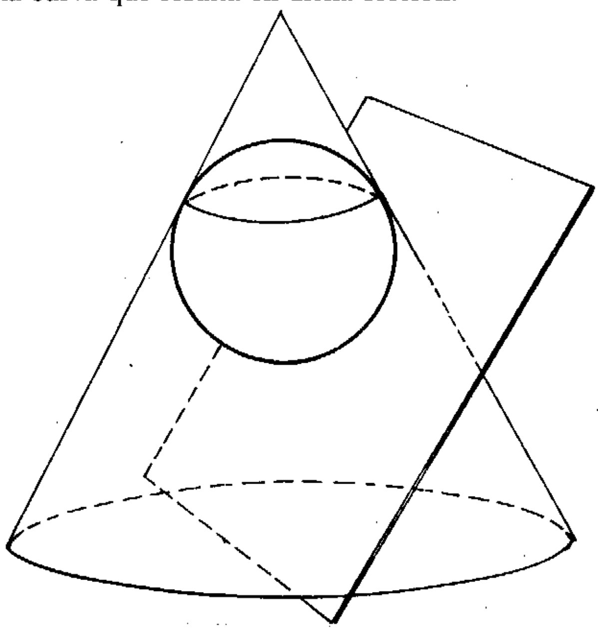


Fig. 8.3.

Cuestiones:

a) En las actividades anteriores, han aparecido curvas que parecen *parábolas*. Como tú ya tienes una cierta idea de lo que es una parábola, indica cuáles crees que son parábolas y cuáles no, según esa idea.

b) Es lógico que tus respuestas a la pregunta anterior sean distintas a las de algunos de tus compañeros. Para saber quién tiene razón, debemos conocer con exactitud qué es una parábola. Los libros de texto suelen definirla así:

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia a otro punto fijo (llamado foco) y a una recta (llamada directriz) es la misma.

De acuerdo con esta definición, ¿cuáles de las curvas anteriores son parábolas y cuáles no? !Razona bien tus respuestas¡

9. DE NUEVO, LOS DISFRACES

También la parábola tiene ciertos elementos significativos:

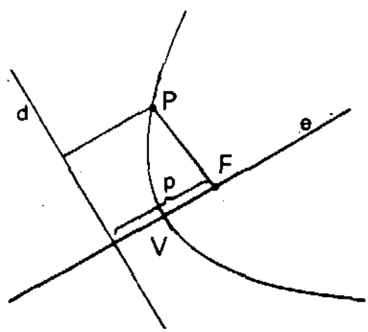


Fig. 9.1.

- El punto **F** se llama foco y el **V** vértice.
- La recta **d** se llama directriz.
- La distancia del foco a la directriz se llama parámetro de la parábola y se representa por **p**.
- La recta **e** (eje de simetría) se llama eje de la parábola.

Cuestiones:

a) Descubre qué características tienen en común los sistemas de referencia que producen las ecuaciones más sencillas en el caso de la circunferencia, de la elipse y de la hipérbola y escribe estas ecuaciones.

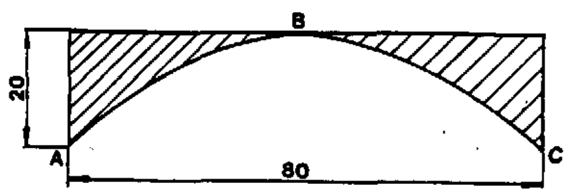
b) Ahora escoge, para la parábola de la figura 9.1, el sistema que tú crees que conduce a la ecuación más sencilla y halla dicha ecuación. (Supón que **p** = 2).

10. LOS ARCOS A TRAVES DE LA HISTORIA

A lo largo de la historia, el hombre ha empleado en sus construcciones una gran variedad de arcos cuyos estilos iban evolucionando con los cambios culturales, económicos y sociales de cada época. Sin embargo, se puede observar una constante: casi todos los curvilíneos están formados por arcos de cónicas. En las figuras 10.1 a 10.4 tienes algunos ejemplos.

a) ¿Qué tipo de curva da forma a cada uno de estos arcos? ¿Cómo dibujó el arquitecto cada uno de estos arcos?

b) Queremos diseñar un arco para un puente ABC que salve una distancia de 80 m con una altura de 20 m.



Elige un sistema de referencia y, respecto de él, halla la ecuación de ese arco suponiendo que sea elíptico, parabólico o hiperbólico

11. LA MODA ARQUITECTONICA

Los arquitectos y los ingenieros no sólo han utilizado las cónicas en el diseño de arcos de ventanas, balcones, puentes, puertas, viaductos, etc. También han empleado las superficies que resultan al hacer girar estas curvas alrededor de uno de sus ejes.

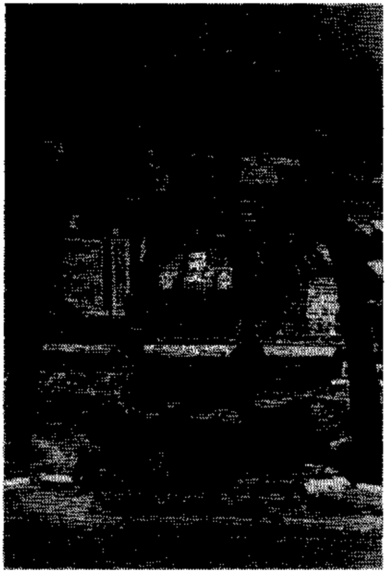


Fig. 10.1. Gateway Arch de St. Louis, Estados Unidos

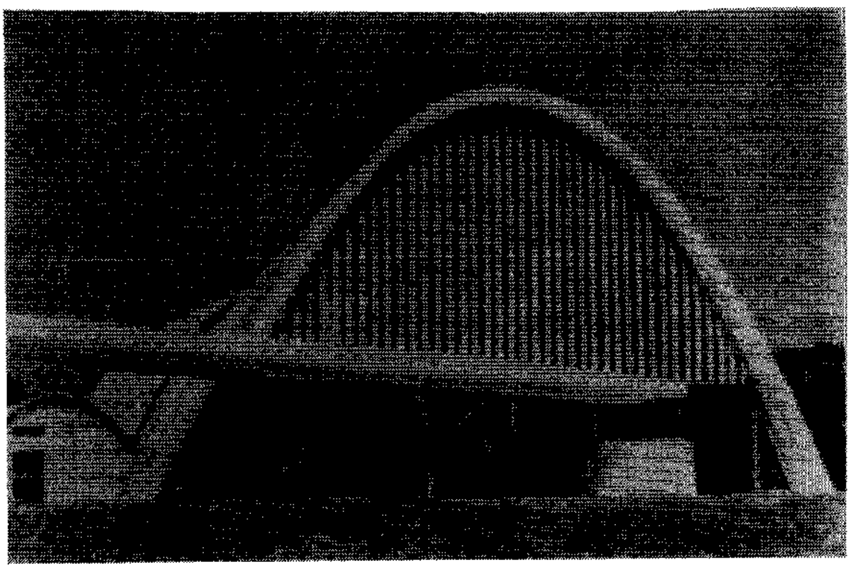


Fig. 10.2. Iglesia de Pampulha (O. Niemeyer)

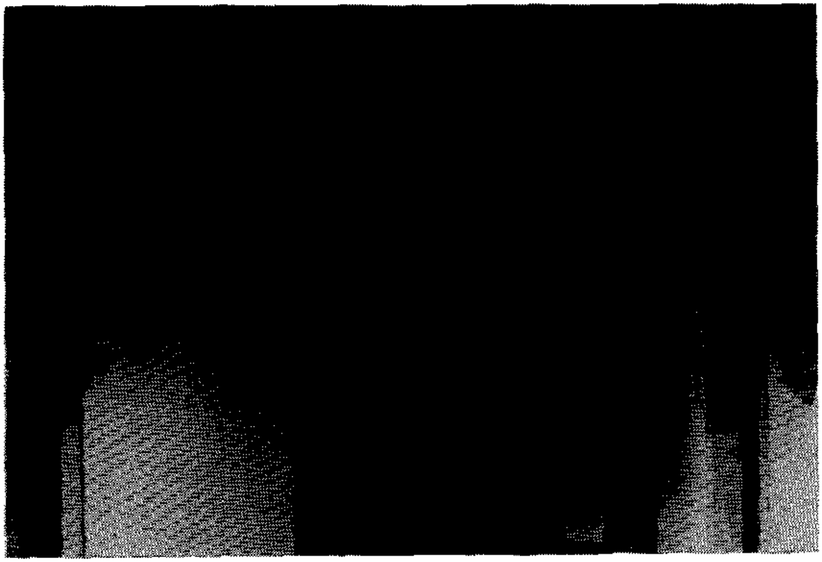


Fig. 10.3. Arcos del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación (Universidad de Salamanca)

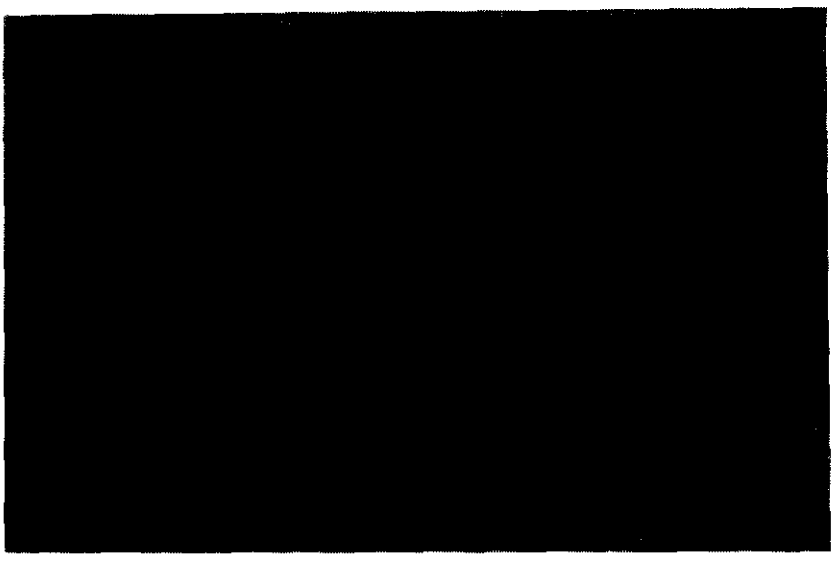


Fig. 10.4. Puerta lateral de la Catedral nueva de Salamanca

Así, cuando gira una circunferencia en torno a un diámetro, se obtiene una superficie esférica cuya mitad es empleada en la construcción de las cúpulas más frecuentes: las esféricas.

Si gira una elipse, una hipérbola o una parábola, las superficies engendradas se llaman **elipsoides, hiperboloides y paraboloides de revolución.** Estas superficies también han sido empleadas en numerosas construcciones, sobre todo, durante este siglo. Por ejemplo, el Statuary Hall del Capitolio de Washington, tiene forma de elipsoide de revolución y en la figura 11.1. puedes ver un depósito en forma de hiperboloide, obra del ingeniero español E. Torroja.

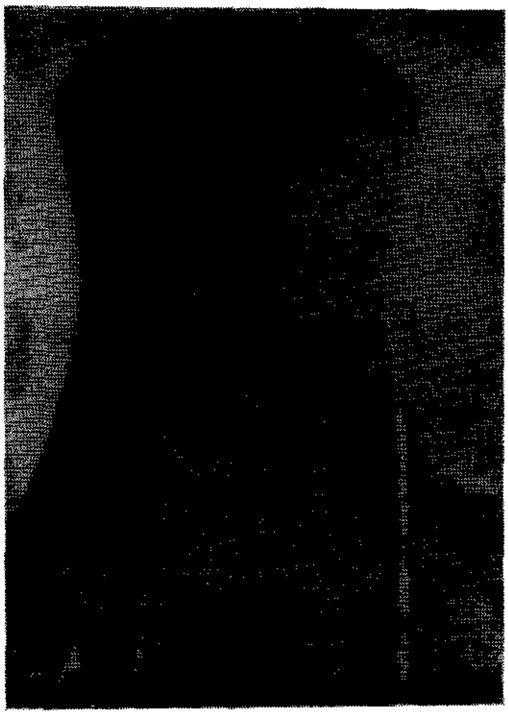


Fig. 11.1. Depósito elevado del Hipódromo de la Zarzuela

Hay dos métodos sencillos para construir modelos materiales de estas superficies:

– Utilizando papel de seda y procediendo como en la fabricación de los farolillos de las verbenas o en los adornos de Navidad (figura 11.2).

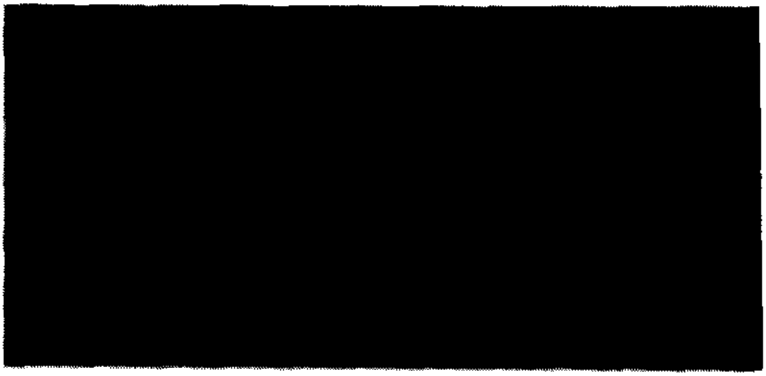


Fig. 11.2. Modelos de hiperboloide y paraboloide de revolución construidos con papel

– Utilizando discos de cartón de radios adecuados que se van encajando bien sobre un eje o bien sobre unas muescas practicadas en la superficie adecuada (figura 11.3).

Fig. 11.3. Modelo de paraboloide

En las figuras 11.4 a 11.6, se ve la forma que dan a los "tejados" algunos arquitectos, que, además de bella, es enormemente original. Sin embargo están construidos por trozos de una superficie conocida desde hace varios siglos que se llama **paraboloide hiperbólico**. El descubrimiento del hormigón y el afán innovador que caracteriza a nuestro siglo ha facilitado su uso en nuestro días. Tiene la ventaja de ser una superficie formada por líneas rectas (reglada) lo que permite utilizar un encofrado con listones de madera sobre el que se echa el hormigón en láminas muy delgadas consiguiéndose de este modo ligereza y economía de materiales. Además pueden agruparse varias láminas de paraboloides hiperbólicos para componer cubiertas muy variadas y originales desde el punto de vista estético.

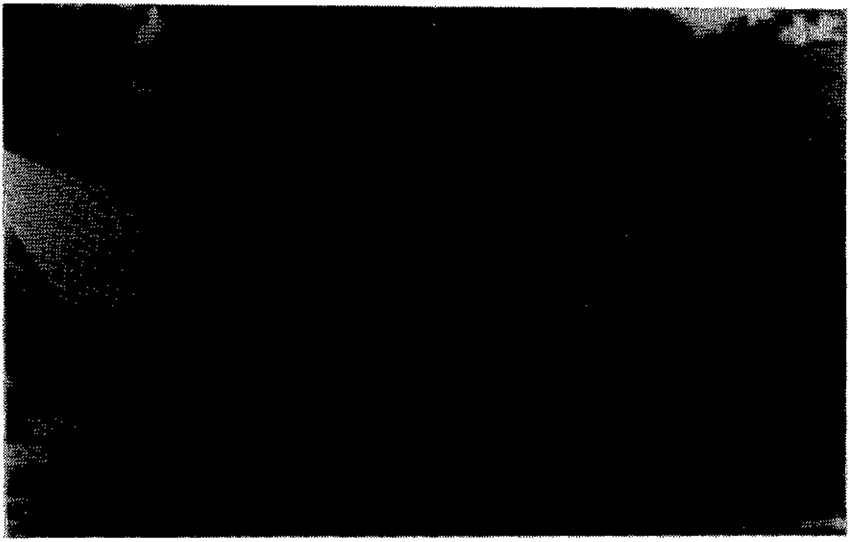


Fig. 11.4. Restaurante "Los manantiales" en Xochimilco (F. Candela)

Fig. 11.5. Iglesia de Becerril de la Sierra (R. Urgoiti y J. Ruiz Castillo)

Fig. 11.6. Pabellón de rayos cósmicos de la Ciudad Universitaria de México (F. Candela)

Puedes construir un modelo material con dos triángulos isósceles, iguales entre sí, formados por tiras de metal, cartón, plástico o madera agujereadas, uniéndolos por sus bases con un ángulo distinto de 180° (fig. 11.7). Se tienden hilos entre los agujeros como indica la figura 11.8 y se obtiene un *trenzado espacial* que ya es un modelo de paraboloide hiperbólico.

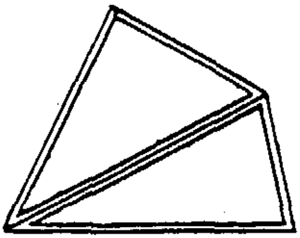


Fig. 11.7.

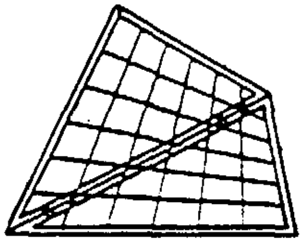


Fig. 11.8.

Cuestiones:

a) Busca fotografías u objetos reales de cualquier tipo que tengan la forma de alguna de estas superficies.

b) Al cortar una esfera por cualquier plano, sus secciones siempre son circunferencias. ¿Puede existir una superficie tal que, al cortarla por cualquier plano, las secciones sean siempre elipses?

Si crees que existe, describe cómo sería y dibújala o construye un modelo material; si crees que no existe, razónalo.

c) ¿Puede existir una superficie tal que, al cortarla por planos, las secciones sean:

– elipses e hipérbolas

– elipses y parábolas

– hipérbolas y parábolas?

Razona tu respuesta.

12. RECTANGULOS INSCRITOS

Considera la curva $x^2 + 2y^2 = 6$.

a) ¿Cuántos cuadrados pueden inscribirse en ella? Halla el área de cada uno.

b) ¿Cuántos rectángulos pueden inscribirse en ella? Entre éstos, halla las dimensiones del que tiene 8 unidades cuadradas de superficie.

13. PUNTOS EQUIDISTANTES

Dibuja lo mejor que puedas la curva $y + x^2 - 8x + 7 = 0$ y los puntos M(4,7) y N(-2,-3). Utilizando sólo el compás y la regla (sin graduar), determina el punto o los puntos de la curva que equidistan de M y N. Después, halla sus coordenadas.

14. ¿POR QUE SE LLAMAN CONICAS?

Quizás la primera figura geométrica que descubrió y utilizó el hombre fue el círculo. Las primeras casas que construyeron los hombres del neolítico, al salir de las cavernas, tenían la planta redonda. Eran cabañas de piedra que techaban con vigas de madera cubiertas de paja, ramas y barro. En España conservamos bellos ejemplos de la Edad del Hierro en los castros celtas, como la casa de la fotografía 14.1, perteneciente al castro de Santa Tecla (Pontevedra).

La rueda, también de forma circular, fue uno de los primeros inventos del hombre, sugerido tal vez por la observación del rodar de los troncos del árbol.

La forma del sol y de la luna debieron influir decisivamente en el temprano descubrimiento y consagración del círculo como la forma plana más regular. No en vano, el Santuario de Stonehenge (Gran Bretaña), construido hacia el 1.800 a.C. fue dedicado al culto solar, y su forma también es redonda. Está compuesto, tal como puede apreciarse en las figuras 14.2 y 14.3, por una circunferencia de grandes piedras (4,20 m de altura) de 30 m de diámetro.

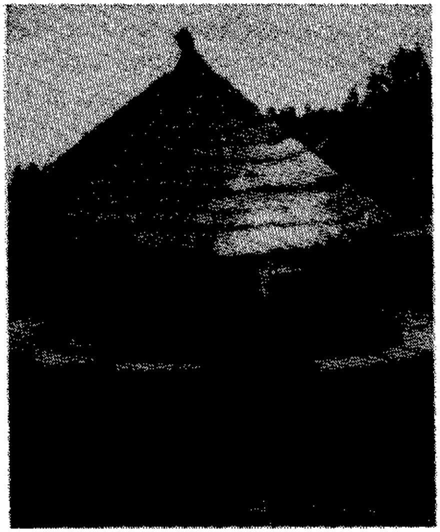


Fig. 14.1. Cabaña del Castro de Santa Tecla

En su interior hay otras circunferencias de piedras más pequeñas rodeando a otras que se disponen en forma de herradura orientadas de manera que su eje coincide exactamente con el punto en el que sale el sol el día más largo del año.

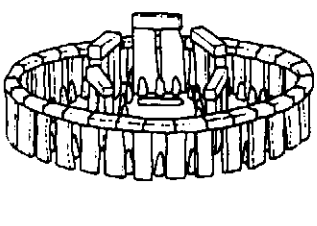


Fig. 14.2.

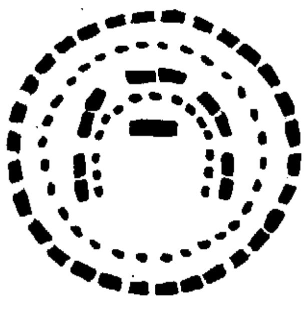


Fig. 14.3.

Naturalmente, en todas las primeras culturas, además de la línea recta y la circunferencia, se emplearon también otras curvas. Por ejemplo, en sus pinturas, desde la cueva de Altamira hasta las tumbas egipcias de Tebas, pueden verse una gran variedad de ellas. Sin embargo, todas estas líneas son representaciones (más o menos estilizadas o abstractas) de objetos reales. El interés por las curvas en sí mismas, independientemente de su valor iconográfico, no surge en la historia de la humanidad hasta el siglo V a. C. en la cultura griega. En ese momento, se puede decir que nace la geometría como ciencia pura que estudia las propiedades de las figuras obtenidas por abstracción de la realidad (círculo, rectángulo, esfera, línea recta, cilindro, etc.) o "creadas" directamente por la imaginación del hombre (dodecaedro, icosaedro, etc.).

Ahora bien, entre estas últimas, los griegos no estudiaban las formas "caprichosas" tales como los trazos (más o menos bellos) que uno puede hacer sobre el papel de una manera espontánea. En el campo de las curvas, sólo estudiaban aquellas que podrían construirse de alguna de estas maneras:

– por el medio de movimientos uniformes de puntos o rectas;

– por intersecciones de dos o más superficies conocidas, como planos, esferas, cilindros, conos y poliedros en general.

Y prácticamente las primeras curvas que analizaron los griegos fueron, además de las circunferencias, las elipses, las hipérbolas y las parábolas (fig. 14.4).

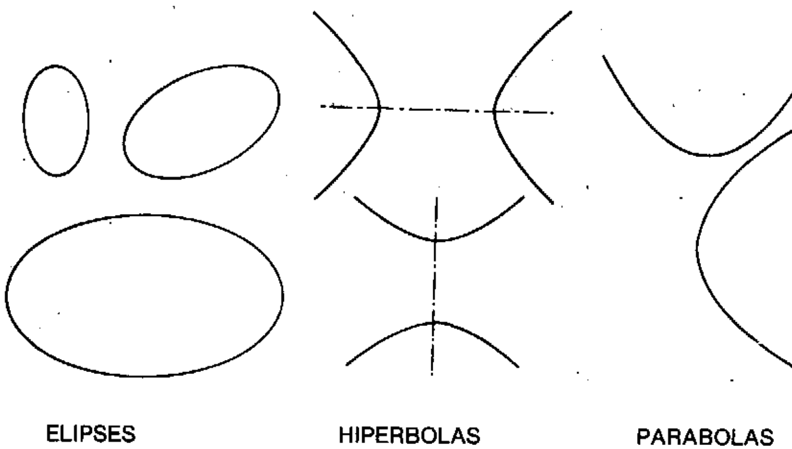


Fig. 14.4.

Su descubridor fue **Menecmo**, un matemático griego que vivió en Atenas en el siglo IV a. C. y que estudió en la Academia de Platón. No se sabe mucho sobre su vida pero está demostrado que fue uno de los maestros de Alejandro Magno (356-323 a.C.), quien, según cuenta la leyenda, un día le preguntó si había un atajo para acceder a la geometría, a lo que Menecmo contestó: "¡Oh rey!, para viajar por el país hay caminos reales y caminos para los ciudadanos comunes, pero en la geometría hay un único camino para todos".

Después de Menecmo, también estudiaron estas curvas los matemáticos griegos Euclides y Apolonio, y todos ellos se referían a estas curvas con el nombre de **secciones cónicas** o, simplemente, **cónicas**, nombre que ha perdurado hasta nuestros días.

Cuestión:

¿Qué propiedad tienen en común estas curvas para que los matemáticos griegos las llamaran *secciones cónicas* o, simplemente, *cónicas*.

Descubre y demuestra esta propiedad.

15. LAS CONICAS DOBLANDO PAPEL

Dibuja a lápiz una circunferencia de 4 ó 5 cm de radio sobre una hoja de papel vegetal y con tinta señala en ella de 20 a 25 puntos, más próximos entre sí los que están más cerca de un punto B exterior a ella, como muestra la figura 15.1.

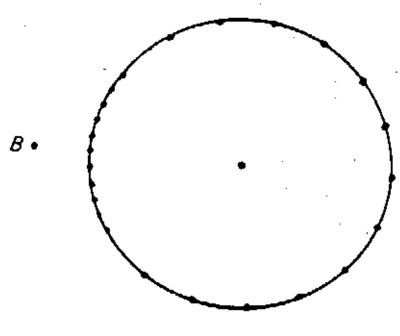
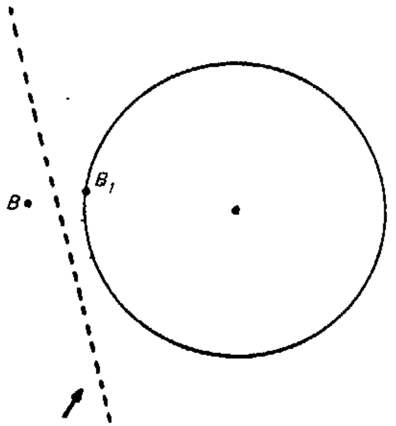
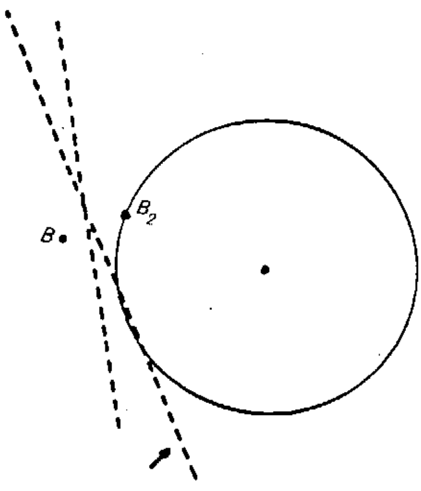


Fig. 15.1.

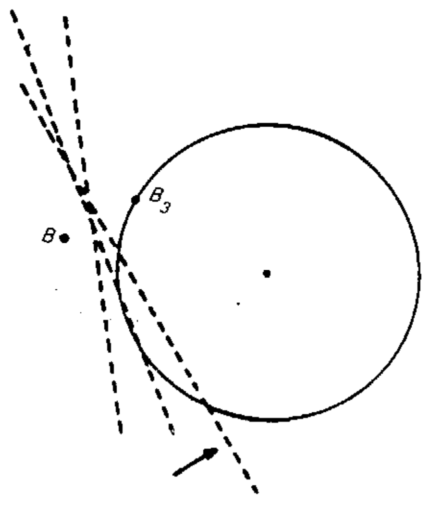
Ve doblando el papel de modo que el punto **B** pase por todos los señalados en la circunferencia:



Primer pliegue: cuando B se superpone a B_1

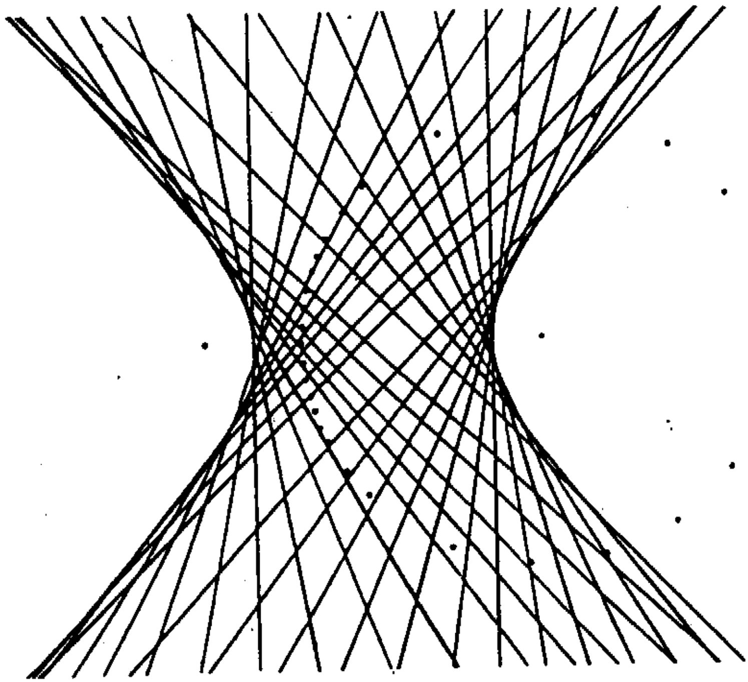


Segundo pliegue: cuando B se superpone a B_2



Tercer pliegue: cuando B se superpone a B_3

Al final obtendrás una figura como la siguiente:



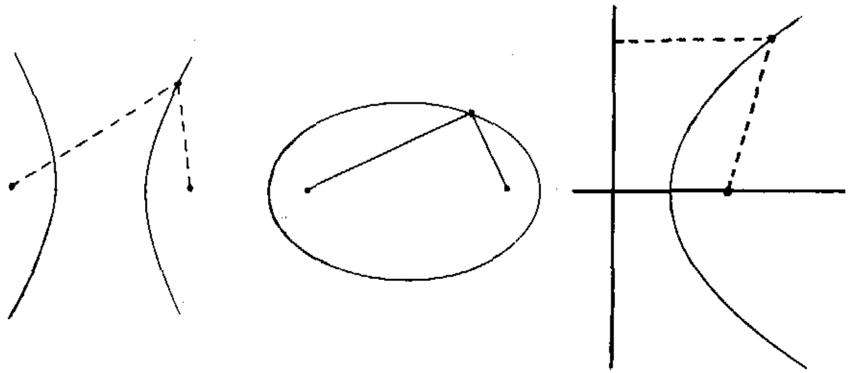
En ella se observa que los pliegues son envueltos (o envuelven, según cómo se mire) por una curva que parece una hipérbola.

Cuestiones:

a) Demuestra que existe una hipérbola a la cual son tangentes todos los pliegues excepto dos de ellos; se dice que esta hipérbola es la envolvente de ese conjunto de pliegues.

b) Busca procedimientos para obtener doblando papel una elipse y una parábola.

c) Descubre la relación que existe entre la tangente en un punto de una elipse, hipérbola o parábola y los radios vectores de ese punto. Luego, demuéstrala.



16. BILLARES ELIPTICOS Y CIRCULARES

A Lewis Carroll, el autor de *Alicia en el País de las Maravillas*, le gustaban mucho los rompecabezas y juegos matemáticos, como puedes adivinar a través del estilo de sus libros. Se cuenta que cuando salió publicado el libro de Alicia, a la reina Victoria le gustó tanto que le pidió que le fueran enviando lo que publicase su autor. La siguiente obra que recibió fue... ¡un tratado de geometría! Lewis Carroll, seudónimo de Charles L. Dodgson, era profesor de Matemáticas y, entre otras muchas ingeniosidades, se fabricó un billar circular y publicó un folleto explicando sus propiedades.

Las mesas elípticas de billar comenzaron a venderse en los Estados Unidos en 1964. Un anuncio a toda plana en "The New York Times" del 1 de Julio de 1964 hacía saber que sería presentado este juego por los famosos actores Joane Woodwoard y Paul Newman. El *Elliptipool*, nombre comercial de esta mesa, es un invento patentado por Arthur Frigo, de Torrington, Connecticut, que terminaba por entonces sus estudios en el Union College de Schendacty.

En Inglaterra también existen billares elípticos y es de suponer que también los haya en España.

Investiga los movimientos de las bolas en un billar elíptico o en un billar circular.

17. PERSECUCION DE BARCOS

Dos barcos A y B están quietos en alta mar separados por una distancia de 300 Km. Determina todos los puntos que pueden ser alcanzados simultáneamente por ambos barcos al ponerse en movimiento, sabiendo que el barco A mantendrá una velocidad constante de 80 Km/h y el barco B de 40 Km/h. (Se supone que sus trayectorias son siempre rectilíneas y que la superficie del mar es plana).

18. FAROS, FOCOS, ANTENAS Y RADARES

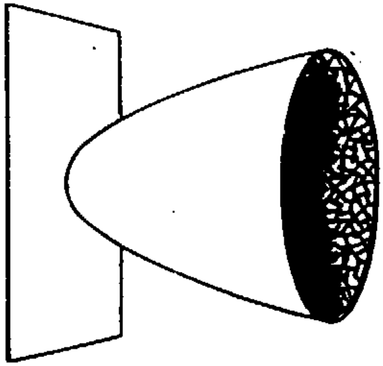
El primer reflector parabólico para un faro de mar fue construido por William Hutchinson en 1752 y consistía en un conjunto de pequeños espejos planos adheridos a la parte cóncava de un soporte de yeso en forma de paraboloide de revolución.

Luego se sustituyeron estos espejos por una chapa de cobre y plata batidos a mano y, hacia 1800, prácticamente todos los faros empleaban reflectores parabólicos.

Aunque poco después, a partir de 1822, empezaron a ser sustituidos por un sistema de lentes ideado por Fresnel, sin embargo la idea del reflector parabólico se implantó con éxito en el diseño de los focos de las bicicletas, de los automóviles y, en general, de cualquier proyector que necesita concentrar la luz emitida desde una larga distancia (focos de seguimiento, proyectores de teatro, etc.).

Cuestiones:

a) ¿Por qué crees que se emplean los paraboloides de revolución en el diseño de todos estos aparatos?



b) Cada día se habla más de antenas parabólicas, radares y telescopios reflectantes. Consulta en algún libro qué son, para qué sirven, cómo se construyen, cómo funcionan, etc. Luego, escribe un pequeño artículo que resuma la información que has obtenido.

Ministerio de Educación y Ciencia
Secretaría de Estado de Educación
Dirección General de Renovación Pedagógica