R-407

Vida escolar

DIRECCION
GENERAL
DE
ENSEÑANZA
PRIMARIA

Nos 77

C·E·D·O·D·E·P

temario de estudio para los centros de colaboración pedagógica

CURSO 1965-66

Aunque ya en el curso pasado se hizo un estudio de carácter general y sobre la problemática que implica un Cuestionario Nacional y su concreción en un programa de acuerdo con el horario escolar, al haber sido publicados ya, por Orden de 6 de junio del año actual, los nuevos Cuestionarios, que, naturalmente, suponen ciertas innovaciones, sobre todo en lo concerniente a la globalización y unidades didácticas, el tratamiento formal de la habituación y expresión artística, la introducción del inglés como lengua extranjera y el carácter específicamente de entronque que con la Enseñanza Media y Profesional han de tener los dos últimos cursos de escolaridad, que como se sabe ha sido ampliada hasta los 14-15 años, aconsejan que nuevamente se vuelva a considerar como tema central para los Centros de Colaboración del presente curso el tema de los «*Nuevos Cuestionarios Nacionales*» y muy especialmente en lo que se refiere a la estructura y funcionalidad de los mismos.

Por todo ello, y de acuerdo con el Reglamento de dichos Centros de Colaboración Pedagógica, a propuesta de la Inspección Central de Enseñanza Primaria y este C. E. D. O. D. E. P., la Dirección General ha ordenado que sean estudiados los siguientes puntos del referido tema central:

1. Aspecto formal, básico y realista de los nuevos Cuestionarios Nacionales.
2. Sectores educativos fundamentales que implica la estructura de los nuevos Cuestionarios.
3. El principio didáctico de la actividad y los nuevos Cuestionarios.
4. Preparación y realización del trabajo escolar, de acuerdo con la periodización establecida en los nuevos Cuestionarios.
5. Adaptación programática de los nuevos Cuestionarios a los distintos tipos de Escuelas.
6. El tratamiento sistemático de la lectura y la escritura.
7. El cuestionario de lenguaje.
8. El tratamiento sistemático del cálculo y las matemáticas.
9. Los principios de la globalización, diferenciación y sistematización en las materias de enseñanza.
10. La unidad didáctica y su doble contenido de vida social y naturaleza.
11. El tratamiento de la geografía como culminación de los conocimientos de tipo social.
12. El tratamiento de la historia como culminación de los conocimientos de tipo social.
13. Las ciencias físico-químico-naturales y su importancia actual.
14. El cuestionario de formación religiosa.
15. El cuestionario de educación cívico-social en las escuelas de niños.
16. La formación cívico-social y las enseñanzas de hogar en las escuelas de niñas.
17. El cuestionario de educación físico-deportiva en las escuelas de niños.
18. El cuestionario de educación físico-deportiva en las escuelas de niñas.
19. El tratamiento formal de la habituación.
20. Diversas realizaciones de expresión artística.
21. Características especiales de los cursos 7.° y 8.° para la coordinación con las Enseñanzas Medias y Profesionales.
22. Las prácticas de iniciación profesional en los cursos 7.° y 8.°
23. La introducción del inglés como lengua extranjera.
24. Características didácticas que en los textos escolares exigen los nuevos Cuestionarios.
25. Aprovechamiento de la observación, la experimentación y los medios audiovisuales en orden a los nuevos Cuestionarios.

Año VII Número 72-73
Oct.-Nov. 1965

JUAN MANUEL MORENO G.
Director

AMBROSIO J. PULPILLO RUIZ
Secretario

M.ª JOSEFA ALCARAZ LLEDO
Documentación

VICTORINO ARROYO DEL CASTILLO
Publicaciones

ALVARO BUJ GIMENO
Manuales Escolarse

ELISEO LAVARA GROS
Coordinación

JUAN NAVARRO HIGUERAS
Material Escolar

ARTURO DE LA ORDEN HOZ
Estudios y Proyectos

CONSUELO SANCHEZ BUCHON
Planificación

LUIS ELICES GARCIA
Administración

DIRECCION POSTAL:
Calle Pedro de Valdivia, 38, 2.°
MADRID-6.

PUBLICACION
Mensual, excepto los meses de julio y agosto.

IMPRIME
Estades Artes Gráficas, S. A.

TIRADA:
85.000 ejemplares.

Depósito Legal M. 9.712-1958

C·E·D·O·D·E·P

Vida escolar

REVISTA DEL CENTRO DE DOCUMENTACION Y ORIENTACION DIDACTICA DE ENSEÑANZA PRIMARIA

sumario

vida escolar

La nueva sistemática de los cuestionarios de Matemáticas, divididos en ejercicios y adquisiciones, exige en primer lugar actividades de carácter operativo, ya que el aprendizaje de conceptos y relaciones matemáticas debe ser activo. A los conceptos se llegará únicamente mediante una serie de ejercicios cuya realización conduce al dominio de las nociones y garantiza el desarrollo de hábitos y destrezas pertinentes.

La enseñanza de la matemática debe ser funcional. Su aprendizaje se vinculará a la solución de los problemas que la vida ordinaria plantea permanentemente a los niños, y éstos de tal forma que ellos vean algún valor en tal aprendizaje. En suma, se trata de que dicha enseñanza se relacione con situaciones vitales, garantizando así el interés y la participación activa del escolar.

Esto implica, de una parte, la adquisición de conceptos significativos a través de operaciones como contar, medir y comparar objetos concretos, y de otra, la comprensión del sistema numeral de base 10. Las cuatro operaciones básicas no son otra cosa que formas que economizan esfuerzos al tratar con grupos para hallar «cuánto» o «cuántas cosas». En este sentido todas ellas están relacionadas con el contar y entre sí. Las fracciones son simplemente una extensión del sistema numeral a cantidades menores que la unidad expresadas en forma de quebrados o de decimales, etc.

Se introduce también una serie de conceptos funcionales que tienen por objeto familiarizar al alumno con procedimientos actuales en el estudio de las matemáticas. Fundamentalmente se trata de rudimentos de topología, tales como representación gráfica de conjuntos para pasar a las relaciones de «dentro» y «fuera» y progresar por este camino a la intuición de lo «común», base para la descomposición factorial, inteligencia de los esquemas de órdenes de unidades, y las propiedades uniformes, asociativa, conmutativa y distributiva en el cálculo operativo. Por esta vía se llega al concepto operativo factor común y, en fin, a otros capítulos de los números racionales en general.

(Del Prólogo de los Cuestionarios Nacionales correspondientes a las Matemáticas.)

aplicaciones de la teoría de conjuntos a la enseñanza de la aritmética elemental

Por JUAN A. VIEDMA CASTAÑO

Ex director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Antioquía, de Medellín (Colombia) y profesor actualmente del Centro de Estudios Superiores de la Compañía de Jesús en Alicante

El tema que más ha influido en el desarrollo de la Matemática durante el siglo XX es la Teoría de Conjuntos, creada por Georg Cantor (1845-1918) y su escuela, y aplicada con éxito sorprendente al estudio de la Lógica por George Boole (1815-1864).

Gracias a esta teoría se han unificado muchas ramas de la Matemática, aparentemente distintas, y se ha encontrado un fundamento sólido común para todas ellas.

En este pequeño artículo nos proponemos describir cómo pueden usarse los conceptos más elementales de la Teoría de Conjuntos para enseñar matemáticas en la Escuela Elemental; pero antes vamos a ocuparnos de explicar la necesidad de hacerlo así.

El signo característico de la educación actual es *la actividad*. Se trata de que el niño aprenda *haciendo*, de acuerdo con la frase de Anaximandro «El hombre aprende con las manos». Si bien esta máxima no es rigurosamente cierta cuando se aplica a los hombres adultos, es indudable que ella se aproxima bastante bien a la realidad del aprendizaje en los niños. Por esta razón hay que desterrar de la enseñanza en nuestras escuelas las definiciones abstractas, construidas con palabras que los niños no entienden, y que originan la tortura psicológica que se sufre al tratar de aprender un material sin sentido. Frente al sistema antiguo, de hacer aprender al niño claúsulas de memoria, sin sentido para él, los sistemas modernos preconizan el «Método Eurístico» (*).

(*) Las personas interesadas en obtener más detalles sobre este método, pueden consultar nuestro trabajo: «Ideas generales acerca de la *didáctica de la matemática elemental*», aparecido en la *Revista de Educación*, del Ministerio de Educación Nacional, en los números 23 y 24 (julio-agosto de 1954 y siguiente).

Según el espíritu de este método, el conocimiento se engendra a través de la actividad del niño, hábilmente planeada y dirigida por el profesor.

Por esta razón, el punto de arranque para la enseñanza de cualquier tema de matemáticas debe consistir en una cadena de experiencias, reales o fácilmente imaginables por el niño, que pongan en movimiento su sentido de observación y su curiosidad innata y lo conduzcan a la comprensión del concepto matemático que se le trata de enseñar. Así es posible que el niño entienda el significado de las operaciones aritméticas y de sus propiedades, y no se limite únicamente a la ejecución mecánica de tales operaciones con números abstractos, que nada dicen a su imaginación y que por tanto carecen de interés para él.

Convencidos de esta necesidad de conducir la enseñanza de forma activa, necesitamos «una cantera» de la cual extraer los materiales para elaborar las experiencias que conduzcan al niño a la formación de los conceptos matemáticos; pues bien, esta «cantera» la hallamos precisamente en los Elementos de la Teoría de Conjuntos.

A continuación describimos, sucintamente, cómo pueden enseñarse a los niños las nociones elementales sobre conjuntos, y cómo pueden usarse estas nociones para desarrollar clases activas sobre las operaciones aritméticas y sus propiedades.

La Noción de Conjunto: En ningún momento debe intentarse dar una definición formal de la idea de *conjunto*; basta con que el niño adquiera conciencia del significado de la palabra *conjunto* como sinónima de una *colección* o *agrupación* de objetos de cualquier clase, y esto se consigue mediante la descripción de varios ejemplos de conjuntos de los que se encuentran en la vida corriente: Todos los alumnos de una clase forman *un conjunto;* cada alumno se dice que es *un elemento* del conjunto; todos los árboles de un bosque forman un conjunto; cada árbol es un elemento del conjunto, etc., etcetera. Debe continuarse la descripción de ejemplos de conjuntos, señalando en cada caso sus elementos, hasta que los niños usen con soltura estas palabras. Después se pedirá que ellos propongan ejemplos de conjuntos, señalando sus elementos, y el profesor anotará estos ejemplos propuestos por los alumnos, porque ellos reflejan muy bien el campo de sus intereses y deben ser usados para explicaciones posteriores.

Representaciones simbólicas: No es muy difícil convencer a los niños de la utilidad de representar los objetos de un conjunto mediante signos o símbolos sencillos.

Se puede comenzar así: ¿Cómo representaríais sobre un papel los aviones de un campo de aviación en el que hay dos trimotores (aviones de tres hélices), tres bimotores y cuatro avionetas de un solo motor? Los niños actúan y ofrecen sus soluciones, a veces desconcertantes por su originalidad y precisión. Después de proponer varios ejemplos de representaciones simbólicas de conjuntos, se advertirá a los niños la conveniencia de encerrar entre llaves los elementos del conjunto, separados mediante comas. El conjunto de aviones del ejemplo anterior se representaría así: {.˙., .˙., .—., .—., .—., .., .., .., ..} conviniendo en representar un trimotor por .˙., un bimotor por .—., y una avioneta por . .

Hay que insistir en la importancia que tienen las representaciones simbólicas en las ciencias, la técnica, y en todas las actividades de la vida, así como en la distinción entre los símbolos y los objetos representados por ellos.

Deben multiplicarse los ejemplos, dejando siempre libertad a los niños para que ellos ideen sus propios símbolos para representar a los elementos de cada conjunto.

Cuando no hay que detallar los elementos de un conjunto, se suele representar por una letra mayúscula; por ejemplo, podemos convenir en representar el conjunto de los alumnos de una clase por la letra A. También es frecuente representar los elementos por letras minúsculas.

Relación de pertenencia y relación de inclusión: Cuando un elemento, *a*, pertenece a un conjunto, A, se escribe así: $a \in A$; por el contrario, si el elemento *a* no pertenece al conjunto A se escribe $a \notin A$.

Cuando todos los elementos de un conjunto, A, pertenecen a otro conjunto, B, se dice que A *está incluido en B*, y también que A *es un subconjunto de B*, y se escribe $A \subset B$.

Cuando A no está incluido en B (algún elemento de A no pertenece a B) se escribe $A \not\subset B$.

En el caso de que $A \subset B$ y $B \subset A$, los conjuntos A y B tienen los mismos elementos (todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A), y se dice que el conjunto A es igual al conjunto B y se escribe $A = B$.

Si $A \subset B$ y $B \not\subset A$, se escribe $A \subset B$ y se dice que A es un *subconjunto* propio de B.

Didáctica: Todas estas relaciones entre conjuntos y los símbolos que se usan para representarlas, deben explicarse a los niños mediante ejemplos familiares, presentados eurísticamente. Por ejemplo, A puede ser el conjunto de los cromos de Antonio para el álbum de «El Mundo de los Animales», y B el conjunto de cromos de Bernardo para el mismo álbum. La limitación de espacio de este artículo no nos permite detallar estos ejemplos, que el lector completará sin dificultad.

Intersecciones y uniones: Dados dos conjuntos, A y B, el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B, se llama la intersección de A y B, y se indica así: $A \cap B$.

Cuando los conjuntos A y B no tienen elementos comunes, se dice que son *disjuntos*, y su intersección, que no tiene elementos, se dice que es el *conjunto* vacio, que se representa por la letra ϕ (léase «fi»).

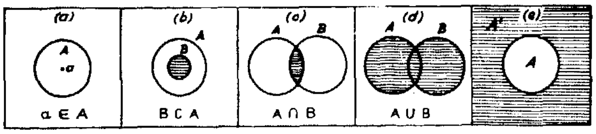
La Unión o reunión de dos conjuntos, A y B, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B, y se indica así: $A \cup B$. En el caso de que A y B tengan elementos comunes, estos se cuentan una sola vez en la unión.

Didáctica: Estas dos operaciones fundamentales del Algebra de los Conjuntos (Algebra de Boole) deben enseñarse también partiendo de múltiples ejemplos, análogos a los dos conjuntos de cromos, conjuntos deportivos, etc.

Universo y Complementos: En el ejemplo de las colecciones de cromos, el conjunto formado *por* todos los cromos que llenan el álbum se llama el *Universo, Conjunto Universal o Conjunto Referencial*, y se representa por U; cualquiera conjunto de cromos, relativo al mismo álbum, es un subconjunto del universo.

Dado un conjunto A, el conjunto cuyos elementos pertenecen al universo pero no al conjunto A, se llama el complemento de A y se representa por A'.

Diagramas de Euler-Venn: En las siguientes figuras están representadas, gráficamente, todas las relaciones y operaciones definidas entre conjuntos:



El Universo se representa por un rectángulo y cada conjunto por un recinto incluido en el rectángulo.

Didáctica: Los niños deben realizar muchos ejercicios de representación mediante estos diagramas. Por ejemplo, colorear las partes del universo correspondientes a $A \cap B$, $A' \cup B'$, $A \cup B'$, $A' \cap B'$, etc.

Particiones de un conjunto: Sea A un conjunto, y $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n$, subconjuntos propios de A tales que: 1) $A_i \cap A_j = \phi$, siendo $i \neq j$ (las partes son disjuntas); y 2) $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_i \ldots \cup A_i \ldots \cup A_n = A$ (la reunión de las partes es igual al conjunto A). En este caso se dice que se ha efectuado *una partición* del conjunto A. Cada subconjunto, A_i, es *una célula* de la partición.

Deben proponerse a los niños muchos ejercicios para que realicen particiones de un conjunto atendiendo a diversos caracteres de sus elementos; por ejemplo, particiones de los animales, del conjunto de todos los automóviles, de los habitantes del mundo, de los automóviles, de los barcos, etc.

Este concepto de partición es de gran utilidad en la enseñanza activa de la Aritmética, como veremos más adelante.

Actividades: Cuando los niños han entendido bién todas as relaciones estudiadas, mediante el desarrollo personal de muchos ejemplos, estarán en condiciones de completar los segundos miembros de las siguientes igualdades: $A \cup A = ?$; $A \cap A = ?$; $A \cup A' = ?$; $A \cap A' = ?$; $A \cap U = ?$; $A' \cup U = ?$; $A \cup \phi = ?$ $A \quad A' = ?$; $A \quad A' = ?$; $A \quad U = ?$; $A \quad U = ?$; $A \quad U = ?$ $A \quad \phi = ?$; $A \quad \phi = ?$; $(A \cup B)' = ?$; $(A')' = ?$; $A' \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (?)$; etc.

Los resultados de todas estas operaciones deben comprobarse con los diagramas de Euler-Venn, y cuando el niño es capaz de resolver con facilidad todos los ejemplos relativos a estas operaciones, podemos estar seguros de que hemos aumentado extraordinariamente su poder de observación y de razonamiento, pues las leyes de la lógica coinciden con estas leyes del Algebra de los Conjuntos, o Algebra de Boole, en honor del matemático y lógico inglés.

Coordinación de Conjuntos: Otra cuestión esencial relativa a los conjuntos que hay que enseñar es la que se refiere a las correspondencias entre los elementos de dos conjuntos. Cuando a cada elemento del conjunto A corresponde un elemento del conjuto B y a cada elemento del conjunto B corresponde uno del A, se dice que entre los conjuntos A y B existe una correspondencia biunívoca, o que los conjuntos A y B son *coordinables*. En seguida se les hace observar que la coordinación de conjuntos tiene las propiedades *reflexiva* (todo conjunto es coordinable consigo mismo), *simétrica* (si A es coordinable con B, entonces B es coordinable con A) y *transitiva* (si A es coordinable con B, y B lo es con C, entonces A es coordinable con C).

Didáctica: Como de costumbre, la enseñanza se desarrollará por medio de ejemplos dirigidos eurísticamente, y se procurará elegir conjuntos que estén realmente relacionados en la vida corriente, para que las correspondencias les parezcan naturales. Por ejemplo, se pondrán en correspondencia conjuntos de platos y de vasos, de hombres y de sombreros, etc.

Cuando dos conjuntos no son coordinables, uno de ellos es coordinable con una parte del otro, lo cual debe mostrarse mediante ejemplos.

Todos los conjuntos que son coordinables son equivalentes aritméticamente (forman una clase de equivalencia), y esta clase de equivalencia define un número natural. Los niños pueden entender el concepto de número natural observando muchos conjuntos coordinables y preguntándoles qué es lo que tienen de común.

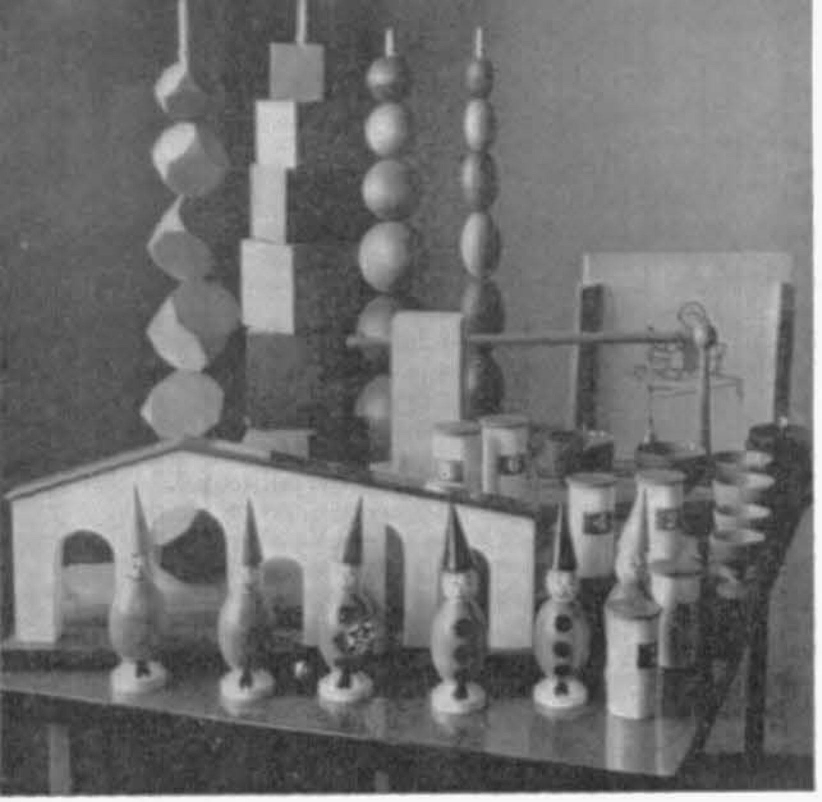
Finalmente, de la observación de conjuntos no coordinables se inducirá el concepto de mayor y de menor de una forma natural.

Producto Cartesiano: Otra operación fundamental entre conjuntos, por sus múltiples aplicaciones en toda la matemática, y que nos servirá para estudiar activamente la multiplicación de números naturales, es el *Producto Cartesiano* de dos conjuntos.

El producto cartesiano de dos conjuntos, A y B, se representa por $A \times B$ y se define como el conjunto formado por los pares de elementos cuyo primer componente pertenece a A y su segundo a B. Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, y $B = \{m, n\}$; $A \times B = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n), (c, m), (c, n)\}$.

Insistimos en que los elementos del producto cartesiano de A por B *son parejas de elementos*, el primero perteneciente a A y el segundo perteneciente a B. Por ejemplo, el par (m, c) no pertenece al producto cartesiano de A por B, siendo A y B los conjuntos dados anteriormente, pues el elemento m (primer componente del par (m, e)) no pertenece a A, sino a B; el elemento (m, e) pertenece al producto $B \times A$.

En un próximo artículo expondremos cómo se aplican estas nociones de la Teoría de Conjuntos al desarrollo de las operaciones aritméticas fundamentales de forma activa, y cómo es posible que los alumnos investiguen personalmente las propiedades fundamentales de estas operaciones (leyes formales), que luego son la base del cálculo algebraico.



el sentido de nuestra enseñanza de las matemáticas

Por ALBERTO AIZPUN LOPEZ

Que la obligación del maestro es enseñar pasa por una idea vieja, casi axiomática, que aun hoy es aceptada por casi todos y entre estos se cuentan los alumnos y muchos maestros. Por eso se habla de que en este sitio se enseña mucho o de que en aquel otro enseñan bien. Los métodos que los maestros aplican y las renovaciones que se efectuan lo son siempre pensando en que con ellos enseñarán mejor. Si el maestro cumple con esta obligación y a pesar de ello no se consigue siempre el resultado deseado, el fracaso se atribuye a alguna particularidad del alumno: edad, falta de atención o interés, a alguna mala disposición para la materia.

En el sentido que aquí empleo la palabra, enseñar quiere decir exponer, explicar, mostrar; de modo que se enseñan las cosas como se muestran las fotografías: poniéndolas ante el alumno e informándole de lo que representan, o como un inventor muestra su aparato: desmontándolo y explicando cada una de sus partes. Al observador no le queda más que entender y comprender para poder repetir.

De esta manera pueden enseñarse solamente las cosas que están establecidas de una vez para todas, sin que admitan modificaciones personales o interpretaciones distintas de una fija. Por ejemplo, este es el sentido que da el maestro a su labor cuando enseña al niño el Padre Nuestro. La labor del alumno es solamente repetir fielmente las frases y saber que cada una de ellas significa precisamente aquello que le dicen y no otra cosa que pueda pensar; no se trata de que el alumno razone por su cuenta y discurra a su manera, sino de que informe, se entere, sepa, que aquello es así y no de otro modo.

Resulta de aquí que la tarea de enseñar encaja bien en un ambiente o en una materia que algunos (Garagorri y Aranguren por ejemplo, comentando a Ortega) llaman escolástica, queriendo significar con esta palabra que hay alguien que ha expresado ya una verdad inamovible, obteniendo conclusiones definitivas; queda a los maestros la labor de descubrir e interpretar aquella idea para después exponerla a sus alumnos, explicarla, *enseñarla*. Los alumnos podrán meditar sobre lo que se les ha enseñado para mejor entenderlo, pero sólo para eso. En caso de aparente contradicción la autoridad del maestro es la que decide.

Si bien este procedimiento puede ser natural en materias cuyo contenido profundo se mantiene estático y sobre el que no caben interpretaciones personales, como es el caso de la Religión, por ejemplo, no resulta válido en aquellas otras materias de las que solamente puede decirse que se tiene cierto conocimiento precisamente cuando se ha conseguido una interpretación personal y en las que podemos realizar nuestras propias creaciones; aquella materias que exigen, por sí mismas, la crítica individual de cada alumno, sin la que éste será un mero repetidor que no ha llegado al entendimiento de lo que dice. Las Matemáticas, más que ninguna otra, están colocadas en este grupo.

Según este razonamiento, hablando de Matemáticas la obligación del Maestro no es enseñar, sino hacer que el alumno aprenda. Si a primera vista puede parecer que todo es lo mismo y si, generalmente se piensa que el alumno aprende porque el maestro le enseña, se debe a que constantemente chocamos con las palabras y al hecho de que dos personas pueden emplear una misma de ellas para expresar dos ideas distintas.

Para entendernos en el lenguaje y solamente para ello, diré que el alumno aprende cuando vea que es capaz de crear. Por ejemplo, digo que aprende lenguaje cuando veo que es capaz de inventar palabras que yo no le he enseñado, ni se las ha oido a nadie o cuando combina las que sabe formando frases que nadie más ha pronunciado. Quizá esto sea lingüísticamente discutible, pero se trata ahora, solamente, de dar nombre a una disposición mental determinada. Así, pues, en el lenguaje, el alumno tiene iniciativa personal y le es tan necesaria que sin ella no sabe nunca hablar. Nadie aprende el lenguaje porque le hayan enseñado las reglas de la sintaxis. Al contrario, es después de aprender cuando el maestro puede enseñarle que la formación de palabras y frases se sintetiza en ciertas reglas. Claro que no puedo esperar que mi alumno aprenda sin titubeos el lenguaje en su forma actual, sino que, por el contrario, me parecerá natural que tantee, dude y cometa errores diciendo, por ejemplo, «morido» o «rompido» o «ponido»; precisamente este mismo error me hace comprender que el alumno por sí solo, ha sido capaz de observar la formación de ciertas palabras que más adelante le *enseñaré* (es decir, le informaré de) que se llaman participios. De modo que aquí el alumno aprende cuando adopta una posición creadora frente al lenguaje.

Pues esta misma posición es la que se espera que el niño alcance en Matemáticas para poder decir que aprende. Pero la creación es personal y no puede ser impuesto por otro. Cierto que si los niños conocen los símbolos de las cifras y han visto que escribo $5 + 4 + 3$ podrán ellos escribir, si se les pone en el trance, otra expresión análoga; pero esto no es creación, sino imitación. Este es el resultado de *enseñar* y en el lenguaje corriente, de la persona que es un buen imitador o repetidor de alguna técnica ya se dice que está bien enseñado». En cambio, si el alumno no llega, por sí mismo, a la observación de que $10 + 14 = 14 + 10$, aun sin saber que cualquiera de ambos miembros se puede escribir 24, y puede decidir que se encuentra ante una relación que encierra una verdadera propiedad de la suma, está aprendiendo; luego vendrá el hecho de que el maestro le informe de que esa propiedad se llama conmutativa y eso es lo que se le *enseña*.

Admitimos que la repetición de una muestra produce solamente imitación y según esto un maestro que enseñe, con el sentido que a esta palabra se le da aquí, obtendrá mejores o peores imitadores; su mejor alumno será aquel que mejor *repita* la técnica que enseña, su mejor imitador. Resulta así que la creación individual se ve impedida por la obligación constante de imitar, o lo que es lo mismo, que el alumno se ve imposibilitado de *aprender* precisamente porque el Maestro no hace otra cosa que *enseñar*.

Para dar idea de la diferente orientación que puede dar a nuestro trabajo escolar las distintas maneras de entender las cosas, sigue el esquema de dos modos diferentes de introducción de los temas. En el primero trato de enseñar y en el segundo de que el alumno aprenda. Espero que con estos dos ejemplos particulares se comprenda la idea que trato de dar a entender mejor que con varias páginas de consideraciones un tanto indeterminadas.

Ejemplo primero: Cómo *se enseñan* los triángulos.

Generalmente se comienza por dar la definición: se llama triángulo al polígono de tres lados. Se hace dibujar triángulos y medir los lados con la regla. ¿Cuánto miden los lados de tu triángulo? ¿Y los del tuyo? De aquí se pasa a dar nombres: los triángulos que habéis dibujado que tienen sus tres lados desiguales se llaman escalenos, los que tienen solamente dos lados iguales, se llaman isósceles y los que tienen iguales los tres lados se llaman equiláteros. Se muestra un triángulo claramente escaleno y se pregunta: ¿de que clase es este triángulo? ¿Y éste? ¿Y éste? Señala en la clase un triángulo escaleno; tú señala uno isósceles; tú uno equilátero. A continuación, por observaciones del mismo estilo, se hace la clasificación en rectángulos, acutángulos y obtusángulos y se hacen dibujar y reconocer triángulos de distintas características, como escaleno y obtusángulo, isósceles y acutángulo, rectángulo e isósceles, etc.

Crítica de esta introducción: 1.º Con este modo de proceder no se ha logrado ninguna actividad creadora, ni aun siquiera ninguna actividad matemática. En primer lugar acabo de ofrecer a la atención de los alumnos un hecho sobre el que no tienen otra cosa que hacer que informarse, tomar nota, enterarse. En segundo lugar la orientación mental es la misma si se trata, por ejemplo, de informarles sobre las señales de la circulación diciéndoles que las circulares ordenan, las triangulares avisan, las rectangulares informan y hasta son del mismo estilo las preguntas a hacer: ¿es ésta una señal de aviso?, ¿es ésta una de información? Dibuja una señal que ordene, tú otra que avise, etc. Incluso ampliamos la noticia diciendo que como las órdenes son de dos clases, las que mandan hacer y las que prohiben, las señales circulares serán rojas cuando prohiban y azules cuando manden hacer algo, poniendo ahora (como en los triángulos) ejercicios consistentes en dibujar señales que tengan dos características: que ordenen hacer y que ordenen no hacer, etc.

2.º El que se haga actuar a los niños dibujando y respondiendo a distintas preguntas hace creer a algunos que se ha empleado un método activo, pero no hay nada de eso. La Escuela activa supone creación, precisamente creación, por parte del alumno y aquí las preguntas no le hacen al niño crear nada, ni aprender nada; solamente sirven como control, para que, a través de sus respuestas, el maestro vea si los alumnos se han enterado o no, pero para nada más. Si se comprueba que, efectivamente, se han enterado (lo que hacen en cuanto sepan el castellano suficiente), la escuela tradicional prosigue con la explicación del tema y en otro caso se multiplican los ejemplos y se repiten las definiciones.

Así, pues, respondamos a esta pregunta: ¿Se ha enseñado algo? Es decir, ¿se ha explicado, se ha expuesto se ha mostrado se ha hecho ver? Sin duda sí; y los alumnos saben más que antes en el sentido de que tienen más información, de que se han enterado de algo de lo que antes no lo estaban. Pero, ¿han aprendido?, ¿han entrenado su espíritu de creación o de crítica?, ¿han decidido, voluntariamente, conceder especial interés a alguna cuestión, convenir en que cierta idea es lo bastante importante para destacarse sobre las demás? ¿Han hecho algo personal, algo distinto de imitar?; ¿se ha contribuido a entrenar en el alumno el espíritu matemático? También, sin duda, no.

Ejemplo segundo: Como se puede *aprender* la numeración.

Puesto que en cierto modo identificamos aquí aprender con crear, es necesario, para hacer brotar la creación, ofrecer no un campo pequeño y delimitado de observación sino otro lo más amplio posible y que permita lanzarse en distintas direcciones, presentando a la investigación una cuestión en la que todo alumno pueda hacer algo por su cuenta y obtener resultados, de los que luego rechazará los no convenientes y se quedará con los que resultan aceptables. Así, proponemos, por ejemplo, la siguiente materia de trabajo: disponemos de una imprentilla que tiene signos + (tantos como se quieran) y un ejemplar (uno solo) de cada una de las potencias de dos (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...). ¿Se podrán escribir todos los números? Los alumnos prueban y van obteniendo: $1 = 2^0$; $2 = 2^1$; $3 = 2^1 + 2^0$; $4 = 2^2$; $5 = 2^2 + 2^0$ ... Vistos estos primeros resultados (tan extensos como se quiera) existe el convencimiento, que puede razonarse, de que, efectivamente, la respuesta es afirmativa. En vista de ello imponemos una regla más exigente: si aparece una potencia de dos, han de escribirse también todas las inferiores a ella, pero ahora se permite el uso del signo «por» precedido del cero. Así, van obteniendo: $1 = 2^0$; $2 = 2^1 + 0 \times 2^0$; $3 = 2^1 + 2^0$; $4 = 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$; $5 = 2^2 + 2^1 + 0 \times 2^0$; $6 = 2^2 + 2^1 + 2^0$; ... Puntualizando aún más, se exige que siempre, ante cada potencia, aparezca el signo «por» y entonces, permitiendo el uso del 1, la manera de escribir es ésta:

$$1 = 1 \times 2^0;\ 2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0;\ 3 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0;$$
$$4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0;\ 5 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0;\ \ldots$$

Observando los resultados obtenidos destaca lo que permanece invariable (en terminología de Piaget), que son los signos de multiplicar y sumar y las potencias de dos y después de esto *convenimos* en que ya no hay necesidad de escribir de modo efectivo más que los números que multiplican aquellas potencias, de modo que la escritura de los números sucesivos es 1; 10; 11; 100; 101; 110; 111; 1.000; ... y no es necesario que el alumno sepa decir y leer la palabra mil. Aquí podría indicar su manera de escribir, diciendo, por ejemplo, uno, cero, cero, cero, sabiendo, porque ha aceptado el convenio cómodo, que quiere decir una vez la tercera potencia de dos. Inmediatamente, si se quiere, pueden ensayarse operaciones con esta manera de escribir la sucesión de los número naturales y poner, por ejemplo, $10 + 11 = 101$, que no extraña demasiado porque el alumno *sabe* que lo que ha escrito equivale a $2 + 3 = 5$.

¿Será el dos el único número con el que se puede hacer todo lo anterior? Este problema resulta, ahora, bien natural y todos los alumnos pueden trabajar en él y obtener sus resultados, pocos o muchos. Los alumnos trabajan ahora por sí solos, sin ninguna orientación por parte del Maestro, porque comprenden perfectamente lo que están buscando. Cada uno tantea a su manera y por su camino, pero de todos modos se llega a la conclusión, en la clase, de que ahora es necesario que se permita también el uso del signo menos o bien el uso del número dos. Podemos establecer lo segundo como regla o dejar libertad a cada uno; los que elijan lo primero lo abandonan después por las dificultades que presenta al escribir la sucesión de los números. Mediante un proceso análogo al explicado en el caso de las potencias de 2, se ve cómo los números sucesivos pueden escribirse así: 1; 2; 10; 11; 12; 20; 21; 22; 100; 101; 102; 110; ... y realizar si se quiere, como antes, alguna operación como $2 + 11 = 20$; o bien $21 - 12 = 2$.

Como se ve, esto no es una obligación impuesta al alumno, sino que se trata de una investigación personal y puede ampliarse preguntando: ¿Cómo se escribirá la sucesión de los números tomando como base de trabajo las potencias de 4? Y todos, antes o después, son capaces de inventarla.

Naturalmente, cualquiera ve que todo esto lleva a la comprensión auténtica de los fundamentos de la numeración y también ve que es muy distinto este modo de *aprender* que el procedimiento de *enseñar* diciendo que diez unidades hacen una decena y que diez decenas hacen una centena. Con el primer modo el alumno está en disposición de utilizar cualquier sistema de numeración porque ha descubierto, *ha creado*, su funcionamiento íntimo, mientras que con el segundo se encuentra siempre inseguro y pendiente, ante cualquier duda, del recuerdo de las reglas que, por otra parte, han sido establecidas sin consultarle. Con el modo de proceder expuesto el alumno ya ve que la escritura de los números es arbitraria y que depende del modo como *se convenga* en realizarla; de la manera clásica piensa que los símbolos de los números son algo pre-establecido e inamovible y tiende a identificar el número con su símbolo; ahora en cambio, ve que hay muy distintas formas de escribir un número y que éste es algo diferente del símbolo que, en cada caso determinado, emplee.

aspectos matemáticos del estudio del movimiento de los cuerpos

Por JESUS LAHERA CLARAMONTE
Catedrático de Escuela Normal de Madrid

En las unidades didácticas de Ciencias de la Naturaleza de los recientes Cuestionarios Nacionales de Enseñanza Primaria no se insiste explícitamente en el estudio del movimiento de los cuerpos. Probablemente se pretende que estas nociones físicas pueden ser tratadas adecuadamente en las Adquisiciones de Matemáticas, Proporcionalidad de magnitudes (curso 6.º) y Ecuación lineal (curso 7.º), así como ser base de los ejercicios del curso 7.º: Problemas de aplicación de la proporcionalidad de magnitudes, Representación de magnitudes directa e inversamente proporcionales y de ecuaciones lineales.

Este supuesto didáctico, en cuanto contribuye a una mayor interacción entre la Matemática y el mundo físico experimental —incluso a nivel primario—, puede resultar muy operativo en la escuela primaria; el hecho de que estas unidades didácticas se desarrollen en los últimos cursos escolares posibilita un tratamiento más riguroso de fenómenos físicos básicos y realistas.

En cualquier caso, el movimiento de los cuerpos debe ser tratado extensamente, porque, sin dejarnos llevar por tendencias mecanicistas ya superadas —«ignorato motu, ignoratur natura»—, constituye uno de los primeros fenómenos que debemos presentar al niño, que comprenderá que siempre que algo se mueve, allí hay física, y la necesidad de la medida como expresión cuantitativa de los hechos. Desde el punto de vista matemático la idea de trayectoria tiene un indudable carácter geométrico; el movimiento uniforme es un ejemplo claro de proporcionalidad. Las deducciones pueden hacerse, a veces, a partir de «experiencias mentales» y en su desarrollo se pueden mostrar aspectos modernos, como las analogías dinámicas entre el sistema solar y el mundo atómico.

El estudio elemental del movimiento de los cuerpos puede hacerse según las normas operativas siguientes:

1. Programación de conceptos físicos básicos en pequeñas unidades informativas, intentando ajustarnos a los supuestos de la enseñanza programada: «Técnica nueva de enseñanza y aprendizaje, basada en la presentación microanalítica (gradual y lógica) de los contenidos científicos, organizados de tal manera que sea permitido al escolar la realización de un trabajo autodidacta e individualizado y el control inmediato de su rendimiento escolar» (Moreno).

Debido al carácter experimental de los conceptos programados, las cuestiones finales son ejercicios y experiencias a realizar bajo la inmediata dirección y control del maestro, que puede anotar sus observaciones sobre el aprendizaje del alumno, incluso en forma de calificaciones numéricas. Las respuestas a las preguntas se dan en el margen derecho de la página, que se tapa con una tira de cartón que al correrse hacia abajo descubre las sucesivas respuestas. Unicamente cuando la contestación es correcta el alumno puede pasar a considerar la siguiente cuestión.

2. A partir del concepto cualitativo de rapidez se formula la expresión de la velocidad de un movimiento.

3. Se muestran experiencias que ponen de manifiesto la proporcionalidad en el movimiento uniforme, pudiéndose utilizar métodos gráficos para la resolución de los clásicos problemas de «móviles».

1.1

Un cuerpo está en reposo cuando está quieto, cuando ocupa siempre la misma posición. Y está en movimiento cuando su posición varía. Decimos que un barco se mueve si vemos que su posición ....

— *varía.*

1.2

Un barco está en reposo si su posición es siempre ....

la misma.

1.3

Observemos a una persona que está subiendo a los pisos superiores de un edificio. La persona, respecto al ascensor, no se mueve, está en ....

— *reposo.*

1.4

Pero respecto al edificio sí se mueve, es decir, está en .... El reposo y el movimiento han de referirse a algo que consideremos quieto (en nuestro caso, al edificio); son, pues, dos conceptos relativos.

— *movimiento*

1.5

Pensemos en un individuo que está andando sobre un tren en movimiento. El individuo se mueve respecto a tierra, y también respecto al tren y éste se mueve respecto a tierra. Tenemos, pues .... movimientos

— *tres.*

1.6

El movimiento del individuo respecto al exterior, respecto a tierra, se llama movimiento absoluto; el del individuo respecto al tren, movimiento relativo; y el del tren respecto a tierra, movimiento de arrastre. Para que el movimiento relativo sea nulo, el .... se ha de parar.

— *individuo.*

1.7

Para que el movimiento de arrastre sea nulo es el .... el que se ha de parar.

— *tren.*

1.8

Si el tren y el individuo se paran, están quietos, el movimiento absolutot es nulo; decimos que están por tanto en reposo absoluto. Pero, ¿es posible el reposo absoluto en el caso considerado? Debemos pensar que la Tierra también se mueve; luego sobre la Tierra .... es posible el reposo absoluto.

— *no.*

1.9

En nuestras experiencias corrientes consideramos que la Tierra está quieta, en reposo absoluto, y así decimos que un cohete espacial está también en .... antes de dispararlo.

— *reposo absoluto.*

1.10

y que se pone en movimiento cuando se le dispara, porque se .... respecto de la Tierra.

— *mueve.*

1.11

Si cogemos un trozo de tiza y lo movemos, lo desplazamos sobre la pizarra o encerado, habremos dibujado una línea. A esta línea que describe un cuerpo en .... se le llama trayectoria de dicho cuerpo.

— *movimiento.*

1.12

Así, pues, si un cuerpo no está en movimiento, no tiene sentido hablar de su ....

— *trayectoria.*

1.13

Un chorro de agua constituye una trayectoria visible de gotitas de agua. Los aviones a reacción o los cohetes de la feria dibujan trayectorias que son también ....

— *visibles.*

1.14

Si en un cuarto oscuro entra luz por un pequeño orificio, vemos que la luz va, se propaga, en línea recta; en consecuencia, diremos que la luz sigue una trayectoria ....

— *rectilínea.*

1.15

Un volante de coche, cuando gira, describe una trayectoria que es una circunferencia. Sabemos que los planetas giran alrededor del Sol describiendo unas trayectorias que, al principio, se creía que eran circunferencias y después pudo verse que eran circunferencias «achatadas», es decir, elipses. Las trayectorias de los planetas se llaman órbitas. Así, pues, los planetas describen .... alrededor del Sol.

— *órbitas elípticas.*

1.16

La materia está organizada de igual manera que el sistema solar. Así, una partícula pequeñísima de hierro, un átomo de hierro, está formado por una parte central llamada núcleo y por una serie de partículas electrizadas llamadas electrones. El núcleo hace el papel de Sol y los electrones son como los planetas. Es de esperar, según esto, que el núcleo, al igual que el Sol, esté ....

— *quieto.*

1.17

y que los electrones, al igual que los planetas, describan .... alrededor del núcleo.

— *órbitas elípticas.*

1.18

Observa y dibuja la trayectoria que sigue una piedra lanzada oblicuamente hacia arriba. Esa línea se llama parábola. La trayectoria de la bala de un cañón es también una ... .

— *parábola.*

1.19

Los cuerpos que se desplazan, que se trasladan de un sitio a otro, llevan un movimiento de traslación. Un tren en movimiento lleva movimiento de ....

— *traslación.*

1.20

Un cuerpo que gira sobre sí mismo tiene movimiento de rotación. La Tierra, como los restantes planetas, tiene un movimiento de traslación alrededor del Sol; pero, al mismo tiempo, gira sobre sí misma y por ello tiene también un movimiento de ....

— *rotación.*

1.21

Hay cuerpos, como un tornillo cuando penetra en madera, que se trasladan y giran al mismo tiempo. Estos cuerpos tienen un movimiento llamado helicoidal. En resumen, los tipos de movimiento son tres: traslación, rotación y ....

— *helicoidal.*

1.22

Observa cuerpos que se mueven e indica sus respectivas trayectorias.

— ———

1.23

Indica las trayectorias de: a) un columpio; b) una piedra que se lanza con una honda; c) una bomba arrojada desde un avión; d) el extremo de la aguja de un reloj.

— ———

1.24

Los aviones a reacción suelen, al ser observados, aparecer por el horizonte, atraviesan el firmamento visible y después ya no son visibles. Haz un dibujo de la posible trayectoria que sigue el avión y que pueda explicar el fenómeno observado: a) sin tener en cuenta el relieve local; b) teniendo en cuenta la influencia de las montañas de la comarca.

— ———

1.25

Cuando en un depósito que contiene agua se hace un orificio lateral, el agua se derrama al exterior. Dibuja su trayectoria. ¿Depende la forma de ésta de donde se haya hecho el orificio?

— ———

1.26

En un recipiente con agua se echa un poco de serrín. Al calentar el recipiente, ¿te imaginas cómo son las trayectorias de las partículas de serrín?

— ———

1.27

Consulta en tu libro de Geometría el modo de construir una elipse por el llamado «método del jardinero». ¿Qué movimientos elípticos conoces?

— ———

1.28

Dibuja aproximadamente la trayectoria que crees seguirá un satélite artificial desde que es lanzado hasta que se coloca en órbita alrededor de la Tierra.

— ———

1.29

El primer satélite artificial de la Tierra giraba alrededor de ésta describiendo, aproximadamente, una circunferencia de 563 kilómetros sobre la superficie de la Tierra. Dibuja nuestro planeta y la trayectoria de dicho satélite, sabiendo que el radio terrestre mide unos 6.370 km. En tu dibujo toma 1 cm por cada 500 kilómetros que hay en la realidad. (Esto se llama la «escala» del dibujo).

— ———

1.30

La distancia entre el Sol y la Tierra es de unos 150.000.000 km. Si tomamos esta distancia como unidad (la llamada «unidad astronómica»), las distancias de otros planetas al Sol vienen dadas por la siguiente tabla, deducidas por la aplicación de la ley de Bode-Titus:

Mercurio	0,4
Venus	0,7
Tierra	1
Marte	1,6
Júpiter	5,2
Saturno	10

a) Dibuja, según estos datos y a una escala conveniente, las trayectorias de estos planetas alrededor del Sol, sabiendo que sus trayectorias pueden considerarse circulares.

b) Calcula, en km., la distancia Tierra-Marte y la distancia Marte-Júpiter.

2. RAPIDEZ Y VELOCIDAD

2.1

Un coche recorre una distancia de 180 kilómetros en tres horas, y en este tiempo otro ha recorrido 120 kilómetros. Decimos que el primero es más rápido, pues a igualdad de tiempo ha recorrido mayor ....

— *distancia.*

2.2

En recorrer 100 km. un coche emplea dos horas y, otro, una hora. Este segundo coche es más rápido, pues a igualdad de distancia emplearemos ....

— *tiempo.*

2.3

A la distancia recorrida en una unidad de tiempo (una hora, por ejemplo) se le llama velocidad, que numéricamente es igual al cociente entre la distancia recorrida y el tiempo invertido. Así, en la cuestión 2.1, el primer coche recorre en una hora 180 : 3 = 60 km. y el segundo ...., luego el primero lleva mayor velocidad.

— *120 : 3 = 40*

2.4

En la cuestión 2.2, el primer coche lleva una velocidad de 100 : 2 = 50 kilómetros por hora y el segundo .... luego este coche es más veloz que el primero.

— *100 : 1 = 100.*

2.5

Un coche lleva una velocidad de 60 kilómetros por hora. ¿Cuántos metros recorrerá en un segundo? Recorrerá: $60 \times 1.000 = 60.000$ metros en una hora; luego en un segundo recorrerá 3.600 veces menos este número (una hora tiene 3.600 segundos), es decir .... metros en cada segundo.

$$\frac{60.000}{3.600} = 16,6$$

2.6

Si una persona lleva una velocidad de 1 metro por segundo, andará en 1 segundo: $1 : 1.000 = 0,001$ kilómetros, y en 1 hora 3.600 veces este número, es decir, ... Lleva, pues una velocidad de 3,6 kilómetros por hora.

— *3,6*

2.7

Un automóvil sale de Madrid a las 8 de la mañana; llega a Toledo, donde está parado 2 horas, y regresa a Madrid, llegando a las 12 y media. Si la distancia Madrid-Toledo es de 70 kilómetros, calcula la velocidad del automóvil. ¿Qué supuesto admitimos para hallarla?

2.8

La Tierra gira alrededor del Sol describiendo una órbita casi circular, empleando 1 año en dar una vuelta completa. ¿Cuál es su velocidad si la distancia Sol-Tierra es de 150 millones de kilómetros?

2.9

El récord mundial de los 100 metros lisos es de 9,9 segundos. Expresa esta velocidad en kilómetros por hora.

....

2.10

El sonido recorre 340 m. en 1 segundo. Esta velocidad se toma como unidad de velocidad de los aviones a reacción y se llama «mach». Expresa el valor de esta unidad en kilómetros por hora.

....

2.11

Un avión es supersónico cuando su velocidad es superior a 1 mach. Si un avión vuela a razón de 700 kilómetros por hora, es supersónico?

....

2.12

El satélite artificial citado en 1.29 empleaba 96 minutos en dar una vuelta completa. ¿Qué velocidad llevaba, expresada en kilómetros por hora?

....

3. PROPORCIONALIDAD EN EL MOVIMIENTO UNIFORME

Hemos de justificar experimentalmente la definición operativa de velocidad:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

El procedimiento consistirá en considerar el movimiento de un cuerpo que lleve velocidad constante (movimiento uniforme) y medir distancias y tiempos, intentando encontrar una relación sencilla entre estas dos magnitudes mensurables, introduciendo un concepto nuevo (velocidad) capaz de explicar de una manera muy sencilla un conjunto complejo de situaciones particulares. Este proceso es, con seguridad, la raíz del método científico.

3.1. **Fácilmente** se consigue que una persona se mueva con movimiento uniforme: basta que, acompasadamente, avance un paso cada segundo. Supongamos que una persona sale del punto A (Fig. 1) y

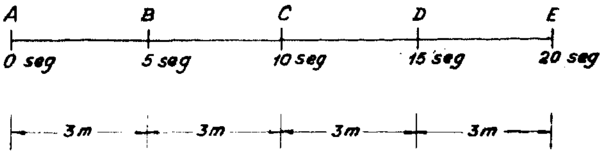


Fig 1. Estudio experimental del movimiento uniforme de una persona

en estas condiciones da cinco pasos empleando cinco segundos, haciendo una señal en B. Sucesivamente, de igual manera, se hacen las señales C, D y E. Midamos las distancias entre estos puntos. Los resultados obtenidos se condensan en la Tabla I.

TABLA I

Estación	Distancias a A	Tiempo	Relación
A	0	0	d/t
B	3	5	0,6
C	6	10	0,6
D	9	15	0,6
E	12	20	0,6

Se observa que el cociente entre cualquier distancia y el tiempo correspondiente permanece constante. Si la distancia se duplica, también se duplica el tiempo; ésta es la condición de proporcionalidad de magnitudes. En consecuencia, diremos que existe proporcionalidad directa entre la distancia y el tiempo, y podremos escribir:

$$v = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} \ldots = \frac{d}{t}$$

La expresión $d = vt$ es una ecuación lineal. Con seguridad, según estos datos, al cabo de 12 segundos la distancia recorrida habrá sido de $12 \times 0{,}6 = 7{,}2$ m., aunque no la hayamos medido. Hemos hecho una interpolación. No podemos afirmar, por extrapolación, la distancia recorrida al cabo de un día, entre otras cosas porque no sabemos si el movimiento ha continuado hasta este tiempo. En nuestro caso, la expresión $d = vt$ sólo es aplicable a tiempos inferiores a 20 segundos. Muchas ecuaciones físicas están «acotadas», han sido derivadas de un conjunto determinado de observaciones y tienen por ello un campo de aplicación limitado.

3.2. **Coloquemos** un pequeño plano inclinado de madera sobre una mesa pulimentada y a unas distancias determinadas (puntos A, B y C) pongamos sucesivamente una varilla metálica. Dejemos resbalar por el plano inclinado una bola de acero y midamos en cada caso el tiempo transcurrido desde que empieza la bola a moverse por la mesa hasta que choca con la varilla. En una experiencia realizada, las distancias fueron las que se indican en la figura 2 y los tiempos respectivos fueron de 1,8, 3 y 4 segundos. Pueden resumirse estos resultados de una manera análoga a la tabla I. ¿Qué valor se encuentra para la velocidad?

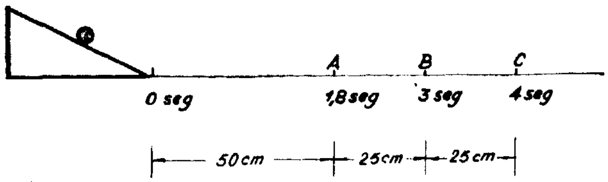


Fig. 2 Estudio experimental del movimiento de una bola de acero

3.3. **La información** dada en la tabla I puede mostrarse en una gráfica distancias-tiempos, obteniendo, como era de esperar, una línea recta (Fig. 3). Por interpolación gráfica se ha señalado la distancia de 7,2 m. correspondiente a un tiempo de 12 segundos. En la figura 3-b se resuelve gráficamente el siguiente problema: Desde la estación A sale, a las ocho de la mañana, con dirección a B un tren que lleva una velocidad de 50 kilómetros por hora, y simultáneamente desde B sale otro hacia A, marchando a 60 kilómetros por hora. Hallar dónde se cruzarán estos trenes y a qué hora, siendo la distancia AB de 300 kilómetros.

Es conveniente, finalmente, presentar a los niños casos de movimientos no uniformes. En el experimento clásico de la polea de Atwood, muy fácil de realizar en la escuela primaria, se observa que no hay proporcionalidad entre la distancia y el tiempo, y, en consecuencia, la representación gráfica correspondiente no es una línea recta.

Considerando la unidad didáctica como un conjunto muy diverso de experiencias y actividades, se puede incidir en otros aspectos dinámicos: locomoción, movimientos de la Tierra y de la Luna y sus efectos, movimiento de cohetes y satélites, aparatos medidores de velocidad, etc. En particular, con un material muy sencillo se puede ingeniar dispositivos que basados en el movimiento uniforme permiten la medida de tiempos muy pequeños.

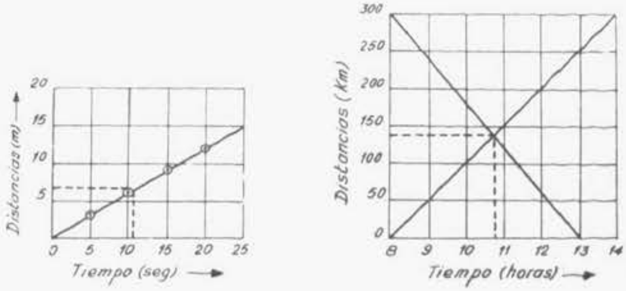
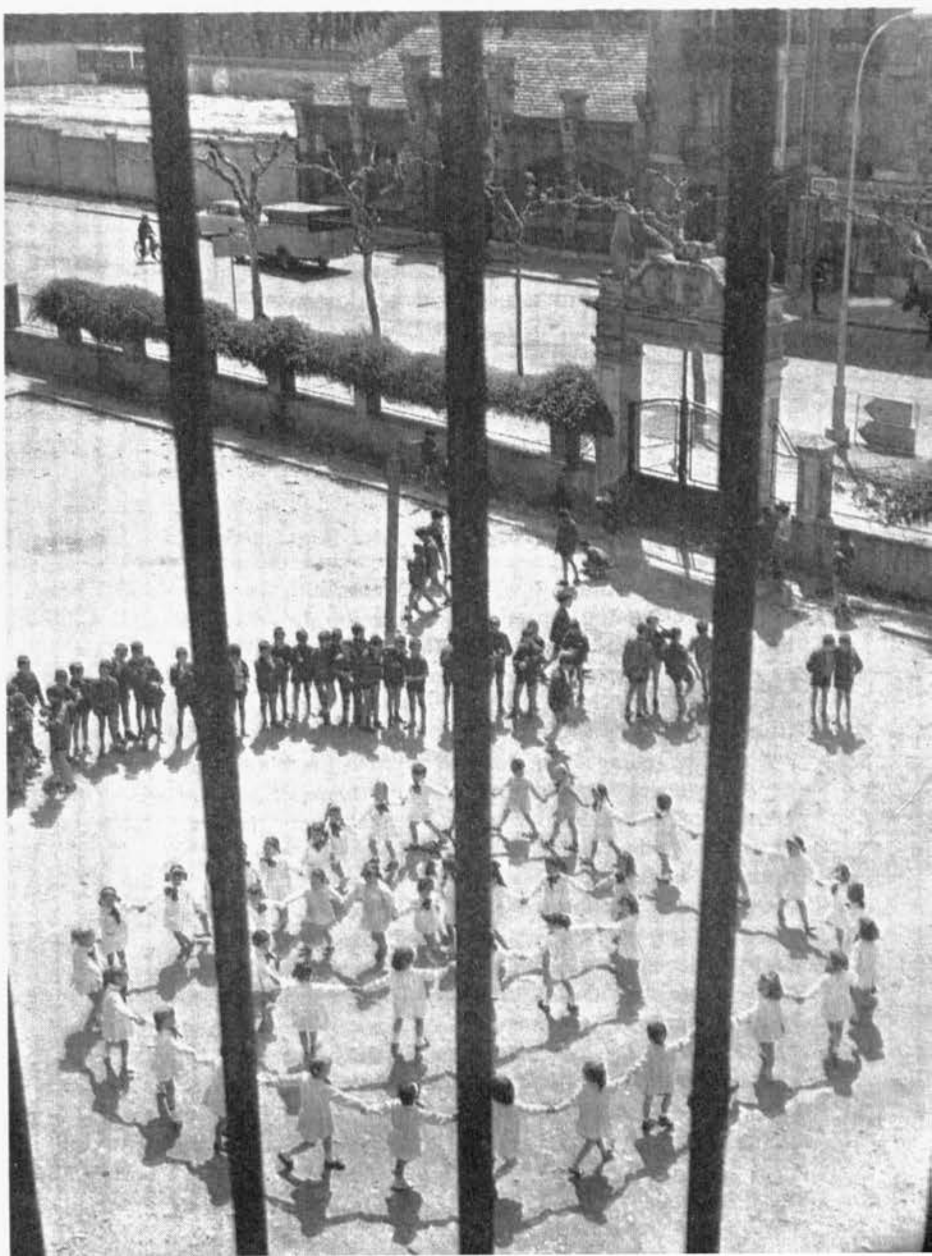
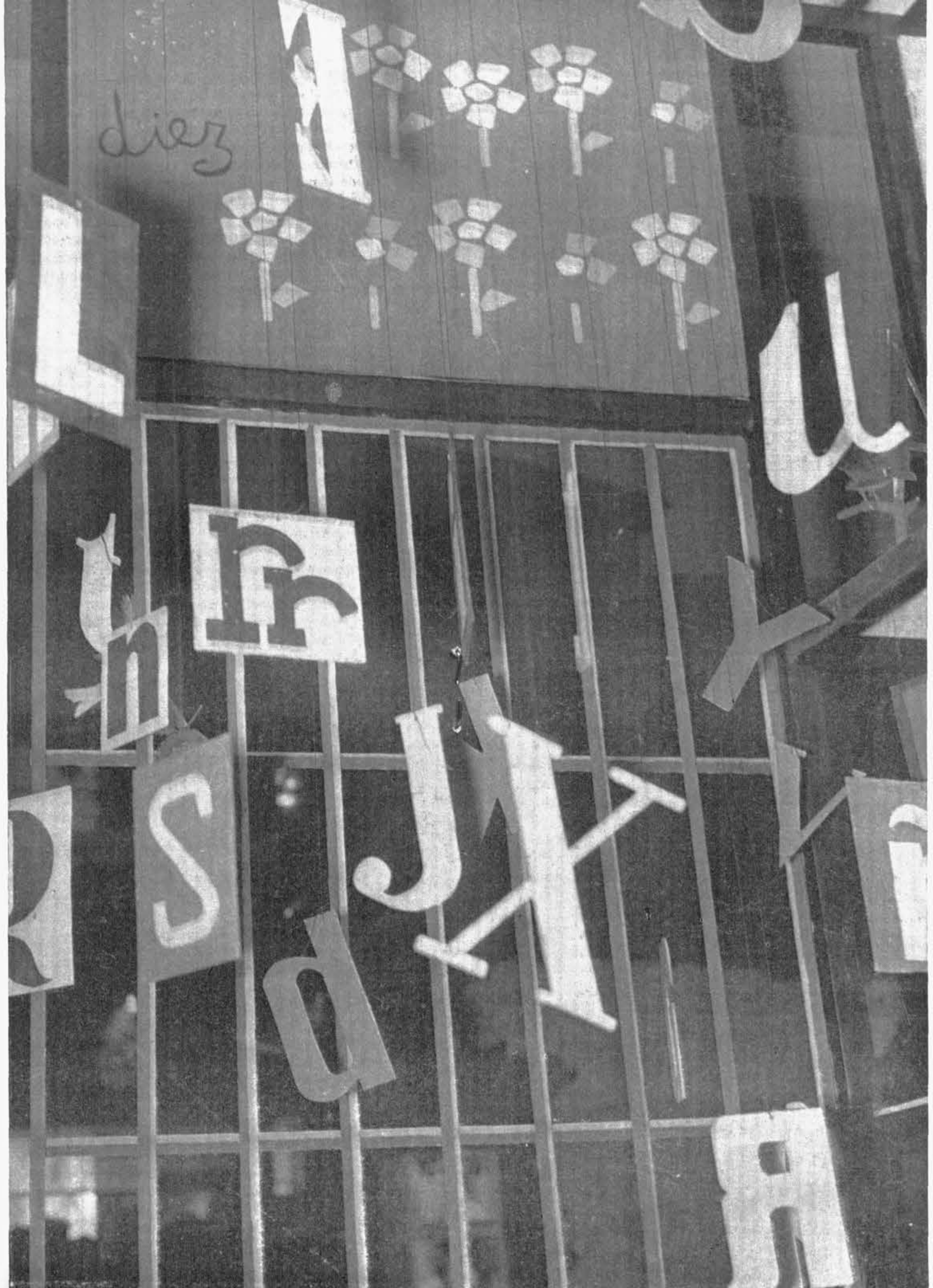


Fig. 3 a) Representación gráfica del movimiento uniforme
b) Método gráfico de resolución de problemas



la matemática enfocada psicopedagógicamente



Por CONCEPCION SANCHEZ MARTIN

¡Malos hábitos! Es lo que vienen adquiriendo los niños en las escuelas primarias de casi todos los países.

¡Pérdida de tiempo es crear aptitudes correctas durante el período de Enseñanza Secundaria! Problema grave surgido en las aulas de los Institutos de Enseñanza Secundaria, tanto para alumnos como para profesores.

«Los humanos y el Universo no se ponen en diálogo». Y esto es lo que urge solucionar en base al progreso y la era actual... ¡Ellos no pueden someterse a la negatividad «costumbre»!

La unión y el esfuerzo común de profesores y maestros es lo único que puede ayudar a los alumnos a encontrarse justamente adaptados en el «plató» de lo que hoy imaginamos su futuro y que posiblemente será su realidad.

Sabemos que no todos los alumnos tienen aptitudes matemáticas, aunque sea un porcentaje bastante elevado de ellos los que las poseen; pero lo que sí son todos es sensibles a su belleza. Fácil es de comprender esto, ya que la Matemática es una forma de la actividad humana.

En base a ello, tenemos la obligación de actuar llevando a los alumnos a «tomar cariño a la Matemática», no como aprendizaje forzoso de ella, por imposición exterior, sino considerándola como lo que es en sí: «Un vivir de su propio espíritu y un caudal de fuerza para hacer frente a los desafíos que el Universo le presenta».

Los psicopedagogo-matemáticos, tras muchos años de experiencia viva, también están dispuestos a colaborar abiertamente y con seguridad en la gran labor de cooperación entre profesores, maestros y niños en especial.

Demuestra actualmente la psicopedagogía experimental que la renovación actual de la enseñanza matemática permite incluso introducir ésta en las escuelas de párvulos. Ello produciría el máximo efecto si se trabajara proponiendo a los niños experiencias asequibles y que a su vez despertaran en ellos el gusto por las actividades matemáticas.

El mundo de la abstracción.

La adquisición de nociones abstractas, tales como las que se encuentran en matemáticas, se pueden descomponer en tres fases:

1.ª Se trata de una frase preliminar.

Las reacciones ante las diversas situaciones se desarrollan más o menos al azar. Es algo así como una actividad explorativa.

Esta fase puede muy bien estar dirigida en sentido de una maduración. Para ello hace falta tomar situaciones en las cuales la actividad lúdica se canalice bajo la forma de «juegos» con reglas definidas.

De ello puede provenir una consciencia más clara de la *dirección en la* cual se preparan los nuevos descubrimientos.

2.ª Inmediatamente se presenta una fase intermediaria más estructurada:

Ya se saben las «reglas» que han aparecido en lo primera fase, y por tanto, se puede *jugar con ellas.*

El pensamiento aparece consciente y más dirigido; camina así hacia el instante del descubrimiento, donde el esquema-director aparece brúscamente en su organización de conjunto.

3.ª El final de lo descubierto es seguido de una necesidad irresistible de explorar la novedad descubierta.

Esta exploración puede hacerse de la manera siguiente, o sea, examinando el contenido:

¿Lo que he comprendido es justo?...

Se pone en marcha el *análisis.*

También puede hacerse de una manera más ordinaria, o sea, buscando las situaciones que lo descubierto permita dominar:

Este es el camino *práctico.*

La función psicológica, tanto del camino analítico como el de lo práctico, consiste en aceptar sólidamente los nuevos descubrimientos y colocarlos en la panoplia de nuestros conceptos, de manera que podamos encontrar el concepto adecuado en el momento oportuno.

Así, pues, si un niño se pregunta a sí mismo:
¿Tengo que sumar o restar...?

Actuará acudiendo a la panoplia en la cual tiene colocados los conceptos.

Ahora bien, es evidente que esta «puesta en actividad» no puede jamás ser realizada sin las dos primeras fases del ciclo expuesto.

Los símbolos.

En cuanto a los símbolos, no se trata de una cuestión simple.

Ciertos hechos demuestran que es necesario introducir los símbolos después de finalizar los decubrimientos, ya que en ciertos casos la introducción prematura de ellos parece paralizar el proceso de la abstracción.

No obstante, otras veces, por el contrario, se ha visto que el empleo de símbolos aceleraba la aparición de los descubrimientos.

En verdad, tradicionalmente se ha abusado (y se abusa) demasiado de los símbolos; y todos conocemos los efectos poco positivos conseguidos por los alumnos.

Una serie de experiencias bien encaminadas, seguidas de la introducción de símbolos, ha quedado demostrado, a través de investigaciones psicopedagógicas, que es lo más acertado.

Ello es más eficaz que los esfuerzos constantes para asociar los símbolos a su significación mediante *explicaciones.*

¡Se aprende mucho más de los *hechos* que de las *explicaciones!*

Tarski, Russel, Inhelder y otros, bajo un punto de vista lógico, matemático, filosófico y psicológico, y después de numerosos trabajos, han dado los fundamentos de la noción de número.

Sus resultados ya están introduciéndose progresivamente en los sistemas escolares de varios países,

A la luz de los problemas surgidos en el transcurso de investigaciones en varios laboratorios, se sugiere la introducción de unos ciertos ejercicios susceptibles de guiar al alumno a lo largo del desarrollo lógico-matemático de los conceptos aparecidos sobre la idea de número.

En lugar de abandonar este desarrollo al azar, debemos ser capaces de construir una aproximación racional de la adquisición de número, teniendo en cuenta el estado presente de nuestros conocimientos tanto en lo que concierne a la estructura del número como en lo que se refiere al desarrollo del pensamiento de cada uno de los niños.

Mundialmente esta cuestión no está definitivamente aclarada, pero esta propuesta significa algo así como una tentativa de llegar a una coherencia rápidamente utilizable, de nuestros conocimientos sobre los niños y sobre *lo que* pueden aprender en Matemática y *cómo* pueden aprenderlo.

Más no olvidemos que ésto no implica que no existan otras finalidades mejores.

No obstante, el estado actual de la enseñanza matemática es tan defectuoso que urge dar a conocer a todos los educadores un conjunto de sugerencias posibles y correctas.

El número.

En Matemática no existen ni la *abstracción única* ni el *plano concreto único.*

Dentro de esa consideración se puede confirmar que *el número es una abstracción.* No tiene por tanto existencial real.

Los números son *propiedades,* pero no propiedades de los objetos en sí, sino relativas a «los conjuntos de objetos».

Así pues, *dos* es una propiedad que jamás se podrá aplicar a objetos definidos, sino que solamente es aplicable a los *conjuntos* de tales objetos.

De lo que se deduce que existe un mundo intermediario entre el mundo de los objetos y el de los números. Ese mundo es el de *los conjuntos.*

Hasta hace poquísimo tiempo el mundo de los conjuntos era negado a los alumnos de Enseñanza Primaria y los de Secundaria: ¡Eran un privilegio de la Universidad!

Meditemos simplemente este hecho:

«Se tratabajaba exclusivamente en el plano superior de la enseñanza Matemática *«con un campo»* que sicológicamente queda demostrado es imprescindible introducirlo a la edad de cinco años o todo lo más a la de seis».

¡Es uno de los mayores contrasentidos que ha conocido la pedagogía a través de los siglos!

Introducir los conjuntos a temprana edad y con éxito es posible.

¡Naturalmente! que para realizarlo ha de hacerse de manera que los conjuntos, una vez introducidos, conduzcan seguidamente a construir los números.

Las relaciones entre conjuntos conducen a consideraciones de orden lógico; mientras que las propiedades de los conjuntos conducen a consideraciones de orden matemático.

Se dispone ya de muy ricas experiencias que integran en un todo orgánico la adquisición de conceptos de la lógica, de los conjuntos y de los números.

Qué puede empezarse a hacer para renovarse.

1.º Desprenderse de la compresión y rutina del lenguaje.

No se puede eliminar este indispensable vehículo del pensamiento pero sí puede hacerse la toma de conciencia de su insuficiencia debido en su mayor parte a su linearidad.

2.º Hacer trabajar el pensamiento directamente sobre los elementos del problema estudiado por medio de signos visuales que pongan en evidencia las relaciones.

3.º Desarrollar la curiosidad y la imaginación en el sentido de la exploración de las estructuras.

4.º Obligar al pensamiento a quedar movilizable en cada momento a fin de que esté no solamente jugando con los mecanismos sino eventualmente imaginando otros nuevos.

La mayor parte de nuestras actividades físicas y mentales son mecánicas; no tener consciencia de esta inconsciencia es grave, sobre todo para los pedagogo-matemáticos.

Empecemos pues, por marcarnos a sí mismos, con una entrega docente total, la siguiente pauta:

—«Liberar a los alumnos —en las clases de matemáticas— del complejo de inferioridad que sufren debido a su sentimiento de ignorancia».

Esto ¡naturalmente! exigirá un esfuerzo de perfeccionamiento a los maestros y profesores ya en activo desde hace muchos años, más es absolutamente necesario imponérselo cada uno a sí mismo.

Un buen consejero pedagógico, que será persona muy experimentada, deberá iniciarles en este trabajo. Los apasionados de la pedagogía conseguirán este perfeccionamiento pedagógico en un período muy breve, si se parte acertadamente, por parte del consejero pedagógico-matemático, de un perfeccionamiento científico preciso. Perfeccionamiento que habrá adquirido si ha guardado un constante contacto con los desarrollos recientes y las orientaciones nuevas en matemáticas, en pedagogía y en lógica.

Sólo así podrá ejercer una influencia feliz sobre la enseñanza en cuanto a los maestros y su introducción en las nuevas materias.

Consiguiendo los maestros ese nivel que exige la renovación, acrecentarán en su profesión un carácter más dinámico y un relevante prestigio ante las necesidades actuales del progreso.

La Universidad y los matemáticos deben también comprender que la responsabilidad de solucionar la crisis de matemáticos, científicos y técnicos está en manos de esos maestros.

La comprensión entre profesores de Universidad, de Secundaria y Escuelas especiales con los maestros, es pues, indispensable.

No se defiende en las clases la valorización intelectual de cada conjunto de ellos, sino la causa de los niños y la Era que han de regir ellos.

Esta compenetración y comprensión a simple vista parece un tópico. Pero a la falta de ambas se debe desde hace siglos el estado síquico de los alumnos que les provoca actitudes conducentes a una negatividad mucho mayor que la falta de intelectualidad matemática... *deforman la valorización de lo que es la matemática en sí.*

Lo mismo en mis clases experimentales de primaria y secundaria como en las clases de nuestros colegas de los demás países, los niños acusan la actividad «individualizar la matemática»: Ejemplo de ello es el siguiente:

Se ha preguntado a un alumno de sexto año: ¿Cómo es posible que en el examen no hayas hecho bien ninguna operación de decimales? ¿Crees que eso no es absurdo en un alumno de tu curso?...

Y ha dado la siguiente respuesta:

¡Es que eso *es de la escuela primaria* y ya no me acuerdo!...

¿Quién tiene la culpa de esa «discriminación de niveles de enseñanza» que ha llevado a los alumnos a semejante situación (que no se puede ni calificar)...?

Para empezar a renovar una nación en la enseñanza de Matemática creo debían todos los docentes, en general, analizar la pregunta y dar honestamente su respuesta.

Las matemáticas en los primeros cursos de la Escuela Primaria

Por **ARTURO DE LA ORDEN**
Jefe de Estudios y Proyectos

Consideraciones generales

Las matemáticas han sido siempre enseñadas, en parte, por su propio valor formal, como disciplina científica altamente organizada. En efecto, constituyen un conjunto de conocimientos rigurosamente lógicos, estructurados en sistemas deductivos en que los conceptos y relaciones numéricos y espaciales se hallan libres de elementos concretos, aunque hayan surgido en la experiencia e inducción sobre objetos físicos. Su valor como medio de educación intelectual radica en el hecho de que la matemática es una de las formas esenciales de pensamiento, precisamente la forma propia del pensamiento cuantitativo, cuya envoltura expresiva son los procesos simbólicos que se convierten en los datos y algorismos de cálculo, utilizados como instrumentos de registro y manipulación de dicho pensamiento. El aprendizaje de las matemáticas no sólo conduce al dominio de ciertos conceptos, relaciones y tipos de razonamiento, sino que desarrolla la propia capacidad conceptual, crítica y deductiva y habitúa al sujeto a dirigir objetivamente su pensamiento.

Las implicaciones didácticas de estos principios son evidentes. La enseñanza de las matemáticas, aun a nivel primario, no puede limitarse al adiestramiento mecánico del niño en las operaciones de cálculo. Si el alumno no logra alcanzar plenamente los conceptos matemáticos básicos y otros no estrictamente matemáticos relacionados con ellos, si no llegan a existir en su mente independientemente de las técnicas operatorias, acciones o cosas, se habrá falseado radicalmente su instrucción matemática.

Objetivos del aprendizaje matemático en los dos primeros cursos.

En esencia, pueden señalarse dos grupos generales de objetivos: los puramente matemáticos y los sociales o de aplicación de los conocimientos cuantitativos a situaciones de la vida.

a) Los propiamente matemáticos incluyen:

— Desarrollo de la comprensión de las relaciones cuantitativas. Esto significa, la adquisición de conceptos significativos de orden cuantitativo a través de operaciones como contar, medir y comparar, la comprensión del sistema numeral de base 10 y las principales relaciones implicadas en las operaciones con números enteros. Las cuatro operaciones básicas no son otra cosa que formas que economizan esfuerzo al tratar con grupos para hallar «cuánto» o «cuántas cosas». En este sentido, todos ellos están relacionados con el contar y entre sí.

— Comprensión y aptitud para el uso del vocabulario matemático, tanto de los términos cuantitativos generales (mucho, cuanto, más que, total, etc.) como de los relacionados con procesos (adición, suma, llevar, multiplicar, sustracción).

— Destreza de cálculo, es decir, exactitud y facilidad operatoria en la suma, resta y multiplicación con enteros e iniciación a la división por números dígitos. También debe cultivarse el hábito de medir, utilizando unidades naturales (palmo, pie, etc.) y algunas convencionales sencillas (metro, kilo, medio kilo, litro, medio litro, etc.) y algunos múltiplos y submúltiplos decimales.

— Reconocimiento general de formas y tamaños y apreciación de distancias.

b) Los objetivos sociales incluyen:

— La formación de actitudes favorables hacia la utilización de las matemáticas para resolver los problemas cuantitativos.

— Aptitud para leer e interpretar datos cuantitativos.

— Comprensión de conceptos económicos muy elementales.

— Desarrollo de los conocimientos acerca de las instituciones sociales y actividades que requieren el uso de los números, especialmente el dinero y el cómputo del tiempo.

— Desarrollo de destrezas para tratar con los aspectos cuantitativos de las situaciones sociales y los problemas de la vida diaria.

Algunos aspectos especiales.

Hay en los cuestionarios dos aspectos no recogidos en la precedente enumeración de objetivos del aprendizaje matemático a este nivel. Son éstos la limitación de las cantidades a identificar al orden de las unidades de millar y la expresa alusión a las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y conmutativa del producto, como adquisiciones a nivel *operativo*.

La limitación a las unidades de millar como base del cálculo se justifica fundamentalmente por el hecho de que a los escolares de siete años les resulta difícil concebir con claridad cantidades superiores y el operar ciegamente con ellas conduciría inevitablemente a mecanizar el aprendizaje, convirtiéndolo en una actividad sin sentido y justificación para el sujeto. Por otra parte, las cantidades de cuatro cifras permiten presentar los casos y dificultades de las operaciones fundamentales con números enteros, sin necesidad de recurrir a órdenes superiores de unidades. En efecto, el sujeto que suma, resta y multiplica sin dificultad con cantidades de cuatro cifras prácticamente puede sumar, restar y multiplicar con toda clase de cantidades. Las operaciones largas matan la motivación discente y desalientan al escolar. A todos los efectos, es mucho más eficaz sustituir una suma o resta larga por varias cortas que presenten las dificultades una por una y gradualmente.

En cuanto a las propiedades conmutativa y asociativa, es evidente que suponen una relación numérica que el escolar debe conocer desde el primer momento de su inicación matemática. Sin embargo, dada su complejidad, los cuestionarios limitan su adquisición a una «idea operativa» de las mismas. Esto significa que el sujeto ha de conocer estas relaciones por el uso, de un modo funcional, sin llegar a una proposición estrictamente lógica o científica. Esta «idea operativa» no debe confundirse con una idea vaga o imprecisa. El sujeto debe distinguir con claridad estas relaciones a través de ejercicios, diseños y diagramas adecuados, aunque no llegue a formular su idea en términos formalmente matemáticos, ni mucho menos a su demostración rigurosa.

Principios didácticos fundamentales.

Implicados en los cuestionarios de los dos primeros cursos de matemáticas aparecen una serie de principios en que se apoya la total estructura didáctica de esta ciencia al nivel de su iniciación en la escuela primaria. Estos principios podemos sintetizarlos así:

1. El aprendizaje matemático debe ser activo, es decir, a los conceptos se llegará a través de series de ejercicios cuya realización implique el dominio de las nociones y el desarrollo de los hábitos y destrezas pertinentes.

2. El significado matemático de las operaciones deberá ser claro para los alumnos, de modo que éstos lleguen a comprender los procesos mecánicos que han de dominar y se esfuercen en ello.

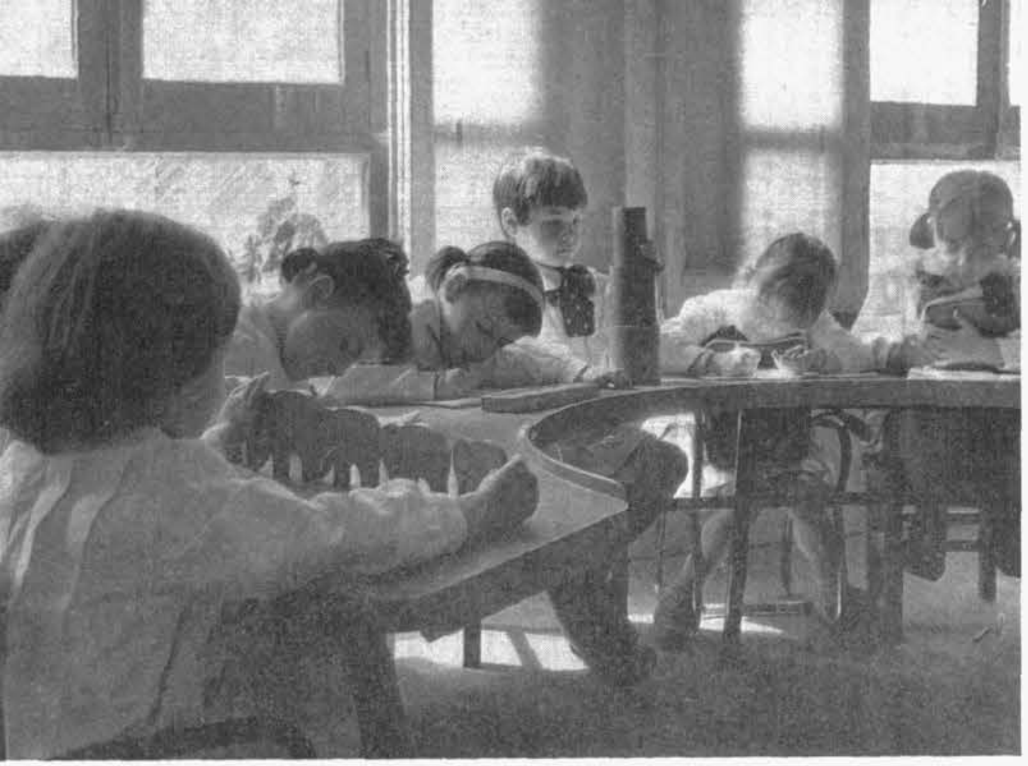
3. El programa será funcional, previendo la aplicación de las destrezas aritméticas en una amplia gama de situaciones sociales.

4. La iniciación matemática se llevará a efecto a través de un proceso empírico que implica primero *la manipulación de objetos concretos*, después el *análisis de las distintas fases de las operaciones visualmente representadas en diagramas e ilustraciones de toda índole* y, finalmente, el estudio de los *procedimientos abstractos.*

5. Cada etapa del aprendizaje debe ir precedida por la aplicación de pruebas para determinar la preparación del escolar para el nuevo trabajo. La organización y graduación del programa tendrá en cuenta diferencias de ritmo entre los individuos.

6. El diagnóstico es un elemento esencial en la enseñanza de la aritmética y su aplicación continua en el curso del aprendizaje permitirá al maestro descubrir y corregir, en el momento oportuno, las dificultades de los alumnos.

7. La práctica sistemática de las operaciones aritméticas es necesaria para asegurar la eficiencia operativa, pero este entrenamiento debe ir precedido de la comprensión de los pasos del proceso y del significado de la operación. El «slogan» será, pues: primero, significados; después, práctica.



Por JUAN NAVARRO HIGUERA
Jefe de Material Didáctico

Los cuestionarios nacionales de matemáticas para los cursos 3.° y 4.°

Procesos matemáticos característicos de estos dos cursos.

Durante los dos primeros cursos de la escolaridad el proceso de aprendizaje ha seguido una marcha progresiva en dos sentidos fundamentales:

— En el de la *comprensión*, tratando de llegar al campo de lo abstracto en aspectos elementales del pensar matemático, pasando de los ejercicios de carácter objetivo y gráfico a los que impliquen la visión intelectiva de las relaciones numéricas y espaciales.

— En el de la *operativa*, dotando paulatinamente de las técnicas de ejecución de las operaciones fundamentales, de las cuales hay dos, adición y sustracción, que deben poseer en todos sus aspectos.

Los alumnos que hayan superado las exigencias previstas para los dos primeros cursos han de seguir un camino que les permita completar la evolución iniciada y alcanzar un determinado nivel en el dominio de la operativa del cálculo.

El período del pensamiento preoperativo, que según Piaget, termina a los ocho años, da lugar a otro modo de pensamiento más racional y sistemático que permite sustituir casi por completo los recursos de carácter senso-motriz y los procedimientos inductivos.

Durante el segundo período bianual el escolar comienza a usar cada vez más el pensar abstracto en sus realizaciones matemáticas, que le conducen del estadio de inteligencia práctica al de inteligencia conceptual. No es capaz todavía, ni mucho menos, de usar el razonamiento matemático más allá de unos reducidos límites; pero dentro de este circunscrito campo de acción hay que hacer que el niño actúe con recursos de índole mental. Tanto o más nocivo que saludar al escolar con abstracciones matemáticas en los comienzos del aprendizaje del cálculo es querer objetivar —so pretexto de revestir a la enseñanza de esta disciplina de un tono didáctico— unas adquisiciones que aquél pueda estar en condiciones de adquirir por vía reflexiva.

Los caracteres generales que consideramos propios de esta fase del aprendizaje matemático podemos resumirlos así:

a) Transferencia de la operativa senso-motriz, objetiva y concreta, a la operativa abstracta, simbólica y, en cierto grado, lógica.

b) Adquisición de las operaciones fundamentales con números enteros y comprensión de la estructura de las mismas.

c) Aprendizaje y captación de las propiedades de los números enteros y fraccionarios.

Aprendizaje de técnicas operativas.

Durante los cursos tercero y cuarto debe perseguirse, ante todo, hacer del alumno un buen operador. Hay que habituarle en la realización mecánica de las cuatro reglas básicas, pero enseñándole al mismo tiempo su esencia matemática, sus propiedades, nomenclatura y aplicaciones. El empirismo, que ha sido la base del período anterior, ha de coordinarse con un sentido comprensivo cada vez más acentuado. Al llegar a los diez años, el escolar normal puede saber perfectamente el por qué de sus operaciones de cálculo.

El inventario de capacidades que deben adquirirse puede ser el siguiente:

a) Numeración. Lectura y escritura de toda clase de números enteros, decimales y fraccionarios.

b) Las cuatro operacionas fundamentales con enteros y parte de ellas con decimales y fraccionarios.

c) Problemas sencillos de dos o más operaciones, en los que se planteen supuestos reales que obliguen al escolar a discurrir empleando los esquemas matemáticos aprendidos, evitando la propuesta de cuestiones que se reduzcan a utilizar mecánicamente determinadas fórmulas.

d) Sistema Métrico Decimal. Nos encontramos ante una auténtica «máquina» para la disciplina del pensar matemático y esta etapa escolar es la ideal para familiar al escolar con los problemas de la medida y de las relaciones entre distintos patrones métricos. El maestro que utilice racionalmente el Sistema Métrico Decimal tiene mucho adelantado para dotar a sus discípulos de un cabal sentido de las realidades matemáticas.

El desenvolvimiento de las operaciones intelectivas en los niños de ocho a diez años ha alcanzado la madurez suficiente para realizar de un modo racional las transferencias que implican los habituales ejercicios del Sistema Métrico Decimal. Y teniendo en cuenta que es una enseñanza que también puede materializarse y tener expresiones manipulativas y gráficas, fácil es comprender que su práctica se halla indicadísima en unos momentos en los que la preocupación del docente debe ser la de llegar al razonamiento matemático abstracto, desprendiéndose poco a poco de los andamios materiales que han servido para sostener una estructura mental de naturaleza algo débil y que necesitaba de apoyos externos.

El S. M. D. merece que se le dedique la debida atención para que puedan obtenerse de él los positivos frutos que es capaz de proporcionar si se realiza su enseñanza de acuerdo con normas didácticas activas y actualizadas.

Adquisiciones nocionales matemáticas.

La dotación de los instrumentos del hacer matemático a que antes hemos aludido debe ir acompañada de la formación de unos conceptos claros y de unas nociones terminológicas congruentes.

Hay que presentar ante los escolares las que pudiéramos llamar «estructuras matemáticas madres», que un autor ha resumido en las tres siguientes:

- *Estructuras algébricas.* Naturalmente que esta denominación no se refiere a la enseñanza del álgebra en la escuela. Alude principalmente a la estructura de *grupo*, noción a la que la psicología actual concede notable atención. Nos limitamos, por el momento, a señalar la necesidad de que por los estudiantes de esta materia se analice la estructura interna de aquellos números que pueden ser típicos en orden a la formación de ciertos paradigmas matemáticos.
- *Estructuras de orden.* Son imprescindibles y fundamentales para formar el mecanismo matemático de la inteligencia. Principalmente se refieren a la formación de series que se iniciaron en la etapa preescolar con la construcción de torres de bloques decrecientes, por ejemplo, y que ahora deben tener un carácter abstracto en cierto grado.
- *Estructuras topológicas.* En las que tienen entrada los conocimientos y las relaciones geométricas.

Los Cuestionarios Nacionales dejan para estos dos cursos una serie de adquisiciones entramadas con los ejercicios de carácter operativo que se han realizado para que estos conceptos lleguen a fraguarse como consecuencia de un proceso lógico y activo.

El repertorio de adquisiciones geométricas abarca los siguientes grupos de cuestiones:

a) Análisis y nomenclatura de ciertas figuras planas. En estos dos cursos se estudian los triángulos, los cuadriláteros, los paralelogramos y el círculo.

Con estos elementos se incluyen otras figuras no superficiales, como los ángulos y la circunferencia.

b) Medida y situación de elementos geométricos, con la intervención de recursos gráficos o manipulables y cálculos numéricos. Tales como comparaciones y sumas de ángulos, medidas de perímetros, medidas de arcos, posiciones relativas de la circunferencia y rectificación de ésta.

c) Finalmense se llega a las áreas, en las que se piden las del triángulo, rectángulo y círculo, pero sólo en forma empírica, como preparación para el entendimiento de las fórmulas generales.

las matemáticas en los cursos 5.° y 6.° de escolaridad primaria

Por ALVARO BUJ GIMENO

LAS MATEMATICAS EN LA ESCOLARIDAD PRIMARIA.

Un análisis vulgar y simplista de los problemas que plantea la enseñanza de las matemáticas en la escuela, quizá lo redujera *a una mejor estructuración* de los conocimientos a impartir, o cuando más a introducir y dar carácter primordial a determinados contenidos.

Hay, no obstante, al menos, dos nuevos considerandos a cuál más interesante. De una parte los cambios que las matemáticas modernas pueden imponer a la enseñanza primaria (1), de otra la contribución que los estudios de la psicología infantil aportan para un mejor conocimiento de las estructuras operatorias de la inteligencia. Dicho de otra forma, hay un cambio en la misma estructura de las matemáticas y un progreso en el conocimiento del modo de actuar la mente infantil, para captar y dominar los elementos y las relaciones que llevan consigo las matemáticas.

Respecto al primer punto sería conveniente tener en cuenta la tesis de Bourbaki (2) acerca de *la necesidad de que los niños tomen conciencia no sólo de los elementos matemáticos sino de ciertas estructuras*, que agrupa en tres sectores: algebraicas, de orden y topológicas. De esta forma se incorporan rudimentariamente, la teoría de conjuntos, relaciones y composición de relaciones, en la escuela primaria. Como quiera que las estructuras algebraicas suponen el dominio del sentido de la reversibilidad de las operaciones, y del dinamismo operatorio que resulta de las equivalencias y operaciones inversas, junto al interés por la determinación a priori de las propiedades de un conjunto de operaciones, creemos prudente prescindir en los cursos 5.° y 6.°, de esta parte, e introducir muy elementalmente las estructuras de orden y topológicas.

Volviendo ahora al punto segundo a que antes aludíamos, resulta, según Piaget, que los psicólogos se han visto obligados a admitir que la marcha *natural* del espíritu, que consiste en buscar los elementos antes que las totalidades, engendrando éstas mediante la composición de aquellos, se apoyaba en analogías engañosas con la fabricación material; en la percepción se ha comprobado que lo que llamamos elementos son siempre productos de una segregación en el interior de una totalidad previa. Esta tesis apoya la evolución en la forma actual de exponer las matemáticas.

FINES ACTUALES DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS.

Las matemáticas modernas no desestiman el fin utilitario, sin embargo se apoyan en una fuerte base lógica, buscando el desarrollo de ciertas funciones mentales (3). Entre éstas se cuentan las siguientes que pueden ser cultivadas, en estos cursos de enseñanza primaria:

a) *El dinamismo en el razonamiento:* que consiste en captar invariantes en una situación dada y en ver que, a su vez, pueden volverse dinámicas y ser susceptibles de nuevas abstracciones.

Ejemplo: los alumnos saben que $4+4+4+4=16$ (suma), pero el dinamismo les permite ver cuatro sumandos iguales, pasando a la multiplicación $4 \times 4 = 16$; y de aquí a las potencias con exponente entero y positivo $4^2 = 16$.

b) Aprovechamiento del espíritu lúdico que tiende a la abstracción, generalización y análisis. Faceta que se cultiva en situaciones reales de los niños (juegos de coleccionismo).

c) Dan ocasión al *espíritu creador*, con el cultivo de la imaginación e inteligencia, y no representan unicamente el apredizaje de técnicas y automatismos. La actividad creadora del niño conduce a modos de pensamiento más simples y eficaces.

d) Estimulan a los alumnos a ordenar y encadenar sus pensamientos según el método de las matemáticas que desarrolla la claridad de pensamiento y el rigor del juicio. Les lleva al *orden, precisión* y *distinción*.

e) Finalmente señalamos en las matemáticas un *valor estético*, ya que proporcionan, a través del poder creador, la alegría y exaltación.

ESTRUCTURA Y CONTENIDO DE LAS MATEMATICAS EN LOS CURSOS 5.° Y 6.°.

Se rehuye la estructura clásica (tradicional en los textos de exposición pasiva y homogénea) que se inclinaba por empezar y abundar en definiciones abstractas, (a veces vulgares e imprecisas al querer ser más sencillas) para comenzar en una serie de ejercicios, que el docente ha de extraer de situaciones concretas, vitales y asequibles a los alumnos para llegar a las adquisiciones totalmente funcionales, operativas. Así el niño recorre el proceso perceptivo y puede acceder a determinadas abstracciones. Estas abstracciones no pretenden recorrer todo el esquema de la aritmética y geometría, sino los puntos más importantes para un saber utilitario, que, por otra parte, contribuye a los objetivos formales a que antes aludíamos.

Así, por ejemplo, al hablar del número y sus clases, nos daremos por conformes si es capaz de distinguir antre los naturales, los positivos, enteros y fraccionarios.

Al finalizar el 6.° curso debe dominar el S. M. D. y las relaciones entre las distintas unidades. En geometría debe conocer las figuras planas y sólo los cuerpos regulares más simples que le presente el mundo que le rodea.

Con el fin de ejercitarse en el tratado de figuras se le exige la construcción con regla, cartabón y compás. Quizá la proporcionalidad, la semejanza de figuras, y la simetría representan más novedad y hay que cuidarlas especialmente.

El campo de la divisibilidad, descomposición factorial y potenciación, se acercan más a las relaciones algebraicas, que no se abordan aún en estos dos cursos.

Como puede apreciarse se elude el tratamiento de las cuestiones según las modernas concepciones estructurales (conjuntos, elementos y relaciones). Hemos considerado que no hay un respaldo experimental suficiente para este tratamiento, pero además tampoco los instrumentos (textos) han sido todavía elaborados con esta moderna concepción. Pensamos que tampoco el profesorado tiene preparación para este cambio, que exigirá de los docentes un perfeccionamiento en el ejercicio.

(1) A. Gali: «Dels canvis que les matematiques modernes poden imposar a l'ensenyament primari.» (Conf. pronunciada es Barcelona el 17 de marzo del año actual.)

(2) Bourbaki, N.: «Elements d'histoire des mathématiques». París, Mermann, 1960.

(3) Sulbant: «La nouvelle pédagogie des mathématiques», en *La nouvelle revue pedagogique*, octubre 1965.

Hay un cambio en la parte metodológica; se va del ejercicio a la adquisición; de lo funcional, vital y operativo, a lo nocional, que los Maestros deben captar plenamente. Por este motivo «los ejercicios ya no pueden ser el suplemento de la lección», ni la comprobación del grado en que se aprendió verbalmente y de modo pasivo el capítulo teórico. La actividad, los ejercicios entresacados de situaciones actuales y reales, son el proceso, el camino insoslayable para culminar en las adquisiciones. Obtenida la adquisición, se hacen nuevos ejercicios que ayuden a reafirmarse en la noción aprendida.

Orientaciones didácticas.

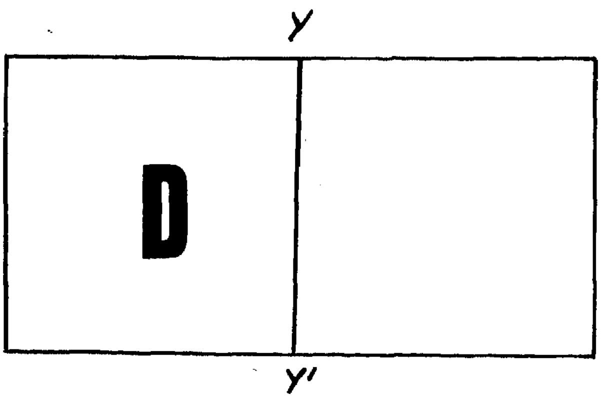
En verdad tras una exposición formal se espera el ejemplo que aclare, o mejor la «receta» aplicativa que resuelva. Esta labor debe abordarse, no en un artículo breve y divulgador, sino en un tratado sistemático, es decir, en una guía didáctica. No obstante parece oportuna la inclusión, aquí, de un ejemplo sencillo. Pretendemos explicar a nuestros alumnos la *simetría.*

a) *Actividades o ejercicios, previos a la adquisición:*

1) Si desplazamos un cromo en un álbum de una cuadrícula a otra de la misma página, vereis que por ésto ni se hace mayor ni más pequeño: permanece igual.

En geometría, algunos desplazamientos, tienen un nombre particular. Vamos a ver algunos de ellos.

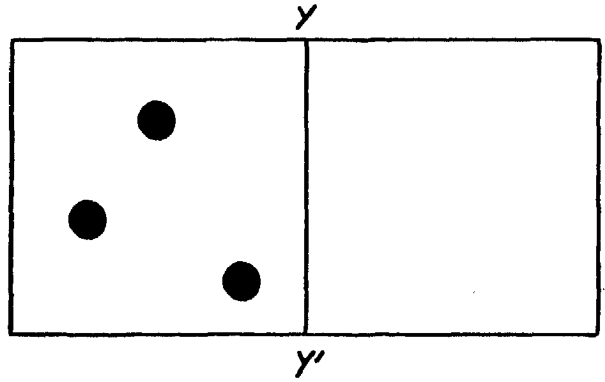
2) Coged una hoja de papel transparente y dibujad la letra D, en esta forma.



Ahora plegad la hoja y llevad la parte derecha sobre la izquierda. A través de la hoja podeis ver la letra «D» interior. Reproducidla por la parte exterior calcándola. Habeis obtenido una nueva «D» por el procedimiento de rotación alrededor de un eje *(y, y')*.

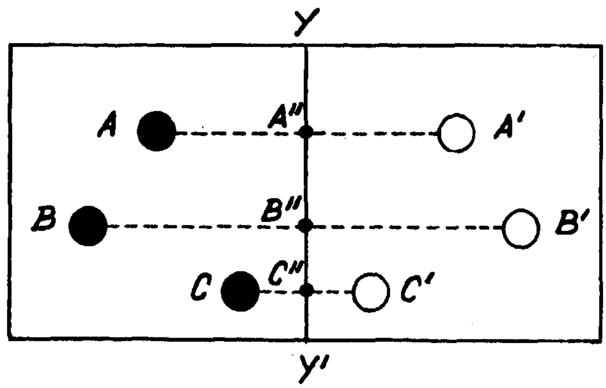
Estas dos «D» que habeis trazado son simétricas.

3) Ahora otro ejercicio: con otra hoja de papel transparente. Dibujad en la parte izquierda de la hoja varios puntos, así:



Plegad la hoja y llevad la parte derecha sobre la izquierda; a través de la hoja vereis los puntos; reproducirlos por fuera calcándolos; habeis obtenido otros 3 puntos por rotación alrededor de un eje *(y, y')*.

Ahora unid los puntos de ambas partes de la hoja así:



estos segmentos son perpendiculares al eje *(y, y')*.

Fijaros que estos segmentos cortan al eje en un punto; poned a los puntos las letras (como están en la figura).

b) *Adquisiciones:*

1.ª) Una figura es *simétrica con relación a una recta del mismo plano,* si después de dar media vuelta de rotación alrededor de esta recta, permanece igual a la que era antes de este desplazamiento.

Estas figuras que así coinciden se llaman *simétricas respecto a esta recta.*

2.ª) Si una recta es perpendicular a un segmento en el centro, los puntos extremos del segmento son simétricos respecto a esta recta.

3.ª) Dos puntos son simétricos con respecto a un tercer punto:

a) Si los tres puntos forman parte de una misma recta.

b) Si el tercer punto está situado a igual distancia de los otros dos.

c) Este tercer punto, así situado, se llama centro de simetría.

la matemática elemental en los cursos 7.° y 8.° de estudios primarios

Por AMBROSIO J. PULPILLO RUIZ
Secretario del C. E. D. O. D. E. P.

Planteamiento.

Empecemos por caracterizar este reducido ciclo que en el aspecto matemático viene a constituir los dos últimos cursos de escolaridad:

1) Son como la síntesis o compendio, amplificado en su profundidad, de todos los conocimientos matemáticos que se consideran básicos en la formación fundamental del preadolescente.

2) Junto con la adquisición de los cursos 5.° y 6.° deben equivaler cuantitativamente a todas las nociones que se consideran precisas para «pasar» los cursos 1.° y 2.° del bachillerato elemental o del medio-profesional.

3) Cualitativamente suponen los hábitos calculativos instrumentales que necesita todo individuo para insertarse en el aprendizaje de cualquier profesión.

4) De todos modos, pues, suponen como el entronque entre lo que es instrucción matemática puramente primaria y la que corresponde a estudios medios o necesidades pre-profesionales.

Dicho esto, y también como presupuesto, subrayemos que el sector matemático de la Enseñanza primaria, más que otro tipo cualquiera de conocimientos, tiene o debe tener una triple finalidad instructivo-educativo-práctica. Lo instructivo es todo aquello que es enseñado o aprendido para conseguir un saber; lo educativo está definido por lo que contribuye al desarrollo o desenvolvimiento de nuestras facultades o potencialidades; lo práctico se identifica con lo que nos sirve o es útil para la vida. Estos tres aspectos pueden aislarse, completarse, oponerse y sobreponerse. En consecuencia:

La instructivo matemáticamente pudiera considerarse como todo aquello que nos sirve para saber calcular, resumir o resolver problemas relativos al número o a la forma.

Lo educativo matemáticamente se referirá a la ejercitación de las funciones mentales que se conocen con el nombre de razonamiento, hábitos, cálculo-operatorios, intuiciones cuantitativo-espaciales, etc.

Lo práctico matemático será lo que utilicemos para resolver y salvar las situaciones problemáticas aritmético-geométricas que necesariamente nos plantee el medio cultural o profesional en que nos haya tocado insertarnos.

Metódica.

Con ser la didáctica de las matemáticas una de las especiales más elaboradas, actualmente se encuentra en plena renovación, debido principalmente al haberse dado entrada en su estructura a las teorías de Piaget relativas a la *reversibilidad* de las construcciones operativas, la *comprensión* de las relaciones numéricas y al desarrollo del *razonamiento* matemático en el niño y en el pre-adolescente.

El cambio de mentalidad que se ha operado, sobre todo a partir de 1950, en que nació la Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas, la aparición de métodos tales como los «Números en color», de Cussenaire-Categno, o la «Teoría de los conjuntos», pongamos como ejemplos más extendidos, nos han traído como resultado lo que E. Castelnuovo define con los nombres de *la clase como laboratorio de didáctica matemática* y *la lección como experimento didáctico-psicológico.*

Por otra parte, hoy ya nadie olvida que cuanto mayor número de actividades dediquemos a relaciones gráficas y cualitativas y a manipulaciones con objetos concretos, mejor comprensión se logrará para las relaciones cuantitativas, que alcanzan con los números el mayor grado de abstracción. Aunque los objetos manejados sean tan simples, tan poco atrayentes como los cubos de madera que emplea Alain.

Nuestros nuevos Cuestionarios vienen a exigir, también, que la actividad reflexiva o manual preceda siempre a la nocional, porque de dos modos puede concebirse una lección o explicación matemática: partiendo del conocimiento de una relación o principio, memorizado o integrado por medio de numerosos y repetidos ejercicios, para llegar a su aplicación; o bien colocándonos ante una situación problemática y tratando de resolverla, para que, al actuar sobre ella, descubramos el conocimiento o principio en que se fundamenta su resolución y poder aplicarla siempre a casos análogos.

Ejemplificación.

Vamos a sugerir la preparación, de acuerdo con los principios didácticos someramente expuestos, de sólo dos cuestiones: la primera del curso 7.° y la última del 8.°

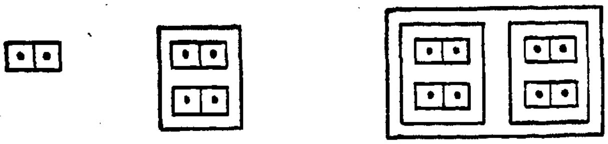
I TEMA: IDEA Y FUNDAMENTO DE LA NUMERACION DE BASE CUALQUIERA

Material: Bolsitas de papel o cajitas de cartón de varios tamaños y objetos usuales, tales como semillas, botones, etc. Tiza y encerado o lápiz y papel.

Presupuestos: Ideas y fundamentos del sistema de numeración decimal. Base de un sistema de numeración. El *0* como cifra no significativa. Los diferentes órdenes de unidades. Cualquier orden *N* de unidades comprende ***n*** unidades de orden inmediato inferior.

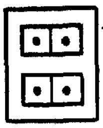
Actividades: 1) Formar grupos de dos objetos:

2 4 8



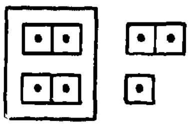
Sólo utilizaremos dos cifras: el 1 y el 0, como símbolo que expresa la carencia de unidades. A un objeto  le llamamos 1. A dos objetos  les llamamos par y los escribimos así: 10.

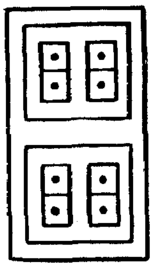
Aquí hay un par (10) y 1 = 11. El 1 de la derecha son las unidades simples o de primer orden; el 1 siguiente representa a los pares o unidades de segundo orden.



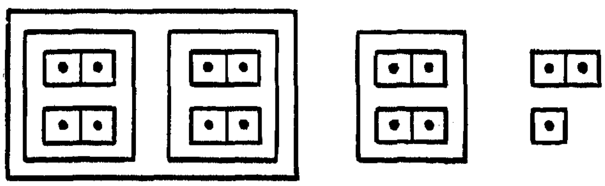
Aquí hay un par de pares (10 × 10) y se representa así: 100. Equivale a una unidad de tercer orden.

Aquí hay un par de pares (100), más un par (10) y una unidad (1) = 111.





Aquí hay un par de pares de par: 10 × 10 × 10 = 1.000.



Aquí tenemos un par de pares de par (1.000), más un par de pares (100), más un par (10), más 1 = 1.111. Y así sucesivamente...

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS:

a) Escribir en este sistema DUAL los números 5, 6, 9, 10, 11, 20...

b) Seguir los mismos pasos en conjuntos de tres elementos, utilizando los guarismos 1, 2 y 0 para sentar los mismos principios del sistema de numeración TRIAL.

c) Idem para un sistema CUATERNARIO que utiliza las cifras 1, 2, 3 y 0.

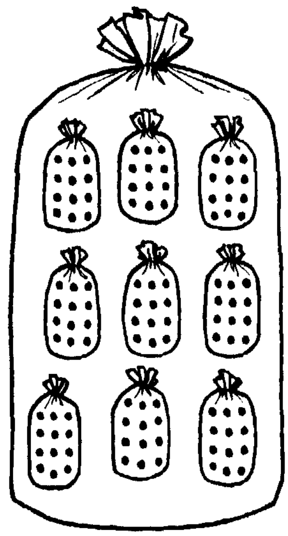
ADQUISICIONES:

- *Todas las cantidades posibles se pueden representar en un sistema de numeración de base cualquiera.*
- *A medida que aumenta la base se requiere mayor cantidad de cifras, pero la longitud de las cantidades disminuye.*
- *En cualquier sistema de numeración es imprescindible que exista una cifra que, como el 0, no represente ninguna cantidad de unidades.*

Actividades: 2) Formar decenas:

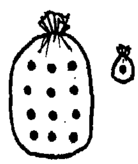
12.

Doce docenas (12 × 12 = 144).



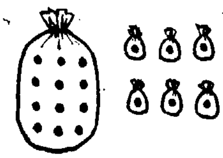
Ahora emplearemos las cifras: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B y 10.

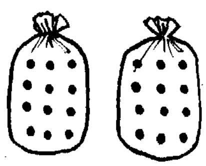
A representa a diez unidades.
B representa a once unidades.
La docena se representa así: 10.



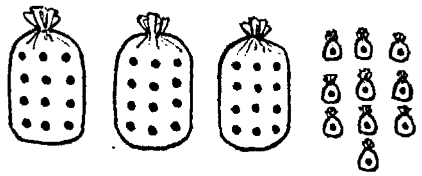
Aquí hay una docena (10) más 1 = 11.
11 en el sistema docenal equivalen a 13 del decimal.

Aquí hay docena y media (18), que representaremos así: 10 + 6 = 16, esto es, 6 unidades de primer orden y una de segundo (10).

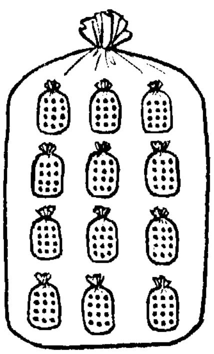




Dos decenas se representan así: 20.



Tres docenas (30) más 10 se representarían así: 3 A, y tres docenas más 11 serían igual a 3 B.



Aquí hay una docena de decenas (10 × 10) = 100.

100 en el sistema DOCENAL equivalen a 144 del DECIMAL.

De acuerdo con todo ello veamos la representación de varias cantidades del sistema decimal traducido al docenal:

Decimal		Docenal
300	⟶	256 = 25 docenas + 6
500	⟶	418 = 41 docenas + 8
1.460	⟶	1.218 = 121 docenas + 8

En todos los casos operamos así:

$$\frac{300}{12} = 25 \text{ de cociente y } 6 \text{ de residuo.}$$

Procedamos ahora a la inversa y resolvamos la siguiente cuestión: ¿Cómo expresaríamos la cantidad de 125 del sistema *docenal* en el *decimal?*

Aquí hay una docena de docenas (12 × 12 = 144), más dos docenas (24), más 5 = 173, o lo que es lo mismo: 14 × 12 + 5 = 173.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS:

a) Escribir en el sistema *docenal* las cantidades 20, 100, 511, 2.212 ....

b) Seguir los mismos ejemplos para fundamentar los sistemas de base 11, 15 y 20 ....

c) Continuar los ejemplos de conversión de unos sistemas a otros.

ADQUISICIONES:

● *Se pueden imaginar infinitos sistemas de numeración posibles.*

● *El número de cifras que se necesitan emplear en cualquier sistema es igual al número de unidades de cada conjunto, igual también a la base del sistema.*

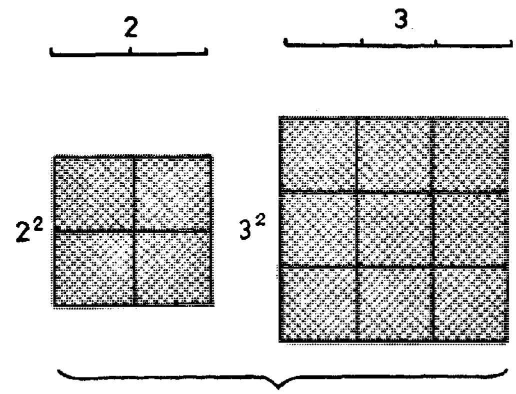
● *Para sistemas de numeración de base superior a 10 había que inventar nuevos símbolos numéricos.*

II TEMA: CUADRADO DE UN BINOMIO

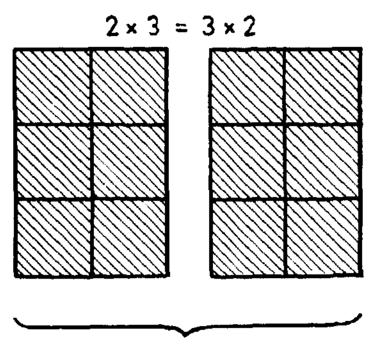
Material: Cartulina de varios colores y tijeras. Tizas y encerado o lápices y papel.

Presupuestos: Concepto de binomio como suma o diferencia de dos términos. Idem de la segunda potencia o cuadrado de un número. No es igual $(2 + 3)^2$ que $2^2 + 3^2$.

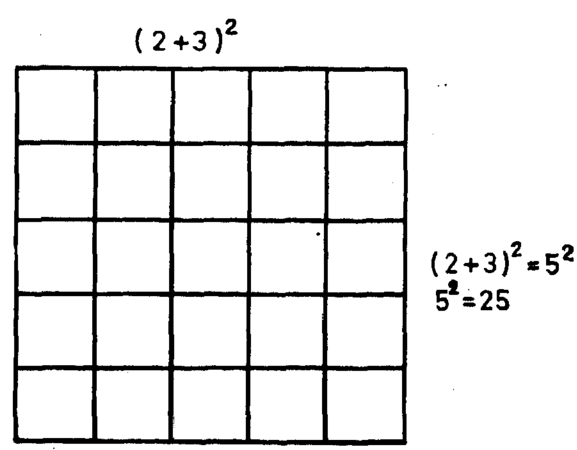
Actividades: 1)



Recortar en cartulina roja

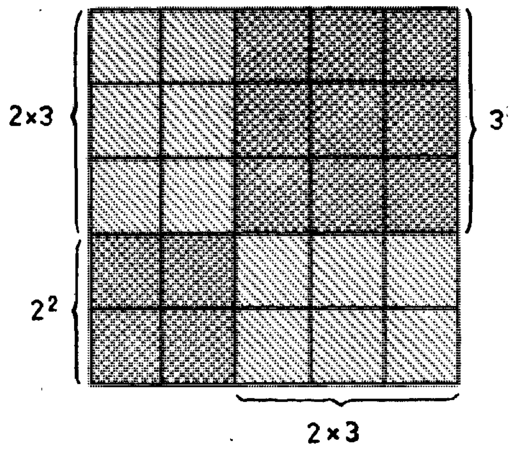


Recortar en cartulina azul



Recortar en cartulina blanca

Con todos los trozos de cartulina recortados recomponer el trozo blanco $(2 + 3)^2$ así:



Comprobar que es igual a $2^2 + 3^2 + 2\ (2 \times 3)$.

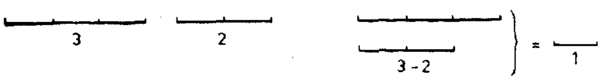
EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS:

a) Repetir el proceso sobre los datos $(1 + 2)^2$ y $(3 + 4)^2$.
b) Solución analítica: $(2 + 3)^2 = (2 + 3) \times (2 + 3) = 2 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 3 = 2^2 + 2\ (2 \times 3) + 3^2$ ó $2^2 + 3^2 + 2\ (2 \times 3)$.
c) Generalizar: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,(ab)$.

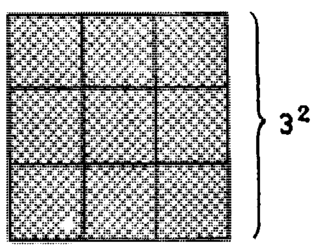
ADQUISICIÓN:

● *El cuadrado de la suma de dos números cualesquiera es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble producto de los dos.*

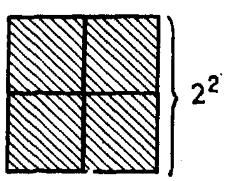
Actividades: 2)



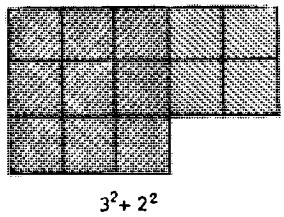
Recortar 9 cuadrados en cartulina roja y recomponer esta figura:

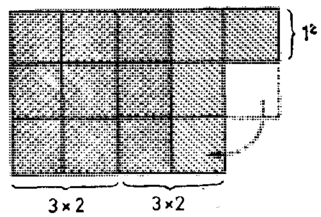


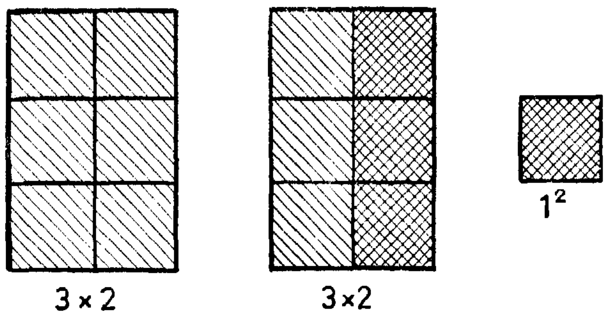
Recortar 4 cuadrados iguales a los anteriores en cartulina azul.



Recomponer con ellos las siguientes figuras:







Observar que si al cuadrado del mayor se le suma y se le quitan $2\,(3 \times 2)$ queda 1^2.
Verificar que $(3 - 2)^2 = 3^2 + 2^2 - 2\,(3 \times 2)$.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS:

a) Repetir el proceso con los binomios $(2 - 1)^2$ y $(4 - 3)^2$.
b) Solución analítica: $(3 - 2)^2 = (3 - 2) \times (3 - 2) = 3 \times 3 - 3 \times 2 - 2 \times 3 + 2 \times 2 = 3^2 + 2^2 - 2\ (3 \times 2)$.
c) Generalizar: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,(ab)$.

ADQUISICIONES:

● *El cuadrado de la diferencia de dos números cualesquiera es igual al cuadrado del mayor, más el cuadrado del menor, menos el doble producto de ambos.*

● *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado de uno de sus términos, más el cuadrado del otro término, ± el doble producto de ambos.*

BIBLIOGRAFIA

Bibliografía sobre enseñanza de las matemáticas

A

ANDRÉS, María Corona: «Determinación objetiva del rendimiento aritmético en la Escuela Primaria». *Bordón*, número 35, marzo, 1953, págs. 281-290.

— «Pruebas de rendimiento escolar aritmético». *Revista Española de Pedagogía*, núm. 35, año IX, julio-septiembre 1951, págs. 453-463.

ARCHIVO DIDATTICO: *La Didattica della Matematica nella Scuola Primaria*. Atti del Convegno Nazionale. Roma, 17-20 marzo 1956. Serie II. Scuola Elementare e di Completamento dell'obligo scolastico.

ARNAL, J. Vicenta: «Conexión entre las diferentes ramas de las matemáticas y entre éstas y las demás disciplinas de la Escuela Elemental». *Bordón*, núm. 35, marzo 1965, págs. 291-302.

«Aspectos principales en la didáctica de las matemáticas». *Vida Escolar*, núm. 4, enero 1959, págs. 1-3.

B

BANDET, J.; MIALARET, G., y BRANDICOURT, R.: *Les débuts du calcut*. Coll. Cahiers de Pédagogie Moderne. París. Bourrelier, 1962. 136 páginas.

BERGER, Emil J.: *A guide to the use and procurement of teaching aids for mathematics*. Washington, National council of teacher of mathematics, 1959. 41 páginas.

«Bibliografía selectiva de didáctica de las matemáticas». *Vida Escolar*, número 3, año I, diciembre 1958.

BIEMEL, Rainer: «Sur l'initiation des jeunes enfants aux structures mathématiques». *Cahiers Pédagogiques*, número 48, mai 1964, págs. 46-47.

BONIFAZ, Dora C. de: «Matemática intuitiva. Sugerencias». *Anales*, núms. 4 al 6. Montevideo, Uruguay, abril a junio 1961, págs. 205-206.

BREARD, Claude: «La Mathématique scolaire contemporaine». *Pedagogie*, número 2, février 1965, págs. 130-138.

C

CAMBIAGGIO, Delmira F.: *La aritmética en la escuela primaria. Fundamentos psicológicos de su metodología*. Buenos Aires, 1948.

CAMPEDELLI, Luigi: Sull'insegnamento della matematica». *Il Centro*, números 4-5, marzo-abril 1954, págs. 187-194.

COMAS, Margarita: *Metodología de la aritmética y de la geometría*. Madrid, 1932. 78 págs.

CORCUERA, F.: «Representación mental de los números». *Vida Escolar*, número 31, septiembre 1961, págs. 12-13.

CRESPO PEREIRA, Ramón: «La enseñanza de la matemática». *Revista de Educación*, vol. VIII, núm. 21, Madrid, 1954, págs. 11-14.

— «La intuición y la enseñanza de la matemática». *Revista de Educación*, año III, núm. 22, Madrid, junio 1954, págs. 83-86.

CH

CHINI ARTUSI, Prof. Liliana: «Guida didattica all'insegnamento della matematica nella prima classe della nuova scuola media». *Ricerche Dedattiche*, número 78, novembre-dicembre 1963, págs. 189-202.

D

DECROLY, O., y HAMAIDE, A.: *Il calcolo e la misura nel primo ciclo della scuola elementare*. Milano, Ed. Gianasso, 1959. 66 págs.

Didáctica de las matemátitcas. Madrid, Dirección General de Enseñanza Media, 1958. 20 págs.

«Didáctica de las matemáticas. Programa de trabajo para los Centros de Colaboración Pedagógica». *Vida Escolar*, núm. 3, diciembre 1958, págs. 1-3.

Didactique de l'initiation mathématique a l'école primaire. Unesco, Genève, Bureau International d'Education, 1956.

«Didattica Euristica della Matematica». *Professione Educativa*, núms. 18-21, 1961.

DIENES, B. A., Z. P.: *Costruiamo la matematica*. Firenze, Edizione Organizzacioni Speciali, 1962. 202 págs.

E

«Enseñanza de las matemáticas, La». *Bordón*, núm. 35, marzo 1953, número monográfico.

«Enseñanza de las matemáticas, La». *Revista Analítica de Educación*, número 9, vol. XI, noviembre 1959. Unesco.

F

FEHR, prof. Howard: «La enseñanza de las matemáticas al encuentro de las necesidades actuales». *Informamos*, núm. 1. Boletín del Centro de Documentación e Información Pedagógica. Buenos Aires, marzo 1964, págs. 18-20.

FERNÁNDEZ HUERTA, José: «Bases de la enseñanza correctiva en aritmética». *Bordón*, núm. 35, marzo 1953, páginas 257-270.

— «La Geometría, materia de lenta emergencia desde que el escolar percibe las formas». *Revista Española de Pedagogía*, núm. 59, año XV, julio-septiembre 1957, págs. 230-237.

— «Influjo del tiempo de examen en las pruebas de instrucción aritmética». *Bordón*, tomo II, mayo 1950.

— «Orientación en la didáctica de las matemáticas». *Vida Escolar*, núm. 5, febrero, 1959, págs. 2-4.

G

GARCÍA PRADILLO, Julio: «Los conceptos geométricos en la Escuela Primaria». *Bordón*, tomo VII, núm. 49, enero 1955, págs. 31-33.

— «Los conceptos matemáticos en los textos de Enseñanza Primaria». *Vida Escolar*, núm. 9-10, junio-julio, 1959, págs. 7-9.

GOUPIL, Mlle.: «Les travaux pratiques de mathematiques dans l'enseignement do 1.er siècle du second degre». Enquête menée par le Départément de la Recherche de l'Institut Pédagogique National. *Le Courrier de la Recherche pédagogique*, núm. 21, juin 1964. Institut Pédagogique National.

GOUTARD, Madeleine: *Les mathematiques et les enfants*. Neuchatel et Niestlé, 1963, 187 págs.

H

HERNÁNDEZ RUIZ, Santiago: *Metodología de la aritmética en la escuela primaria*. México. Editorial Atlante, 1950, 337 págs.

I

L'Initiation mathématique à l'école primaire. B. I. E., 1950, 272 págs.

J

JUNQUERA MUNE, José: *Didáctica del cálculo*. Barcelona, Editorial Labor, 1961, 772 págs.

— *Teoría de las causas de error en la didáctica del cálculo*.

L

LARA, María: «El estudio dirigido o trabajo supervigilado en Matemáticas». *Renovación*, núm. 15. Santiago de Chile, enero 1964, págs. 105-111.

Legaz Ozcariz, Josefa: «Intervención del factor espacial en el dominio de la Geometría». *Revista Española de Pedagogía*, año XV, julio - septiembre 1957, págs. 244-248.
Leif, J. y Bezaly, R.: *Didáctica del cálculo, de las lecciones de cosas y de las ciencias aplicadas*. Buenos Aires. Kapelusz, 1961, 328 págs.
Lelong, Pierre: «Les mathématiques modernes». *Repères*, núm. 2, avril-mai-juin 1964, págs. 12-43.
Lera, Leandra: «Didáctica de las matemáticas en la Enseñanza Media». *Educadores*, núm. 22, marzo-abril 1963, págs. 299-310.
Louis, Y.: «L'enseignement des formes géometriques». *Moniteur*, núm. 5, janvier, 1962, pág. 137.
Lovell, K.: *Didáctica de las Matemáticas (Sus bases psicológicas)*. Madrid, Morata, 1962, 139 págs.

M

Matemática na escola elementar. Río de Janeiro (Brasil). Instituto Nacional de Estudios Pedagógicos. Ministério da Educaçao e Cultura, 1955, 221 págs.
«Matemáticas en la vida del niño, Las». *L'Education Nationale*. Publicación del Comité universitaire d'information pédagogique núm. 26 del 6 de octubre, 1960. París.
Mercante, Víctor: *Enseñanza de la aritmética*, tomo I: Psicología de la aptitud matemática del niño. Tomo II: Cultivo y desarrollo de la aptitud matemática del niño. Buenos Aires. Cabault y Cía., 1916.
— *Metodología de las matemáticas*. Buenos Aires. Cabaut y Cía.
Mialaret, Gastón: *Pedagogía de la iniciación al cálculo*. Buenos Aires. Kapelusz, 1962, 68 págs.
Morais, Anna María M. de: *Recherche psychopédagogique sur la solution des problèmes d'arithmétique*. Luvain-Paris. Ed. E. Nauwelaerts y J. Vrin, 1954, 141 págs.

N

National Council of Teachers of Mathematics: *Evaluation in mathematics*. N. C. T. M., Washington, 1961, 216 págs.

O

Ochoa, Julia: «Bibliografía de orientación y consulta». *Bordón*, núm. 35, marzo 1965, págs. 303-307.
Orellana Chacin, Mauricio: «Desarrollo de la enseñanza de las matemáticas». *Educadores*. Revista Latinoamericana de Educación. La Plata. Buenos Aires, núm. 49, septiembre-octubre 1964, págs. 367-380.
«Orientamenti sulla didattica della matematica nella scuola secondaria di primo ciclo. *Archivo didattico*. Centro Didattico Nazionali Istruzione Tecnica e Professionale, Roma, 1958, página 136.

P

Pascual Ibarra, José Ramón: «Problemas actuales en la enseñasza de las matemáticas». *Revista de Educación*, núm. 138. Madrid, octubre 1961, páginas 16-19.
Pepe, Maurizio: *L'enseignamento della aritmetica*. Milano, Ed. Urania, 1958, 93 págs.
Pescarini, A.: «Matematica creativa». *Riforma della Scuola*, núm. 8-9, agosto-settembre, 1963, págs. 14-15.
— «El material didáctico como subsidio orgánico para la enseñanza de las matemáticas». *Anales*, núms. 7 al 12, tomo XXIII, julio-diciembre, 1960.
Piaget, J., y otros: *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid, Aguilar, 1963, 181 págs.
— *Initiation au calcul* (enfants de 6 a 7 ans). Cahiers de Pédagogie Moderne. Paris. Editions Bourrelier, 1949, 80 págisas.
Pourveur, L.: «Iniciación al cálculo: la estructuración de las formas geométricas». *Anales*, núm. 7 al 12, julio-diciembre, 1962. Montevideo (Uruguay, págs. 55-68.
Puig Adam, Pedro: *Didattica euristica della matemática*. Roma, Edizione dell Unione Cattolica Italiana Insegnanti Medi, 1961, 163 págs.
— *Didáctica matemática eurística*. Madrid, 1956, 136 págs.
— *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid, Publicaciones de la Dirección General de Enseñanza Media, 1960, XV, 465 págs.
— *El moderno material didáctico de Matemáticas*. Madrid, 1958, 174 págs.
— «Sobre la enseñanza de la Aritmética en la escuela primaria». *Vida Escolar*, núm. 7, abril 1959, pág. 2.
— Sobre la enseñanza de la Geometría en la Escuela Primaria». *Bordón*, número 35, marzo 1953, págs. 271-280.

R

Renwick, E. M.: *Children learning mathematics*. Elms Court, Ilfracombe, Devon, Arthur H. Stockwell, 1963. 94 páginas.
Revolución en las matemáticas escolares, La. Lima, Unión Panamericana. Departamento de Asuntos Científicos, 1963. 100 págs.
Rey Pastor, J., y Puig Adam, P.: *Metodología y didáctica de la matemática elemental*. Madrid, 1933. 158 págs.
Rodríguez Diéguez, José Luis: «Apuntes para una didáctica de las matemáticas». *Servicio*, núm. 879, 10 octubre 1964, pág. 12; núm. 882, 31 octubre 1964, pág. 19; núm. 883, 7 noviembre 1964, pág. 13; núm. 884, 14 noviembre 1964; núm. 885, 21 noviembre 1964, pág. 11.
Rodríguez Pérez, Luis: «Aspectos de la didáctica matemática». *Vida Escolar*, núm. 31, septiembre 1961, pág. 9.
Royo, José: «Los problemas de matemáticas en la escuela». *Bordón*, número 35, marzo 1953, págs. 247-256.

S

Salas Palenzuela, Isidoro: «Consideraciones sobre la enseñanza de las matemáticas». *Vida Escolar*, núm. 6, marzo 1959, pág. 2.
Sealey, L. G. W.: *The creative use of mathematics in the junior school*. Oxford, Basil Blackwell, 1961. 104 págs.
Soula, Julien: «L'enseignement actuel des mathématiques». *L'Education Nationale*, núm. 16, 30 avril, págs. 5-7.
Sulbout, J.: «La nouvelle pédagogie des mathématiques». *La Revue des Ecoles*, núm. 1, septembre 1965, páginas 17-25.

T

Talpain, Leon: «Mathématiques nouvelles». *Pédagogie*, núm. 7, juillet 1964, págs. 591-608.
Toranzos, Fausto: *Enseñanza de la matemática*. Buenos Aires, Kapelusz, 1959. 404 págs.

V

Varios autores: *Didattica della matematica*. Roma, Signorelli, 1956, 374 páginas.
— *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid, Aguilar, 1963. 182 págs.
Viedma Castaño, Juan A.: «Didáctica de la matemática elemental». *Revista de Educación*, vol. VIII, año III, número 23, Madrid, 1954, págs. 157-162.
— *Ideas generales acerca de la didáctica de la matemática elemental*. Pginas de la Revista de Educación, número 9, Madrid, 1954.
Villarejo, E.: «Dificultades en el aprendizaje del cálculo». *Vida Escolar*, núm. 2, noviembre 1958, pág. 3.
— «Iniciación al cálculo». *Bordón*, número 35, marzo 1953, págs. 235-246.

W

Whitehead, N. Alfredo: «Ideas sobre la enseñanza elemental de las matemáticas». *Vida Escolar*, núm. 3, diciembre 1958, pág. 4.

María Josefa Alcaraz Lledó

ALMANAQUE 1966

Completamente **GRATIS** remitiremos a todos los señores Maestros que antes del día 15 de diciembre nos envíen su dirección, un Almanaque de bolsillo para 1966, tamaño 6 × 9 cm., con 32 páginas y cubierta de cartulina.

Además del santoral, contiene dicho Almanaque las fases de la Luna, tarifa de Correos, notas sobre Seguro de Enfermedad, Vejez, Subsidio Familiar, Beneficios a Familias Numerosas y otros datos útiles.

EDITORIAL SANCHEZ RODRIGO

PLASENCIA (CACERES)

EDITORIAL PRIMA LUCE S.A.

MONLAU, 8 Y 10 - TEL. 251-87-09 - BARCELONA (13)

Ha salido ANTORCHA

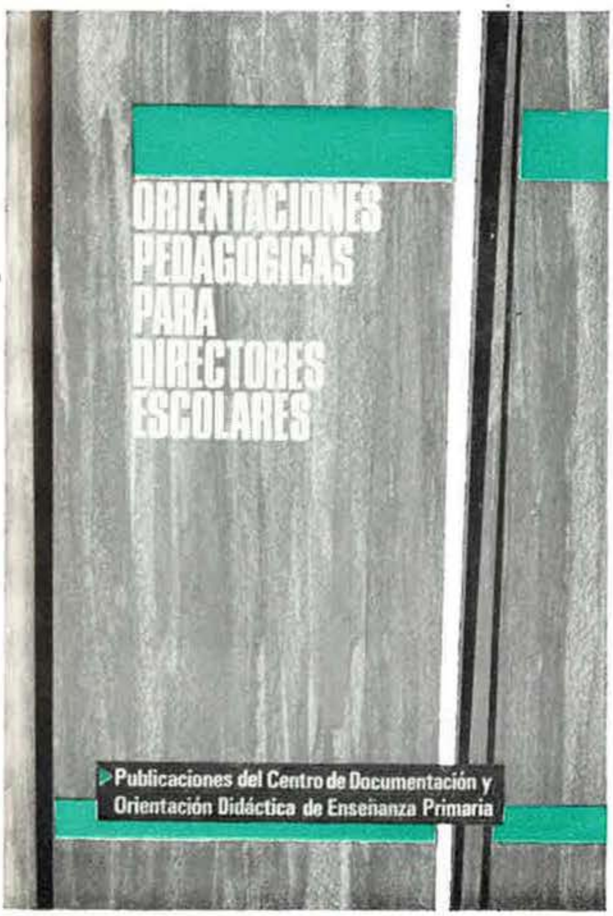
(METODO DE LECTURA Y ESCRITURA)

Por ANTONIO CARBONELL SOLER

- El **Método de lectura y escritura**, ganador del primer **premio pedagógico** PRIMA LUCE.
- Sigue las normas de los nuevos cuestionarios Nacionales.
- Hace agradable al niño el aprendizaje de la **lectura** y **escritura.**
- Profusamente ilustrado a seis colores.
- Adquiéralo en las principales librerías o en EDITORIAL PRIMA LUCE, S. A.
- Solicítenos un ejemplar en calidad de muestra con el 50 por 100 de descuento.

EDITORIAL PRIMA LUCE, S. A.

Monlau, 8 y 10 **BARCELONA-13** — **Avda. José Antonio, 55 - Los Sótanos Tienda 18 - MADRID-13**



PEQUEÑO LAROUSSE ILUSTRADO

totalmente nuevo

Rigurosamente al día, el Pequeño Larousse Ilustrado responde a las exigencias del mundo moderno y registra con todo detalle los cambios y novedades que se han producido últimamente no sólo en el léxico y la ortografía, sino también en los demás conocimientos humanos, historia, geografía, política, artes y ciencias.

La profusa ilustración en negro y color, así como los numerosos cuadros y esquemas de todo género, hacen de este diccionario un valioso instrumento pedagógico adaptado a todos los niveles culturales.

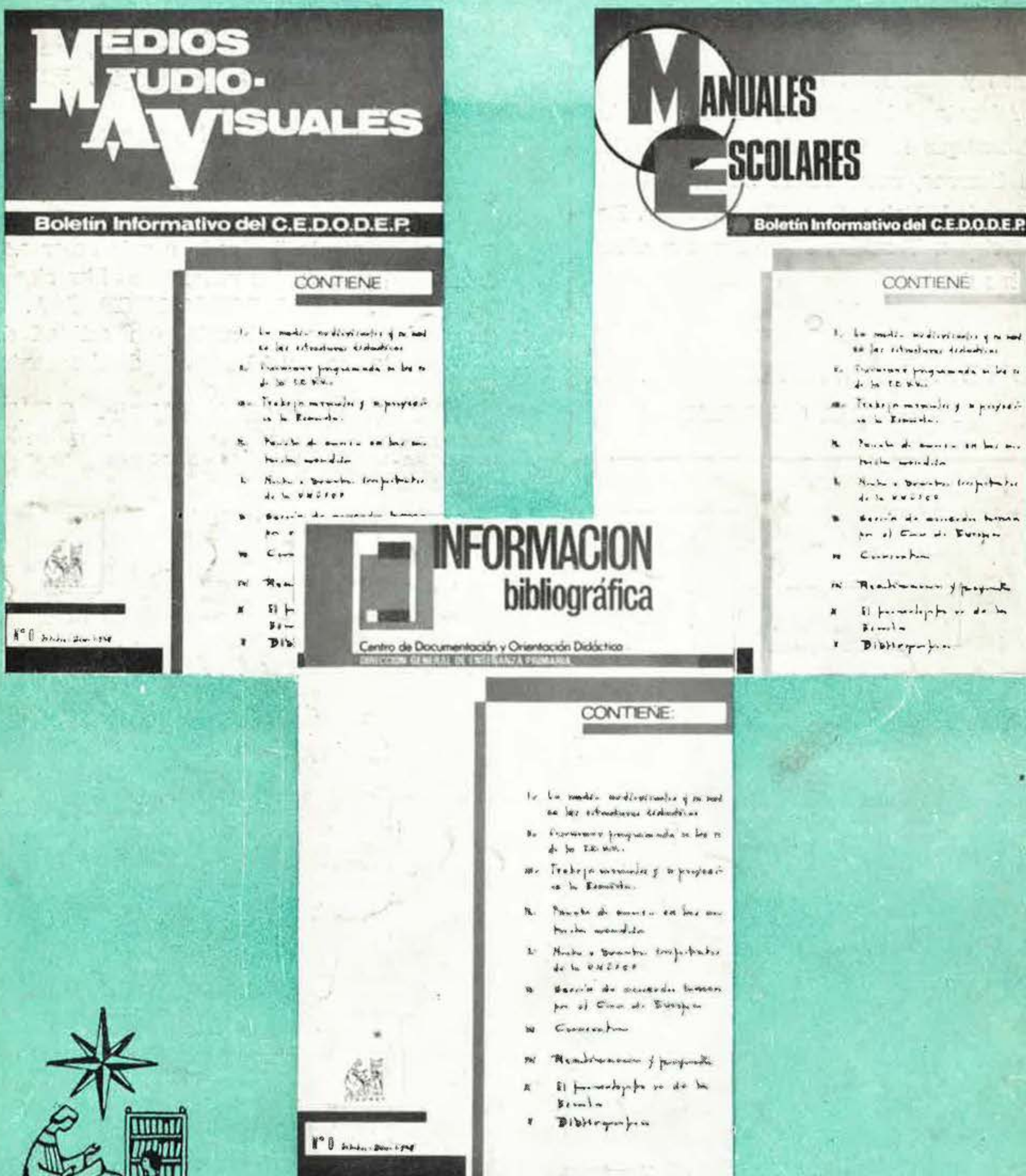
Se ha dado prioridad excepcional a todos los temas que de una manera u otra están relacionados con España o Hispanoamérica (países, hombres célebres y sus obras, acontecimientos importantes, etc.). Diccionario totalmente nuevo, el Pequeño Larousse Ilustrado constituye una ayuda irreemplazable en cualquier estudio y es un amigo y mentor para toda la vida.

1 volumen encuadernado en tela (14,5 x 21 cm), con sobrecubierta, 1 696 páginas, unos 60 000 artículos, 5 000 ilustraciones y 100 mapas en negro, 75 ilustraciones y mapas en color.

DE VENTA EN TODAS LAS LIBRERIAS Y EN LAROUSSE, 17, R. DU MONTPARNASSE, PARIS 6º

TRES NUEVAS PUBLICACIONES

Centro de Documentación y Orientación Didáctica de Enseñanza Primaria



C·E·D·O·D·E·P

Pedidos al Administrador del C. E. D. O. D. E. P.
Pedro de Valdivia, 38 2.° izqda. Madrid - 6.